

本章导读：前面介绍的静电场和静磁场有一个共同特点，即场强不随时间变化，且电场和磁场独立存在，因此可以分开来研究。而且，由于在稳恒状态下，场和源是不可分离的，故可以把场（电场、磁场）和源（电荷、电流）统一起来研究。然而，当电荷、电流随时间变化时，其产生的电场 \mathbf{E} 和磁场 \mathbf{H} 不仅是空间的函数，也是时间的函数，它们相互依存、相互转化，构成不可分割的统一体，因此称为时变电磁场。时变电磁场完全可以脱离源而独立存在。本章将要讨论的辐射和第 6 章将要讨论的传播问题中的电磁场都属于这种情况。这类电磁场的运动规律都基于麦克斯韦方程组的重要推论。经过一个半世纪实践的检验，证明这些推论是完全正确的。

本章内容包括：

(1) 从麦克斯韦方程组出发，引入变化电磁场的势函数，进而将麦克斯韦方程组简化为以电荷与电流为场源的关于势函数的达朗贝尔方程；

(2) 应用达朗贝尔方程的推迟势解，处理典型的辐射问题。例如偶极辐射、多极辐射及天线辐射等；

(3) 分析电磁波的衍射。

本章内容不仅为第 6 章讨论电磁波的传播奠定基础，也是工程电磁问题中研究天线技术的理论基础。

5.1 电磁场的矢势和标势

5.1.1 用势描述电磁场

基于麦克斯韦方程组

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \end{cases} \quad (5-1)$$



及本构方程

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (5-2)$$

根据方程组(5-1)中第三式,我们可以引入变化电磁场的磁矢势 \mathbf{A} , 定义为

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (5-3)$$

可见,它与静磁场的磁矢势的定义式在形式上完全一样,这是由于磁场的“无源性”无论对静态场还是时变场都是普遍成立的,其物理根源仍然在于自然界中不存在“自由磁荷”或“磁单极子”这一客观事实。将上式代入方程组(5-1)中第二式,整理后得到

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \mathbf{0} \quad (5-4)$$

由于无旋场总是可以表示为任意标量场的梯度,故可令

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi \quad (5-5)$$

即

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (5-6)$$

φ 称为时变场中的标势。由式(5-3)和式(5-6)可知,如果已知势函数 \mathbf{A} 和 φ , 就可以确定电磁场量 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} , 进而可以描述电磁场的性质等。

例 5.1 已知势函数为

$$\varphi = 0, \quad \mathbf{A} = \begin{cases} \frac{\mu_0 k}{4c} (ct - |x|)^2 \mathbf{e}_z, & |x| < ct \\ 0, & |x| > ct \end{cases}$$

其中, k 为常数, $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ 。求电荷和电流的分布。

解 根据已知条件,当 $|x| < ct$ 时,可以求得电场强度为

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 k}{2} (ct - |x|) \mathbf{e}_z = \begin{cases} -\frac{\mu_0 k}{2} (ct - x) \mathbf{e}_z, & x > 0 \\ -\frac{\mu_0 k}{2} (ct + x) \mathbf{e}_z, & x < 0 \end{cases}$$

和磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\mu_0 k}{4c} \frac{\partial}{\partial x} (ct - |x|)^2 \mathbf{e}_y = \begin{cases} \frac{\mu_0 k}{2c} (ct - x) \mathbf{e}_y, & x > 0 \\ -\frac{\mu_0 k}{2c} (ct + x) \mathbf{e}_y, & x < 0 \end{cases}$$

当 $|x| > ct$ 时,则 $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ 和 $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ 。所得 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 随 x 的变化关系如图 5-1 所示。

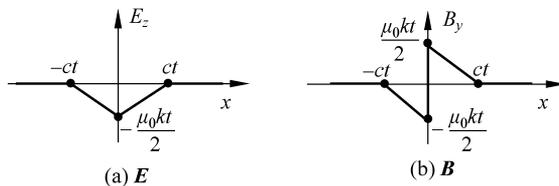


图 5-1 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 随 x 的变化关系

根据所得结果,易知

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = \mp \frac{\mu_0 k}{2} \mathbf{e}_y \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} = -\frac{\mu_0 k}{2c} \mathbf{e}_z \end{cases} \quad (|x| < ct)$$

和

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 kc}{2} \mathbf{e}_z, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \pm \frac{\mu_0 k}{2} \mathbf{e}_y$$

可见,它们满足 $\rho=0$ 、 $\mathbf{J}=0$ 和 $\mathbf{J}_D = -\frac{k}{2c} \mathbf{e}_x$ 时的麦克斯韦方程组。此外, \mathbf{B} 在 $x=0$ 处不连续,这表明在 yOz 平面内有面电流 \mathbf{J}_S 存在。根据电磁场边值关系式(2-122)中第一式可得

$$\mathbf{J}_S = \mathbf{e}_x \times (\mathbf{H}^+ - \mathbf{H}^-) = kte_z$$

显然,在 yOz 平面且沿 z 轴方向上有一个均匀的面电流,随 t 线性增加。

5.1.2 规范变换和规范不变性

虽然势函数可以用于描述电磁场,但是它们之间并非一一对应。若对势函数进行如下变换:

$$\begin{cases} \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\psi \\ \varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{\partial\psi}{\partial t} \end{cases} \quad (5-7)$$

得到的另一组势函数 (\mathbf{A}', φ') 与 (\mathbf{A}, φ) 对应相同的电磁场量 (\mathbf{E}, \mathbf{B}) , 即

$$\begin{cases} \mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla\psi) = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \\ \mathbf{E}' = -\nabla\varphi' - \frac{\partial\mathbf{A}'}{\partial t} = -\nabla\left(\varphi - \frac{\partial\psi}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{A} + \nabla\psi) = -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{E} \end{cases} \quad (5-8)$$

且由于 ψ 是一个任意连续可微的标量函数,故 (\mathbf{A}', φ') 有无穷多组。将每一组势函数称为一种规范。方程组(5-7)称为规范变换。物理规律在规范变换下保持不变的性质就是规范不变性。例如,当势函数按式(5-7)进行规范变换后,电磁场量和麦克斯韦方程组都将保持不变。

5.1.3 达朗贝尔方程

从麦克斯韦方程组出发,结合本构方程,并利用场和势的关系,可以推导出势函数满足的微分方程。具体推导过程如下:

将本构方程(5-2)中第一式代入麦克斯韦方程组(5-1)中第四式,得到

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (5-9)$$

将式(5-6)代入上式,整理后得到

$$\nabla^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (5-10)$$

再将式(5-2)代入式(5-1)中第一式,可得

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} + \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (5-11)$$

进一步,利用式(5-3)和式(5-6),得到

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu \mathbf{J} - \nabla \left(\mu \epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \quad (5-12)$$

由于

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

故

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu \epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -\mu \mathbf{J} \quad (5-13)$$

方程(5-10)和式(5-13)称为一般形式的达朗贝尔方程。在不同的规范条件下,它具有不同的表示形式。

(1) 在静磁场中,常取库仑规范条件: $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, 则式(5-10)和式(5-13)可化为

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon} \\ \nabla^2 \mathbf{A} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\mu \epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -\mu \mathbf{J} \end{cases} \quad (5-14)$$

这种规范中 \mathbf{A} 为无源场。且根据 $\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ 知,式中的第二项 $-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ 为无源场(又称横场),而第一项 $-\nabla \varphi$ 为无旋场(又称纵场)。该种规范下电场的纵场部分完全由 φ 来决定,电场的横场部分完全由 \mathbf{A} 来决定, $-\nabla \varphi$ 对应于库仑场, $-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ 对应于感应场。这种划分对于讨论某些问题是方便的,例如可以用处理静电场的方法讨论时变电场。

(2) 在时变电磁场中,常取洛伦兹规范条件,即规定

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu \epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (5-15)$$

则

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon} \rho \\ \nabla^2 \mathbf{A} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J} \end{cases} \quad (5-16)$$

该两方程形式上完全相同,形式简单,物理意义明确。若给定场源 \mathbf{J} 和 ρ , 只要求出其中一个方程的解,另一方程解的形式与之相同。将解代入式(5-3)和式(5-6)就可得到 \mathbf{B} 和 \mathbf{E} 。因此,达朗贝尔方程和洛伦兹条件则是用动态势函数表述的电磁场基本方程。

在无源空间, $\rho = 0, \mathbf{J} = 0$, 动态势函数的波动方程变为齐次微分方程。即

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2 \mathbf{A} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0 \end{cases} \quad (5-17)$$

在静态场的情形下,达朗贝尔方程退化为势函数的泊松方程 $\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}$ 和 $\nabla^2\mathbf{A} = -\mu\mathbf{J}$ 。同时,因为在静态场中, ρ 和 \mathbf{J} 之间没有联系,故 φ 与 \mathbf{A} 彼此独立, $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ 和 $\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$ 分别由 φ 和 \mathbf{A} 单独确定,这就是第3章和第4章的内容。

理解延伸:应用达朗贝尔方程求解场问题时,尽管可先由其中一个方程解出一个势函数,再代入洛伦兹条件得到另一个势函数。但是,势函数往往不一定恰好满足洛伦兹条件,即有

$$\nabla\cdot\mathbf{A} + \mu\epsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \Lambda \neq 0$$

这时,可以利用规范变换式(5-7),先找到一组满足洛伦兹条件的新规范,然后代回到式(5-15)保证新规范满足洛伦兹条件,即

$$\nabla\cdot(\mathbf{A} + \nabla\psi) + \mu\epsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi - \frac{\partial\psi}{\partial t}\right) = 0$$

整理后得到

$$\nabla^2\psi - \mu\epsilon\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\Lambda$$

求解该方程可以得到 ψ ,再把它代入式(5-7)即可确定出新规范。

例 5.2 已知势函数为

$$\begin{cases} \mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t) \\ \varphi = \varphi_0 \sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t) \end{cases}$$

其中, \mathbf{A}_0 和 \mathbf{k} 为常矢量; φ_0 和 ω 为常数。求:

- (1) 洛伦兹规范条件下, \mathbf{A}_0 和 φ_0 之间的关系;
- (2) 场强 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} ;
- (3) 若势函数分别取 $\mathbf{A}' = (\mathbf{A}_0 + \alpha\mathbf{k})\sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)$, $\varphi' = (\varphi_0 + \alpha\omega)\sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)$,其中 α 为待定常数,证明 (\mathbf{A}',φ') 与 (\mathbf{A},φ) 对应同一电磁场。

解 (1) 真空中,洛伦兹规范条件可表示为

$$\nabla\cdot\mathbf{A} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$$

由已知的势函数,得到

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \nabla\sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)\cdot\mathbf{A}_0 = (\mathbf{k}\cdot\mathbf{A}_0)\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)$$

和

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \varphi_0\frac{\partial}{\partial t}\sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t) = -\omega\varphi_0\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)$$

将以上两式代入洛伦兹条件,整理后可以得到 \mathbf{A}_0 和 φ_0 满足的关系为

$$\varphi_0 = \frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{A}_0}{\mu_0\epsilon_0\omega}$$

(2) 根据已知条件,可得

$$\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A} = [\nabla\sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)]\times\mathbf{A}_0 = (\mathbf{k}\times\mathbf{A}_0)\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)$$

和

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = -\varphi_0\nabla[\sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)] - \mathbf{A}_0\frac{\partial}{\partial t}[\sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)] \\ &= (\omega\mathbf{A}_0 - \varphi_0\mathbf{k})\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t) \\ (3) \quad \mathbf{B}' &= \nabla\times\mathbf{A}' = \nabla\sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)\times(\mathbf{A}_0 + a\mathbf{k}) = (\mathbf{k}\times\mathbf{A}_0)\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t) = \mathbf{B} \\ \mathbf{E}' &= -\nabla\varphi' - \frac{\partial\mathbf{A}'}{\partial t} = -(\varphi_0 + a\omega)\nabla\sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t) - (\mathbf{A}_0 + a\mathbf{k})\frac{\partial}{\partial t}\sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t) \\ &= (\omega\mathbf{A}_0 - \varphi_0\mathbf{k})\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t) = \mathbf{E} \end{aligned}$$

可见, (\mathbf{A}', φ') 与 (\mathbf{A}, φ) 对应同一电磁场。

5.2 推迟势

5.2.1 达朗贝尔方程的解——推迟势

解决电磁波辐射问题,可以归结为求解势函数的达朗贝尔方程。下面利用两种方法求解这一问题。

方法 1 用点电荷的电势叠加原理求解

先考虑真空中 φ 的达朗贝尔方程,由式(5-16),得

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho \quad (5-18)$$

式中,令 $\frac{1}{c^2} = \mu_0\epsilon_0$ 。由于该方程是线性方程,故势函数可以叠加。因此,可以先求得某一体积元内变化的电荷所激发的标势,然后对电荷分布区域积分得到总的标势。

假设原点处有一点电荷 $q(t)$,它的电荷密度可用 δ 函数表示为

$$\rho(\mathbf{r}, t) = q(t)\delta(\mathbf{r}) \quad (5-19)$$

考虑球坐标系,由于电荷具有球对称性,故 φ 只与 r, t 有关,而与角变量 θ, ϕ 无关。于是,式(5-18)可表示为

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{q(t)\delta(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \quad (5-20)$$

除原点以外,电标势满足齐次波动方程

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0, \quad r \neq 0 \quad (5-21)$$

令

$$\varphi(r, t) = \frac{u(r, t)}{r}$$

代入式(5-21),得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (5-22)$$

此式为一维波动方程,据数学物理方程,其通解为

$$u(r, t) = f\left(t - \frac{r}{c}\right) + g\left(t + \frac{r}{c}\right)$$



其中, f 和 g 是两个任意函数。由此可得, 原点以外的标势为

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{f\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} + \frac{g\left(t + \frac{r}{c}\right)}{r} \quad (5-23)$$

上式中右边第一项代表波速为 c 的向外辐射的球面波, 第二项代表波速为 c 的向内会聚的球面波。式中, $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ 为真空中一切电磁波的波速。在研究电磁波辐射问题时, 只考虑向外辐射的波, 故应取 $g = 0$, 而 f 的函数形式应由物理条件定出。

在静电场中, 处于 \mathbf{r}' 处的点电荷在 \mathbf{r} 处激发的电势为 $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$ 。推广到时变场时, 根据式(5-23)的形式, 可以推想到

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{q\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c}\right)}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (5-24)$$

可以证明, 式(5-24)是方程(5-20)的解。

由势的叠加性, 对于一般随变化电荷分布 $\rho(\mathbf{r}', t)$, 可将上式推广为

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c}\right)}{R} dV' \quad (5-25)$$

由式(5-16)可知, \mathbf{A} 和 φ 所满足的方程形式相同, 因而一般电流分布 $\mathbf{J}(\mathbf{x}', t)$ 所激发的矢势为

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c}\right)}{R} dV' \quad (5-26)$$

若令

$$t' = t - \frac{R}{c}$$

则式(5-25)、式(5-26)可化为

$$\begin{cases} \varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{R} dV' \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t')}{R} dV' \end{cases} \quad (5-27)$$

由式(5-27)可知, t' 时刻的电荷密度和电流密度源并不能确定 t' 时刻场点的势, 它们的影响是以有限速度 c 传播, 经过一段时间 R/c 后才到达场点的。也就是说, t' 时刻的电荷密度和电流密度源确定的是较迟的 t 时刻场点的势, 因此, 式(5-27)称为推迟势。

* **方法 2** 用时谐变化的源产生的势函数通过傅里叶积分叠加求解。

假设真空中的电荷密度和电流密度按时谐规律变化, 即

$$\begin{cases} \rho \sim e^{-j\omega t} \\ |\mathbf{J}| \sim e^{-j\omega t} \end{cases} \quad (5-28)$$

则它们激发的势函数也应有类似的形式,即

$$\begin{cases} \varphi = \varphi(\mathbf{r}) e^{-j\omega t} \\ \mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}) e^{-j\omega t} \end{cases} \quad (5-29)$$

将上式分别代入达朗贝尔方程式(5-16),可得

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi + k^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \end{cases} \quad (5-30)$$

式中, ρ 、 \mathbf{J} 、 \mathbf{A} 、 φ 均简写为只关于空间变量的函数。且

$$k = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = \frac{\omega}{c} \quad (5-31)$$

k 称为真空中频率为 ω 的波数,其具体物理意义详见 6.6.1 节。

接下来将应用格林公式求解势函数 φ 。根据格林公式

$$\int_V (\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi) dV = \oint_S \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS$$

需先构建一个函数 ψ 。对于单位点源分布的电荷和电流,产生的波函数 ψ (代表势函数的任一分量) 满足方程

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0 \quad (R \neq 0) \quad (5-32)$$

其一个最简特解为

$$\psi = \frac{e^{jkR}}{R} \quad (5-33)$$

如图 5-2 所示,围绕场点 P 做一个大球 Γ ,其表面积用 S_2 表示;再做一个小球 γ 把 P 点去掉,其表面积用 S_1 表示。球壳的体积为积分区域 V' ,由式(5-30)、式(5-32)和式(5-33)则有

$$\begin{aligned} \varphi (\nabla^2 \psi + k^2 \psi) - \psi (\nabla^2 \varphi + k^2 \varphi) &= \varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi \\ &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{e^{jkR}}{R} \end{aligned} \quad (5-34)$$

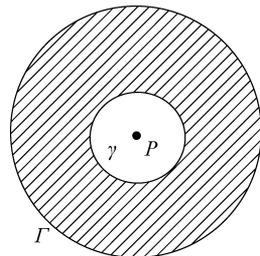


图 5-2 格林函数法推导推迟势

代入式(5-31),可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon_0} \int_{V'} \rho \frac{e^{jkR}}{R} dV' &= \oint_{S_1} \left(\varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{jkR}}{R} - \frac{e^{jkR}}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS + \\ &\quad \oint_{S_2} \left(\varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{jkR}}{R} - \frac{e^{jkR}}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS \end{aligned} \quad (5-35)$$

对于小球表面处, S_1 的外法向方向向里,故有 $\partial/\partial n = -\partial/\partial R$,且 $dS = R^2 d\Omega$ 。利用下式:

$$\frac{\partial}{\partial R} \frac{e^{jkR}}{R} = \frac{e^{jkR}}{R^2} (jkR - 1) \quad (5-36)$$

可将小球表面的积分化为

$$\oint_{S_1} \left(\varphi - jkR\varphi + R \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right) e^{jkR} d\Omega \quad (5-37)$$

而在大球表面处, S_2 的外法向方向向外,故有 $\partial/\partial n = \partial/\partial R$,且 $dS = R^2 d\Omega$,则对大球表

面的积分可化为

$$-\oint_{S_2} \left(\varphi - jkR\varphi + R \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right) e^{jkR} d\Omega \quad (5-38)$$

当小球取极限 $R \rightarrow 0$ 时,可得

$$\oint_{S_1} \left(\varphi - jkR\varphi + R \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right) e^{jkR} d\Omega \rightarrow 4\pi\varphi \quad (5-39)$$

当大球取极限 $R \rightarrow \infty$ 时,则 $\lim_{R \rightarrow \infty} \varphi = 0$ 。为了保证达朗贝尔方程在无界区域解的唯一性, Sommerfield(索默菲尔德)提出在 $R \rightarrow \infty$ 处解应满足如下附加条件:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left(R \frac{\partial \varphi}{\partial R} - jkR\varphi \right) = 0 \quad (5-40)$$

该式称为辐射条件。

于是,当 $R \rightarrow \infty$ 时,大球表面上的积分式(5-38)趋近于零。再结合式(5-35)、式(5-37)和式(5-39),可得

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_\infty} \rho(\mathbf{r}') \frac{e^{jkR}}{R} dV' \quad (5-41)$$

因无电荷的区域,上式积分式中被积函数为零,故积分区域也等于只有电荷所在的区域,即

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \rho(\mathbf{r}') \frac{e^{jkR}}{R} dV' \quad (5-42)$$

同理,可得

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \frac{e^{jkR}}{R} dV' \quad (5-43)$$

在式(5-42)和式(5-43)中, e^{jkR} 为推迟作用因子,表示电磁波传播到场点时会滞后相位 kR 。

考虑时间因子 $e^{-j\omega t}$,便可得到

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \rho(\mathbf{r}') \frac{e^{j(kR - \omega t)}}{R} dV' \quad (5-44)$$

和

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \frac{e^{j(kR - \omega t)}}{R} dV' \quad (5-45)$$

若对式(5-45)两边求散度,并两次利用矢量公式

$$\nabla \cdot (\varphi \mathbf{f}) = (\nabla \varphi) \cdot \mathbf{f} + \varphi \nabla \cdot \mathbf{f}$$

可得

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left(\nabla \frac{e^{j(kR - \omega t)}}{R} \right) \cdot \mathbf{J} dV' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left(\nabla' \frac{e^{j(kR - \omega t)}}{R} \right) \cdot \mathbf{J} dV' \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \nabla' \cdot \left(\mathbf{J} \frac{e^{j(kR - \omega t)}}{R} \right) dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} (\nabla' \cdot \mathbf{J}) \frac{e^{j(kR - \omega t)}}{R} dV' \end{aligned}$$

利用高斯散度定理,可把上式等号右边第一项中的体积分换为面积分,并在无限大球面上计算得其值为零。再结合周期场的电流连续性方程

$$\nabla \cdot \mathbf{J} - j\omega\rho = 0 \quad (5-46)$$

可得

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = j\omega \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \rho(\mathbf{r}') \frac{e^{j(kR-\omega t)}}{R} dV' = \frac{j\omega\varphi}{c^2}$$

即

$$\nabla \cdot \mathbf{A} - \frac{j\omega\varphi}{c^2} = 0 \quad (5-47)$$

上式即为时谐场的洛伦兹条件。可见,电荷守恒定律隐含在其内。当 \mathbf{A} 已知时,由该式便可确定 ρ ,进而确定 φ 。

在式(5-44)、式(5-45)中,利用式(5-30)可将 $e^{j(kR-\omega t)}$ 化为

$$e^{j(kR-\omega t)} = e^{-j\omega(t-kR/\omega)} = e^{-j\omega(t-R/c)}$$

同前,令

$$t' = t - R/c$$

则式(5-44)和式(5-45)可化为

$$\begin{cases} \varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{R} dV' \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t')}{R} dV' \end{cases} \quad (5-48)$$

上式与用第一种方法推导出的势函数式(5-25)和式(5-26)形式完全相同。虽然是从时谐电荷(流)源出发,但对于非时谐的场源可以通过傅里叶积分得到普遍的结论。只要 ρ 和 \mathbf{J} 是周期量的线性叠加(傅里叶积分)

$$\begin{cases} \rho(\mathbf{r}', t) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\mathbf{r}', \omega) e^{-j\omega t} d\omega \\ \mathbf{J}(\mathbf{r}', t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{J}(\mathbf{r}', \omega) e^{-j\omega t} d\omega \end{cases} \quad (5-49)$$

则对应的解也是线性叠加的,则有

$$\begin{cases} \varphi(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\mathbf{r}, \omega) e^{-j\omega t} d\omega \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{A}(\mathbf{r}, \omega) e^{-j\omega t} d\omega \end{cases} \quad (5-50)$$

即只要 ρ 和 \mathbf{J} 能用按时间的傅里叶展开式来表示,则式(5-49)便成立。

5.2.2 推迟势的物理意义

推迟势的物理意义,可以概括为以下两点:

(1) 对于距离波源为 R 的观察点,某一时刻 t 的势函数并不是由该时刻波源的电荷和电流决定的,而是由较早时刻 $t' = t - \frac{R}{c}$ 的波源所决定。电荷密度和电流密度源对场点的作用以有限速度传递,滞后的时间 $t' - t = \frac{R}{c}$ 就是电磁波传播距离 R 所需要的时间。即电磁场以有限速度 c 在真空中向外传播,而不是以无穷大速度瞬时传递;

(2) 场点在 t 时刻的电磁场与 t 时刻的电荷密度和电流密度源的状态无关,甚至与源是

否还存在也无关,即电磁场一旦从源中辐射出来,就独立于源而存在。这实际上表明电磁场是一种可以独立于“源”而客观存在的物质。

例 5.3 已知一无限长载流直导线,电流随时间变化的关系为

$$I(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ I_0, & t > 0 \end{cases}$$

I_0 表示 $t=0$ 时的电流强度,其大小为一大常数。求电流激发的电磁场分布。

解 由题意易知,该导线呈电中性,故标势为零,即 $\varphi=0$ 。如图 5-3 所示,选取柱坐标系,假设导线沿 z 轴放置,则电流源点 dz 到坐标原点 O 的距离为 z 。令 R 表示电流源点到场点 P 的距离, ρ 为 P 到直线的垂直距离,则 $R = \sqrt{\rho^2 + z^2}$ 。根据式(5-50),并做代换 $\mathbf{J} dV' \rightarrow$

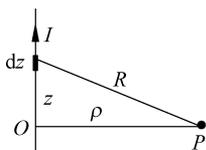


图 5-3 无穷长直导线中变化电流激发电磁场

$I dl'$,可以得到 P 点处的推迟磁矢势为

$$\mathbf{A}(\rho, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{e}_z \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I(t')}{R} dz$$

当 $t < \rho/c$ 时,辐射出的电磁场还未到达 P 点,故磁矢势为零。当 $t > \rho/c$ 时,真正对矢势做贡献的有效范围为

$$|z| \leq \sqrt{R^2 - \rho^2} = \sqrt{(ct)^2 - \rho^2}$$

该范围之外, t' 为负值,故 $I(t')=0$ 。因此,推迟矢势 $\mathbf{A}(\rho, t)$ 可以表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\rho, t) &= 2 \left(\frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \mathbf{e}_z \right) \int_0^{\sqrt{(ct)^2 - \rho^2}} \frac{dz}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \\ &= \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \mathbf{e}_z \ln(\sqrt{\rho^2 + z^2} + z) \Big|_0^{\sqrt{(ct)^2 - \rho^2}} \\ &= \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \ln \left(\frac{ct + \sqrt{(ct)^2 - \rho^2}}{\rho} \right) \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

由此可得电场强度为

$$\mathbf{E}(\rho, t) = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 I_0 c}{2\pi \sqrt{(ct)^2 - \rho^2}} \mathbf{e}_z$$

磁感应强度为

$$\mathbf{B}(\rho, t) = \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} \mathbf{e}_\phi = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi \rho} \frac{ct}{\sqrt{(ct)^2 - \rho^2}} \mathbf{e}_\phi$$

当 $t \rightarrow \infty$ 时,以上结果可以回到静场情况,即

$$\mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi \rho} \mathbf{e}_\phi$$

例 5.4 如图 5-4 所示,已知一闭合线圈 L ,通有电流 $I(t) = kt$, k 为一常数, t 为时间。求中心点 O 处的推迟磁矢势 \mathbf{A} 和电场强度 \mathbf{E} 。

解 根据题意,假设线电流元到场点 O 的距离为 R ,则推迟时刻为

$$t' = t - \frac{R}{c}$$

故

$$I(t') = k \left(t - \frac{R}{c} \right)$$

因而,推迟磁矢势可以表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_L \frac{I(t')}{R} d\mathbf{l} \\ &= \frac{\mu_0 k}{4\pi} \oint_L \frac{(t - R/c)}{R} d\mathbf{l} \\ &= \frac{\mu_0 k}{4\pi} \left(t \oint_L \frac{1}{R} d\mathbf{l} - \frac{1}{c} \oint_L d\mathbf{l} \right) \end{aligned}$$

由于对整个闭合回路的积分为零,即

$$\oint_L d\mathbf{l} = 0$$

则

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{\mu_0 k t}{4\pi} \oint_L \frac{1}{R} d\mathbf{l} \\ &= \frac{\mu_0 k t}{4\pi} \left(\frac{1}{a} \int_{L_a} d\mathbf{l} + \frac{1}{b} \int_{L_b} d\mathbf{l} + 2\mathbf{e}_x \int_a^b \frac{dx}{x} \right) \end{aligned}$$

易知,对内圆 L_a 和外圆 L_b 的积分结果分别为

$$\int_{L_a} d\mathbf{l} = \mathbf{e}_x \int_{-a}^a dx = 2a\mathbf{e}_x$$

和

$$\int_{L_b} d\mathbf{l} = -\mathbf{e}_x \int_{-b}^b dx = -2b\mathbf{e}_x$$

又由于

$$2\mathbf{e}_x \int_a^b \frac{dx}{x} = 2\mathbf{e}_x \ln \frac{b}{a}$$

故

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 k t}{4\pi} \left[\frac{1}{a} (2a) + \frac{1}{b} (-2b) + 2 \ln \frac{b}{a} \right] \mathbf{e}_x = \frac{\mu_0 k t}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \mathbf{e}_x$$

对于闭合通电线圈,导线呈电中性,故 $\varphi = 0$ 。进一步求得电场强度为

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 k}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \mathbf{e}_x$$

可见,变化的磁场可以产生电场。

5.3 偶极子辐射

5.3.1 辐射场的一般公式

推迟势式(5-27)是进一步计算电磁辐射场的基础,在后面会频繁用到。为了书写简便,以下采用简写形式:

$$\begin{cases} \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho}{R} dV' \\ \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}}{R} dV' \end{cases} \quad (5-51)$$

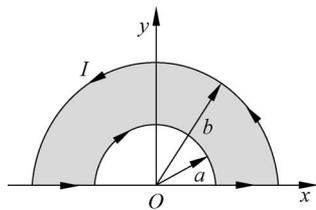


图 5-4 闭合线圈 L 上的电流分布



但应注意,积分中 $\rho = \rho(\mathbf{r}', t')$ 、 $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{r}', t')$ 。

在理论上,只要给定了电流密度 \mathbf{J} 和电荷密度 ρ ,就可由上式求出 \mathbf{A} 和 φ ,进而得到 \mathbf{B} 和 \mathbf{E} 。但在实际问题中,我们往往不要求出两种势函数,而可以只求 \mathbf{A} 的解,再由洛伦兹条件由 \mathbf{A} 求得 φ ,就可以得到电磁场的解。例如,若给定电流分布 \mathbf{J} ,求解的思路为

$$\mathbf{J} \Rightarrow \begin{cases} \nabla^2 \mathbf{A} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J} \\ \nabla \cdot \mathbf{A} + \epsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \end{cases} \begin{cases} \rightarrow \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{H} \\ \rightarrow \varphi \rightarrow \mathbf{E} \end{cases}$$

考虑到实际应用中,电流(荷)密度往往是按一定角频率的交变电流,即有

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}', t') = \mathbf{J}(\mathbf{r}') e^{-j\omega t'}$$

由于电荷密度和电流密度由电荷守恒定律联系,在一定角频率 ω 的交变电流情形中,电荷守恒定律可表示为

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = j\omega\rho \quad (5-52)$$

由式(5-45),知

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) e^{-j\omega t} \quad (5-53)$$

磁感应强度可直接由计算 \mathbf{A} 求得,即

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (5-54)$$

电场可由麦克斯韦方程组求出。在电流分布区域以外, $\mathbf{J} = \mathbf{0}$,真空中的麦克斯韦方程为

$$\nabla \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -j \frac{\omega}{c^2} \mathbf{E} = -j \frac{k}{c} \mathbf{E} \quad (5-55)$$

得

$$\mathbf{E} = j \frac{c}{k} \nabla \times \mathbf{B} \quad (5-56)$$

* 5.3.2 推迟势的多极展开

如图 5-5 所示,假设电荷、电流都分布在一个线度为 l 的小区域 V' 内。取该区域内一点为坐标原点 O ,令电荷、电流源点 P' 的位置矢量为 \mathbf{r}' ,场点 P 的位置矢量为 \mathbf{r} ,则 P' 到 P 的距离为 $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ 。

当场点远离电荷、电流源时,则有 $R \gg l$ 且 $r \gg |\mathbf{r}'|$ 。于是,推迟解式(5-51)中的 $1/R$ 可在 $\mathbf{r}' = 0$ 处展开为泰勒级数,方法同 3.6 节。由式(5-51)可得推迟势的多极展开式为

$$\begin{cases} \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \left(\frac{\rho}{r} - \mathbf{r}' \cdot \nabla \frac{\rho}{r} + \frac{1}{2!} \mathbf{r}' \mathbf{r}' : \nabla \nabla \frac{\rho}{r} + \dots \right) dV' \\ \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left(\frac{\mathbf{J}}{r} - \mathbf{r}' \cdot \nabla \frac{\mathbf{J}}{r} + \frac{1}{2!} \mathbf{r}' \mathbf{r}' : \nabla \nabla \frac{\mathbf{J}}{r} + \dots \right) dV' \end{cases} \quad (5-57)$$

现对展开式(5-57)中的主要项讨论如下:

(1) φ 多极展开式中第一项为

$$\varphi^{(0)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho}{r} dV' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (5-58)$$

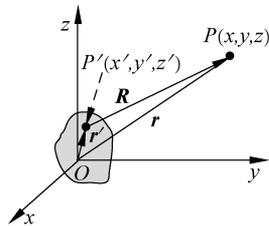


图 5-5 推迟势的多极展开

式中: $Q = \int_{V'} \rho dV'$ 为小区域 V' 内的总电量。

它表明小区域内所有电荷在远场激发的推迟标势,与位于原点处等量的点电荷激发的推迟势等同。

(2) φ 多极展开式中第二项为

$$\begin{aligned}\varphi^{(1)} &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \mathbf{r}' \cdot \nabla \frac{\rho}{r} dV' = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \cdot \int_{V'} \frac{\mathbf{r}' \rho}{r} dV' \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{p}\end{aligned}\quad (5-59)$$

式中: $\mathbf{p} = \int_{V'} \mathbf{r}' \rho dV'$ 为小区域 V' 内的总电矩。

可见,小区域内所有电矩在远场激发的推迟标势相当于位于原点处等量电偶极矩激发的标势。

(3) φ 多极展开式第三项为

$$\begin{aligned}\varphi^{(2)} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{1}{2!} \mathbf{r}' \mathbf{r}' : \nabla \nabla \frac{\rho}{r} dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_{V'} \frac{1}{2r} \mathbf{r}' \mathbf{r}' : \nabla \nabla \rho dV' + \int_{V'} \frac{\rho}{2} \mathbf{r}' \mathbf{r}' : \nabla \nabla \frac{1}{r} dV' \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{2r} \nabla \nabla : \int_{V'} \mathbf{r}' \mathbf{r}' \rho dV' + \int_{V'} \frac{\rho}{2} \mathbf{r}' \mathbf{r}' : \nabla \nabla \frac{1}{r} dV' \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{6r} \nabla \nabla : \vec{\mathbf{D}}_e + \frac{1}{6} \vec{\mathbf{D}}_e : \nabla \nabla \frac{1}{r} \right)\end{aligned}\quad (5-60)$$

式中: $\vec{\mathbf{D}}_e = \int_{V'} 3\mathbf{r}' \mathbf{r}' \rho dV'$ 定义为电四极矩。故式(5-60)为电四极矩激发的推迟标势。进一步,利用以下关系:

$$\begin{aligned}\nabla \nabla : \vec{\mathbf{D}}_e &= \frac{\ddot{\mathbf{r}} \mathbf{r} : \vec{\mathbf{D}}_e}{c^2 r^2} \\ \nabla \nabla \frac{1}{r} &= \frac{2\mathbf{r}\mathbf{r}}{r^5}\end{aligned}$$

可得

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{24\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{c^2 r^3} \mathbf{r}\mathbf{r} : \ddot{\mathbf{D}}_e + \vec{\mathbf{D}}_e : \frac{2\mathbf{r}\mathbf{r}}{r^5} \right)\quad (5-61)$$

(4) \mathbf{A} 多极展开式中第一项为

$$\mathbf{A}^{(0)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}}{r} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int_{V'} \mathbf{J} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\mathbf{p}}\quad (5-62)$$

式中: $\dot{\mathbf{p}} = \iiint_{V'} \mathbf{J} dV'$ 为小区域 V' 内的总电偶极矩关于时间的一阶导数。

显然,与静磁场情况不同,该项并不为零,表示由电偶极子激发的推迟矢势。

(5) \mathbf{A} 多极展开式中第二项为

$$\mathbf{A}^{(1)} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \mathbf{r}' \cdot \nabla \frac{\mathbf{J}}{r} dV' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{1}{r} \int_{V'} \mathbf{r}' \cdot \nabla \mathbf{J} dV' + \int_{V'} \left(\mathbf{r}' \cdot \nabla \frac{1}{r} \right) \mathbf{J} dV' \right]$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{2r} \nabla \cdot \left[\int_{V'} (\mathbf{r}' \mathbf{J} + \mathbf{J} \mathbf{r}') dV' + \int_{V'} (\mathbf{r}' \mathbf{J} - \mathbf{J} \mathbf{r}') dV' \right] - \\
&\quad \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left(\mathbf{r}' \cdot \nabla \frac{1}{r} \right) \mathbf{J} dV' \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{1}{6r} \nabla \cdot \dot{\mathbf{D}}_e + \frac{1}{r} \nabla \times \mathbf{m} \right) + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left(\mathbf{r}' \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \mathbf{J} dV' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{D}}_e}{6cr^2} + \frac{\dot{\mathbf{m}} \times \mathbf{r}}{cr^2} \right) + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \left(\mathbf{r}' \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \mathbf{J} dV' \quad (5-63)
\end{aligned}$$

式中: $\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_{V'} \mathbf{r}' \times \mathbf{J} dV'$ 称为小区域内电流系统的磁偶极矩,与静磁场情况类似。除此之外,此式还包含有电四极矩产生的推迟势。由此可见,磁偶极辐射和电四极辐射是在 \mathbf{A} 的展开式同一级中出现的。



5.3.3 电偶极辐射和磁偶极辐射

1. 电偶极辐射

根据 5.3.2 节推迟势的多极展开式,推得电偶极子激发的标势 $\varphi^{(1)}$ 和矢势 $\mathbf{A}^{(0)}$ 分别为

$$\begin{cases} \varphi^{(1)} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \nabla \cdot \mathbf{p} \\ \mathbf{A}^{(0)} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\mathbf{p}} \end{cases}$$

据此可计算得出磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}^{(0)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{\dot{\mathbf{p}}}{r^2} \times \frac{\mathbf{r}}{r} + \frac{\ddot{\mathbf{p}}}{cr} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \quad (5-64)$$

电场强度为

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= -\nabla \varphi^{(1)} - \frac{\partial \mathbf{A}^{(0)}}{\partial t} \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} + \frac{3(\dot{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{cr^4} - \frac{\dot{\mathbf{p}}}{cr^2} + \frac{(\ddot{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{c^2 r^3} \right] - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\ddot{\mathbf{p}}}{r} \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} + \frac{3(\dot{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{cr^4} - \frac{\dot{\mathbf{p}}}{cr^2} + \frac{(\ddot{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{c^2 r^3} - \frac{\ddot{\mathbf{p}}}{c^2 r} \right] \quad (5-65)
\end{aligned}$$

为了便于下面的讨论,这里保留式(5-64)和式(5-65)的一般形式,而不去进一步化简它们。

对于电荷密度 ρ 和电流密度 \mathbf{J} 均为时谐变化的情形,容易推知它们激发的电偶极矩也是时谐变化的,即 $\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{p}(\mathbf{r}) e^{-j\omega t}$, 则有

$$p : \dot{p} : \ddot{p} \sim 1 : \omega : \omega^2$$

由于 $c = \lambda f$, 故 $\frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c} \sim \frac{1}{\lambda}$ 。因而, \mathbf{B} 中各项应满足以下近似关系:

$$\frac{\dot{p}}{r^2} : \frac{\ddot{p}}{cr} \sim \frac{r}{\lambda} : \left(\frac{r}{\lambda} \right)^2 \quad (5-66)$$

且 \mathbf{E} 中各项应满足

$$\frac{\dot{p}}{r^3} : \frac{\dot{p}}{cr^2} : \frac{\ddot{p}}{c^2 r} \sim 1 : \frac{r}{\lambda} : \left(\frac{r}{\lambda}\right)^2 \quad (5-67)$$

根据式(5-66)和式(5-67),可以很方便地讨论空间各区域电磁场的特点。

1) 近区: $l \ll r \ll \lambda$

这种情况下, \mathbf{B} 中 $\dot{\mathbf{p}}$ 项和 \mathbf{E} 中 \mathbf{p} 项数值远大于其他项,需保留;其余项可忽略。同时 $(t-r/c)$ 中的 r/c 项也可忽略。于是,可以得到场强为

$$\begin{cases} \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \dot{\mathbf{p}} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \\ \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right] \end{cases} \quad (5-68)$$

由此可以得出近区场的特点如下:

(1) 由于 r/c 项被忽略,故推迟效应不明显。电场、磁场的表达式与恒定场相似,因而称为似稳场。

(2) \mathbf{B} 由 $\dot{\mathbf{p}}$ 激发,而 \mathbf{E} 由 \mathbf{p} 激发,显然它们的相位相差 $\pi/2$ 。

2) 中间区(感应区): $r \sim \lambda \gg l$

这种情况下, \mathbf{B} 和 \mathbf{E} 中的 \mathbf{p} 、 $\dot{\mathbf{p}}$ 及 $\ddot{\mathbf{p}}$ 项数值相当,故场强保持原有形式[式(5-64)和式(5-65)不变]。感应区是一个过渡区域。

3) 远区: $r \gg \lambda$ 且 $r \gg l$

这种情况下, \mathbf{B} 和 \mathbf{E} 中的 $\ddot{\mathbf{p}}$ 项数值较大,其余各项可忽略。因此,远区(辐射)场强为

$$\begin{cases} \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi cr^2} \ddot{\mathbf{p}} \times \mathbf{r} \\ \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(\ddot{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{c^2 r^3} - \frac{\ddot{\mathbf{p}}}{c^2 r} \right] \end{cases} \quad (5-69)$$

对比式(5-68)和式(5-69)可知,电偶极子远区(辐射)场具有一些与近区场明显不同的性质:

(1) 由于 $kr = \frac{2\pi r}{\lambda} \gg 1$,表明推迟效应明显,即场点在 t 时刻的场取决于 $t' = t - r/c$ 时刻的源,电磁场以有限的光速 c 在真空中传播;

(2) 由于磁场与电场都由 $\ddot{\mathbf{p}}$ 激发,故它们的相位相同。因此,远区的电磁场能够源源不断向外辐射。

2. 磁偶极辐射

根据式(5-61)和式(5-63),若仅保留与磁偶极矩有关的项,则可以得到磁偶极推迟势分别为

$$\begin{cases} \varphi^{(2)} = 0 \\ \mathbf{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi cr^2} \dot{\mathbf{m}} \times \mathbf{r} \end{cases} \quad (5-70)$$

因此,激发的场强为

$$\begin{cases} \mathbf{E} = -\nabla\varphi^{(2)} - \frac{\partial\mathbf{A}^{(1)}}{\partial t} = \frac{\mu_0}{4\pi cr^2} \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{m}} \\ \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{(\ddot{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{c^2 r^3} - \frac{\ddot{\mathbf{m}}}{c^2 r} + 2 \frac{\dot{\mathbf{m}}}{cr^2} \right] \end{cases} \quad (5-71)$$

在远区,上式中仅保留 $\dot{\mathbf{m}}$ 相关项,则可以得到磁偶极辐射场强为

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \frac{\mu_0}{4\pi cr^2} \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{m}} \\ \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{(\dot{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{c^2 r^3} - \frac{\dot{\mathbf{m}}}{c^2 r} \right] \end{cases} \quad (5-72)$$

观察式(5-69)和式(5-72),不难看出电偶极子辐射场和磁偶极子辐射场具有对偶性。

5.3.4 辐射能流角分布——方向性函数

1. 电偶极辐射

在球坐标系中,假设 $\ddot{\mathbf{p}}$ 沿 z 轴方向且与 \mathbf{r} 夹角为 θ ,则电偶极辐射场强式(5-69)可以化简为

$$\begin{cases} \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi cr} \ddot{\mathbf{p}} \sin\theta \mathbf{e}_\phi \\ \mathbf{E} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \ddot{\mathbf{p}} \sin\theta \mathbf{e}_\theta \end{cases} \quad (5-73)$$

由此可见,电偶极辐射场的特点为:

(1) 电场强度与磁感应强度的比值等于真空中电磁波的传播速度 c ,并且它们相位相同,方向相互正交;

(2) 电场强度与磁感应强度的大小与 $\sin\theta$ 成正比,即在与电偶极子垂直的方向上辐射最强,平行的方向上辐射为零。

根据辐射场强式(5-73),还可以计算出辐射能流密度

$$\mathbf{S}_e = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0 \dot{\mathbf{p}}^2}{16\pi^2 cr^2} \sin^2\theta \mathbf{e}_r \quad (5-74)$$

设能流密度垂直通过的面积元为 $d\sigma$,定义

$$f_e(\theta, \phi) = \frac{dP_e}{d\Omega} = \frac{\mathbf{S}_e \cdot d\sigma}{d\Omega}$$

为辐射能流的角分布,因为 $d\sigma = r^2 d\Omega$,对于电偶极矩辐射,则为

$$f_e(\theta, \phi) = \frac{\mu_0 \dot{\mathbf{p}}^2}{16\pi^2 c} \sin^2\theta \quad (5-75)$$

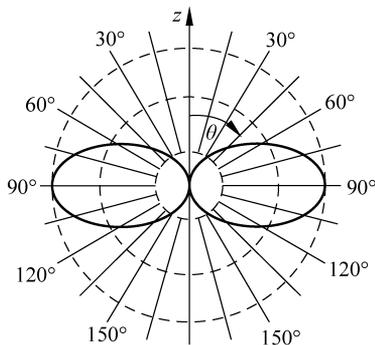


图 5-6 电偶极辐射能流的角分布

$f_e(\theta, \phi)$ 反映了辐射分布的方向性,因此也称为方向性函数。虽然不同的文献有不同的定义,如方向性函数归一化或用任一方位的场量与最大幅值的比值来定义,但都能够描述辐射场在空间不同方向上的分布规律。图 5-6 示出了沿 z 轴方向的电偶极辐射能流的角分布。在 $\theta = \pi/2$ 的平面上辐射最强,而在 $\theta = 0$ 和 π 的平面上即沿电偶极矩轴线方向辐射为零。电偶极辐射是天线辐射的基本单元,在实际应用中,若想获得最佳的信号发射和接收效果,就需要选取适当的方位放置天线。

2. 磁偶极辐射

假设 \ddot{m} 沿 z 轴方向, 且与 r 夹角为 θ , 则磁偶极子辐射场强式(5-72)可转化为

$$\begin{cases} \mathbf{E} = -\frac{\mu_0}{4\pi cr} \ddot{m} \sin\theta \mathbf{e}_\phi \\ \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi c^2 r} \ddot{m} \sin\theta \mathbf{e}_\theta \end{cases} \quad (5-76)$$

由此可得, 辐射能流密度

$$\mathbf{S}_m = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0 \ddot{m}^2}{16\pi^2 c^3 r^2} \sin^2\theta \mathbf{e}_r \quad (5-77)$$

和辐射能流角分布

$$f_m(\theta, \phi) = S_m r^2 = \frac{\mu_0 \ddot{m}^2}{16\pi^2 c^3} \sin^2\theta \quad (5-78)$$

与电偶极辐射类似, 在 $\theta = \pi/2$ 的方位磁偶极辐射最强, 而在 $\theta = 0$ 和 π 的方位上无辐射。

5.3.5 辐射功率、辐射电阻

1. 电偶极辐射

根据辐射能流密度式(5-74), 得到电偶极辐射总功率为

$$P_e = \int \mathbf{S}_e \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \oint_S \frac{\mu_0 \ddot{p}^2}{16\pi^2 cr^2} \sin^2\theta d\sigma = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \frac{\mu_0 \ddot{p}^2}{16\pi^2 c} \sin^3\theta d\theta = \frac{\mu_0}{6\pi c} \ddot{p}^2 \quad (5-79)$$

设电偶极矩 $p = p_0 e^{-j\omega t}$, 对应的实数形式为 $p = p_0 \cos\omega t$ 。则一个周期内的平均辐射功率为

$$\bar{P}_e = \frac{1}{T} \int_0^T P_e dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\mu_0}{6\pi c} \ddot{p}^2 dt = \frac{\mu_0 \omega^4}{12\pi c} p_0^2 \quad (5-80)$$

如果电偶极子 l 不变, q 随时间 t 变化, 即 $q = q_0 e^{-j\omega t}$, 则有

$$\ddot{p}(t) = \dot{q}(t)l = \dot{I}l, \quad I = \dot{q}(t) = I_0 e^{-j\omega t}, \quad I_0 = \omega q_0$$

故平均辐射功率为

$$\bar{P}_e = \frac{\mu_0}{12\pi c} (l\omega I_0)^2 = \frac{\mu_0 \pi c}{3} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 I_0^2 \quad (5-81)$$

对比交流电通过电阻 R 时所消耗的平均功率 $\bar{P}_e = \frac{1}{2} R_e I_0^2$, 可得电偶极等效辐射电阻为

$$R_e = \frac{2\mu_0 \pi c}{3} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 = 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \quad (5-82)$$

2. 磁偶极辐射

根据磁偶极辐射能流密度式(5-77), 可得总辐射功率为

$$P_m = \frac{\mu_0}{6\pi c^3} \ddot{m}^2 \quad (5-83)$$

若该磁偶极子由半径为 a 、电流振幅为 $I = I_0 e^{-j\omega t}$ 的圆电流圈形成, 则有 $m_0 = I_0 \pi a^2$ 。

利用与电偶极子类似的处理方法(5-80),可得平均辐射功率为

$$\bar{P}_m = \frac{4\mu_0 c \pi^3}{3} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^4 m_0^2 = \frac{4\mu_0 c \pi^5}{3} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^4 I_0^2 \quad (5-84)$$

对比交流电通过电阻 R 时所消耗的平均辐射功率

$$\bar{P}_m = \frac{1}{2} R_m I_0^2$$

可得等效辐射电阻为

$$R_m = \frac{8\mu_0 c \pi^5}{3} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^4 = 320\pi^6 \left(\frac{a}{\lambda}\right)^4 \quad (5-85)$$

通过对比式(5-81)和式(5-84)可知,当电偶极的线度 l 与磁偶极线度 a 为同一数量级时,则有

$$\frac{\bar{P}_m}{\bar{P}_e} \propto \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2$$

当 $l \ll \lambda$, 即短天线情形时,一般磁偶极子的辐射功率远小于电偶极子的辐射功率。因此,小型便携式无线电台一般都采用电偶极子型(开放型)拉杆天线进行发射。

* 5.4 电四极辐射

5.4.1 高频电流分布的电四极矩

考虑辐射场问题时,可以省略比 $1/r$ 更高次项的贡献,于是 φ 多极展开式中第三项式(5-61)可以化简为

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{24\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2 r^3} \mathbf{r} \mathbf{r} : \ddot{\mathbf{D}}_e \quad (5-86)$$

同理, \mathbf{A} 多极展开式中第二项式(5-63)可以化简为

$$\mathbf{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi c r^2} \left(\frac{1}{6} \mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{D}}_e + \dot{\mathbf{m}} \times \mathbf{r} \right) \quad (5-87)$$

式中:这里的 $\ddot{\mathbf{D}}_e$ 和 $\dot{\mathbf{m}}$ 分别表示高频电流分布下的电四极矩和磁偶极矩。对比以上两式可知,式(5-86)中仅包含电四极矩的贡献;而在式(5-87)中却包括两部分贡献:等号右边第一项表示电四极矩激发的辐射势,第二项则来源于磁偶极矩。可见,在时变场情况下,电流分布与电荷分布是相互关联的,根据时谐场的电流连续性方程 $\nabla \cdot \mathbf{J} - j\omega\rho = 0$ 可知,这时的电流密度的散度不为零,大小与电荷密度成正比。而在静场情况下,电流分布与电荷分布并无关联,因而它们各自激发的多极矩自然也不相关。

若仅保留式(5-86)和式(5-87)中的电四极矩相关项,则可以得到电四极矩激发的电磁势分别为

$$\varphi = \frac{1}{24\pi\epsilon_0 c^2 r^3} \mathbf{r} \mathbf{r} : \ddot{\mathbf{D}}_e \quad (5-88)$$

和

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{24\pi c r^2} \mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{D}}_e \quad (5-89)$$

5.4.2 电四极辐射

由电四极矩激发的电磁势,并利用场和势的关系,容易求出电四极辐射的场分布。具体推导过程如下。

根据式(5-88)和式(5-89),得到

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\mu_0}{24\pi c^2 r^3} \mathbf{r} \times (\ddot{\mathbf{D}}_e \cdot \mathbf{r}) \quad (5-90)$$

和

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{1}{24\pi\epsilon_0 c^3 r^2} \left[\frac{(\mathbf{r}\mathbf{r} : \ddot{\mathbf{D}}_e) \mathbf{r}}{r^2} - \mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{D}}_e \right] \quad (5-91)$$

因而平均辐射能量为

$$\bar{S} = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}^*) = \frac{1}{1152\epsilon_0 \pi^2 c^5 r^6} |\mathbf{r} \times (\ddot{\mathbf{D}}_e \cdot \mathbf{r})|^2 \mathbf{e}_r \quad (5-92)$$

辐射角分布为

$$\overline{f(\theta, \phi)} = \bar{S} r^2 = \frac{1}{1152\epsilon_0 \pi^2 c^5 r^4} |\mathbf{r} \times (\ddot{\mathbf{D}}_e \cdot \mathbf{r})|^2 \quad (5-93)$$

5.5 天线辐射

5.5.1 天线上的电流分布

本节主要应用推迟解具体分析一类典型的天线结构,即线型天线。为了方便讨论,首先利用积分变换关系 $\mathbf{J} dV' \rightarrow I dl'$, 将推迟势式(5-51)转化为线电流的形式,即

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{I}{R} dl' \quad (5-94)$$

如图 5-7 所示,将一时谐电流信号从天线中点馈入,则天线中的电流线密度一定也是时谐变化的。此外,该电流信号沿天线长度的分布也是简谐变化的,并且满足天线两端的电流为零的开路边界条件。若取天线的中点为坐标原点 O , r 为原点 O 到场点 P 的距离, R 为电流源 dz' 到 P 的距离,则其电流分布为

$$I = I_0 \sin(kl/2 - k|z'|) e^{-j\omega(t-R/c)}$$

这里 k 表示波数。将上式代入式(5-94),得到

$$A_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{I_0 \sin(kl/2 - k|z'|) e^{-j\omega(t-R/c)}}{R} dz' \quad (5-95)$$

在远场辐射情形下,因 $l \ll r$ 且 $l \ll R$, 故 $R \approx r - z' \cos\theta$ 。这时,可以把上式分母中的 R 近似地以 r 代替,但在相位中的 R 仍取 $r - z' \cos\theta$, 则

$$A_z \approx \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\sin(kl/2 - k|z'|)}{r} e^{-j\omega(t-r/c)} e^{-jkz' \cos\theta} dz'$$

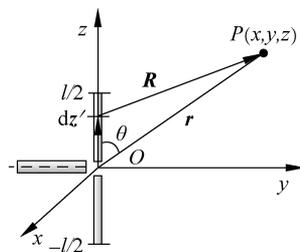


图 5-7 线天线辐射



对上式积分,可得

$$A_z = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \Gamma(\theta) e^{-j\omega(t-r/c)} \quad (5-96)$$

式中:

$$\Gamma(\theta) = \frac{\cos(kl \cos\theta/2) - \cos(kl/2)}{k \sin^2\theta}$$

由此可得,磁感应强度为

$$\mathbf{B} = -jkA_z \sin\theta \mathbf{e}_\phi = -j \frac{\mu_0 I_0 k}{2\pi r} \sin\theta \Gamma(\theta) e^{-j\omega(t-r/c)} \mathbf{e}_\phi \quad (5-97)$$

电场强度为

$$\mathbf{E} = c\mathbf{B} \times \mathbf{e}_r = -j \frac{\mu_0 I_0 c}{2\pi r} k \sin\theta \Gamma(\theta) e^{-j\omega(t-r/c)} \mathbf{e}_\theta \quad (5-98)$$

因此,平均能流密度为

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{\mu_0 c}{8} \left(\frac{I_0}{\pi r}\right)^2 [k \sin\theta \Gamma(\theta)]^2 \mathbf{e}_r \quad (5-99)$$

平均辐射角分布为

$$\overline{f(\theta, \phi)} = \frac{\mu_0 c}{8} \left(\frac{I_0}{\pi}\right)^2 [k \sin\theta \Gamma(\theta)]^2 \quad (5-100)$$

5.5.2 短天线的辐射

由天线辐射的一般公式出发,可以很方便地讨论其极限情形即短天线辐射的情况。

对于短天线,即 $l \ll \lambda$,易知式(5-100)中 $\Gamma(\theta)$ 项的余弦函数是小角度函数,因而可做泰勒展开,即

$$\cos(kl \cos\theta/2) - \cos(kl/2) \approx 1 - \frac{(kl \cos\theta/2)^2}{2!} - \left[1 - \frac{(kl/2)^2}{2!}\right] = \frac{1}{2} \left(\frac{kl}{2}\right)^2 \sin^2\theta$$

整理后得到

$$\begin{aligned} \overline{f(\theta, \phi)} &= \frac{\mu_0 c}{8} \left(\frac{I_0}{\pi}\right)^2 [k \sin\theta \Gamma(\theta)]^2 \\ &\approx \frac{\mu_0 c}{8} \left(\frac{I_0}{\pi}\right)^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{kl}{2}\right)^2 \sin\theta\right]^2 \\ &= \frac{\mu_0 c \pi^2 I_0^2}{32} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^4 \sin^2\theta \end{aligned} \quad (5-101)$$

上式表明在垂直于天线的方向($\theta = \pi/2$)上辐射最强,而沿天线方向($\theta = 0$ 或 π)的辐射为零。对所有方向积分,得到平均辐射功率为

$$\overline{P_e} = \frac{\mu_0 c \pi^3 I_0^2}{12} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^4 \quad (5-102)$$

可见,增大天线的线度 l 或者减小波长 λ (相当于提高振荡频率 f),可以有效提高短天线的辐射功率。因此,一般天线多采用高架,且无线电波均采用高频。



5.5.3 半波天线

由 5.5.2 节内容可知,为了提高天线的辐射功率,就要增大天线的长度 l 或者减小波长 λ 。当 $l = \frac{\lambda}{2}$ 时,称为半波天线,半波天线是一种常用的线天线。

只要将 $l = \frac{\lambda}{2}$ 代入任意长度的天线电流分布公式(5-95)中,即可得到

$$I(z', t') = I_0 e^{-j\omega(t-R/c)} \cos(kz')$$

及

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi kr} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin^2\theta} e^{-j\omega(t-r/c)} \mathbf{e}_z \quad (5-103)$$

相应的电磁场为

$$\begin{cases} \mathbf{B} = -j \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta} e^{-j\omega(t-r/c)} \mathbf{e}_\phi \\ \mathbf{E} = -j \frac{\mu_0 c I_0}{2\pi r} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta} e^{-j\omega(t-r/c)} \mathbf{e}_\theta \end{cases} \quad (5-104)$$

平均辐射能流密度为

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{15 I_0^2}{\pi r^2} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin^2\theta} \mathbf{e}_r \quad (5-105)$$

辐射角分布为

$$f(\theta, \phi) = \frac{15 I_0^2}{\pi} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin^2\theta} \quad (5-106)$$

平均辐射功率为

$$\bar{P}_e = 15 I_0^2 [\ln(2\pi\gamma) - \text{Ci}(2\pi)] \quad (5-107)$$

式中: γ 为欧勒常数, $\gamma = 1.7811$; $\text{Ci}(x)$ 为积分余弦函数, $\text{Ci}(x) = -\int_{\pi}^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx$ 。

因而,半波天线的等效辐射电阻为

$$R_r = 30 [\ln(2\pi\gamma) - \text{Ci}(2\pi)] \approx 73 \Omega \quad (5-108)$$

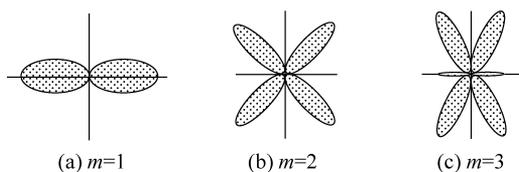
更一般地,取 $l = m \frac{\lambda}{2}$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) 时的辐射功率和辐射电阻可以直接代入式(5-99)

和式(5-100)。图 5-8 所示为半波天线 $l = \frac{\lambda}{2}$ 、全波天线 $l = \lambda$ 和 $l = \frac{3\lambda}{2}$ 时的功率角分布。

通过以上几种天线的介绍,可以概括出天线辐射场的主要特征:

(1) 电场强度与磁感应强度的比值等于真空中光速 ($E_\theta/B_\phi = c$), 它们之间的方向相互垂直, \mathbf{E} 、 \mathbf{B} 与传播方向 \mathbf{e}_r 服从右手关系, 所以辐射电磁波属于横电磁(TEM)波;

(2) 沿 z 轴方向放置的天线, 辐射强度与极角 θ 有关, 与方位角 ϕ 无关, 即具有轴对称

图 5-8 不同 m 值的辐射功率角分布

性；与 r^2 成反比，且随着 m 的增大辐射能量主要集中于天线方向。

5.5.4 天线阵

单个天线的方向性一般都是很弱的，但不少无线电设备都要求天线具有一定甚至很强的方向性。因此，为了提高天线的方向性，可以利用各天线辐射电磁波的干涉效应来获得。天线阵就是实现该种功能的一种天线。所谓天线阵，就是把一系列天线排成阵列，利用各天线辐射的干涉效应来获得较好的方向性。常见的天线阵是把半波天线按照线性、横向或方阵等方式排列。下面我们重点讨论线性排列天线阵。

如图 5-9 所示，将 N 个相同的半波天线沿极轴等距排列，相邻天线中点的距离为 l ，等幅、同相激发。分析其辐射角分布。

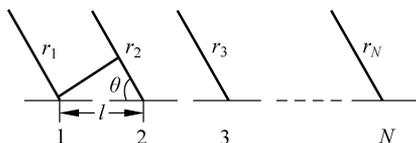


图 5-9 线性排列天线阵

显然，它们所激发的场到达远区各场点的路程不同，分别为

第 1 个天线： $r_1 = r$ ；

第 2 个天线： $r_2 = r_1 + l \cos \theta = r + l \cos \theta$ ；

第 3 个天线： $r_3 = r_2 + l \cos \theta = r + 2l \cos \theta$ ；

⋮

第 N 个天线： $r_N = r_{N-1} + l \cos \theta = r + (N-1)l \cos \theta$

因此，它们彼此间存在相位差，从而导致发生干涉使辐射具有方向性。

容易看出，每相邻天线间的波程差为 $l \cos \theta$ 。若假设第一个半波天线的辐射电场强度大小为

$$E_{\theta 1} = -j \frac{\mu_0 c I_0}{2\pi r} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} e^{-j\omega(t-r/c)} \quad (5-109)$$

则第二个半波天线的辐射电场强度大小为

$$\begin{aligned} E_{\theta 2} &= -j \frac{\mu_0 c I_0}{2\pi(r+l \cos \theta)} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} e^{-j\omega[t-(r+l \cos \theta)/c]} \\ &\approx -j \frac{\mu_0 c I_0}{2\pi r} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} e^{-j\omega[t-(r+l \cos \theta)/c]} = E_{\theta 1} e^{jk l \cos \theta} \end{aligned} \quad (5-110)$$

同理,可得第三个半波天线的辐射电场强度大小为

$$E_{\theta_3} \approx E_{\theta_1} e^{j2kl \cos\theta} \quad (5-111)$$

以此类推,可得 N 个半波天线产生的总辐射电场强度大小为

$$\begin{aligned} E_{\theta} &= E_{\theta_1} + E_{\theta_2} + \cdots + E_{\theta_i} + \cdots + E_{\theta_N} \\ &= \sum_{i=1}^N E_{\theta_1} e^{j(i-1)kl \cos\theta} = E_{\theta_1} \frac{1 - e^{jNkl \cos\theta}}{1 - e^{jkl \cos\theta}} \end{aligned} \quad (5-112)$$

据前面的内容,可得辐射场的磁感应强度的大小为

$$B_{\phi} = \frac{E_{\theta}}{c} \quad (5-113)$$

结合式(5-112)和式(5-113),可得平均辐射角分布为

$$\overline{f(\theta, \phi)} = |\bar{\mathbf{S}}| r^2 = \frac{15I_0^2}{\pi} \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta} \right]^2 \left| \frac{1 - e^{jNkl \cos\theta}}{1 - e^{jkl \cos\theta}} \right|^2 \quad (5-114)$$

与单个半波天线相比,角分布多了一个因子。这个因子使辐射强度与极角 θ 密切相关,表现出很强的方向性。令该因子为 Θ ,称为天线阵的阵因子。且令 $\psi = kl \cos\theta$,则

$$\Theta = \left| \frac{1 - e^{jNkl \cos\theta}}{1 - e^{jkl \cos\theta}} \right|^2 = \frac{\sin^2\left(\frac{N}{2}\psi\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}\psi\right)} \quad (5-115)$$

下面讨论阵因子出现最大时的条件。

由上式可见, Θ 取极值的条件为 $\frac{N}{2}\psi = m\pi, m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$,即

$$\psi = \frac{2m\pi}{N}, \quad m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

具体讨论如下:

(1) 当 $m=0$,即 $\psi=0$ 时,对式(5-115)应用洛必达法则,可得阵因子的极大值为 $\Theta_{\max} = N^2$;

(2) 当 $m \neq 0$,即 $\psi = \pm \frac{2\pi}{N}, \pm \frac{4\pi}{N}, \dots, \pm \frac{2(N-1)\pi}{N}$ 时,阵因子有极小值 $\Theta_{\min} = 0$ 。阵因子 Θ 的极值分布如图 5-10 所示。

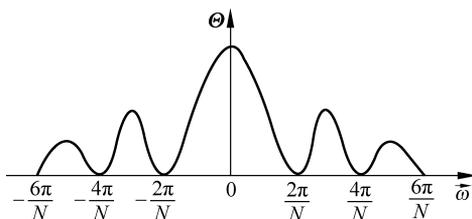


图 5-10 天线阵辐射的干涉效应

若令 $\vartheta = \frac{\pi}{2} - \theta$,则 ϑ 表示主极大的张角范围,它由 $\psi = kl \cos\theta = kl \sin\vartheta = \frac{2\pi}{N}$ 决定,即

$$\sin\vartheta = \frac{2\pi}{Nkl} = \frac{\lambda}{Nl}$$

可见,阵列数 N 越大, ϑ 角越小, θ 的方向性就越强。换言之,当 $\frac{\lambda}{Nl} \ll 1$ 时,就可以获得高度定向的辐射。

* 5.6 电磁波的衍射

5.6.1 衍射问题

所谓电磁波的衍射现象,就是指当电磁波在传播过程中,遇到障碍物或者透过屏幕上的小孔时,会导致偏离原来入射方向而出射的现象。早期应用几何光线描述电磁波与物质相互作用的方法,实际上只是一种粗略的近似,只有当波长 λ 远小于障碍物或孔的线度 d 即 $\lambda \ll d$ 时才有效。当 $\lambda \sim d$ 或 $\lambda > d$ 时,这种近似就会失效,这时需要应用衍射理论来处理。衍射理论的基础是基尔霍夫理论,主要包括基尔霍夫衍射积分及其运算等内容。该理论是基于惠更斯、杨和菲涅耳等人的工作发展而来的,尔后由瑞利和索默菲尔德等人修正并日趋完善。这里主要介绍基尔霍夫标量衍射理论。

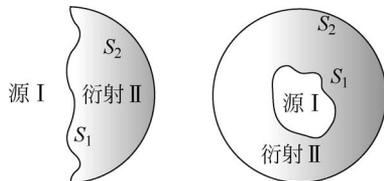


图 5-11 电磁波衍射的几何形状

如图 5-11 所示,通常衍射的几何形状,包括源区 I 和衍射区 II 两部分,它们之间由界面 S_1 分隔,界面 S_2 一般取在无穷远处,界面 S_1 由不透明部分和孔组成。I 区内的源产生向外传播的场,经与界面 S_1 相互作用后,一部分能量被吸收,一部分能量被反射,还有一部分能量透射到衍射区 II。透射到 II 区内的场的

角分布就是衍射图样。我们希望用 I 区内的场源及其与界面 S_1 上的屏和孔的相互作用,或者说用界面上 S_1 的场来表示 II 区内的衍射场,这实际上就是所谓的衍射问题。显然,如果用一个散射体(入射波激发的源)取代 I 区内的场源,那么这里的衍射几何形状及其描述方式就可以用于处理散射问题了。

5.6.2 基尔霍夫公式

基尔霍夫理论的核心思想是利用格林公式,把封闭体积 V 内的一个标量场 $\psi(\mathbf{r}, t)$ 即电磁场量 (\mathbf{E}, \mathbf{B}) 的任一分量用界面 S 上的场 $\psi(\mathbf{r}', t')$ 及其法向导数值 $\partial\psi(\mathbf{r}', t')/\partial n$ 表示出来。假设 $\psi(\mathbf{r}, t)$ 取时谐形式 $e^{-j\omega t}$, 且满足亥姆霍兹方程

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0 \quad (5-116)$$

引入格林函数 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, 定义如下:

$$(\nabla^2 + k^2)G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (5-117)$$

可见,具有出射波形式的格林函数为

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{jkR}}{R} \quad (5-118)$$

式中: R 为源点到场点的距离, $R = |\mathbf{R}| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ 。

令 $\varphi = G$ 和 $\psi = \psi$, 根据格林公式

$$\int_V (\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi) dV = \oint_S \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS$$

并以“'”表示积分变量,得

$$\begin{aligned} & \int_V [G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla'^2 \psi(\mathbf{r}') - \psi(\mathbf{r}') \nabla'^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] dV' \\ &= \oint_S \left[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \psi(\mathbf{r}') - \psi(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right] dS' \end{aligned} \quad (5-119)$$

结合式(5-116)和式(5-117),可得

$$G(\nabla^2 \psi + k^2 \psi) - \psi(\nabla^2 G + k^2 G) = G \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 G = 4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \psi$$

把上式代入式(5-119),并利用关系 $\partial/\partial n' = -(\mathbf{e}_R \cdot \mathbf{e}_n) \frac{\partial}{\partial R}$, 得到

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \psi(\mathbf{r}') - \psi(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right] dS' \\ &= -\frac{1}{4\pi} \oint_S \left[\frac{e^{jkR}}{R} \frac{\partial}{\partial R} \psi(\mathbf{r}') + \psi(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial R} \frac{e^{jkR}}{R} \right] (\mathbf{e}_R \cdot \mathbf{e}_n) dS' \\ &= -\frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{e^{jkR}}{R} \left[\frac{\partial}{\partial R} \psi(\mathbf{r}') + \psi(\mathbf{r}') \left(jk - \frac{1}{R} \right) \right] (\mathbf{e}_R \cdot \mathbf{e}_n) dS' \end{aligned} \quad (5-120)$$

可见,上式把衍射区内任一点 \mathbf{r} 处的场 $\psi(\mathbf{r})$ 用界面 S 上的 $\psi(\mathbf{r}')$ 和 $\partial\psi(\mathbf{r}')/\partial R$ 表示了出来。界面 S 由 S_1 和 S_2 两部分组成,因而对它的积分也应该包括两部分:一部分是对屏及其孔的 S_1 的积分,另一部分是对遍及无穷远处的 S_2 的积分。由于假设 II 区域内的场 $\psi(\mathbf{r})$ 是由 I 区的源通过 S_1 透射过来的,故 $\psi(\mathbf{r})$ 在 S_2 附近是出射波,应当满足辐射条件:

$$\psi \sim \frac{e^{jkR}}{R}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial R} \sim \psi \left(jk - \frac{1}{R} \right) \quad (5-121)$$

可见,当 $R \rightarrow \infty$ 时, $\lim_{R \rightarrow \infty} \psi = 0$, 则对 S_2 的积分也趋于零,于是式(5-120)中只剩下对 S_1 的积分。由此可得,基尔霍夫衍射积分式为

$$\psi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \oint_{S_1} \frac{e^{jkR}}{R} \left[\frac{\partial}{\partial R} \psi(\mathbf{r}') + \psi(\mathbf{r}') \left(jk - \frac{1}{R} \right) \right] (\mathbf{e}_R \cdot \mathbf{e}_n) dS' \quad (5-122)$$

该式称为标量基尔霍夫公式。

5.6.3 小孔衍射

下面应用基尔霍夫衍射积分公式(5-122)分析小孔衍射问题。为了得到衍射波,基尔霍夫用了如下假设:

- (1) 除了孔内以外, ψ 和 $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ 在 S_1 上处处为零;
- (2) 孔内的 ψ 和 $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ 的值等于没有任何屏或障碍物时入射波的值。

如图 5-12 所示,以 R' 和 R 分别表示源点 P' 和场点 P 离孔内面积元 dS' 的距离。

根据假设(2),在 S_1 上的场可取为入射波形式,即

$$\psi \sim \frac{e^{jk_i \cdot \mathbf{R}'}}{R'} \quad (5-123)$$

式中: \mathbf{k}_i 为入射波矢量。

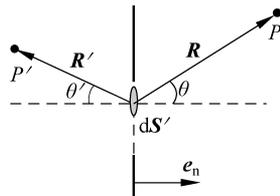


图 5-12 源点、带孔平面屏和场点的衍射几何形状

把格林函数取为出射波或衍射波的形式,即

$$G \sim \frac{e^{jk_d \cdot \mathbf{R}}}{R} \quad (5-124)$$

式中: \mathbf{k}_d 为衍射波矢量。

根据基尔霍夫衍射积分公式,结合式(5-123)和式(5-124),可得

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \frac{e^{jk_d \cdot \mathbf{R}}}{R} \left[\frac{\partial}{\partial R} \psi + \psi \left(jk_d \cos\theta - \frac{1}{R} \right) \right] dS' \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \frac{e^{jk_d \cdot \mathbf{R}}}{R} \frac{e^{jk_i \cdot \mathbf{R}'}}{R'} \left[\left(jk_i \cos\theta' - \frac{1}{R'} \right) + \left(jk_d \cos\theta - \frac{1}{R} \right) \right] dS' \end{aligned}$$

式中: θ' 为入射波矢 \mathbf{k}_i 与法线方向 \mathbf{e}_n 的夹角; θ 为衍射波矢 \mathbf{k}_d 与法线方向 \mathbf{e}_n 的夹角。

若令 $|\mathbf{k}_i| = |\mathbf{k}_d| = k$, 并略去 $1/R$ 和 $1/R'$ 的高次项,则

$$\psi(\mathbf{r}) \approx -\frac{jk}{2\pi\omega} \iint_{S_1} \frac{e^{jk_d \cdot \mathbf{R}}}{R} \frac{e^{jk_i \cdot \mathbf{R}'}}{R'} \frac{1}{2} (\cos\theta' + \cos\theta) dS' \quad (5-125)$$

式中: $(\cos\theta' + \cos\theta)/2$ 为倾斜因子。

根据式(5-125),可以得到以下结论:

(1) 当 $d \gg \lambda$ 时,衍射角 $\theta \ll \lambda/d$ 会很小,这时衍射强度被限制在一个狭窄的角度范围内,而且几乎完全取决于式(5-125)中两个指数因子间的干涉;

(2) 当源点 P' 和场点 P 远离屏时(或到屏的距离远大于孔的线度时),倾斜因子可以当作一个常数,这时不同衍射场的相对振幅将是相同的;

(3) 当正入射时,倾斜因子近似等于 1,这时振幅的绝对值相同,衍射强度达到最大。

综上所述,本节主要推导了基尔霍夫衍射积分公式,简单介绍了它在小孔衍射问题中的应用,但是这些内容仍然属于标量衍射理论的范畴。由于电磁场本质上是一个矢量场,这就要求在处理实际问题时,必须考虑其矢量特征。虽然对于一些简单问题,可以近似地采用标量衍射理论来处理,但是这也不能够掩盖它的局限性。例如,在通过裂缝的微波衍射问题中,由于涉及较大的波长和衍射角,以致标量衍射理论在此处失效。这时,我们需要选用矢量衍射理论来处理。关于这个问题在此不作详细讨论。

* 5.7 科技前沿 1: 散射相消原理及应用

电磁波的散射实质上是电磁场与遇到的障碍物相互作用的结果。按照电磁波的辐射理论,当障碍物置于外加时变场中时,介质会被外加电磁场极化,产生的交变极化电荷也会产生二次电场,从而对初始场产生扰动,改变初始电场的分布。总的电场是由外加电场和二次电场叠加确定的。电磁散射的强弱也可以用电极化强度来描述。这一问题可归结为电磁场的边值问题。例如,一介质球处于均匀平面电磁波的散射问题,可以用分离变量法求解,较为复杂的问题可以用格林函数法求解。正常情况下,电磁场的 \mathbf{P} 与 \mathbf{E} 同方向,如图 5-13(a)所示。如果在物体外围包裹一层新型人工材料,这种材料在电场中也会被极化,但是方向与外加电场相反,如图 5-13(b)所示。那么,将此复合结构放入外加电场中时,结构整体的电极化强度有可能因为物体和包层的不同特性而抵消。换句话说,此结构对外加电场无扰动或者扰动很小,从而在外部无法探测出物体的存在,即物体被“隐形”了。这就是极化相消的机

理。如何实现这一效果呢？观察 $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \mathbf{E}$ ，可得，只要包层材料的介电常数小于真空，甚至为负值即可。虽然自然界中不存在这样的媒质，但对于静磁场，可以使用超导材料加以实现。在时变的情况下，这个要求可以用新型人工电磁材料得以满足；此外，在光波段，大多数金属也具有负数的介电常数。

以上只是定性地解释了利用极化的概念实现散射相消的机理。事实上，对于磁性材料，可以用磁化强度做出相类似的解释。而在具体定量分析时，往往定义散射截面的概念即散射波的时间平均功率与入射波的时间平均功率密度之比。通过理论分析得出散射截面，令其取值为零，即为理想的散射相消条件。实际应用中，只能做到尽可能地减小散射。

利用散射相消原理实现电磁隐形技术，也是科学家们目前努力研究的一个重要课题。

* 5.8 科技前沿 2：低维材料电磁波辐射下的非线性效应

4.5 节介绍了石墨烯的量子磁输运性质，即静磁场诱导的磁致电导率或磁阻现象。本节主要讨论电磁波辐射即随时间变化的电磁场对石墨烯载流子运动的影响。

研究人员发现，在电磁波辐射下石墨烯的线性光锥能谱会发生弯曲，进而张开一个能隙。在长波近似下，能隙可以表示为

$$\Delta(p) = \frac{e^2 E_0^2 v_F}{4c^2 p \omega^2} \quad (5-126)$$

式中： ω 和 E_0 分别为电磁波辐射的频率和强度； p 和 e 分别为电子的动量和电量； v_F 为电子的费米速度， $v_F \approx c/300$ ， c 为真空中光速。

可见，能隙主要依赖于电磁波辐射的频率和强度。深入分析之后还会发现，这时的电流会呈现出非常强的非线性行为，反映出电子的运动不再像静磁场时做圆周运动那么简单，而是变得愈发复杂。搞清楚这背后的物理机制将是我们进一步研发新型高效微波电子器件的基础。以上是主要结论，现就计算思路及过程简单介绍如下。

1. 模型

如图 5-14 所示，假设电磁波沿 y 方向传播，波矢量为 $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_y$ ，辐射频率为 ω 。当 \mathbf{k} 接近第一布里渊区狄拉克点 K 时，载流子的哈密顿量可以被近似地表示为

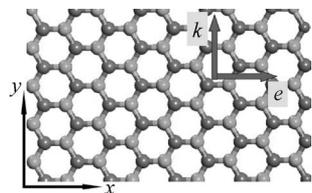


图 5-14 电磁波在石墨烯内传播

$$H(x, y, t) = v_F \begin{pmatrix} 0 & \pi_x - j\pi_y \\ \pi_x + j\pi_y & 0 \end{pmatrix} \quad (5-127)$$

式中： π_x 和 π_y 为正则动量算符 π 的 x 和 y 成分， $\pi = \mathbf{p} - e\mathbf{A}$ ， \mathbf{A} 为电磁波辐射的磁矢势， $\mathbf{A} = [(E_0/\omega)\cos(ky - \omega t), 0]$ 。

因为石墨烯很薄，只有一个碳原子层厚度，所以电磁屏蔽效应非常弱，可以忽略。这时， E_0 可以近似看作一个常数。若对上式中的 π_y 取反号，则可以得到另一个狄拉克点 K' 处载流子的哈密顿量。

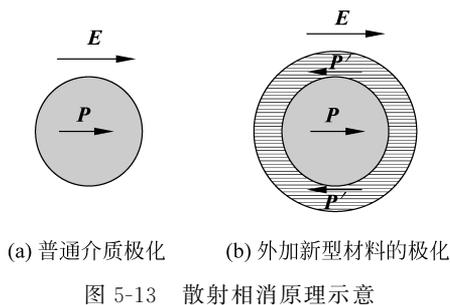


图 5-13 散射相消原理示意

2. 能量本征值和本征波函数

将哈密顿量式(5-127)代入电子的运动方程,即狄拉克方程

$$H(x, y, t)\Psi(x, y, t) = j\hbar \frac{\partial \Psi(x, y, t)}{\partial t} \quad (5-128)$$

式中:

$$\Psi(x, y, t) = \begin{cases} \Psi_A(x, y, t) \\ \Psi_B(x, y, t) \end{cases} \quad (5-129)$$

称为电子的波函数。显然,它是包含 A 和 B 两个分量的旋量波函数,而在普通材料中电子的波函数通常只有一个分量为标量波函数。究其原因在于石墨烯是复式晶格,由两套三角子晶格组成,分别记为 A 和 B。按照量子电动力学,将式(5-129)和式(5-127)代入式(5-128),可以得到旋量的每一个分量方程,即

$$\begin{cases} v_F(\pi_x - j\pi_y)\Psi_B(x, y, t) = j\hbar \frac{\partial \Psi_A(x, y, t)}{\partial t} \\ v_F(\pi_x + j\pi_y)\Psi_A(x, y, t) = j\hbar \frac{\partial \Psi_B(x, y, t)}{\partial t} \end{cases} \quad (5-130)$$

若令磁场为 \mathbf{B} , 则 π_x 和 π_y 的对易法则可以表示为

$$\begin{cases} [\pi_i - j\pi_j] = \frac{j\hbar e}{c} \epsilon_{ijk} B_k, \quad (i, j = x, y) \\ [\partial/\partial t, \pi_x \pm j\pi_y] = -\frac{eE_0}{c} \sin(ky - \omega t) \end{cases}$$

再利用关系 $k_\mu A_\mu = 0$, 可以得到旋量波函数的运动方程

$$\begin{aligned} -\hbar^2 \left[v_F^2 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \right] + 2j\hbar \xi v_F \cos\phi \frac{\partial \Psi}{\partial x} \\ + [\xi^2 \cos^2\phi - \xi v_F \hbar \sigma_z k \sin\phi - j\hbar \omega \xi \sigma_x \sin\phi] \Psi = 0 \end{aligned} \quad (5-131)$$

式中: ϕ 为电磁波的相位, $\phi = ky - \omega t$; ξ 为辐射参数, $\xi = eE_0 v_F / c\omega$; σ_μ 为泡利矩阵算符。

按照弗洛凯(Floquet)理论求解方程(5-131),得到能量本征值

$$E_n(p) = n\hbar\omega \pm v_F p \pm \{e^2 E_0^2 v_F / [4c^2 \omega^2 p(1 - v_F k p_y / \omega p)]\} \quad (5-132)$$

和本征波函数

$$\Psi_{n,p}(x, y, t) = \exp[-jE_n(p)t/\hbar] \Phi(x, y, t) \quad (5-133)$$

式中:

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, t) = \exp(jn\omega t + jp_x x/\hbar + jp_y y/\hbar) \exp \left[G(\phi) + \frac{j\xi^2 \omega t}{4\hbar\eta} \right] \times \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \pm e^{-j\varphi/2} \\ e^{j\phi/2} \end{pmatrix}, \quad \left[\varphi = \tan\left(\frac{p_x}{p_y}\right) \right] \end{aligned} \quad (5-134)$$

是弗洛凯模,且有

$$\begin{aligned} G(\phi) = \frac{j\xi^2}{4\hbar\eta} \phi - \frac{j\xi v_F}{\hbar\eta} p_x \sin\phi + j \frac{\xi v_F \sigma_z k}{2\eta} \cos\phi + \\ \frac{j\xi^2}{8\hbar\eta} \sin 2\phi - \frac{\xi\omega}{2\eta} \sigma_x \cos\phi \end{aligned} \quad (5-135)$$

根据能量本征值式(5-132),在长波近似下,可以得到能隙式(5-126),即

$$\Delta(p) = \frac{e^2 E_0^2 v_F}{4c^2 p \omega^2}$$

3. 电流

将能量本征值式(5-132)和本征波函数式(5-133)代入电流算符

$$\mathbf{j}_{\mu,p}(t) = ev_F \Psi_{n,p}^* \boldsymbol{\sigma}_\mu \Psi_{n,p}$$

在长波近似下,可以得到 x 和 y 方向的电流分量分别为

$$j_{x,p}(t) = ev_F \sinh\left(\frac{\xi}{\epsilon} \cos\omega t\right) + \cosh\left(\frac{\xi}{\epsilon} \cos\omega t\right) \cos\phi \quad (5-136)$$

和

$$j_{y,p}(t) = ev_F \sin\phi \quad (5-137)$$

式中:

$$\epsilon = v_F p \approx \epsilon_F$$

由式(5-136)可知, x 方向的电流表现出很强的非线性行为,反映出电磁场作用下石墨烯上电子运动的非线性特征。更多的计算细节和讨论,请参见相关文献。

* 5.9 思政教育：团体精神、“抓大放小”思想

团队精神指的是团队成员之间的合作、互助和相互支持的态度和行为。在一个具备团队合作精神的团队中,成员们追求共同目标,共享成果,相互倾听和尊重,共同解决问题,并愿意为团队的成功而奉献自己的力量。团队精神包含个体之间的相互作用和合作,通过协同努力,能够促进团队协作和创新,并在团队中营造出积极向上的工作氛围,有助于团队的发展和成就。天线阵中的干涉效应蕴含着“团队精神”的哲理。

具体地,天线阵中干涉效应是指当多个天线在一定的配置下工作时,它们之间会相互干涉,从而导致信号增强或者衰减的现象。在天线阵中的干涉效应中,每个天线的信号相互影响,最终实现了更强的信号增强或衰减。我们知道,单个小天线“势单力薄”,难以满足强辐射和强方向性等要求,需要通过组队协同完成。将若干个同类天线组成阵列,通过调控使它们达到“齐心协力”,就能够达到高辐射的效果。在阵列天线中,如果每个不同的天线到达辐射点满足相位相同时,合成场强最大。这不正和我们完成一个系统工程需要每一位鼎力相助、同心同德才能实现其共同目标类同吗?俗话说“众人拾柴火焰高”就是这个道理。由此可见,团队合作至关重要。但如果是反相叠加,其结果互相抵消,其值最小。做事中如果彼此之间心不往一处想,互相拆台,则成为“一个和尚担水喝,两个和尚抬水喝,三个和尚没水喝”。在事业和生活中需要有团结协作、乐于奉献的精神。

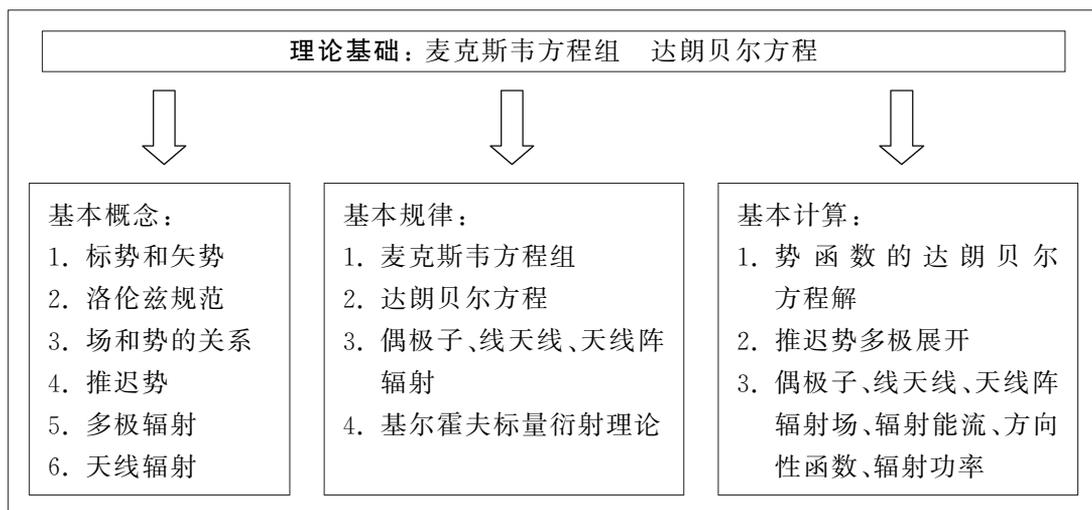
“抓大放小”思想是一种管理和决策的理念,它强调在资源有限的情况下,将重点放在关键和战略性的事物上(“抓大”),而将非关键和非战略性的事物降低优先级(“放小”)。这种思想鼓励将有限的资源和精力聚焦在最重要和有潜力的方面,以取得更好的结果和效益。在组织和团队中应用这种思想时,需要明确优先级,精确分配资源,避免浪费,并在重点领域

中实施有效的管理和控制。线天线的推迟势是物理学中的一个概念,涉及电磁波传输和信号延迟。推迟势近似是一种数学方法,用于近似计算复杂的函数。它包括将函数按照一定的级数展开,并忽略高阶无穷小量,只保留低阶项来进行近似计算。这种方法可以简化计算过程并快速获得近似结果。以半波振子辐射为例,其矢势 \mathbf{A} 满足式(5-95),在讨论远区场 ($r \gg l, r \gg \lambda$) 问题时,选择源点和场点间的距离上可选择 $\frac{1}{R} \approx \frac{1}{r}$,而在推迟相位因子中却要选 $e^{jkR} \approx e^{jkr} \cdot e^{-jkz' \cos\theta}$ 。为什么要“厚此薄彼”呢? 其实,主要是因为推迟因子 e^{jkR} 中 $e^{-jkz' \cos\theta}$ 的作用不可忽视,而 $\frac{1}{R}$ 与 $\frac{1}{r}$ 相差甚小。具体而言, $kz' \cos\theta = \frac{2\pi z' \cos\theta}{\lambda}$ 的值在 $[0, 2\pi]$ 范围,相当于干涉因子,对总场的影响较大。另一个问题:明明式(5-95)是精确的解析式,为什么偏偏要做近似计算呢? 其实,在对许多物理问题求解时,有些情况下纵然可以经过复杂的计算得到精确解,但如果形式过于复杂,其中的物理规律、物理意义被繁杂的公式所掩盖,如雾里看花;而在另一些情形下,如果不做近似处理就无法进行解析计算,本例就属于此。可见,恰当的近似、合理的取舍是非常必要的。这就要求我们在学习过程中善于抓住“主要矛盾”,有时需要“抓大放小”,而有时还得“斤斤计较”,这种实事求是的科学方法也是我们处事的基本原则。因此,在授课中可以因势利导,循循善诱。

将这两个概念结合起来,可以理解为在管理和发展中,根据事物的规模大小采取相应的处理方式。“抓大”是指对规模较大的事物进行更重要的关注和投入资源,以实现更优的发展;“放小”是指对规模较小的事物进行更灵活的管理,充分发挥其潜力。通过使用线天线的推迟势近似方法,可以对不同规模的问题和挑战进行分析和处理,从而实现“抓大放小”的管理思想。这样可以优化资源分配,提高效率,并获得更好的结果。

本章小结

1. 本章知识结构框架



2. 静电场、静磁场和变化电磁场基本公式比较

类别	静电场	静磁场	变化电磁场
场方程	$\begin{cases} \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \\ \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \end{cases}$	$\begin{cases} \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \end{cases}$	$\begin{cases} \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q, & \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \\ \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}, & \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0, & \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}, & \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{cases}$
介质本构方程	$\begin{cases} \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \text{ 或} \\ \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \end{cases}$	$\begin{cases} \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \text{ 或} \\ \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \end{cases}$	$\begin{cases} \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \end{cases}$
电磁能流密度	—	—	$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$
电磁能量密度	$w_e = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$	$w_m = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}$	$w = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B})$
电磁动量密度	—	—	$\mathbf{g} = \mathbf{D} \times \mathbf{B}$
场和势的关系	$\mathbf{E} = -\nabla\varphi$	$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$	$\begin{cases} \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \\ \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \end{cases}$
势方程	$\begin{cases} \nabla^2 \varphi = -\rho/\epsilon \\ \nabla^2 \varphi = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \\ \nabla^2 \mathbf{A} = \mathbf{0} \end{cases}$	$\begin{cases} \nabla^2 \varphi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon} \rho \\ \nabla^2 \mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J} \end{cases}$
规范条件	—	$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ (库仑规范条件)	$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ (洛伦兹规范条件)
基本解	$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R} dV'$	$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} dV'$	$\begin{cases} \varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{R} dV' \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t')}{R} dV' \end{cases}$

习题 5

5.1 已知时变电磁场的势函数为

$$\begin{cases} \varphi(\mathbf{r}, t) = 0 \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qt}{r^2} \mathbf{e}_r \end{cases}$$

求其场强及电荷和电流分布。

5.2 已知时变电磁场的势函数为

$$\begin{cases} \varphi = 0 \\ \mathbf{A} = A_0 \sin(kx - \omega t) \mathbf{e}_y \end{cases}$$

其中, A_0 为振幅, k 和 ω 分别表示电磁波的波数(波矢量的大小)和频率, 它们均为常量。求场强 \mathbf{E} 和 \mathbf{B} , 并验证它们是否满足真空中的麦克斯韦方程组。

5.3 使用以下规范函数:

$$\psi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qt}{r}$$

变换题 5.1 势函数 (\mathbf{A}, φ) , 求出新势函数 (\mathbf{A}', φ') 的形式, 并讨论该结果。

5.4 证明: 推迟势满足洛伦兹规范条件。

5.5 有一无穷长载流直导线载有随时间变化的电流

$$I(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ kt, & t > 0 \end{cases}$$

k 为一常数。求电磁场分布。

5.6 证明: 推迟势满足达朗贝尔方程。

5.7 有一电荷体系, 呈球对称分布, 求当它以频率 ω 沿径向做简谐振动时的辐射场, 并解释该结果。

5.8 已知一无穷长载流直导线的电流为 $I(t) = q_0 \delta(t)$, 求磁矢势及电磁场分布。

5.9 有一半径为 R 的飞轮, 在其边缘上均匀分布有总电量为 Q 的电荷。求当它以恒定角速度 ω 旋转时的辐射场。

5.10 在一根长 5m 的天线中, 通有均方根值为 5A、振荡频率为 1000kHz 的电流。求单位时间辐射能量的平均值。

5.11 在与电偶极矩垂直的方向上, 相距 100km 处测得电场强度的振幅为 $100\mu\text{V/m}$ 。求电偶极子的总平均辐射功率。

5.12 带电量为 q 的粒子, 以恒定的角速度 ω 沿半径为 a 的圆周转动, 若 $\omega \ll c/a$, 求电偶极辐射的场强、能流及平均功率。

5.13 在位于原点处沿 z 轴方向放置的一根线段 dl 中输入交变电流 $I = I_0 \cos \omega t$ 。求辐射场中任一点的磁矢势、电场强度、磁感应强度及平均辐射功率。

* 5.14 在一半径为 a 的圆电流圈中输入振荡电流 $I = I_0 \cos \omega t$, 若 $a\omega \ll c$, 求此电流圈的辐射场强、能流及功率。

* 5.15 有一半径为 a 的均匀永磁体, 磁化强度为 \mathbf{M} , 当它以恒定的角速度 ω 绕通过球心且与 \mathbf{M} 垂直的轴旋转时, 若 $a\omega \ll c$, 求其辐射场强和能流密度。

* 5.16 有一磁化强度为 \mathbf{M} 、半径为 a 的均匀磁化球体。它以恒定的角速度 ω 转动, 转轴通过球心但与 \mathbf{M} 方向成 ϕ_0 角, 当 $a\omega \ll c$ 时, 求辐射场强、能流和辐射功率。

* 5.17 有一质量为 m 、电量为 q 的粒子, 以速度 v 从一个固定不动的带电为 q_1 的粒子附近通过。它们之间的最近距离为 a , q 的运动轨迹为直线。求该运动粒子因电偶极辐射所损失的总能量。

