

A large, stylized white number '03' is centered within a light gray circle. The '0' is a thick ring, and the '3' is a solid, rounded shape. Inside the '0' ring, the text '第3章' is written in black.

第3章

一元积分学

专题 12 变限函数

李白是独一无二的,他的文字无处不弥漫着他生命与个性的独特气息。他的诗,七分酿成了月光,余下的三分啸成剑气,绣口一吐,就半个盛唐。变限函数也是如此,不仅独一无二,而且无处不在,如李白,绣口一吐,就是半个高数。

14. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 点及某邻域内二阶导连续,又设 $f(0)=f'(0)=0$,

$$f''(0) \neq 0, \text{求极限 } I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x \int_0^x f(x-t)dt}.$$





15. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} dt \int_{\sqrt{t}}^x \arctan(1+t) du}{x \sqrt{\cos x} - x}$ 。

16. 设函数 $f(x) = \int_0^1 |t^2 - x^2| dt$,
- (1) 求 $f'(x)$ 并求 $f(x)$ 的最小值。
 - (2) 求函数 $f(x)$ 是否存在拐点。
 - (3) 求积分 $\int_0^1 f(x) dx$ 。



专题 13 积分审敛

考哥说明



反常积分从诞生的那一天开始便是众多考生的噩梦。反常积分的计算不难,难在积分审敛。本专题汇总了 4 类核心考法。掌握这 4 类考法的考生,在考场之上必能心诗飞逸九重天。



17. 关于反常积分,下列说法正确的个数为()。

(1) 设 m, n 是正整数,则反常积分 $\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$ 的收敛性与 m, n 的取值均无关。

(2) 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}} & 1 < x < e \\ \frac{1}{x \ln^{\alpha+1} x} & x \geq e \end{cases}$, 若反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 收敛,则 $0 < \alpha < 2$ 。

(3) 反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x(\ln x)^k}{2+x^2} dx (k \in (-\infty, +\infty))$ 的敛散性与 k 无关。

(4) 设 m, n 均为正数,若反常积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^n x \cos^m x}$ 收敛,则 $m < 1$, 且 $n < 1$ 。

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

专题 14 分部积分

分部积分是积分夜空中最亮的星,命题人对此一往情深,套路还固定,十分善良。本题融合 4 道真题,总结了分部积分的核心考法,并加入一个十分有用但易忽略的小技巧,使同学们既能统筹全局,又能狠抓细节。



18. 计算下列积分:

(1) 计算 $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx$, 其中 $f(x) = \int_1^x \frac{\arcsin \sqrt{t} + \ln t}{t} dt$ 。

(2) 设 $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{\pi - t} dt$, 求 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的平均值。



专题 15 定积分求立体体积



柱壳法与圆盘法是两大基本方法,复杂旋转体考虑大体积减小体积。本题融合了深受命题人喜爱的 $\ln x$ 函数及其切线方程、方程根的个数、形心坐标等。小白不可绕行。



19. 设 $f(x) = \ln x$, 直线 L 为曲线 $f(x)$ 过原点的切线, 其函数表达式记为 $g(x)$, 曲线 $f(x)$ 与直线 L 及 x 轴围成的图形记为 D 。

- (1) 方程 $f(x) = g(x) - \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} \, dx$ 有几个不同的实根?
- (2) 求图形 D 分别绕 x 轴、 $x = e$ 旋转一周所得旋转体的体积。
- (3) 求图形 D 的形心坐标。

20. 对数螺线 $r = e^\theta \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$, 在点 $(r, \theta) = \left(e^{\frac{\pi}{2}}, \frac{\pi}{2}\right)$ 处的切线为 L ,

(1) 求切线 L 的直角坐标方程。(数学三不要求)

(2) 求对数螺线、极轴、 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 围成图形的面积。

(3) 求此段对数螺线的弧长。(数学三不要求)



专题 16 有理函数积分



有理函数积分在许多场合作为绿叶考查。近年来,命题人有将有理积分作为红花的趋势。暇点函数法与待定系数法是两大方法,两者犹如大炮与步枪。战斗开始后,先用炮兵火力压制,继而步兵冲锋。当然,有时仅炮兵足矣。

21. 求不定积分 $\int \frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)} dx$ 。

