

路漫漫其修远兮，吾将上下而求索。

——战国·屈原

离散时间傅里叶变换是将离散时间信号从时域映射到频域的重要手段，且映射结果有明确的物理意义，它是数字信号处理技术的基础，在信号分析、系统分析和系统设计等方面扮演着重要的角色。由于离散时间信号的自变量定义在整数域上，使离散时间傅里叶变换不同于连续时间傅里叶变换。本章主要讨论离散时间傅里叶变换的基本概念和主要性质。首先，给出离散时间傅里叶变换及其反变换；然后，论述离散时间傅里叶变换的存在条件和特殊序列的傅里叶变换；其次，论述离散时间傅里叶变换的运算性质；最后，论述利用离散时间傅里叶变换分析线性时不变系统的基本方法。

3.1 DTFT 的定义和条件

离散时间傅里叶变换 (Discrete Time Fourier Transform, DTFT) 是频谱分析、系统分析、系统设计等的重要工具，它以完备正交函数集 $\{e^{j\omega n} | n \in \mathbb{Z}\}$ 为基础对离散时间信号 (序列) 进行正交展开，而序列的时域离散性使 DTFT 有别于连续时间傅里叶变换 (Continuous Time Fourier Transform, CTFT)。

3.1.1 DTFT 的定义

序列 $x[n]$ 的离散时间傅里叶变换定义为

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \quad (3-1)$$

通常称 $X(e^{j\omega})$ 为频谱密度 (简称频谱)，它是数字频率 ω 的连续函数。 $X(e^{j\omega})$ 的离散时间傅里叶反变换 (Inverse Discrete Time Fourier Transform, IDTFT) 可以表示为

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega \quad (3-2)$$

为了证明式(3-2)是式(3-1)的反变换，将式(3-1)两边乘以 $e^{j\omega m}$ ，同时在 $[-\pi, \pi]$ 内求积

分, 可以得到

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega m} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \right) e^{j\omega m} d\omega \quad (3-3)$$

如果式(3-1)右边括号中的求和项一致收敛于 $X(e^{j\omega})$, 即满足一致收敛条件

$$\lim_{M \rightarrow \infty} |X(e^{j\omega}) - X_M(e^{j\omega})| = 0, \quad X_M(e^{j\omega}) = \sum_{n=-M}^M x[n] e^{-j\omega n} \quad (3-4)$$

则根据级数理论, 可以交换式(3-3)右边的积分与求和的次序, 即

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega m} d\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(m-n)} d\omega \right) \quad (3-5)$$

根据复指数序列的运算性质, 式(3-5)右边括号中的积分项为

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(m-n)} d\omega = \delta[m-n] = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases} \quad (3-6)$$

将式(3-6)代入式(3-5), 可以得到

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega m} d\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \delta[m-n] = x[m] \quad (3-7)$$

再将式(3-7)中的变量 m 替换成变量 n , 即得到式(3-2)给出的表达式。

因此, 式(3-1)和式(3-2)构成了时域和频域之间可逆变换。称式(3-2)为合成公式, 表明 $x[n]$ 是由频率位于 $[-\pi, \pi]$ 内的无限多个复指数序列(频率分量)经过叠加运算(积分)得到。称式(3-1)为分析公式, 表明通过分析 $x[n]$ 中包含的频率分量, 可以确定合成 $x[n]$ 时, 每个频率分量的相对大小。也就是说, $x[n]$ 由无限小的复指数分量 $\frac{1}{2\pi} e^{j\omega n} d\omega$ 叠加而成, 而每个复指数分量的相对大小取决于 $X(e^{j\omega})$, 且 ω 位于 $[-\pi, \pi]$ 。

序列 $x[n]$ 的离散时间傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 既是关于 ω 的连续函数, 又是以 2π 为周期的周期函数, 即满足条件 $X(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega+2\pi)})$ 。简要证明如下:

$$\begin{aligned} X(e^{j(\omega+2\pi)}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j(\omega+2\pi)n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \cdot e^{-j2\pi n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \cdot (e^{j2\pi n})^{-1} = X(e^{j\omega}) \cdot 1 = X(e^{j\omega}) \end{aligned} \quad (3-8)$$

由于 $X(e^{j\omega})$ 是以 2π 为周期的连续函数, 因此可以将式(3-1)看作 $X(e^{j\omega})$ 的傅里叶级数展开式, 而 $x[n]$ 是傅里叶级数的展开式系数。虽然任何长度为 2π 的区间都是式(3-2)的可用积分范围, 但是将 ω 限定在 $[-\pi, \pi]$ 或 $[0, 2\pi]$ 内会更加简洁。

通常 $X(e^{j\omega})$ 是关于 ω 的复函数, 可以将 $X(e^{j\omega})$ 表示成直角坐标形式, 即

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega}) \quad (3-9)$$

其中: $X_R(e^{j\omega}) \in \mathbb{R}$ 是实部, 是关于 ω 的偶函数; $X_I(e^{j\omega}) \in \mathbb{R}$ 是虚部, 是关于 ω 的奇函数。与此同时, 还可以将 $X(e^{j\omega})$ 表示成极坐标形式, 即

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j\angle X(e^{j\omega})} \quad (3-10)$$

其中: $|X(e^{j\omega})| (\geq 0)$ 为幅度, 是关于 ω 的偶函数, 反映序列的幅频特性; $\angle X(e^{j\omega}) \in \mathbb{R}$ 为相位, 是关于 ω 的奇函数, 反映序列的相频特性。在实际应用中, 称 $X(e^{j\omega})$ 为傅里叶谱, 称 $|X(e^{j\omega})|$ 为幅度谱, 称 $|\angle X(e^{j\omega})|$ 为相位谱。

特别地, $X_R(e^{j\omega})$ 、 $X_I(e^{j\omega})$ 、 $|X(e^{j\omega})|$ 和 $\angle X(e^{j\omega})$ 都是以 2π 为周期的连续函数。在 $\angle X(e^{j\omega})$ 上增加 2π 的整数倍, 不会影响用式(3-10)表示 $X(e^{j\omega})$ 。在实际应用中, 只能计算出 $\angle X(e^{j\omega})$ 位于 $[-\pi, \pi]$ 或 $[0, 2\pi]$ 内的相位主值, 而无法消除 $\angle X(e^{j\omega})$ 关于 2π 的模糊性。

3.1.2 一致收敛条件

虽然离散时间傅里叶变换的定义式(3-1)给出了计算频谱的方法, 但是并非任意序列 $x[n]$ 都存在频谱, 讨论频谱的存在问题即讨论式(3-1)右边级数的收敛问题。如果该级数收敛, 则对于所有的 ω 值, 必须满足条件 $|X(e^{j\omega})| < \infty$ 。根据式(3-1)可以得到

$$|X(e^{j\omega})| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| |e^{-j\omega n}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| = S \quad (3-11)$$

式(3-11)表明: 如果 $S < \infty$, 则 $|X(e^{j\omega})| < \infty$ 。也就是说, 如果 $x[n]$ 是绝对可求和的, 则 $X(e^{j\omega})$ 一定存在, 即 $x[n]$ 的绝对可求和是 $X(e^{j\omega})$ 存在的充分条件。因此, 当 $S < \infty$ 时, 式(3-1)右边级数一致收敛于 $X(e^{j\omega})$, 即对于所有的 ω 值满足条件

$$\lim_{M \rightarrow \infty} |X(e^{j\omega}) - X_M(e^{j\omega})| = 0, \quad X_M(e^{j\omega}) = \sum_{n=-M}^M x[n] e^{-j\omega n} \quad (3-12)$$

例 3.1 单位脉冲序列的离散时间傅里叶变换: 计算单位脉冲序列 $x[n] = \delta[n]$ 的离散时间傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$, 绘制幅度谱 $|X(e^{j\omega})|$ 和相位谱 $\angle X(e^{j\omega})$ 。

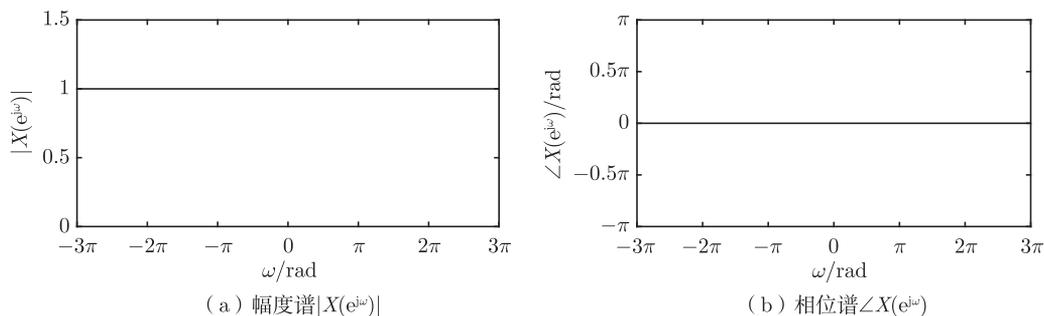
解 单位脉冲序列定义为

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \quad (3-13)$$

将 $x[n] = \delta[n]$ 代入式(3-1)可以得到

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] e^{-j\omega n} = \delta[0] e^{-j\omega 0} = 1 \quad (3-14)$$

根据式(3-14)得到的幅度谱 $|X(e^{j\omega})|$ 和相位谱 $\angle X(e^{j\omega})$ 如图 3-1所示, 在所有频率上 $|X(e^{j\omega})| = 1$ 且 $\angle X(e^{j\omega}) = 0$ 。

图 3-1 单位脉冲序列 $\delta[n]$ 的幅度谱和相位谱

例 3.2 矩形序列的离散时间傅里叶变换：计算长度为 N 的矩形序列 $x[n] = R_N[n]$ 的频率响应 $X(e^{j\omega})$ ；给出当 $N = 5$ 时的频率特性，包括 $X_R(e^{j\omega})$ 、 $X_I(e^{j\omega})$ 、 $|X(e^{j\omega})|$ 和 $\angle X(e^{j\omega})$ 。

解 长度为 N 的矩形序列定义为

$$x[n] = R_N[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (3-15)$$

将 $x[n] = R_N[n]$ 代入式(3-1)可以得到

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_N[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} 1 \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} (e^{-j\omega})^n \quad (3-16)$$

式(3-16)是等比数列的 N 项求和形式，求和结果可以表示为

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1 - e^{-jN\omega}}{1 - e^{-j\omega}} = e^{-j(N-1)\omega/2} \cdot \frac{\sin(N\omega/2)}{\sin(\omega/2)} \quad (3-17)$$

根据式(3-17)可以得到 $X(e^{j\omega})$ 的实部和虚部，即

$$X_R(e^{j\omega}) = \cos\left(\frac{N-1}{2}\omega\right) \frac{\sin(N\omega/2)}{\sin(\omega/2)} \quad (3-18a)$$

$$X_I(e^{j\omega}) = -\sin\left(\frac{N-1}{2}\omega\right) \frac{\sin(N\omega/2)}{\sin(\omega/2)} \quad (3-18b)$$

以及幅度谱和相位谱，即

$$|X(e^{j\omega})| = \left| \frac{\sin(N\omega/2)}{\sin(\omega/2)} \right| \quad (3-19a)$$

$$\angle X(e^{j\omega}) = -\frac{N-1}{2}\omega + \arg\left(\frac{\sin(N\omega/2)}{\sin(\omega/2)}\right) \quad (3-19b)$$

长度 $N = 5$ 的矩形序列 $R_5[n]$ 如图 3-2(a) 所示, 实函数 $X_A(e^{j\omega}) = \sin(N\omega/2)/\sin(\omega/2)$ 如图 3-2 (b) 所示。根据式(3-18)得到的实部 $X_R(e^{j\omega})$ 如图 3-2 (c) 所示, 它关于 $\omega = 0$ 呈偶对称; 虚部 $X_I(e^{j\omega})$ 如图 3-2 (d) 所示, 它关于 $\omega = 0$ 呈奇对称。根据式(3-19)得到的幅频谱 $|X(e^{j\omega})|$ 如图 3-2 (e) 所示, 它关于 $\omega = 0$ 呈偶对称; 相位谱 $\angle X(e^{j\omega})$ 如图 3-2 (f) 所示, 它关于 $\omega = 0$ 呈奇对称, 且存在着关于 2π 的模糊性。

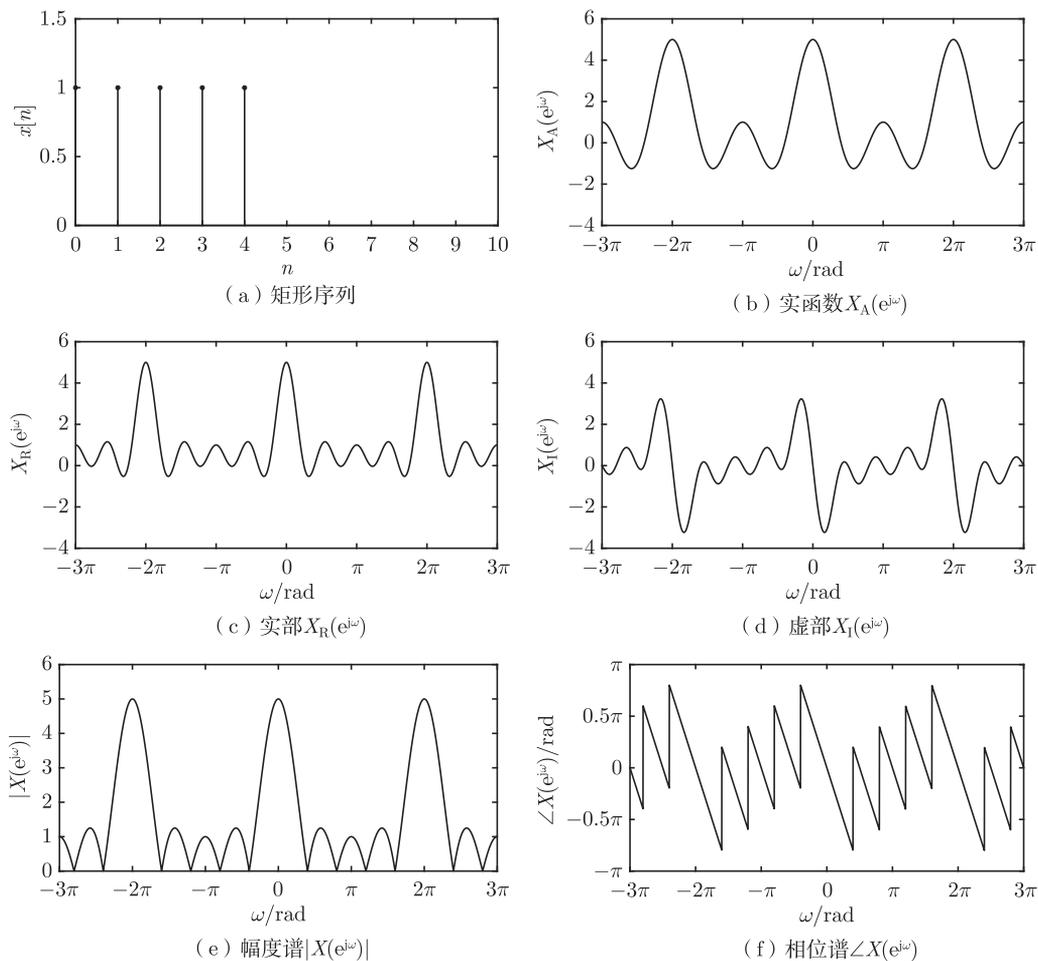


图 3-2 矩形序列 $R_N[n]$ 及其频率特性 ($N = 5$)

例 3.3 指数序列的离散时间傅里叶变换: 计算序列 $x[n] = \alpha^n u[n]$ 的离散时间傅里叶变换, 绘制当 $\alpha = 0.8$ 和 $\alpha = -0.8$ 时的频谱 $X(e^{j\omega})$ 。

解 将 $x[n] = \alpha^n u[n]$ 代入式(3-1)可以得到

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^n u[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha e^{-j\omega})^n \quad (3-20)$$

式(3-20)是公比为 $\alpha e^{-j\omega}$ 的等比数列。如果 $|\alpha e^{-j\omega}| < 1$, 即 $|\alpha| < 1$, 则 $x[n] = \alpha^n u[n]$ 是

绝对可求和的序列，即存在频谱 $X(e^{j\omega})$ 。利用等比序列的求和公式，可以得到

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}}, \quad |\alpha| < 1 \quad (3-21)$$

将欧拉公式 $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$ 用于式(3-21)，可以得到 $X(e^{j\omega})$ 的实部和虚部，即

$$X_R(e^{j\omega}) = \frac{1 - \alpha \cos \omega}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \omega} \quad (3-22a)$$

$$X_I(e^{j\omega}) = \frac{-\alpha \sin \omega}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \omega} \quad (3-22b)$$

以及幅度和相位，即

$$|X(e^{j\omega})| = \frac{1}{[1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \omega]^{1/2}} \quad (3-23a)$$

$$\angle X(e^{j\omega}) = \arctan \left(\frac{-\alpha \sin \omega}{1 - \alpha \cos \omega} \right) \quad (3-23b)$$

当 $\alpha = 0.80$ 和 $\alpha = -0.80$ 时， $x[n] = \alpha^n u[n]$ 的波形分别如图 3-3 (a) 和图 3-3 (b) 所示。实部 $X_R(e^{j\omega})$ 和虚部 $X_I(e^{j\omega})$ 分别如图 3-3 (c) 和图 3-3 (d) 所示，它们分别关于 $\omega = 0$ 呈偶对称和奇对称。幅度 $|X(e^{j\omega})|$ 和相位 $\angle X(e^{j\omega})$ 分别如图 3-3 (e) 和图 3-3 (f) 所示，它们分别关于 $\omega = 0$ 呈偶对称和奇对称。由于幅度-相位的表示方法有明确的物理意义，因此在工程实践中的应用更加广泛。

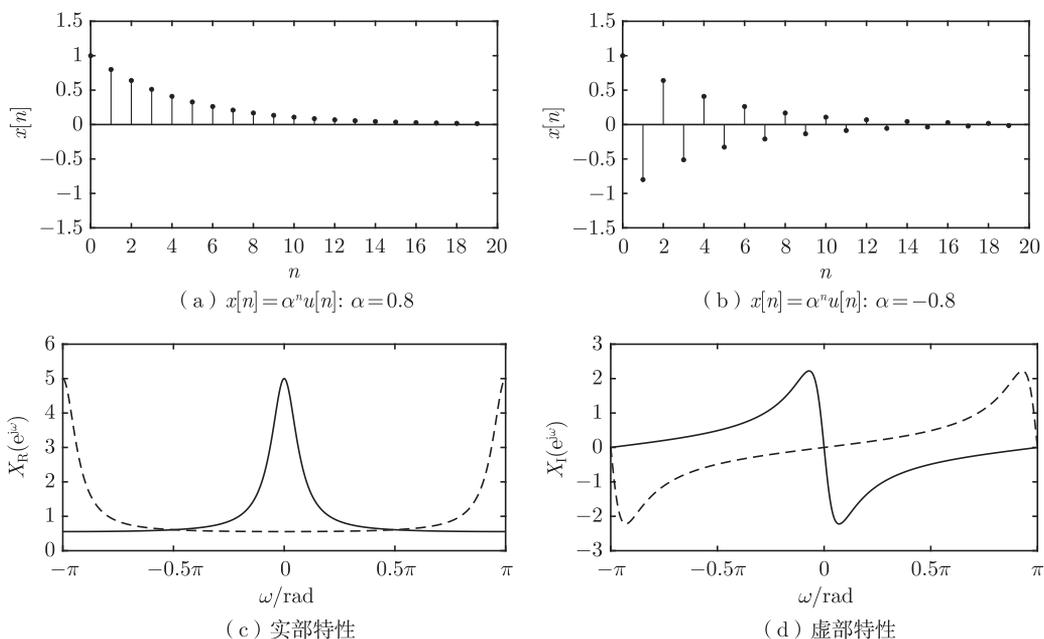


图 3-3 序列 $x[n] = \alpha^n u[n]$ 及其频率特性 (实线代表 $\alpha = 0.80$, 虚线代表 $\alpha = -0.80$)

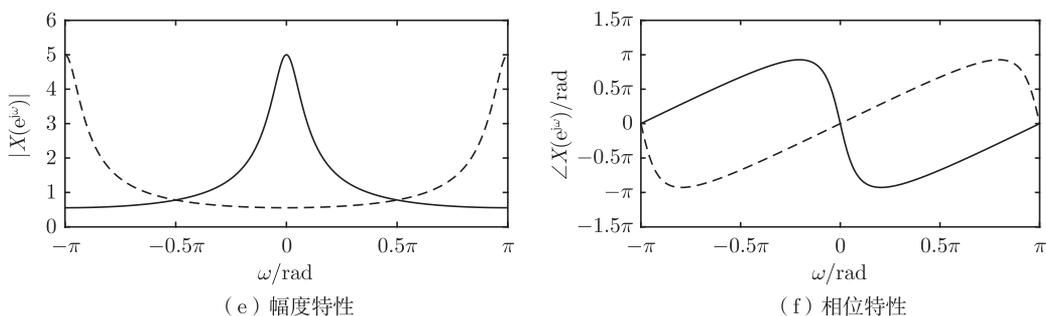


图 3-3 (续)

3.1.3 均方收敛条件

根据 3.1.2 节可知：序列 $x[n]$ 的绝对可求和是离散时间傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 存在的充分条件，如果 $X(e^{j\omega})$ 的傅里叶级数的展开式系数

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (3-24)$$

存在，则 $X(e^{j\omega})$ 可以用傅里叶级数表示，但是式(3-1)右边级数可能不是一致收敛的。如果 $x[n]$ 不满足绝对可求和条件，而满足相对松弛的平方可求和条件

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty \quad (3-25)$$

即 $x[n]$ 在时域的总能量是有限值，则式(3-1)右边的级数按照均方收敛于 $X(e^{j\omega})$ ，即

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega}) - X_M(e^{j\omega})|^2 d\omega = 0, \quad X_M(e^{j\omega}) = \sum_{n=-M}^M x[n] e^{-j\omega n} \quad (3-26)$$

特别地，式(3-25)所示序列 $x[n]$ 的平方可求和（总能量是有限值）条件，也是 $X(e^{j\omega})$ 存在的充分条件。此外，根据 Cauchy-Schwarz 不等式可以得到

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 \leq \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| \right)^2 \quad (3-27)$$

根据式(3-27)可知：如果 $x[n]$ 是绝对可求和的，则它一定是平方可求和的。也就是说，如果级数是一致收敛的，则一定是均方收敛的，反之不一定成立。

例 3.4 理想低通滤波器的均方收敛特性：讨论截止频率是 ω_c 的理想低通数字滤波器 $H_{lp}(e^{j\omega})$ 的均方收敛特性。

解 理想低通滤波器的频率响应表示为

$$H_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \omega_c \leq |\omega| \leq \pi \end{cases} \quad (3-28)$$

其中： ω_c 是截止频率。将式(3-28)代入式(3-2)，可以得到理想单位脉冲响应

$$\begin{aligned} h_{lp}[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{lp}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{jn} (e^{j\omega_c n} - e^{-j\omega_c n}) = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}, \quad -\infty < n < \infty \end{aligned} \quad (3-29)$$

根据式(3-29)可知：当 $n < 0$ 时， $h_{lp}[n]$ 不为零，即 $h_{lp}[n]$ 是非因果系统。特别地，由于 $\sin(\omega_c n)$ 在区间 $[-1, 1]$ 取值，因此当 $n \rightarrow \infty$ 时， $h_{lp}[n]$ 以 $1/n$ 形式趋近于零，即 $h_{lp}[n]$ 不是绝对可求和的。因此， $h_{lp}[n]$ 的离散时间傅里叶变换

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{lp}[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n} e^{-j\omega n} \quad (3-30)$$

无法一致收敛于 $H_{lp}(e^{j\omega})$ ，这是 $H_{lp}(e^{j\omega})$ 在 $\omega = \omega_c$ 位置不连续的必然结果。

但是， $h_{lp}[n]$ 是平方可求和的，即总能量是有限的^①，即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_{lp}[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n} \right)^2 = \frac{\omega_c}{\pi} < \infty \quad (3-31)$$

式(3-31)使得式(3-30)右边的级数在均方意义下收敛于 $H_{lp}(e^{j\omega})$ ，即

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega}) - H_M(e^{j\omega})|^2 d\omega = 0, \quad H_M(e^{j\omega}) = \sum_{n=-M}^M \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n} e^{-j\omega n} \quad (3-32)$$

当截止频率 $\omega_c = 0.5\pi$ 时，理想低通滤波器 $H_{lp}(e^{j\omega})$ 及其单位脉冲响应 $h_{lp}[n]$ 分别如图 3-4 (a) 和图 3-4 (b) 所示。当 M 取不同值时， $H_M(e^{j\omega})$ 的特性曲线如图 3-4 (c) ~ 图 3-4 (f) 所示。随着 M 值的增大， $H_M(e^{j\omega})$ 在 $\omega = \omega_c$ 位置的振荡加剧，但是波纹幅度没有增加。当 $M \rightarrow \infty$ 时，最大振荡幅度（波纹）并不趋近于零，但是振荡行为逐渐收敛于 $\omega = \pm\omega_c$ 位置。虽然 $H_M(e^{j\omega})$ 不能一致收敛于 $H_{lp}(e^{j\omega})$ ，但是 $h_{lp}[n]$ 是平方可求和的，使得 $H_M(e^{j\omega})$ 在均方意义下收敛于 $H_{lp}(e^{j\omega})$ 。也就是说，当 $M \rightarrow \infty$ 时 $H_{lp}(e^{j\omega})$ 和 $H_M(e^{j\omega})$ 仅在 $\omega = \pm\omega_c$ 位置存在差异，即 $H_M(e^{j\omega})$ 在均方误差为零意义上收敛于 $H_{lp}(e^{j\omega})$ 。

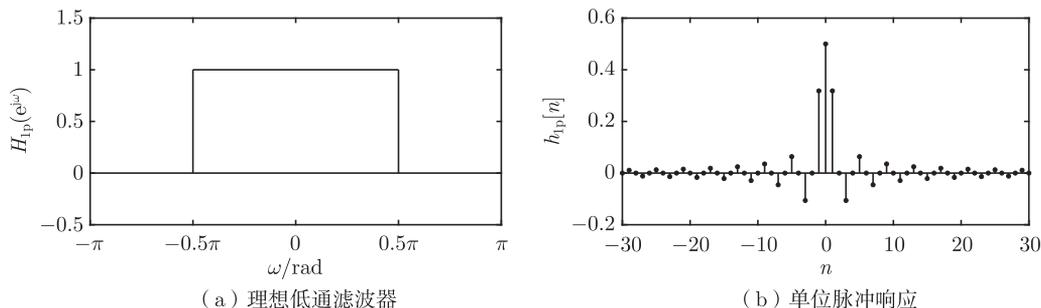


图 3-4 理想低通滤波器 $H_{lp}(e^{j\omega})$ 的均方收敛特性 ($\omega_c = 0.5\pi$)

^① 利用 Parseval 定理可以证明式(3-31)，将在 3.3 节论述 Parseval 定理。

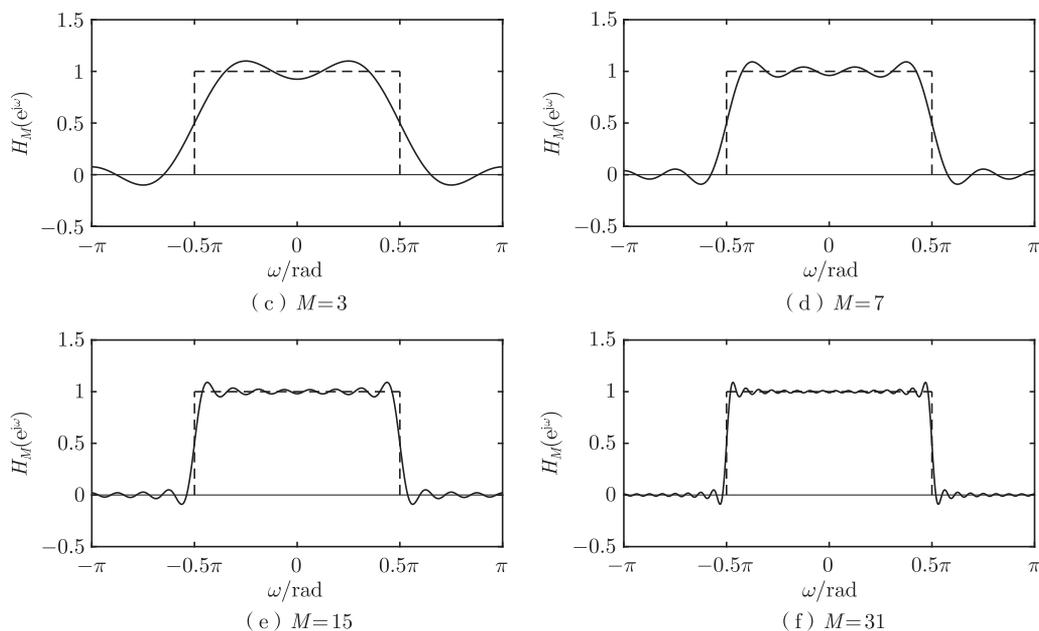


图 3-4 (续)

3.2 周期序列的 DTFT

根据 3.1 节可知：序列 $x[n]$ 的一致收敛和均方收敛都是离散时间傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 存在的充分条件。如果 $x[n]$ 是周期序列，即对于所有的 n 值，满足条件 $x[n] = x[n+N]$ ($N \in \mathbb{Z}^+$)，则当 $n \rightarrow \infty$ 时， $x[n]$ 既不是绝对可求和的，又不是平方可求和的，使得 $X(e^{j\omega})$ 既不是一致收敛的，也不是均方收敛的。为了描述周期序列的频率特性，在频域中引入了冲激函数 $\delta(\omega)$ ^①，使周期序列也存在着离散时间傅里叶变换（DTFT）。本节仅讨论 4 种特殊周期序列的 DTFT，对于任意周期序列的 DTFT，将在离散傅里叶级数的相关章节中讨论。

3.2.1 复指数和正弦序列

复指数序列 $e^{j\omega_0 n}$ 和正弦序列 $\cos(\omega_0 n)$ 或 $\sin(\omega_0 n)$ 是常见的基础序列，且可以利用欧拉公式进行相互转换。将复指数和正弦序列纳入离散时间傅里叶变换的分析体系，对深入了解数字频谱概念和拓展 DTFT 的分析范围非常重要。

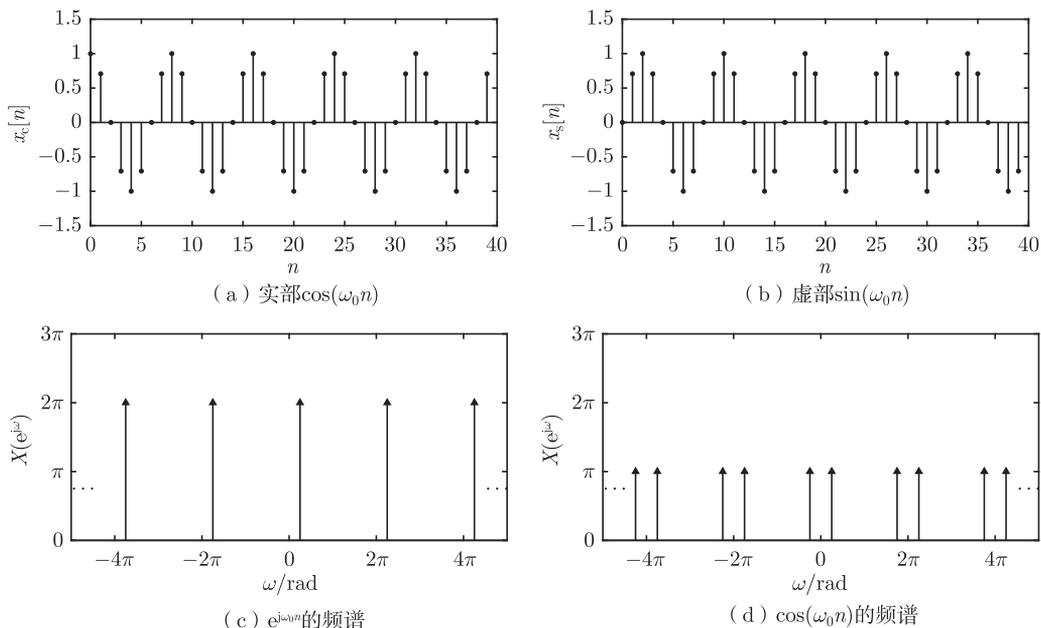
1. 复指数序列

频率为 ω_0 的复指数序列定义为

$$x[n] = e^{j\omega_0 n} = \cos(\omega_0 n) + j \sin(\omega_0 n) \quad (3-33)$$

当 $\omega_0 = 0.25\pi$ 时，复指数序列 $e^{j\omega_0 n}$ 的实部 $x_c[n] = \cos(\omega_0 n)$ 和虚部 $x_s[n] = \sin(\omega_0 n)$ 分别如图 3-5 (a) 和图 3-5 (b) 所示。

^① 关于冲激函数的定义和性质，可以参见《信号与系统》教材。

图 3-5 复指数序列和正弦序列的频谱结构 ($\omega_0 = 0.25\pi$)

复指数序列 $x[n] = e^{j\omega_0 n}$ 的离散时间傅里叶变换表示为

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k) \quad (3-34)$$

根据式(3-34)可知, $X(e^{j\omega})$ 是以 ω_0 为中心, 以 2π 的整数倍为间隔的一组冲激函数, 且每个冲激函数的积分面积是 2π 。当 $\omega_0 = 0.25\pi$ 时, 复指数序列的频谱如图 3-5 (c) 所示。可以看出, $X(e^{j\omega})$ 在频域上呈现以 2π 为周期的“线谱”结构。

下面证明式(3-33)和式(3-34)可以构成可逆关系。将式(3-34)代入离散时间傅里叶反变换的定义式(3-2), 可以得到

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k) \right) e^{j\omega n} d\omega \quad (3-35)$$

由于式(3-35)限定了积分区间 $[-\pi, \pi]$, 故只考虑当 $k = 0$ 时的情况, 即

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2\pi\delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega n} d\omega = e^{j\omega_0 n} \quad (3-36)$$

因此, 式(3-33)和式(3-34)构成了离散时间傅里叶变换与反变换关系。

2. 正弦序列

频率为 ω_0 的正弦序列 $\cos(\omega_0 n)$ 和 $\sin(\omega_0 n)$ 是复指数序列 $e^{j\omega_0 n}$ 的实部和虚部, 根据欧拉公式, 用复指数序列将它们表示为

$$x_c[n] = \cos(\omega_0 n) = \frac{e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}}{2} \quad (3-37a)$$

$$x_s[n] = \sin(\omega_0 n) = \frac{e^{j\omega_0 n} - e^{-j\omega_0 n}}{2j} \quad (3-37b)$$

因此, 根据式(3-33)和式(3-34)所示的可逆变换关系, 可以得到

$$X_c(e^{j\omega}) = \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k) + \delta(\omega + \omega_0 + 2\pi k)] \quad (3-38a)$$

$$X_s(e^{j\omega}) = -j\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k) - \delta(\omega + \omega_0 + 2\pi k)] \quad (3-38b)$$

根据式(3-38)可知, $X_c(e^{j\omega})$ 和 $X_s(e^{j\omega})$ 也是以 $\pm\omega_0$ 为中心的, 以 2π 的整数倍为间隔的一组冲激函数。当 $\omega_0 = 0.25\pi$ 时, 余弦序列 $x_c[n] = \cos(\omega_0 n)$ 的频谱 $X_c(e^{j\omega})$ 如图 3-5 (d) 所示, 可以看出, $X_c(e^{j\omega})$ 在频域上呈现以 2π 为周期的“线谱”结构。

特别地, 对于序列 $e^{j\omega_0 n}$ 、 $\cos(\omega_0 n)$ 和 $\sin(\omega_0 n)$ 而言, 只有当 $2\pi/\omega_0$ 为有理数时, 它们才是周期序列 (周期 $N = (2\pi/\omega_0)k$, $k \in \mathbb{Z}$)。由于上述内容没有限定 $2\pi/\omega_0$ 是否为有理数, 因此离散时间傅里叶变换结果的适用范围更为广泛。

3.2.2 单位脉冲的衍生序列

任意序列 $x[n]$ 可以表示为单位脉冲序列 $\delta[n]$ 的“平移-加权-求和”形式, 即

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k], \quad -\infty < n < \infty \quad (3-39)$$

因此, 利用式(3-39)可以构造出特殊的周期序列 (如单位值序列等), 它们在数字信号的时域和频域分析中占有独特的地位。

1. 单位值序列

单位值序列是幅值为 1 的序列, 如图 3-6 (a) 所示, 可以表示为

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-k] \quad (3-40)$$

或者表示成更简单的形式

$$x[n] = 1, \quad -\infty < n < \infty \quad (3-41)$$

由于 $x[n] = e^{j\omega_0 n}|_{\omega_0=0} = e^{j0} = 1$, 因此单位值序列是频率 $\omega_0 = 0$ 的复指数序列。将 $\omega_0 = 0$ 代入式 (3-1) 和式(3-34), 可以得到单位值序列 $x[n] = 1$ ($n \in \mathbb{Z}$) 的离散时间傅里叶变换

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega + 2\pi k) \quad (3-42)$$

根据式(3-42)可知, $X(e^{j\omega})$ 是以 $\omega = 0$ 为中心, 以 2π 为间隔的一组冲激函数, 且每个冲激函数的积分面积为 2π , 如图 3-6 (b) 所示, 它同样呈现以 2π 为周期的“线谱”特性。

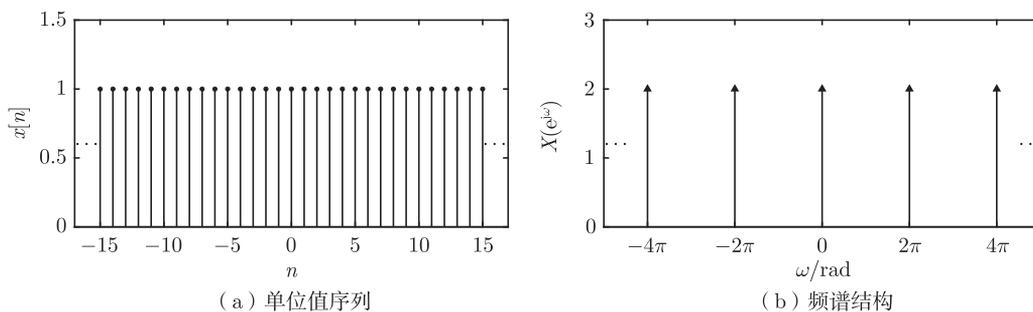


图 3-6 单位值序列及其频谱结构

2. 单位脉冲周期序列

周期为 N 的单位脉冲周期序列，可以表示为

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kN] \quad (3-43)$$

当 $N = 5$ 时，单位脉冲周期序列如图 3-7 (a) 所示。

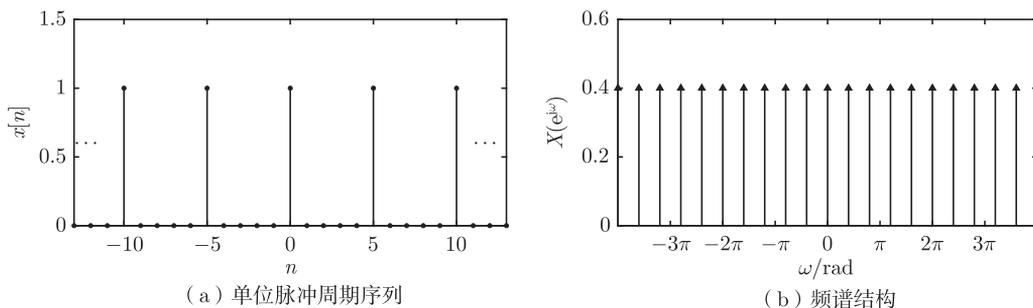


图 3-7 单位脉冲周期序列及其频谱结构

将式(3-43)代入式(3-1)，可以得到

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kN] \right) e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n - kN] e^{-j\omega n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega Nk} \end{aligned} \quad (3-44)$$

如果将式(3-44)的 ωN 看作整体，则式(3-44)表示单位值序列的离散时间傅里叶变换。因此，根据式(3-42)和式(3-44)可以得到

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega N + 2\pi k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(N(\omega + 2\pi k/N)) \quad (3-45)$$

再利用冲激函数的性质 $\delta(at) = \delta(t)/|a|$ ，根据式(3-45)可以得到

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{N} \delta\left(\omega + \frac{2\pi k}{N}\right) \quad (3-46)$$

由此可知, $X(e^{j\omega})$ 是以 $\omega = 0$ 为中心, 以 $\omega = 2\pi/N$ 为间隔的一组冲激函数, 且每个冲激函数的积分面积为 $2\pi/N$ 。当 $N = 5$ 时, $X(e^{j\omega})$ 的频谱结构如图 3-7 (b) 所示。比较图 3-6和图 3-7可以看出, 在时域和频域上, 单位值序列和单位脉冲周期序列存在着对偶关系。

利用复指数序列、正弦序列、单位值序列以及单位脉冲周期序列的离散时间傅里叶变换, 可以推导出满足 $x[n] = x[n + N](-\infty < n < \infty)$ 关系的任意周期序列的离散时间傅里叶变换, 并且可以用离散傅里叶级数 (DFS) 表示。这些内容超出本章范围, 在此不再赘述。典型序列的离散时间傅里叶变换如表 3-1所示。

表 3-1 典型序列的离散时间傅里叶变换

序列 $x[n]$	离散时间傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$
$\delta[n]$	1
$\delta[n - n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$
$1 \quad (-\infty < n < \infty)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega + 2\pi k)$
$u[n]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega + 2\pi k)$
$a^n u[n] \quad (a < 1)$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$
$(n + 1)a^n u[n] \quad (a < 1)$	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^2}$
$\frac{\sin \omega_c n}{\pi n}$	$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \omega < \omega_c \\ 0, & \omega_c < \omega \leq \pi \end{cases}$
$\frac{r^n \sin \omega_0 (n + 1)}{\sin \omega_0} u[n] \quad (r < 1)$	$\frac{1}{1 - 2r \cos \omega_0 e^{-j\omega} + r^2 e^{-j2\omega}}$
$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$	$\frac{\sin[\omega(M + 1)/2]}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega M/2}$
$e^{j\omega_0 n}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k)$
$\cos(\omega_0 n + \phi)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} [\pi e^{j\phi} \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k) + \pi e^{-j\phi} \delta(\omega + \omega_0 + 2\pi k)]$
$\sin(\omega_0 n + \phi)$	$-j \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\pi e^{j\phi} \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k) - \pi e^{-j\phi} \delta(\omega + \omega_0 + 2\pi k)]$

3.3 DTFT 的主要性质

离散时间傅里叶变换 (DTFT) 和连续时间傅里叶变换 (CTFT) 有很多类似的性质, 掌握它们可使离散时间信号分析和处理更加快捷。为了论述方便, 用符号 \mathcal{F} 代表 DTFT 和

IDTFT 的可逆变换关系, 序列 $x[n]$ 与其频谱 $X(e^{j\omega})$ 的对应关系记作 $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega})$ 。

3.3.1 基本性质

1. 线性性质

如果 $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega})$, $y[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(e^{j\omega})$, α 和 β 是常系数, 则

$$\alpha x[n] + \beta y[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \alpha X(e^{j\omega}) + \beta Y(e^{j\omega}) \quad (3-47)$$

式(3-47)表明, $x[n]$ 和 $y[n]$ 在时域上的线性组合对应着 $X(e^{j\omega})$ 和 $Y(e^{j\omega})$ 在频域上的线性组合。简要证明过程如下:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\alpha x[n] + \beta y[n])e^{-j\omega n} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\alpha x[n])e^{-j\omega n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\beta y[n])e^{-j\omega n} \\ &= \alpha \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} + \beta \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]e^{-j\omega n} = \alpha X(e^{j\omega}) + \beta Y(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

2. 时间平移

如果 $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega})$, 则

$$x[n-m] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega m} X(e^{j\omega}) \quad (3-48)$$

式(3-48)表明, $x[n]$ 在时域上平移 m 个单位, 对应着 $X(e^{j\omega})$ 在频域上产生 $-\omega m$ 的相位移位 (简称相移), 且相移大小与频率呈正比。简要证明过程如下:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-m]e^{-j\omega n} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-j\omega(m+k)} \\ &= e^{-j\omega m} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-j\omega k} = e^{-j\omega m} X(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

3. 时间翻转

如果 $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega})$, 则

$$x[-n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{-j\omega}) \quad (3-49)$$

式(3-49)表明, $x[n]$ 在时域上的翻转, 对应着 $X(e^{j\omega})$ 在频域上的翻转。简要证明过程如下:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n]e^{-j\omega n} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{j\omega k} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-j(-\omega)k} = X(e^{-j\omega}) \end{aligned}$$

如果 $x[n]$ 是实序列, 则 $x[-n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X^*(e^{j\omega})$, 即存在 $X^*(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega})$ 。由于 $|X(e^{j\omega})| = |X^*(e^{j\omega})|$, 因此实序列的时间翻转不改变幅度特性, 而只改变相位特性——相位值取负号或相位平移了 π 弧度 ($e^{j\pi} = -1$)。

4. 序列共轭

如果 $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega})$, 则

$$x^*[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X^*(e^{-j\omega}) \quad (3-50)$$

式(3-50)表明, $x[n]$ 在时域上取共轭, 对应着 $X(e^{j\omega})$ 在频域上翻转之后取共轭。简要证明过程如下:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n]e^{-j\omega n} &= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{j\omega n} \right)^* \\ &= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j(-\omega)n} \right)^* = X^*(e^{-j\omega}) \end{aligned}$$

5. 频率微分

如果 $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega})$, 则

$$nx[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} \quad (3-51)$$

式(3-51)表明, $x[n]$ 在时域上对下标值 n 的线性加权, 对应着 $X(e^{j\omega})$ 在频域上取一阶导数并乘以 j 因子。简要证明过程如下:

$$\begin{aligned} j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} &= j \frac{d}{d\omega} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \right) = j \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{d(e^{-j\omega n})}{d\omega} \\ &= j \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](-jn \cdot e^{-j\omega n}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx[n] \cdot e^{-j\omega n} \end{aligned}$$

6. 指数乘法

如果 $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega})$, 则

$$a^n x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X\left(\frac{e^{j\omega}}{a}\right) \quad (3-52)$$

式(3-52)表明, $x[n]$ 在时域上与指数序列 a^n 相乘, 对应着 $X(e^{j\omega})$ 在频域上用 $e^{j\omega}/a$ 代替 $e^{j\omega}$ 。简要证明过程如下:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (a^n x[n])e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \left(\frac{e^{j\omega}}{a}\right)^{-n} = X\left(\frac{e^{j\omega}}{a}\right)$$

7. 频率平移

如果 $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega})$, 则

$$e^{j\omega_0 n} x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j(\omega-\omega_0)}) \quad (3-53)$$

式(3-53)表明, $x[n]$ 与复指数序列 $e^{j\omega_0 n}$ 在时域上相乘, 对应着 $X(e^{j\omega})$ 在频域上产生 ω_0 的

频率平移（简称频移）。简要证明过程如下：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (e^{j\omega_0 n} x[n]) e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{-\infty} x[n] e^{-j(\omega-\omega_0)n} = X(e^{j(\omega-\omega_0)})$$

8. 时域卷积

如果 $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega})$, $y[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(e^{j\omega})$, 则

$$x[n] * y[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega}) \quad (3-54)$$

式(3-54)表明, 即 $x[n]$ 和 $y[n]$ 在时域上的卷积, 对应着 $X(e^{j\omega})$ 和 $Y(e^{j\omega})$ 在频域上的乘积。简要证明过程如下：

$$\begin{aligned} x[n] * y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega k} d\omega \right) y[n-k] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} y[n-k]e^{j\omega k} \right) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) [Y(e^{j\omega})e^{j\omega n}] d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})] e^{j\omega n} d\omega \end{aligned}$$

9. 频域卷积

如果 $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega})$, $y[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(e^{j\omega})$, 则

$$x[n]y[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) * Y(e^{j\omega}) \quad (3-55)$$

式(3-55)表明, $x[n]$ 和 $y[n]$ 在时域上的乘积, 对应着 $X(e^{j\omega})$ 和 $Y(e^{j\omega})$ 在频域上的卷积。简要证明过程如下：

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y[n]e^{-j\omega n} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})e^{j\theta n} d\theta \right) y[n]e^{-j\omega n} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]e^{-j(\omega-\theta)n} \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta = \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) * Y(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

10. Parseval 定理

如果 $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega})$, $y[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(e^{j\omega})$, 则

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})d\omega \quad (3-56)$$

式(3-56)表明, $x[n]$ 和 $y[n]$ 在时域上的内积, 对应着 $X(e^{j\omega})$ 和 $Y(e^{j\omega})$ 在频域上的内积。特别地, 当 $x[n] = y[n]$ 时, 由于 $|x[n]|^2 = x[n]x^*[n]$ 且 $|X(e^{j\omega})|^2 = X(e^{j\omega})X^*(e^{j\omega})$, 因此可以得到

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (3-57)$$

式(3-57)表明, $x[n]$ 在时域上的总能量等于 $X(e^{j\omega})$ 在频域上的总能量, 因此又称 Parseval 定理为能量守恒定理。通常称 $|X(e^{j\omega})|^2/(2\pi)$ 为能量谱密度, 代表了在频域上的能量分布。由于频谱函数具有周期为 2π 的特性, 因此在任意长度为 2π 区间内都可以求出频域的总能量。式(3-57)既是普适的能量守恒定律在数字信号处理领域的体现, 又是在时域和频域能够实现等效分析的理论依据。式(3-56)和式(3-57)的简要证明过程如下:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega \right)^* \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y^*(e^{j\omega}) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \right) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y^*(e^{j\omega})X(e^{j\omega})d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})] d\omega \end{aligned}$$

因此, 式(3-56)得证; 再令 $x[n] = y[n]$, 式(3-57)得证。

上述离散时间傅里叶变换的主要性质如表 3-2 所示。

表 3-2 离散时间傅里叶变换的基本性质

序 列	离散时间傅里叶变换
$x[n - n_0]$	$e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$
$x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$ (如果 $x[n] \in \mathbb{R}$, 则 $X^*(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega})$)
$a^n x[n]$	$X(e^{j\omega}/a)$
$e^{j\omega_0 n} x[n]$	$X(e^{j(\omega-\omega_0)})$
$nx[n]$	$j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
$ax[n] + by[n]$	$aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$
$x[n] * y[n]$	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
$x[n]y[n]$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$
Parseval 定理:	
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})d\omega$	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] ^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) ^2 d\omega$

3.3.2 对称性质

在离散时间傅里叶变换过程中，一般假定序列 $x[n]$ 是复序列（将实序列看作复序列的特殊情况）。将序列 $x[n]$ 表示成实部-虚部形式，即

$$x[n] = x_r[n] + jx_i[n] \quad (3-58)$$

其中

$$x_r[n] = \frac{1}{2} (x[n] + x^*[n]) \quad (3-59a)$$

$$x_i[n] = \frac{1}{2j} (x[n] - x^*[n]) \quad (3-59b)$$

通常称满足 $x_e[n] = x_e^*[-n]$ 关系的复序列为共轭对称序列，称满足 $x_o[n] = -x_o^*[-n]$ 关系的复序列为共轭反对称序列。任何复序列 $x[n]$ 都可以表示为共轭对称序列 $x_e[n]$ 和共轭反对称序列 $x_o[n]$ 的求和形式，即

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n] \quad (3-60)$$

其中： $x_e[n]$ 是偶函数， $x_o[n]$ 是奇函数，即

$$x_e[n] = \frac{1}{2} (x[n] + x^*[-n]) = x_e^*[-n] \quad (3-61a)$$

$$x_o[n] = \frac{1}{2} (x[n] - x^*[-n]) = -x_o^*[-n] \quad (3-61b)$$

同理，序列 $x[n]$ 的离散时间傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 也可以表示成实部-虚部形式，即

$$X(e^{j\omega}) = X_r(e^{j\omega}) + jX_i(e^{j\omega}) \quad (3-62)$$

其中： $X_r(e^{j\omega})$ 是偶函数， $X_i(e^{j\omega})$ 是奇函数，即

$$X_r(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} [X(e^{j\omega}) + X^*(e^{j\omega})] = X_r^*(e^{j\omega}) \quad (3-63a)$$

$$X_i(e^{j\omega}) = \frac{1}{2j} [X(e^{j\omega}) - X^*(e^{j\omega})] = -X_i^*(e^{j\omega}) \quad (3-63b)$$

还可以将 $X(e^{j\omega})$ 表示成共轭对称函数 $X_e(e^{j\omega})$ 和共轭反对称函数 $X_o(e^{j\omega})$ 的求和形式，即

$$X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{j\omega}) \quad (3-64)$$

其中： $X_e(e^{j\omega})$ 是偶函数， $X_o(e^{j\omega})$ 是奇函数，即

$$X_e(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} [X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})] = X_e^*(e^{-j\omega}) \quad (3-65a)$$

$$X_o(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} [X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})] = -X_o(e^{-j\omega}) \quad (3-65b)$$

如果将 $x[n]$ 和 $X(e^{j\omega})$ 的可逆变换关系表示为 $X(e^{j\omega}) = \text{DTFT}(x[n])$, 则利用式(3-1)可以得到: $X^*(e^{-j\omega}) = \text{DTFT}(x^*[n])$, $X(e^{-j\omega}) = \text{DTFT}(x[-n])$, $X^*(e^{j\omega}) = \text{DTFT}(x^*[-n])$ 。比较式(3-59)与式(3-65), 式(3-61)与式(3-63), 可以得到时域、频域对应关系如下:

$$X_e(e^{j\omega}) = \text{DTFT}(x_r[n]), \quad X_o(e^{j\omega}) = \text{DTFT}(jx_i[n]) \quad (3-66a)$$

$$X_r(e^{j\omega}) = \text{DTFT}(x_e[n]), \quad jX_i(e^{j\omega}) = \text{DTFT}(x_o[n]) \quad (3-66b)$$

式(3-66)给出了离散时间傅里叶变换的时域和频域对偶关系, 以此为基础可以推导出更多、更具体的对应关系, 如因果序列的对称关系等^①, 在此不再赘述。

特别地, 实序列 $x[n]$ 的离散时间傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 存在如下关系:

$$\text{Re}[X(e^{j\omega})] = \text{Re}[X(e^{-j\omega})], \quad \text{Im}[X(e^{j\omega})] = -\text{Im}[X(e^{-j\omega})] \quad (3-67a)$$

$$|X(e^{j\omega})| = |X(e^{-j\omega})|, \quad \arg[X(e^{j\omega})] = -\arg[X(e^{-j\omega})] \quad (3-67b)$$

式(3-67)表明, 当 $x[n] \in \mathbb{R}$ 时, $X(e^{j\omega})$ 的实部是偶函数, 虚部是奇函数; $X(e^{j\omega})$ 的幅度是偶函数, 相位是奇函数。在实际工程应用中, 经常使用式(3-67)检验 DTFT 结果的正确性。

离散时间傅里叶变换的对称性质如表 3-3 所示, 为简化求解过程提供了便捷工具。

表 3-3 离散时间傅里叶变换的对称性质

序号	序列	离散时间傅里叶变换
1	$x^*[n]$	$X^*(e^{-j\omega})$
2	$x^*[-n]$	$X^*(e^{j\omega})$
3	$\text{Re}(x[n])$	$X_e(e^{j\omega})$
4	$j\text{Im}(x[n])$	$X_o(e^{j\omega})$
5	$x_e[n]$	$X_R(e^{j\omega}) = \text{Re}(X(e^{j\omega}))$
6	$x_o[n]$	$jX_I(e^{j\omega}) = j\text{Im}(X(e^{j\omega}))$
7	$x[n] \in \mathbb{R}$	$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$
8	$x[n] \in \mathbb{R}$	$X_R(e^{j\omega}) = X_R(e^{-j\omega})$
9	$x[n] \in \mathbb{R}$	$X_I(e^{j\omega}) = -X_I(e^{-j\omega})$
10	$x[n] \in \mathbb{R}$	$ X(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega}) $
11	$x[n] \in \mathbb{R}$	$\angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega})$

^① 参见程佩青编著的《数字信号处理教程》(第五版), 清华大学出版社。

3.4 LTI 系统的频率响应

如果离散时间线性时不变系统的输入序列为 $x[n]$ ，单位脉冲响应为 $h[n]$ ，则输出序列是 $y[n] = x[n] * h[n]$ 。根据卷积的交换性质 ($x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$) 可知， $x[n]$ 和 $h[n]$ 在本质上是相同的，都是离散时间信号，即序列。因此，关于序列 $x[n]$ 的离散时间傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 的收敛性质、运算性质、对称性质等，同样适用于线性时不变 (LTI) 系统的单位脉冲响应 $h[n]$ ，也就是说，离散时间傅里叶变换为 LTI 系统分析提供了理论基础。

3.4.1 频率响应概念

如果 LTI 系统的单位脉冲响应为 $h[n]$ ，输入序列为 $x[n]$ ，则输出序列为

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \quad (3-68)$$

假定 $x[n]$ 是复指数序列 $e^{j\omega n}$ ，根据式(3-68)可以得到

$$\begin{aligned} y[n] &= h[n] * e^{j\omega n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{j\omega(n-k)} \\ &= e^{j\omega n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k} = H(e^{j\omega})e^{j\omega n} \end{aligned} \quad (3-69)$$

其中：

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n} \quad (3-70)$$

式(3-69)和式(3-70)表明：当 LTI 系统的输入是复指数序列 $e^{j\omega n}$ 时，输出是被 $H(e^{j\omega})$ 加权且频率相同的复指数序列，其中 $H(e^{j\omega})$ 是 $h[n]$ 的离散时间傅里叶变换。通常称 $e^{j\omega n}$ 为 LTI 系统的特征函数，称 $H(e^{j\omega})$ 为 LTI 系统的频率响应。利用离散时间傅里叶反变换公式(3-2)，可以依据 $H(e^{j\omega})$ 获得单位脉冲响应

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega \quad (3-71)$$

通常，LTI 系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$ 是与单位脉冲响应有关且与输入序列无关的复值函数，可以将 $H(e^{j\omega})$ 表示成实部-虚部形式，即

$$H(e^{j\omega}) = H_R(e^{j\omega}) + jH_I(e^{j\omega}) \quad (3-72)$$

其中： $H_R(e^{j\omega}) \in \mathbb{R}$ 为实部响应，是偶对称函数； $H_I(e^{j\omega}) \in \mathbb{R}$ 为虚部响应，是奇对称函数。还可以将 $H(e^{j\omega})$ 表示成幅度-相位形式，即

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\angle H(e^{j\omega})} \quad (3-73)$$