

第 3 章

CHAPTER 3

电路的基本分析方法

本章主要内容：前面介绍了利用等效变换逐步化简电路的分析求解方法,对于复杂电路,有时显得太繁杂。为此,本章先引入图的基础知识,介绍线性电路的基本分析方法。电路最基本的分析方法是依据基尔霍夫定律和元件的 VAR 列方程,但这种方法所需方程数较多。为减少方程数目、方便求解,本章重点介绍网孔分析法、节点分析法、回路分析法、割集分析法等基本分析方法,可根据电路结构按照一定规律直接列写方程。

3.1 图论基础

KCL、KVL 只与电路的结构有关,而与元件的性质无关,因此,研究这种约束关系时可只考虑电路的结构而不考虑元件的性质。这样,将电路图中每个支路用线段(与线段的长短、曲直无关)代替,可得到一个线段与节点组成的图形,称为电路的拓扑图,简称“图”。图 3-1(a)的拓扑图如图 3-1(b)所示。

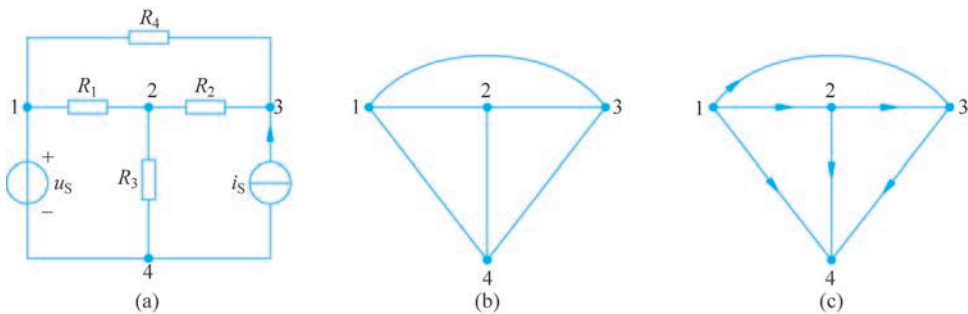


图 3-1 电路的图

3.1.1 图的基本概念

1. 定向图

对图中每一条支路规定一个方向所得到的图称为定向图。图 3-1(c)所示即为定向图。

2. 孤立节点

没有任何支路与之相连的节点称为孤立节点。如图 3-2 所示中的节点 3 为孤立节点。图论中规定,移去一条支路,不移去

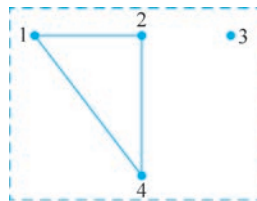


图 3-2 具有孤立节点的图

与该支路相连的节点,而移去一个节点,则与该节点相连的所有支路相应移去。

3. 子图

如果一个图的每个节点和每条支路都是另一个图的节点和支路,那么称这个图是另一个图的子图。图 3-3 中的图都是图 3-1(b)的子图。

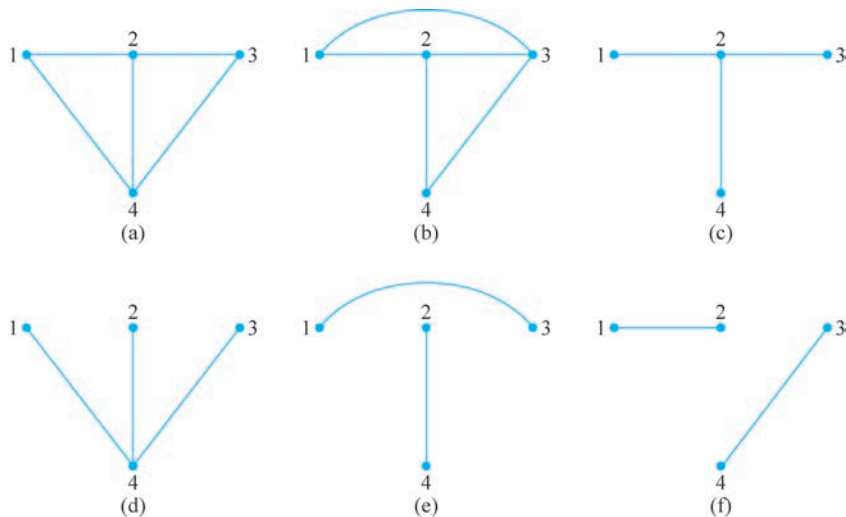


图 3-3 子图

4. 路径

从图的某个节点沿不同支路及节点到达另一个节点所经过的支路序列称为路径。如图 3-4 所示,节点 1 到节点 3 的路径有 $\{a\}$ 、 $\{b,c\}$ 、 $\{d,f\}$ 、 $\{d,e,c\}$ 、 $\{b,e,f\}$ 等。

5. 连通图和非连通图

如果一个图中任意两个节点之间至少存在一条路径,称该图为连通图;否则,称为非连通图。图 3-3(a)~图 3-3(d)为连通图,图 3-3(e)和图 3-3(f)为非连通图。

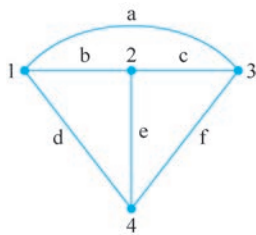


图 3-4 路径图

3.1.2 树的基本概念

树是一种特殊的图,指连通所有的节点但不包含回路的图,是图论中非常重要的一个概念。图 3-3(c)、图 3-3(d)为图 3-1(b)的树。可见,树是图的一个子图,并且是一个连通图,它包含图中所有的节点,又不包含回路。树不止一种,除图 3-3(c)、图 3-3(d)之外,图 3-5 中的图也都是图 3-1(b)的树。

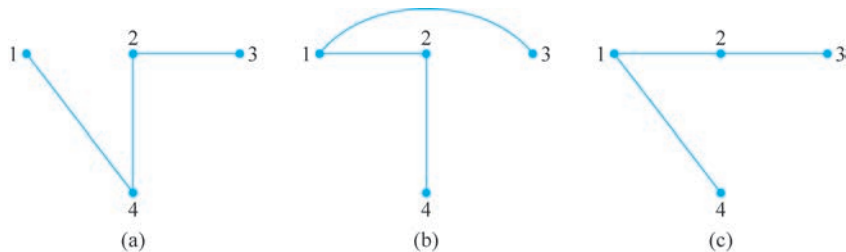


图 3-5 树

1. 树支

构成树的支路称为树支,如图 3-5 中的支路。一个图有不同的树,但树支的数量是确定的。在具有 n 个节点的图中,树支数为 $n-1$ 。论证如下:

设有一个节点数 $n=2$ 的图,根据树支的概念,树支连通所有的节点,又不能构成回路,所以两节点之间只能有一条树支。当增加一个节点时,只能增加一条树支,即 $n=3$ 时,树支数为 2,以此类推, n 个节点的图中,树支数为 $n-1$ 。

2. 连支

除去树支后,剩余的支路称为连支。图 3-6 中,粗线代表树,图 3-6(a)中的 a、b、f 为连支;图 3-6(b)中的 c、d、f 为连支;图 3-6(c)中的 a、d、f 为连支。一个图中若有 b 条支路, n 个节点,因为树支数为 $n-1$,所以连支数为 $b-(n-1)$ 。

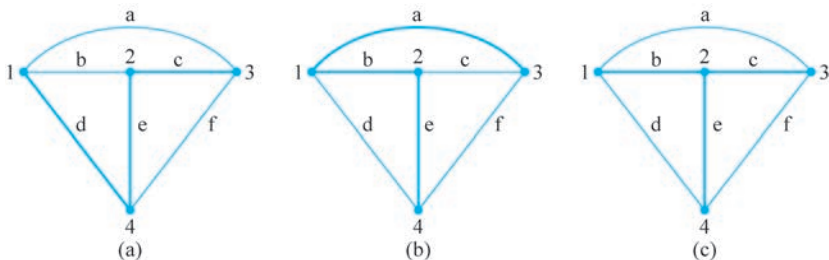


图 3-6 连支和基本回路

3. 基本回路

将由一条连支、多条树支构成的回路称为基本回路。基本回路建立在树的基础之上。一个图有多种树,相应也有多种基本回路。树确定后,基本回路就确定了。

因为树支连通所有的节点,不构成回路,所以每增加一条连支,便增加一个回路,此回路仅有一条连支,其余皆为树支,是基本回路。显然,基本回路数即为连支数。如选树如图 3-6(a)所示,对应的基本回路有三个,分别为(b、d、e)、(c、e、f)、(a、c、e、d)。当选择某特定的树时(图 3-6(c)),基本回路与网孔一致,可见网孔是特殊的基本回路。

3.2 基尔霍夫方程的独立性

基尔霍夫定律表示电路中各支路电流或支路电压之间必须遵守的规律。KCL 表明电路中各支路电流之间必须遵守的规律,它对电路中与各个节点相连的支路电流施加了线性约束关系,该约束关系可用 KCL 方程描述;KVL 表明电路中各支路电压之间必须遵守的规律,它对电路的各个回路中的支路电压施加了线性约束关系,该约束关系可用 KVL 方程描述。KCL 方程和 KVL 方程统称基尔霍夫方程,如图 3-7 所示电阻电路,有 4 个节点、5 条支路、3 个回路。

对 4 个节点列 KCL 方程,可得

$$\begin{cases} i_0 - i_1 = 0 \\ i_1 - i_2 - i_3 = 0 \\ i_2 + i_S = 0 \\ i_3 - i_S - i_0 = 0 \end{cases} \quad (3-1)$$

由于每条支路由两个节点相连,支路上的电流必然从其中一个节点流出,流入另一个节点,因此,在所有的 KCL 方程中(如式(3-1)),每个支路电流会出现两次,支路电流前的符号一次为“+”,另一次为“-”,所以全部的 KCL 方程相加,结果恒为零,说明全部的 KCL 方程不相互独立。

若去掉式(3-1)中 4 个节点方程中的任意一个(如第 4 个),这个方程中的支路电流(如 i_3 、 i_S 、 i_0)在其他节点方程中只出现一次,因而把剩余的 3 个节点方程相加,这些支路电流不会跟其他支路电流相消,相加的结果不可能恒为零,所以剩余的 3 个方程是相互独立的。

类似可证明,若电路的节点数为 n ,对任意的 $n-1$ 个节点,可列出 $n-1$ 个独立的 KCL 方程,相应的 $n-1$ 个节点称为独立节点。

显然,图 3-7 为一个平面电路(可以画在一个平面上,不使任何两条支路交叉的电路)。对图中 3 个回路列 KVL 方程,可得

$$\begin{cases} u_1 + u_3 - u_S = 0 \\ u_2 + u_0 - u_3 = 0 \\ u_1 + u_2 + u_0 - u_S = 0 \end{cases} \quad (3-2)$$

在平面电路中,除最外面的边界支路外,其余支路都是两个回路的公共支路(如图中的 R_3 支路),无论支路电压和绕行方向怎样指定,公共支路(如 R_3 支路)电压都将在两个回路中出现,将两个回路对应的 KVL 方程相加或相减总可以消去该公共支路电压(如将式(3-2)的第 1 方程、第 2 方程相加,可消去 R_3 所在支路电压 u_3),从而得到另一个回路的 KVL 方程(如式(3-2)的第 3 个 KVL 方程)。即式(3-2)的 3 个 KVL 方程不是相互独立的,其中任一个方程可由其他两个导出。如果去掉其中一个方程,剩余的两个方程不能互相导出,成为独立方程。能提供独立 KVL 方程的回路称为独立回路。那么,有 n 个节点、 b 条支路的电路,独立的 KVL 方程数是多少?

由树的概念知道,树选定后,每增加一条连支,构成一个基本回路,每次增加的连支只出现在这个回路中,不会出现在其他基本回路中,即每一个基本回路都有一个其他回路所没有的连支。由全部基本回路构成的基本回路组是一组独立回路组,据这组独立回路组列出的 KVL 方程组是独立方程。若电路由 n 个节点、 b 条支路组成,则独立的 KVL 方程数为独立回路数,即连支数,为 $b-(n-1)$ 个。图 3-8 为图 3-7 的一种树,其中 a、b、d 为树支,对应的两个基本回路分别为(a、d、c)、(b、e、d)。这两个基本回路相互独立,列出的 KVL 方程为独立方程。

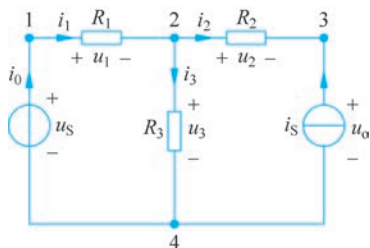


图 3-7 电阻电路

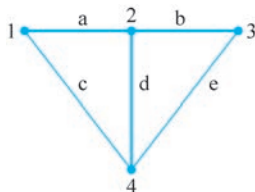


图 3-8 图 3-7 对应的一种树

故有 n 个节点、 b 条支路的电路,有任意 $n-1$ 个独立的 KCL 方程,任意 $b-(n-1)$ 个独立的 KVL 方程。

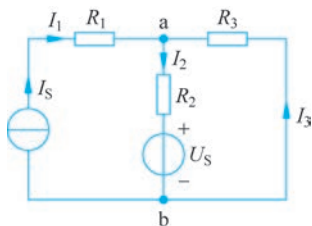


图 3-9 例 3-1 图

节点 a 的 KCL 方程为

$$I_2 - I_3 = I_S$$

对右边回路沿逆时针方向列 KVL 方程, 可得

$$R_2 I_2 + U_S + R_3 I_3 = 0$$

联立 KCL、KVL 方程, 代入数值并整理, 可得

$$\begin{cases} I_2 - I_3 = 5 \\ I_2 + 4I_3 = -10 \end{cases}$$

联立求解, 可得

$$I_2 = 2\text{A}, \quad I_3 = -3\text{A}$$



知识点



视频

3.3 网孔分析法

在求解复杂电路时, 支路电流(电压)方程数目较多, 人们希望适当选择一组变量, 以这组变量列方程, 不仅可以进一步减少方程数量, 而且电路中所有的支路电压、电流变量都能很容易地用这些变量来表示, 进而求出电路中各支路电压、电流。满足此要求的变量必须是一组独立的、完备的变量。“独立的”指这组变量之间无线性关系, 不能用一个线性方程约束。“完备的”指只要这组变量求出后, 可容易地求出电路中所有支路电压变量和支路电流变量。网孔电流便是这样的一组变量。

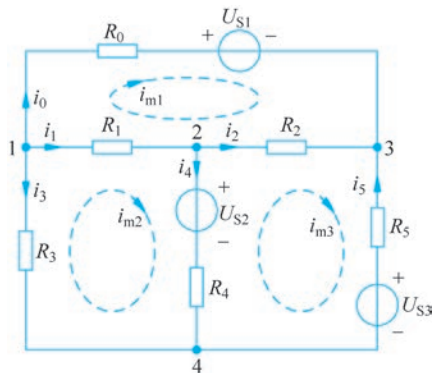


图 3-10 网孔分析法图

网孔电流是指平面电路中沿着网孔边界流动的假想电流, 如图 3-10 中虚线所示的 i_{m1} 、 i_{m2} 、 i_{m3} 。

1. 完备性

网孔电流与支路电流有以下关系:

$$\begin{cases} i_0 = i_{m1} \\ i_1 = i_{m2} - i_{m1} \\ i_2 = i_{m3} - i_{m1} \\ i_3 = -i_{m2} \\ i_4 = i_{m2} - i_{m3} \\ i_5 = -i_{m3} \end{cases} \quad (3-3)$$

可见,所有的支路电流都能用网孔电流表示,将式(3-3)代入元件的 VAR 可知所有支路电压也可用网孔电流表示,所以网孔电流是一组完备的电流变量。

2. 独立性

由于每一网孔电流流经某节点时,从该节点流入又流出,在 KCL 方程中彼此相消。如图 3-10 所示,节点 1 的 KCL 方程为

$$i_0 + i_1 + i_3 = 0$$

将式(3-3)代入上式,得到用网孔电流表示的 KCL 方程,即

$$i_{m1} + (i_{m2} - i_{m1}) - i_{m2} = 0$$

上式恒为零,对于其他节点也有类似的结果。故网孔电流没有线性约束关系,是一组独立变量。

运用 KVL 及 VAR 列出如图 3-10 所示网孔的 KVL 方程为

$$\begin{cases} R_0 i_0 + U_{S1} - R_2 i_2 - R_1 i_1 = 0 \\ R_1 i_1 + U_{S2} + R_4 i_4 - R_3 i_3 = 0 \\ R_2 i_2 - R_5 i_5 - R_4 i_4 + U_{S3} - U_{S2} = 0 \end{cases} \quad (3-4)$$

将式(3-3)代入式(3-4),即用网孔电流替代支路电流,可得

$$\begin{cases} R_0 i_{m1} - R_2 (i_{m3} - i_{m1}) - R_1 (i_{m2} - i_{m1}) + U_{S1} = 0 \\ R_1 (i_{m2} - i_{m1}) + R_4 (i_{m2} - i_{m3}) + R_3 i_{m2} + U_{S2} = 0 \\ R_2 (i_{m3} - i_{m1}) + R_5 i_{m3} - R_4 (i_{m2} - i_{m3}) + U_{S3} - U_{S2} = 0 \end{cases}$$

上式整理,可得

$$\begin{cases} (R_0 + R_2 + R_1) i_{m1} - R_1 i_{m2} - R_2 i_{m3} = -U_{S1} \\ -R_1 i_{m1} + (R_1 + R_4 + R_3) i_{m2} - R_4 i_{m3} = -U_{S2} \\ -R_2 i_{m1} - R_4 i_{m2} + (R_2 + R_4 + R_5) i_{m3} = U_{S2} - U_{S3} \end{cases} \quad (3-5)$$

分析式(3-5)可知,网孔 1 中网孔电流 i_{m1} 前的系数 $R_0 + R_1 + R_2$ 、网孔 2 中网孔电流 i_{m2} 前的系数 $R_1 + R_3 + R_4$ 、网孔 3 中网孔电流 i_{m3} 前的系数 $R_2 + R_4 + R_5$ 分别为对应网孔内所有电阻之和,称为网孔的自电阻,用 R_{ii} 表示,如 $R_{11} = R_0 + R_1 + R_2$, $R_{22} = R_1 + R_3 + R_4$ 。

网孔 1 方程中 i_{m2} 前的系数 $-R_1$ 是网孔 1 和网孔 2 公共支路上的电阻, i_{m3} 前的系数 $-R_2$ 是网孔 1 与网孔 3 的公共支路上的电阻,两网孔公共支路上的电阻称为网孔间的互电阻,用 R_{ij} 表示, $R_{ij} = R_{ji}$ 。如 R_{12} (R_{21}) 表示网孔 1 和网孔 2 的互电阻, $R_{12} = R_{21} = -R_1$; 同理, $R_{13} = R_{31} = -R_2$ 。互电阻可正可负,如果两个网孔电流流过互电阻的方向相同,那么互电阻取正值;反之,互电阻取负值。如 R_1 前的“ $-$ ”号表示网孔 1 与网孔 2 的网孔电流流过 R_1 时方向相反, R_2 前的“ $-$ ”号表示两网孔电流 i_{m1} 、 i_{m3} 流过它的方向相反。

$-U_{S1}$ 、 U_{S2} 、 $-U_{S3}$ 分别是网孔 1、网孔 3 中的电压源的代数和。当网孔电流从电压源的“ $+$ ”端流出时,电压源前取“ $+$ ”号,如 U_{S2} ; 否则取“ $-$ ”号,如 U_{S3} 。电压源的代数和称为网孔 i 的等效电压源,用 U_{Si} 表示, i 代表电压源所在网孔。

式(3-5)可写成

$$\begin{cases} R_{11} i_{m1} + R_{12} i_{m2} + R_{13} i_{m3} = U_{S11} \\ R_{21} i_{m1} + R_{22} i_{m2} + R_{23} i_{m3} = U_{S22} \\ R_{31} i_{m1} + R_{32} i_{m2} + R_{33} i_{m3} = U_{S33} \end{cases} \quad (3-6)$$

式(3-6)是具有三个网孔的网孔电流方程的一般形式。将其推广到具有 n 个网孔的电路,其网孔电流方程的一般形式为

$$\begin{cases} R_{11}i_{m1} + R_{12}i_{m2} + \cdots + R_{1n}i_{mn} = U_{S11} \\ R_{21}i_{m1} + R_{22}i_{m2} + \cdots + R_{2n}i_{mn} = U_{S22} \\ \vdots \\ R_{n1}i_{m1} + R_{n2}i_{m2} + \cdots + R_{nn}i_{mn} = U_{Snn} \end{cases} \quad (3-7)$$

式(3-7)是网孔分析法方程的一般形式。可见,第 n 个网孔的网孔方程为第 n 个网孔的自电阻 R_{nn} 与其网孔电流 i_{mn} 的乘积,加上 n 个网孔的相邻网孔的互电阻 R_{nj} 与相应相邻网孔电流 i_{mj} 的乘积,等于 n 网孔的等效电压源的代数和。以网孔电流为独立变量的分析方法称为网孔分析法。利用网孔分析法求解电路变量的步骤:

(1) 选定各网孔电流的参考方向。

(2) 按照网孔电流方程的一般形式列出各网孔电流方程。自电阻始终取正值,互电阻的符号由通过互电阻上的两个网孔电流的方向而定,两个网孔电流流过互电阻的方向相同,互电阻为“+”;否则为“-”。若电路中网孔电流方向全选为顺时针(或逆时针),则互电阻均为“-”。等效电压源是网孔内各电源电压的代数和,当网孔电流从电压源的“+”端流出时,电压源前取“+”号;否则电压源前取“-”号。

(3) 联立方程,解出各网孔电流。

(4) 根据网孔电流进一步求出待求量。

例 3-2 如图 3-11(a)、图 3-11(b)所示电路中,已知 $R_1 = 20\Omega$, $R_2 = 50\Omega$, $R_3 = 30\Omega$, $u_S = 20V$, $i_S = 1A$,用网孔分析法求解支路电流 i_1 、 i_3 。

解: 图 3-11(a)中有两个网孔,设网孔电流分别为 i_1 和 i_2 , i_2 是唯一流过包含电流源支路的网孔电流,因此,网孔电流 $i_2 = i_S = 1A$,是已知的,即网孔电流 i_2 不必再去求解。只需列网孔 1 的网孔方程:

$$(R_1 + R_3)i_1 + R_3i_2 = u_S$$

将数值代入上式,可得

$$\begin{aligned} 50i_1 + 30 &= 20 \\ i_1 &= \frac{20 - 30}{50} = \frac{-10}{50} = -0.2(A) \end{aligned}$$

故

$$i_3 = i_1 + i_2 = -0.2 + 1 = 0.8(A)$$

图 3-11(b)中有两个网孔,网孔电流分别为 i_{m1} 和 i_{m2} ,由于网孔方程实质上是 KVL 方程,在含电流源的支路中,电流源两端电压由与之相连的外电路决定,所以列网孔方程时应考虑电流源端电压。电流源端电压未知,假设其端电压 u ,如图 3-11(c)所示,列出网孔方程:

$$\begin{cases} (R_1 + R_2)i_{m1} - R_2i_{m2} = u_S - u \\ -R_2i_{m1} + (R_2 + R_3)i_{m2} = u \end{cases} \quad (3-8)$$

两个方程三个未知数,再根据电流源所在支路电流已知的条件列一个方程:

$$i_{m2} - i_{m1} = i_S \quad (3-9)$$

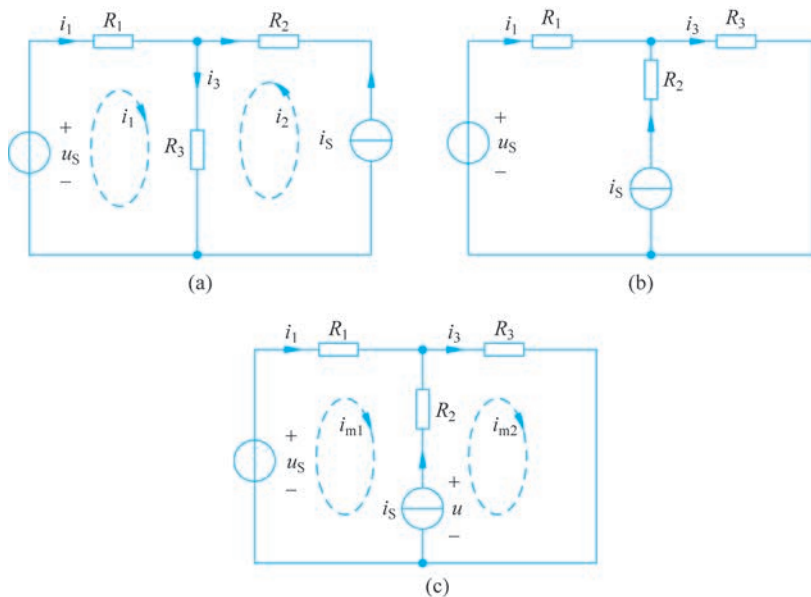


图 3-11 例 3-2 图

联立式(3-8)、式(3-9),并代入数值,可得

$$\begin{cases} 70i_{m1} - 50i_{m2} = 20 - u \\ -50i_{m1} + 80i_{m2} = u \\ i_{m2} - i_{m1} = 1 \end{cases}$$

解得

$$i_{m1} = -0.2\text{A}$$

$$i_{m2} = 0.8\text{A}$$

网孔 1 的网孔电流 i_{m1} 为唯一流过 R_1 所在支路的电流,有 $i_1 = i_{m1}$ 。同理,有 $i_3 = i_{m2}$ 。故支路电流分别为

$$\begin{cases} i_1 = -0.2\text{A} \\ i_3 = 0.8\text{A} \end{cases}$$

例 3-3 如图 3-12 所示电路中,已知 $U_S = 5\text{V}$, $R_1 = 3\Omega$, $R_2 = 1\Omega$, $R_3 = 4\Omega$, $R_4 = 4.5\Omega$,求 I_1 。

解: 网孔电流如图中虚线所标,电路中包含电流控制电压源,列网孔方程时,可把受控电压源当作独立源,写出网孔方程,然后把受控源的控制量用网孔电流表示。网孔方程如下:

$$\text{网孔 1: } (R_1 + R_2)I_{m1} - R_2I_{m2} - R_1I_{m3} = U_S$$

$$\text{网孔 2: } -R_2I_{m1} + (R_2 + R_4)I_{m2} = 5I_1$$

$$\text{网孔 3: } -R_1I_{m1} + (R_1 + R_3)I_{m3} = -5I_1$$

又因为

$$I_1 = I_{m1} - I_{m3}$$

联立上述 4 个方程,并代入数值,可得

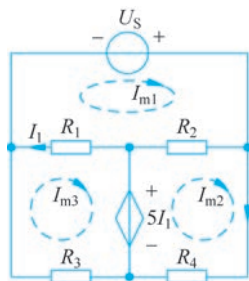


图 3-12 例 3-3 图

$$\begin{cases} 4I_{m1} - I_{m2} - 3I_{m3} = 5 \\ -I_{m1} + 5.5I_{m2} = 5I_1 \\ -3I_{m1} + 7I_{m3} = -5I \\ I_1 = I_{m1} - I_{m3} \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} I_{m1} = 1\text{ A} \\ I_{m2} = 2\text{ A} \\ I_{m3} = -1\text{ A} \\ I_1 = 2\text{ A} \end{cases}$$

例 3-4 列出图 3-13(a)所示电路求解 u_1 所需要的网孔方程。

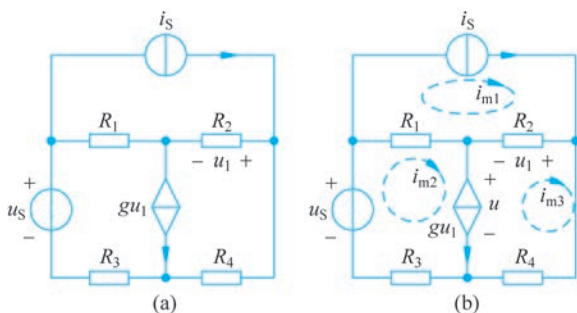


图 3-13 例 3-4 图

解：网孔电流如图 3-13(b)虚线所示， $i_{m1} = i_S$ ，网孔 2 与网孔 3 的公共支路含受控电流源，在列网孔方程时应考虑其端电压，为此，假设其端电压为 u ，如图 3-13(b)中所示。在对网孔 2 和网孔 3 列写网孔方程时，受控源的电压作为方程变量，列方程时将其当作电压源对待，网孔方程如下：

网孔 1：

$$i_{m1} = i_S$$

网孔 2：

$$-R_1 i_{m1} + (R_1 + R_3) i_{m2} = u_S - u$$

网孔 3：

$$-R_2 i_{m1} + (R_2 + R_4) i_{m3} = u$$

对于受控源支路，有

$$gu_1 = i_{m2} - i_{m3}$$

$$u_1 = -R_2 i_{m3}$$

联立上述 5 个方程即可解出 u_1 。

需要注意网孔分析法只适用于平面电路。在列网孔方程时，电路中若含电流源并联电阻支路，可先将其等效变换为电压源串联电阻支路。若电流源(或受控电流源)所在支路在网孔边界，则其值即可作为该网孔电流；若电流源(或受控电流源)所在支路在两网孔公共支路，则应为其假设端电压，该端电压处理方式与电压源处理方式类似。



知识点

3.4 节点分析法

网孔分析法选择网孔电流作为求解对象，当电路中网孔比较多而节点比较少时希望能以节点电压来列方程，以便减少方程数量。

选择电路中任意一个节点作为参考节点,其他节点与参考节点之间的电压降称为该节点的节点电压。以节点电压为未知量,联立方程,求解各节点电压值,然后进一步求出待求量的分析方法称为节点分析法。

如图 3-14 所示,各支路电流、电压及参考方向如图中所标。图中有 3 个节点,选节点 3 为参考节点,节点 1 与节点 2 的节点电压分别为 u_1 、 u_2 。可见,各支路电压易用节点电压表示,如 R_1 、 R_3 所在支路电压为节点电压 u_1 、 u_2 ; R_2 和 i_{S2} 所在支路电压均为 $u_1 - u_2$ 。各支路电流可据元件的 VAR 求出。故节点电压是一组完备的电压变量。

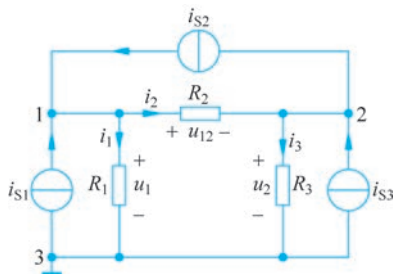


图 3-14 节点分析法图

另外,当各支路电压用节点电压表示时,沿任一回路各支路电压降的代数和恒为零。如由 R_1 、 R_2 、 R_3 组成的回路,KVL 方程为

$$u_{12} + u_2 - u_1 = 0$$

将 $u_{12} = u_1 - u_2$ 代入上式,方程恒为零。对于其他节点也有类似结论。说明节点电压 u_1 、 u_2 可为任意数值,彼此独立,无线性关系。所以各节点电压是一组独立电压变量。

下面推导节点电压方程的一般形式。

对节点 1、节点 2 分别应用 KCL 列出节点 KCL 方程:

$$\text{节点 1:} \quad -i_{S1} - i_{S2} + i_1 + i_2 = 0$$

$$\text{节点 2:} \quad i_{S2} - i_{S3} + i_3 - i_2 = 0$$

各支路电流用节点电压表示:

$$\begin{cases} i_1 = \frac{u_1}{R_1} = G_1 u_1 \\ i_2 = \frac{u_{12}}{R_2} = \frac{u_1 - u_2}{R_2} = G_2 u_1 - G_2 u_2 \\ i_3 = \frac{u_2}{R_3} = G_3 u_2 \end{cases}$$

将上式代入节点 1、节点 2 的 KCL 方程,可得

$$\begin{cases} -i_{S1} - i_{S2} + G_1 u_1 + G_2 (u_1 - u_2) = 0 \\ i_{S2} - i_{S3} - G_2 (u_1 - u_2) + G_3 u_2 = 0 \end{cases}$$

整理后,可得

$$\text{节点 1:} \quad (G_1 + G_2) u_1 - G_2 u_2 = i_{S1} + i_{S2} \quad (3-10a)$$

$$\text{节点 2:} \quad -G_2 u_1 + (G_2 + G_3) u_2 = i_{S3} - i_{S2} \quad (3-10b)$$

分析式(3-10)可知,节点 1 方程中的 $G_1 + G_2$ 是与节点 1 相连接各支路的电导之和,称为节点 1 的自电导,用 G_{11} 表示。节点 1 方程中的 $-G_2$ 是节点 1 和节点 2 相连支路的电导,称为节点 1 和节点 2 之间的互电导,用 G_{12} 表示,有 $G_{12} = -G_2$ 。 $i_{S1} + i_{S2}$ 是流向节点 1 的理想电流源电流的代数和,用 i_{S11} 表示。流入节点的电流取“+”,流出节点的电流取“-”。

同理,节点 2 的自电导用 G_{22} 表示, $G_{22} = G_2 + G_3$ 。节点 2 与节点 1 的互电导用 G_{21} 表

示, $G_{21} = G_{12} = -G_2$ 。 i_{S22} 是流向节点 2 的电流源电流的代数和, $i_{S22} = i_{S3} - i_{S2}$ 。

根据以上分析,可写出节点电压方程的一般形式:

$$\begin{cases} G_{11}u_1 + G_{12}u_2 = i_{S11} \\ G_{21}u_1 + G_{22}u_2 = i_{S22} \end{cases}$$

将其推广到具有 n 个节点(独立节点数为 $n-1$)的电路,节点电压方程的一般形式:

$$\begin{cases} G_{11}u_1 + G_{12}u_2 + \cdots + G_{1(n-1)}u_{(n-1)} = i_{S11} \\ G_{21}u_1 + G_{22}u_2 + \cdots + G_{2(n-1)}u_{(n-1)} = i_{S22} \\ \vdots \\ G_{(n-1)1}u_1 + G_{(n-1)2}u_2 + \cdots + G_{(n-1)(n-1)}u_{(n-1)} = i_{S(n-1)(n-1)} \end{cases} \quad (3-11)$$

式中: $G_{(n-1)(n-1)}$ 表示节点 $n-1$ 的自电导; $G_{(n-1)j}$ ($j=1,2,\cdots$) 表示节点 $n-1$ 与节点 j ($j \neq n-1$) 的互电导; $i_{S(n-1)(n-1)}$ 表示流入节点 $n-1$ 的电流源电流的代数和,即第 $n-1$ 个节点的节点方程为该节点的自电导 $G_{(n-1)(n-1)}$ 乘以该节点电压 $u_{(n-1)}$,减去互电导 $G_{(n-1)j}$ 乘以相邻节点电压 u_j ,等于流入节点 $n-1$ 的电流源电流的代数和。

综合以上分析,可以归纳出根据电路结构和节点电压方程的一般形式直接写出节点电压方程的步骤:

- (1) 指定电路中某一节点为参考节点,标出各独立节点电压;
- (2) 按照节点电压方程的一般形式,根据实际电路直接列写各节点电压方程。

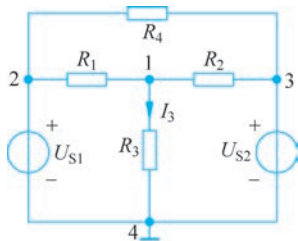


图 3-15 例 3-5 图

列写第 k 个节点电压方程时,自电导等于与节点 k 相连接的各电阻支路电导之和;互电导一律取“ $-$ ”。流入节点 k 的电流源的电流取“ $+$ ”,流出节点 k 的电流源的电流取“ $-$ ”。

例 3-5 如图 3-15 所示电路中,已知 $U_{S1} = 20\text{V}$, $U_{S2} = 10\text{V}$, $R_1 = 5\Omega$, $R_2 = 10\Omega$, $R_3 = 20\Omega$, $R_4 = 1\Omega$,用节点分析法求解流过电阻 R_3 的电流 I_3 。

解: 选节点 4 为参考节点,节点 2 和节点 3 的节点电压 U_2 和 U_3 分别为已知电压源电压,即 $U_2 = U_{S1} = 20\text{V}$, $U_3 = U_{S2} = 10\text{V}$ 。仅需对节点 1 列写节点方程:

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)U_1 - \frac{1}{R_1}U_2 - \frac{1}{R_2}U_3 = 0$$

代入数值,可得

$$\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20}\right)U_1 - \frac{1}{5} \times 20 - \frac{1}{10} \times 10 = 0$$

解得

$$U_1 = \frac{100}{7}\text{V}$$

故

$$I_3 = \frac{U_1}{R_3} = \frac{5}{7}\text{(A)}$$

例 3-6 电路如图 3-16(a)所示,求电压 U_{12} 。

解法一: 选节点 0 为参考节点,将 1V 电压源与 3S 电导串联支路等效为电流源并联电

导支路,如图 3-16(b)所示。由于电压源电流由外电路决定,所以列节点方程时应考虑与节点相连的电压源(包括受控电压源)的电流。如图 3-16(b)所示,在列节点方程时,先假设流过 22V 电压源的电流为 i ,再列出节点方程:

$$\text{节点 1: } (3+4)U_1 - 3U_2 - 4U_3 = -8 - 3$$

$$\text{节点 2: } -3U_1 + (3+1)U_2 = 3 - i$$

$$\text{节点 3: } -4U_1 + (4+5)U_3 = i + 25$$

方程中多了一个未知量 i ,再根据电压源所在支路引入一个方程:

$$U_3 - U_2 = 22$$

联立上述 4 个方程,解得

$$U_1 = -4.5\text{V}, \quad U_2 = -15.5\text{V}, \quad U_3 = 6.5\text{V}$$

故

$$U_{12} = U_1 - U_2 = 11(\text{V})$$

解法二: 选电压源的一端为参考节点,如图 3-16(c)所示的节点 3 为参考节点,节点 2 的电压为已知电压源电压,即

$$U_2 = -22\text{V}$$

节点 0 和节点 1 的方程:

$$\text{节点 0: } -U_2 + (1+5)U_0 = 8 - 25$$

$$\text{节点 1: } (3+4)U_1 - 3U_2 = -8 - 3$$

联立上述三个方程,解得

$$U_1 = -11\text{V}, \quad U_0 = -6.5\text{V}$$

故

$$U_{12} = U_1 - U_2 = -11 - (-22) = 11(\text{V})$$

例 3-7 如图 3-17 电路中,已知 $I_s = 2.5\text{A}$, $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 0.4\Omega$, $R_3 = 3\Omega$, $R_4 = 1\Omega$, $R_5 = 2\Omega$,试用节点分析法求电压 U_{23} 。

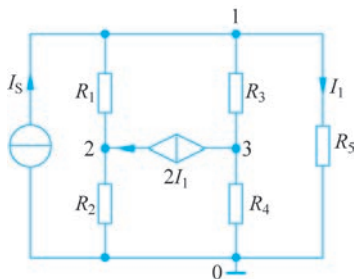


图 3-17 例 3-7 图

解: 列写节点方程时可将受控电流源视为独立电流源。节点 0 设为参考节点,列出各节点方程:

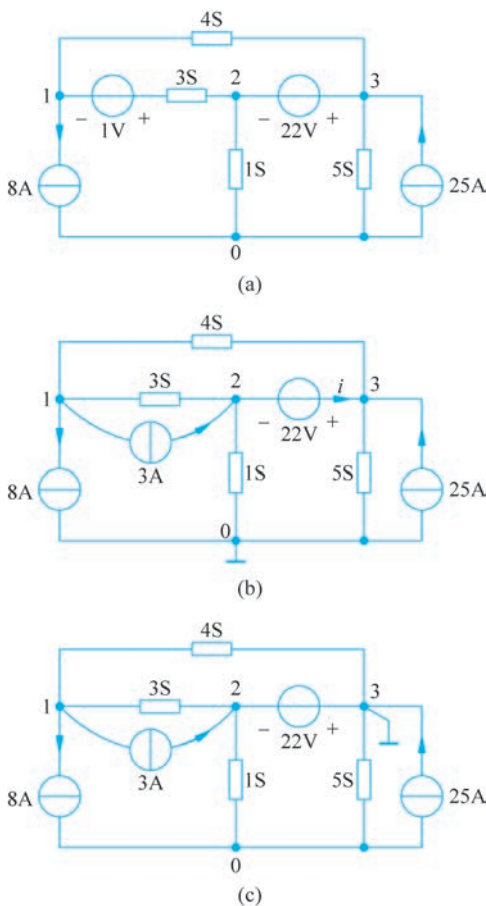


图 3-16 例 3-6 图

$$\text{节点 1:} \quad \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5}\right)U_1 - \frac{1}{R_1}U_2 - \frac{1}{R_3}U_3 = I_s$$

$$\text{节点 2:} \quad -\frac{1}{R_1}U_1 + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)U_2 = 2I_1$$

$$\text{节点 3:} \quad -\frac{1}{R_3}U_1 + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)U_3 = -2I_1$$

控制支路电流 I_1 所在支路的伏安关系式为

$$I_1 = \frac{U_1}{R_5}$$

联立上述 4 个方程,并代入数值,可得

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)U_1 - \frac{1}{2}U_2 - \frac{1}{3}U_3 = 2.5 \\ -\frac{1}{2}U_1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{0.4}\right)U_2 = 2I_1 \\ -\frac{1}{3}U_1 + \left(1 + \frac{1}{3}\right)U_3 = -2I_1 \\ I_1 = \frac{1}{2}U_1 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} U_1 = 2\text{V} \\ U_2 = 1\text{V} \\ U_3 = -1\text{V} \\ I_1 = 0.5\text{A} \end{cases}$$

电压 U_{23} 为

$$U_{23} = U_2 - U_3 = 1 - (-1) = 2(\text{V})$$

例 3-8 电路如图 3-18(a)所示,试列出用节点分析法求解各节点电压的节点方程。

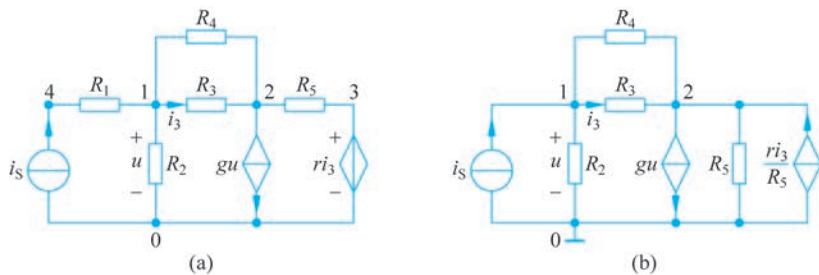


图 3-18 例 3-8 图

解: 图中包含两个受控源,较复杂,列方程时可先将电路适当化简,但应注意化简时控制支路不要改变或消去。将电流源串联电阻 R_1 支路等效变换为电流源支路,将受控电压源与串联电阻 R_5 的支路等效变换为受控电流源并联电阻支路,并选节点 0 为参考节点,如图 3-18(b)所示。列出节点 1 和节点 2 方程:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)u_1 - \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)u_2 = i_s \\ -\left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)u_1 + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right)u_2 = \frac{ri_3}{R_5} - gu \end{cases}$$

电压控制支路的电压为

$$u = u_1$$

电流控制支路的电流为

$$i_3 = \frac{u_{12}}{R_3} = \frac{u_1 - u_2}{R_3}$$

上述4式即为节点分析法所需的节点方程。

由上面几例可看出,节点分析法适合于独立节点数少于网孔数、结构较复杂的平面、非平面电路的分析求解。在列节点方程时,电路中若含有电压源串联电阻支路,则可先将其等效变换为电流源并联电阻支路;若含有独立电压源,则可设其低电位端为参考节点,这样能减少所列方程数目。另外,若电压源在两节点的公共支路上,列写节点方程时,则应为其假设电流,该电流的处理方式与电流源处理方式类似。

3.5 回路分析法

3.1节介绍过,在选定树后,如果每次只接上一条连支,就可以构成一个只由一条连支而其他为树支组成的基本回路。与网孔电流类似,沿基本回路流动的假想电流称为基本回路电流。因为基本回路中只有一条连支,所以基本回路电流即为连支电流。对于一个具有 b 条支路、 n 个节点的电路来说,有 $b - (n - 1)$ 条连支,因此有 $b - (n - 1)$ 个基本回路及基本回路电流。以基本回路电流(连支电流)作为电路变量求解方程,进而求出回路中其余变量的分析方法称为回路分析法。与网孔电流、节点电压类似,基本回路电流(连支电流)也是一组完备的独立的电流变量。

1. 完备性

电路如图 3-19(a) 所示,选树如图 3-19(b) 中粗实线所示,相应的连支及基本回路如图 3-19(b) 中细线和虚线所示,为方便列写方程,将回路电流标于图 3-19(a),得到图 3-19(c),由图 3-19(c) 可知各支路电流可用连支电流表示如下:

$$i_1 = i_{l1}, i_2 = i_{l2}, i_0 = i_{l3}, i_3 = -(i_{l1} + i_{l3}), i_4 = i_{l1} + i_{l2}, i_5 = i_{l2} - i_{l3} \quad (3-12)$$

支路电流求出后,据元件的 VAR 容易求出各支路的电压变量。故连支电流是一组完备的电流变量。

2. 独立性

对图 3-19(c) 节点 1 列 KCL 方程

$$i_0 + i_1 + i_3 = 0 \quad (3-13)$$

将式(3-13)中支路电流用式(3-12)连支电流表示,即

$$i_{l3} + i_{l1} - (i_{l3} + i_{l1}) = 0$$

此式恒为零。

对其他节点也有类似的结论。说明连支电流彼此无关,没有线性约束关系,是一组独立

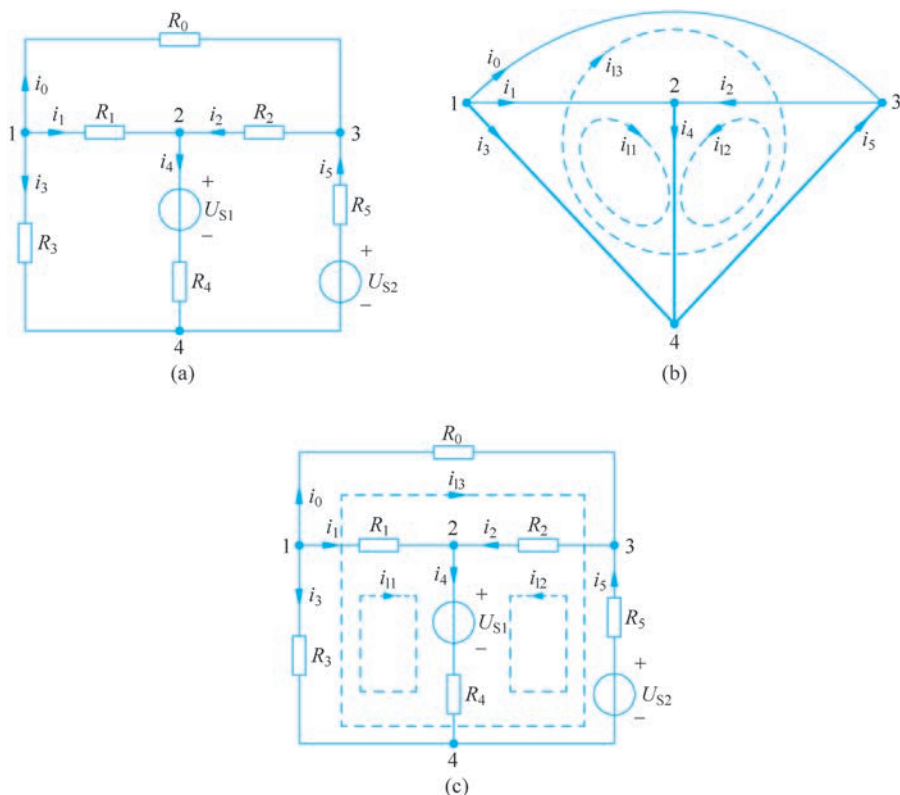


图 3-19 回路分析法图

变量。故连支电流是一组完备的、独立的电流变量。

下面推导以连支电流为变量列写基本回路方程的方法。

首先对图 3-19(c)所示的基本回路列写 KVL 方程

$$\text{回路 1:} \quad R_1 i_1 + U_{S1} + R_4 i_4 - R_3 i_3 = 0$$

$$\text{回路 2:} \quad R_2 i_2 + U_{S1} + R_4 i_4 - U_{S2} + R_5 i_5 = 0$$

$$\text{回路 3:} \quad R_0 i_0 - R_5 i_5 + U_{S2} - R_3 i_3 = 0$$

将式(3-12)代入上述回路方程,可得

$$\begin{cases} R_1 i_{11} + U_{S1} + R_4 (i_{11} + i_{12}) + R_3 (i_{11} + i_{13}) = 0 \\ R_2 i_{12} + U_{S1} + R_4 (i_{11} + i_{12}) - U_{S2} + R_5 (i_{12} - i_{13}) = 0 \\ R_0 i_{13} - R_5 (i_{12} - i_{13}) + U_{S2} + R_3 (i_{11} + i_{13}) = 0 \end{cases}$$

整理,可得

$$\begin{cases} (R_1 + R_3 + R_4) i_{11} + R_4 i_{12} + R_3 i_{13} = -U_{S1} \\ R_4 i_{11} + (R_2 + R_4 + R_5) i_{12} - R_5 i_{13} = U_{S2} - U_{S1} \\ R_3 i_{11} - R_5 i_{12} + (R_0 + R_3 + R_5) i_{13} = -U_{S2} \end{cases}$$

与网孔分析法类似,用 R_{ii} 表示第 i 回路所有电阻之和,即自电阻,如回路 1 中的自电阻 $R_{11} = R_1 + R_3 + R_4$,回路 2 中自电阻 $R_{22} = R_2 + R_4 + R_5$; 用 R_{ij} 表示两回路公共支路上的电阻即互电阻,同样, $R_{ij} = R_{ji}$,如回路 1 与回路 2 的互电阻 $R_{12} = R_{21} = R_4$,回路 1 与回路 3 的互电阻 $R_{13} = R_{31} = R_3$ 。互电阻可正可负,如果两个回路电流流过互电阻的方向

相同,互电阻取正值;反之,互电阻取负值。用 U_{Sii} 表示回路 i 的等效电压源(各电压源的代数和)。当回路电流从电压源的“+”端流出时,电压源前取“+”号,如回路 2 中的 U_{S2} ;否则,电压源前取“-”号,如回路 2 中的 U_{S1} 。

具有 n 个基本回路的电路,其回路电流方程一般形式为

$$\begin{cases} R_{11}i_{11} + R_{12}i_{12} + \cdots + R_{1n}i_{1n} = U_{S11} \\ R_{21}i_{11} + R_{22}i_{12} + \cdots + R_{2n}i_{1n} = U_{S22} \\ \cdots \\ R_{n1}i_{11} + R_{n2}i_{12} + \cdots + R_{nn}i_{1n} = U_{Snn} \end{cases} \quad (3-14)$$

从式(3-14)可看出,回路分析法方程的列写方法与网孔方程类似。回路分析法适合平面和非平面电路,而网孔分析法只适合平面电路。网孔分析法是回路分析法的特例。

例 3-9 如图 3-20(a)所示电路中,已知 $u_{S1}=6\text{V}$, $u_{S2}=3\text{V}$, $u_{S3}=2\text{V}$, $R_1=6\Omega$, $R_2=2\Omega$, $R_3=4\Omega$, $R_4=2\Omega$,用回路分析法求解流过 R_3 的电流 i 。

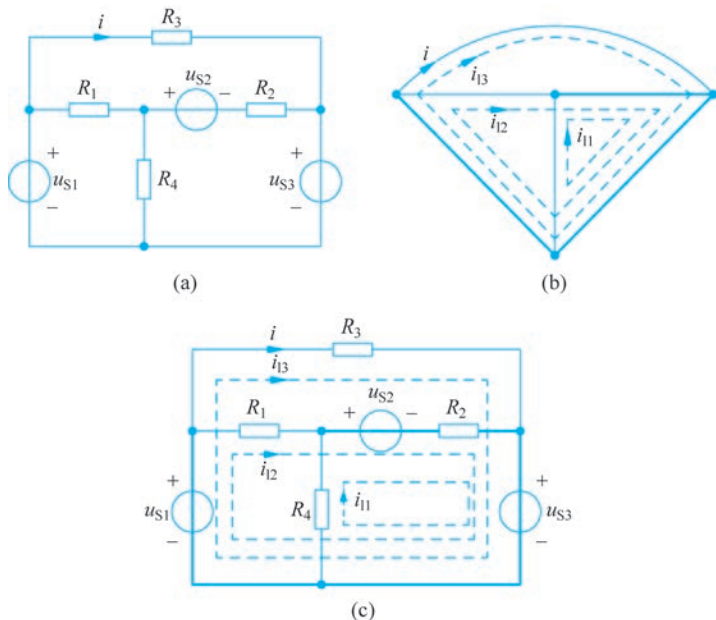


图 3-20 例 3-9 图

解: 图 3-20(a)对应的拓扑图如图 3-20(b)所示,图中粗实线为树支, i_{11} 、 i_{12} 、 i_{13} 分别为回路电流,为列写方程方便,将树及回路电流重标于原图上,如图 3-20(c)所示,可得回路方程

$$\text{回路 1:} \quad (R_2 + R_4)i_{11} + R_2i_{12} = -u_{S2} - u_{S3}$$

$$\text{回路 2:} \quad R_2i_{11} + (R_1 + R_2)i_{12} = u_{S1} - u_{S2} - u_{S3}$$

$$\text{回路 3:} \quad R_3i_{13} = u_{S1} - u_{S3}$$

代入数值,可得

$$\begin{cases} 4i_{11} + 2i_{12} = -3 - 2 \\ 2i_{11} + 8i_{12} = 6 - 3 - 2 \\ 4i_{13} = 6 - 2 \end{cases}$$

解得

$$i_{11} = -1.5\text{A}, \quad i_{12} = 0.5\text{A}, \quad i_{13} = 1\text{A}$$

由于流过 R_3 的电流为回路 3 的电流 i_{13} , 则有

$$i = i_{13} = 1\text{A}$$

可见, 虽然树的选择方法有多种, 但为使解题简单方便, 列写回路方程时一般可将电压源、受控电压源及受控源的电压控制量所在支路选为树支, 将电流源、受控电流源及受控源的电流控制量所在支路选为连支。

例 3-10 如图 3-21(a) 所示电路中, 已知 $i_S = 4\text{A}$, $R_1 = 5\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $R_3 = 3\Omega$, $u_{S1} = 20\text{V}$, $u_{S2} = 25\text{V}$, $u_{S3} = 15\text{V}$, 试求 i_1 。

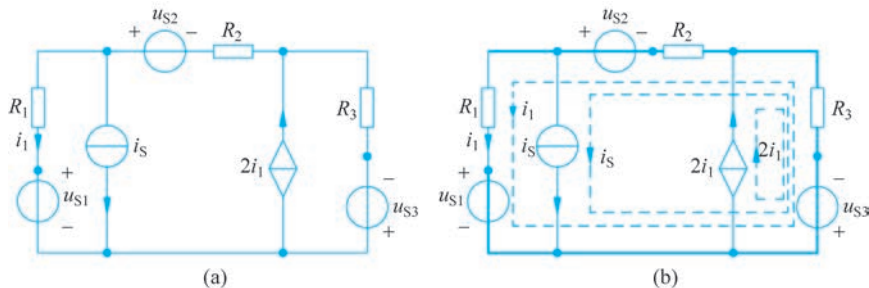


图 3-21 例 3-10 图

解: 将一个二端元件看作一条支路, 图中共有 8 条支路, 6 个节点, 故树支数为 5, 连支数为 3。

将 3 个电压源所在支路选为树支, 如图 3-10(b) 中粗实线所示, 将电流源、受控电流源以及受控源的控制支路选为连支。显然, 3 个连支电流 (基本回路电流) 分别为 i_S 、 $2i_1$ 以及 i_1 , 对 i_1 所流经的回路列写回路方程:

$$(R_1 + R_2 + R_3)i_1 + (R_2 + R_3)i_S - R_3 \times 2i_1 = -u_{S1} + u_{S2} - u_{S3}$$

代入数值, 可得

$$(5 + 2 + 3)i_1 + (2 + 3) \times 4 - 3 \times 2i_1 = -20 + 25 - 15$$

解得

$$i_1 = -7.5\text{A}$$

可见选择合适的树, 回路分析法较网孔分析法有时更简单。



拓展阅读

3.6 割集分析法

3.6.1 割集的有关概念

3.6.2 割集方程的列写方法

3.7 含运算放大器的电阻电路的分析



拓展阅读



知识点

本章小结

本章在引入图的基础知识后,证明了电路若有 n 个节点 b 条支路,则有任意 $n-1$ 个独立节点,对应可列 $n-1$ 个独立的 KCL 方程;任意 $b-(n-1)$ 个独立回路,对应 $b-(n-1)$ 个独立 KVL 方程。联立 KCL、KVL 方程以及 b 条支路上元件本身的 VAR 关系式可分析求解电路变量,这种方法虽然直观,但当电路复杂时求解方程数较多。为此,介绍了方程数明显减少的“网孔分析法”“节点分析法”“回路分析法”“割集分析法”等电路的一般分析方法,能用系统的方法列出方程,进而解得所有支路电压、支路电流变量。其中网孔分析法、节点分析法应用更广泛。

网孔分析法以网孔电流为变量列写方程,可看作回路分析法的特例;节点分析法以节点电压为变量列写方程,可看作割集分析法的特例;网孔分析法适合于平面电路,其他三种方法无限制。当电路中网孔数少于节点数时,一般用网孔分析法较方便;否则,用节点分析法较方便。

习题

一、选择题

1. 必须设立电路参考节点后才能求解电路的方法是()。
A. 支路电流法 B. 回路电流法 C. 节点电压法 D. $2b$ 法
2. 对于一个具有 n 个节点、 b 条支路的电路,它的 KVL 独立方程数为()个。
A. $n-1$ B. $b-n+1$ C. $b-n$ D. $b-n-1$
3. 对于一个具有 n 个节点、 b 条支路的电路列写节点电压方程,需要列写()。
A. $n-1$ 个 KVL 方程 B. $b-n+1$ 个 KCL 方程
C. $n-1$ 个 KCL 方程 D. $b-n-1$ 个 KCL 方程
4. 对于含有受控源的电路,下列叙述中,()是错误的。
A. 受控源可先当作独立电源处理,列写电路方程
B. 在节点电压法中,当受控源的控制量不是节点电压时,需要添加用节点电压表示控制量的补充方程
C. 在网孔电流法中,当受控源的控制量不是网孔电流时,需要添加用网孔电流表示控制量的补充方程
D. 采用网孔电流法,对列写的方程进行化简,在最终的表达式中互阻始终是相等的,即 $R_{ij}=R_{ji}$

二、填空题

1. 具有两个引出端钮的电路称为_____网络。
2. 网孔分析法的实质是以_____为变量,直接列写_____方程;节点分析法的实质是以_____为变量,直接列写_____方程;回路分析法的实质是以_____为变量,直接列写_____方程。
3. 在列写网孔电流方程时,当所有网孔电流均取顺时针方向时,互阻为_____ (正、负)。
4. 在列写节点电压方程时,互导为_____ (正、负)。

5. 在电路中,独立电源是需要特别关注的。在使用网孔分析法时,要特别注意独立_____,而在使用节点分析法时,要特别注意独立_____。

三、计算题

1. 如图 x3.1 所示电路中,已知 $R_1=3\Omega$, $R_2=2\Omega$, $R_3=5\Omega$, $R_4=2\Omega$, $R_5=4\Omega$, $U_{S1}=10V$, $U_{S2}=8V$, 试列写独立 KCL 方程、独立 KVL 方程、支路的 VAR, 并求出各支路电压。

2. 如图 x3.2 所示电路中,已知 $R_1=R_2=10\Omega$, $R_3=4\Omega$, $R_4=R_5=8\Omega$, $R_6=2\Omega$, $U_{S1}=40V$, $U_{S2}=40V$, 用网孔分析法求流过 R_5 的电流 I_5 。

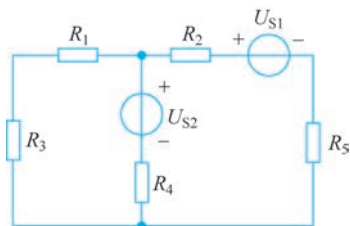


图 x3.1 计算题 1 图

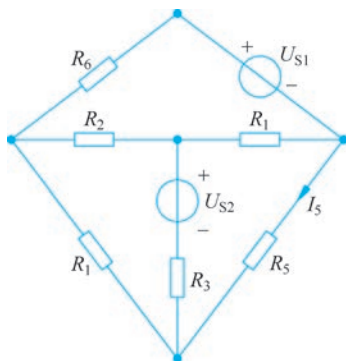
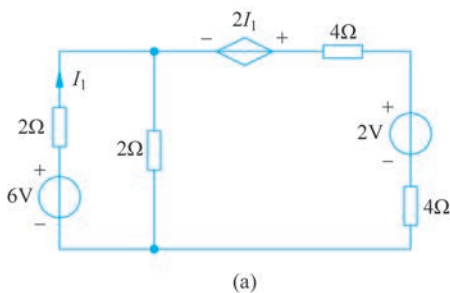
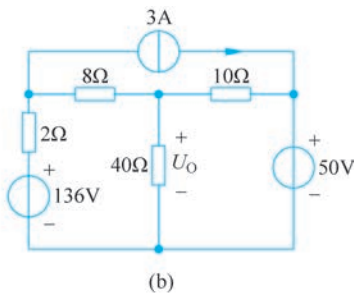


图 x3.2 计算题 2 图

3. 用网孔分析法求解如图 x3.3 所示电路中 I_1 和 U_O 。



(a)



(b)

图 x3.3 计算题 3 图

4. 用网孔分析法求解如图 x3.4 所示电路的电流 I 。

5. 列出如图 x3.5 所示电路的节点电压方程。

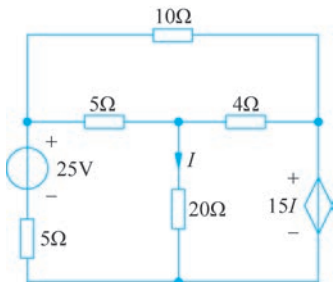


图 x3.4 计算题 4 图

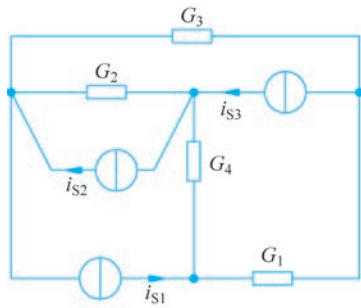


图 x3.5 计算题 5 图

6. 求图 x3.6 所示电路中的电压 U_{n1} 。
7. 列出如图 x3.7 所示电路的节点电压方程。

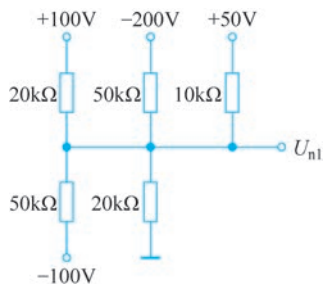


图 x3.6 计算题 6 图

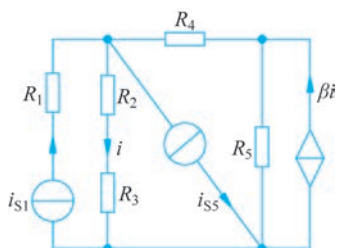


图 x3.7 计算题 7 图

8. 用网孔分析法和节点分析法求解如图 x3.8 所示电路中的电压 U 。

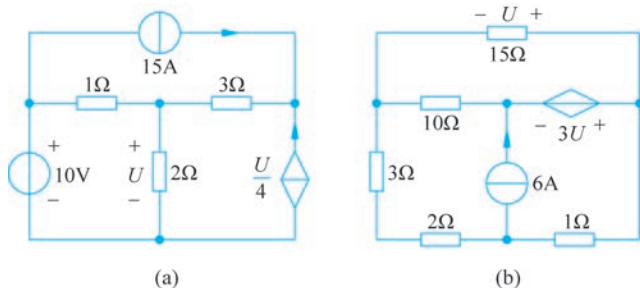


图 x3.8 计算题 8 图

9. 电路如图 x3.9 所示,试用网孔分析法和节点分析法列出求解 U_1 、 U_2 和 I_1 必需的方程。

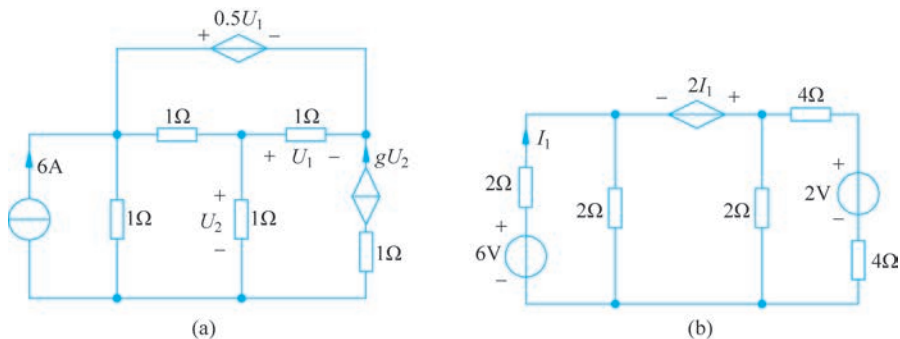


图 x3.9 计算题 9 图

10. 已知如图 x3.10 所示电路中, $U_S = 20V$, $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 5\Omega$, $R_3 = 10\Omega$, $R_4 = 5\Omega$, 求 U_1 和 U_2 。

11. 用节点分析法求如图 x3.11 所示电路中的 I 。

12. 电路如图 x3.12 所示,设法分别只用一个方程求得 U_A 和 I_B 。

13. 如图 x3.13 所示电路中,已知 $U_S = 8V$, $I_S = -4A$, $R_1 = 4\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $R_3 = 8\Omega$, $R_4 = 5\Omega$, 试用割集分

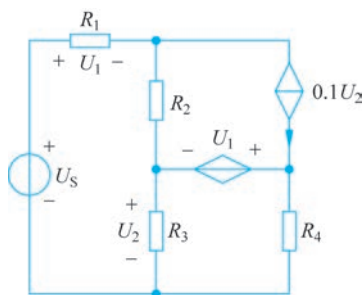


图 x3.10 计算题 10 图

析法求电流源的端电压和流过电压源的电流。

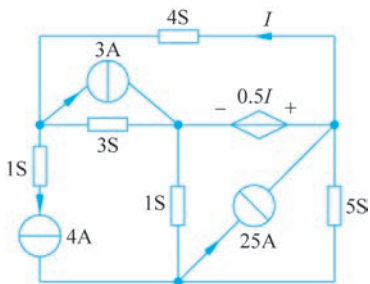


图 x3.11 计算题 11 图

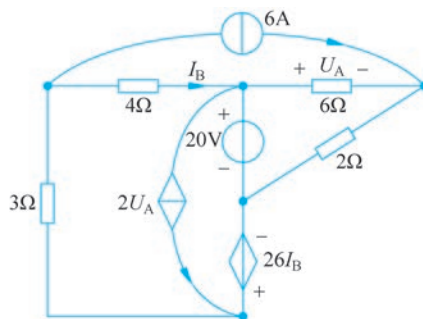


图 x3.12 计算题 12 图

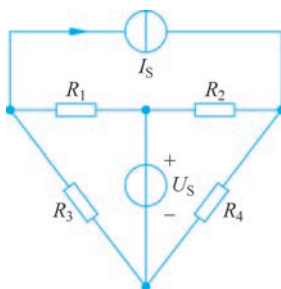


图 x3.13 计算题 13 图