第5章

多旋翼无人机空气动力学

主要内容

(1) 旋翼飞行器空气动力学的基本概念。
(2) 旋翼的几何参数和工作原理。
(3) 旋翼动量理论的基础知识。
(4) 旋翼叶素理论的基础知识。
(5) 旋翼经典涡流理论的基础知识。
(6) 旋翼现代涡流理论的基础知识。
(7) 旋翼 CFD 理论的基础知识。

5.1 旋翼飞行器空气动力学的基本概念

多旋翼无人机,也称为多旋翼无人驾驶直升机,是旋翼飞行器家庭中的一员,其空气动力学属于旋翼飞行器空气动力学范畴。在各类飞行器、各类运动以及各种介质中,空气动力学或流体力学的普遍方程(连续方程、动量方程和能量方程)与基本解法是相通的。

5.1.1 空气动力学的基本概念

1. 空气动力学的定义

空气动力学来源于流体力学。流体力学是物理学的一个重要分支,它主要研究流体本身的静止状态和运动状态,以及流体和固体界壁间有相对运动时的相互作用和流动的规律。流体动力学研究的是流体运动时的运动规律和作用力的规律。

空气动力学主要研究物体和空气之间有相对运动时,即物体在空气中运动时,空气的运动规律及作用力所服从的规律,具体包括气体做相对运动情况下的受力特性、气体流动规律

和伴随发生的物理、化学变化。传统意义上的空气动力学指的都是飞行器的空气动力学。

2. 空气动力学的研究方法和基本问题

(1) 空气动力学研究方法。空气动力学的研究分理论和实验两个方面。理论和实验研究两者彼此密切结合,相辅相成。理论研究所依据的一般原理有:运动学方面,遵循质量守恒定律;动力学方面,遵循牛顿第二定律;能量转换和传递方面,遵循能量守恒定律;热力学方面,遵循热力学第一定律和第二定律;介质属性方面,遵循相应的气体状态方程和黏性、导热性的变化规律等。

(2) 空气动力学研究的基本问题。在空气动力学研究工作中,一般关注以下基本的空气流动问题:

① 旋涡与分离流;

② 激波与边界层;

③ 非定常气动力与动态失速;

④ 湍流现象与描述。

5.1.2 旋翼飞行器空气动力学的定义、内容和工具

飞行器是指以某种方式连接在一起的变形体的任意组合所构成的任意一种飞行的物体。例如,步枪弹丸是最简单的一种飞行器,固定机翼飞机和旋翼飞行器则是较为复杂的飞行器。

1. 旋翼飞行器空气动力学的定义

旋翼飞行器空气动力学是研究旋翼飞行器(主要是它的旋翼)与周围空气有相对运动时所产生的空气动力的一门科学,它将空气动力学的普遍原理应用到旋翼飞行器这一个特定研究对象上。

旋翼飞行器(如多旋翼无人机)是飞行器大家庭中的一员,旋翼飞行器空气动力学隶属空气动力学的研究范围。旋翼飞行器最主要的部件是旋翼,它是旋翼飞行器上产生升力的主要部件,同时也可为旋翼飞行器提供推进力和操纵力。因而旋翼飞行器空气动力学就是阐明旋翼飞行器(主要是旋翼)与周围空气相互作用的空气动力现象,研究旋翼飞行器在不同飞行状态下的气动载荷,以及估算旋翼飞行器飞行性能和分析旋翼飞行器飞行品质的一门学科。

2. 旋翼飞行器空气动力学研究的内容

旋翼飞行器空气动力学研究的内容主要有以下几方面。

(1) 基本理论方面。阐明旋翼与周围空气相互作用的空气动力现象、流动现象、流场分布等,分析空气流动时旋翼桨叶的受力情况,以便对桨叶的几何外形进行改造,改善旋翼的气动特性,提高旋翼飞行器的性能,增进飞行品质。

(2) 性能计算方面。在理论和实验的基础上,分析主要构造参数对旋翼性能乃至飞行性能的影响,建立旋翼飞行器的空气动力计算方法,为旋翼飞行器设计所用。

(3) 飞行力学方面。性能计算,如速度、高度、航程和燃油消耗量的定量计算;飞行动力学正解技术以及飞行动力学逆解技术(即由给定的飞行轨迹求解所需的操纵规律等)。

(4) 飞行品质方面。研究整架旋翼飞行器的平衡问题及其对操纵动作及推力与功率变化的反应;分析旋翼飞行器在各种飞行状态下的稳定性及操纵性,包括对大气紊流的反应及如何控制的问题等。

3. 旋翼飞行器空气动力学的研究工具

旋翼飞行器空气动力学的研究工具主要有三类。

(1) 解析工具。旋翼飞行器空气动力学所用的解析工具与流体力学的其他分支所用的解析工具基本相同,即应用数学方法,在一组规定的具体边界条件或初始条件下,去求解气体所遵循的微分方程。

(2) 计算工具。采用现代高速电子计算机对旋翼飞行器空气动力环境进行数值模拟,把流动情况解算出来,并把作用在旋翼飞行器上的各种气动力都计算出来。

(3) 实验工具。旋翼飞行器空气动力学的实验工具一般是专用的,包括适应大气飞行中大多数情况的风洞和激波管、探测设备和仪表,其中主要是为测力及压强、温度、加速度、角速度所用的电子设备和电子仪表等。

5.2　旋翼的几何参数和工作原理

旋翼飞行器是利用旋翼转动产生升力的飞行器,旋翼由数片桨叶及一个桨毂组成,旋翼的桨叶一边绕轴旋转,一边做直线运动,旋翼空气动力现象非常复杂。旋翼几何参数与旋翼飞行器的空气动力学特性有关,它直接影响到旋翼飞行器的飞行性能,包括飞行速度、航程、载重、升限以及稳定性、操控性等。

5.2.1　旋翼的功用和几何参数

1. 旋翼的功用

旋翼是旋翼飞行器的关键部件,它的主要功能如下:

(1) 产生向上的力(习惯上叫拉力)以克服全机重量,类似于机翼的作用;

(2) 产生向前的水平分力使旋翼飞行器前进,类似于推进器的作用;

(3) 产生其他分力及力矩使多旋翼飞行器保持平衡或进行机动飞行。

2. 旋翼的直径 D 和半径 R

(1) 直径(D)。旋翼旋转时,叶尖所画圆圈的直径叫做旋翼直径 D。

直径是影响旋翼性能的重要参数之一,一般情况下,旋翼直径增大,拉力增大,效率随之提高。所以在结构允许的情况下应尽量选择直径较大的旋翼。此外还要注意桨尖气流速度不应过大,否则会出现激波,导致效率降低。

(2) 半径(R)。叶尖离桨毂中心的距离称为旋翼半径 R,$R=D/2$。任一桨叶剖面距离桨毂中心的半径则表示为 r,在桨叶上 $r=0.7R$ 处的剖面的空气动力特性很有代表性,叫作特征剖面,r 即为特征剖面半径。此外,旋翼旋转起来桨叶所掠过的面积为桨盘面积 πR^2(平方米),也叫扫掠面积(如图 5-1 所示)。

3. 旋翼桨叶宽度 b 和尖梢比 η_{ye}

桨叶剖面的弦长就是该半径处的桨叶宽度,用 b 表示。图 5-2 表示出 4 种平面形状的桨叶。对于矩形桨叶,宽度沿径向不变;对于梯形桨叶或其他桨叶,b 沿径向改变。常用桨叶尖梢比 η_{ye} 表征桨叶宽度的变化,其定义为叶根宽度与叶尖宽度之比,一般 $\eta_{ye}=1\sim3$。在实际情况中,由于叶根及叶尖部分形状特殊,一般按延伸办法来处理。

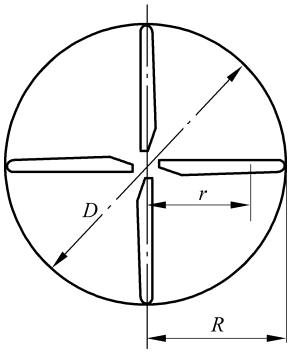


图 5-1 旋翼的直径和半径

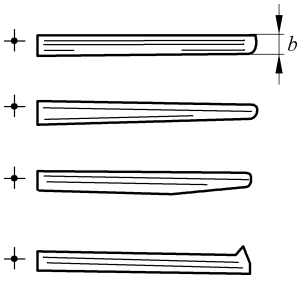


图 5-2 不同形状的旋翼桨叶平面图

4. 旋翼桨叶数目 k

桨叶数目(k)是一个旋翼具有的桨叶数量。桨叶数目在旋翼设计中也是一个非常重要的指标,它直接影响旋翼的气动特性和效率。一般旋翼的拉力系数和功率系数与它的桨叶数目成正比,随着旋翼吸收功率的增大,桨叶的数目也在增加,由早期的双叶桨,增加到四叶桨、六叶桨和八叶桨等。微型及轻小型旋翼飞行器的旋翼大多采用结构简单的双叶桨,只是在旋翼直径受到限制时才采用增加桨叶数目的方法使旋翼与发动机获得良好的配合。增加桨叶数目必须考虑下列两个方面的问题。

(1) 增加桨叶数目 k 会降低旋翼的效率。这是因为当旋翼旋转时,对于包围桨叶的扰流,数目多的桨叶要比数目小的桨叶大。

(2) 旋翼的质量要增加。一般每增加一片桨叶,旋翼的相对质量增大 23%～25%。

5. 旋翼实度 σ

各片桨叶实占面积与整个桨盘面积之比叫作旋翼实度,以希腊字母 σ 表示。若 k 为桨叶片数,则

$$\sigma=\frac{k\int b\,\mathrm{d}r}{\pi R^2}\approx\frac{kb_7}{\pi R} \tag{5-1}$$

对于矩形桨叶,有

$$\sigma=\frac{kb}{\pi R} \tag{5-2}$$

旋翼实度 σ 数值一般是 0.04～0.11。

6. 桨叶剖面安装角φ 和桨叶扭度$\Delta\varphi$

桨叶剖面的形状就是翼型。任意半径处桨叶剖面(翼型)的安装角指翼型弦线相对于构造旋转平面之倾角。这个角度在旋翼空气动力学中具有特别重要的意义。一般来说,φ 角是沿径向变化的。由于常用旋翼的桨叶剖面安装角多呈线性变化,因此引入桨叶“扭度”

$$\Delta\varphi=\varphi_1-\varphi_0 \tag{5-3}$$

即叶尖安装角与叶根安装角之差,通常 $\Delta\varphi=-5°\sim-10°$。于是,任意半径处桨叶剖面的安装角

$$\varphi=\varphi_0+\Delta\varphi\frac{r}{R}=\varphi_1+\Delta\varphi\left(\frac{r}{R}-1\right) \tag{5-4}$$

或

$$\varphi=\varphi_7+\Delta\varphi\left(\frac{r}{R}-0.7\right) \tag{5-5}$$

式中，φ_7 称为整片桨叶的安装角，或称为桨叶的桨距。虽然在构造上安装角沿径向的分布规律是固定的，但是整片桨叶仍可绕其本身轴在一定范围内转动，也就是说，各个剖面的安装角可以同时增加或减小某个角度。这时，无须分别说明不同剖面的安装角为多少，只要指出其中之一，其他剖面的安装角可以立即推得，因为它们之间的相对变化是固定的。通常取 $\bar{r}=0.7$ 处特征剖面的安装角 φ_7 为基准。而且，为了区别桨叶剖面（翼型）安装角，φ_7 称为整片桨叶的安装角，或称为桨叶的桨距。桨距一词是从几何螺旋线的螺距这个概念借鉴过来的。桨距已经失去了原来的意义，现在这个术语用来作为桨叶的安装角的代词。每片桨叶的桨距在旋转一圈时也可能是周期变化的，对于整具旋翼来说，各片桨叶在不同方位处的桨距可能彼此不同。这样，又有总距一词，用来说明旋翼各片桨叶的平均桨距。

7. 旋翼转速 n 和角速度 Ω

旋翼转速一般以每分钟旋转的圈数为单位，而角速度以每秒转过的弧长为单位。两者的关系为

$$\Omega=\frac{\pi n}{30} \tag{5-6}$$

旋翼转速的提高将要受到叶尖速度的限制，以避免叶尖出现过大的空气压缩效应。目前旋翼的叶尖速度为 $\Omega R=180\sim220\text{m/s}$，大约相当于叶尖 Ma 数的 0.55～0.6 倍。

5.2.2　旋翼参数的无因次化

旋翼参数无因次化的目的是便于把几何尺寸不同及工作条件不同的旋翼特性进行比较，或把旋翼模型的实验结果应用到实物上。无因次化的基础是相似理论。在处理旋翼问题时，以 R 作为长度的基准尺度，以 πR^2 作为面积的基准尺度，以 ΩR 作为速度的基准尺度。

（1）桨叶剖面所在的相对半径为

$$\bar{r}=r/R \tag{5-7}$$

（2）桨叶的相对宽度为

$$\bar{b}=b/R \tag{5-8}$$

（3）旋翼运动的无因次化速度为

$$\bar{V}_0=V_0/\Omega R \tag{5-9}$$

（4）旋翼拉力系数 C_T、扭矩系数 m_k、功率系数 C_P 的无因次化分别为

$$C_T=T\Big/\frac{\rho}{2}\Omega^2R^2\cdot\pi R^2 \tag{5-10}$$

$$C_P=m_k=M_k\Big/\frac{\rho}{2}\Omega^2R^2\cdot\pi R^2\cdot R=P\Big/\frac{\rho}{2}\Omega^2R^2\cdot\pi R^2\cdot\Omega R \tag{5-11}$$

式中，ρ 为空气密度；T 为拉力；M_k 为旋翼反扭矩；P 为旋翼功率。

5.2.3 旋翼的工作原理

1. 旋翼的工作环境和桨叶运动

为了说明旋翼工作原理，考察一下旋翼的轴向直线运动，这相当于旋翼飞行器垂直飞行时旋翼的情况，可以把螺旋桨看成是一个一面旋转一面前进的机翼进行讨论。

设一旋翼，桨叶片数为 k，以恒定角速度 Ω 绕轴旋转，并以速度 V_0 沿旋转轴做直线运动。如果在想象中用一中心轴线与旋翼轴重合，而半径为 r 的圆柱面把桨叶截开，并将这圆柱面展开成平面，就得到桨叶剖面。既然这时桨叶包括旋转运动和直线运动，对于桨叶剖面来说，应有周向速度（等于 Ωr）和垂直于旋转平面的速度（等于 V_0），而合速度是两者的矢量和。用不同半径的圆柱面所截出来的各个桨叶剖面，它们的合速度大小不同，方向也不相同。如果再考虑到由于桨叶运动所激起的附加气流速度（诱导速度），那么桨叶各剖面与空气之间的相对速度情况更加不同。与机翼相比较，这就是桨叶的工作条件复杂，对它的分析比较困难的原因。

但从能量观点来看，旋翼不过是一具“能量转换器”，有下列两种转换方式。

（1）把发动机的能量转变成有效功，如旋翼飞行器的上升状态；

（2）把发动机的能量转变成气流的动能，如旋翼飞行器的悬停状态。

假定螺旋桨的轴向速度为 V_0，其拉力为 T，而所消耗的功率为 P，那么，在第一种情况中，效率定义为 $\eta=TV_0/P$，对于正常情况来说，$0<\eta<1$。

注意：每个旋翼的工作效率是不一样的，需要逐个进行分析计算。

2. 旋翼和桨叶的相对气流

在旋翼飞行器前飞时，旋翼的远处来流方向与旋翼轴不平行，而是斜向吹来，旋翼处于斜流状态。现设定坐标系是旋翼构造轴系，坐标原点 O 在旋翼中心。竖轴 Y_S 沿旋翼的构造旋转轴向上为正。纵轴 X_S 指向前方，与速度 V_0 在构造旋转平面（S-S 平面）的投影重合。右旋旋翼的横轴 Z_S 按右手规则确定；左旋旋翼 Z_S 轴则按左手规则确定 Z_S 轴的方向，因而 Z_S 轴总是位于桨叶向前方旋转的半圆内。

设旋翼飞行器的飞行速度为 V_0，或者相对来说，速度为 V_0 的来流（未扰动气流）从一定方向吹向旋翼。按照与飞机机翼类似的方式，把来流 V_0 与旋翼的构造旋转平面（S-S 平面）之间的夹角 α_s 定义为旋翼构造迎角。把相对气流速度 V_0 分解为沿 X_S 轴与沿 Y_S 轴两个方向的分量，并将它们除以桨尖旋转速度 ΩR，便得到表征旋翼工作状态的两个重要的速度系数。

（1）平行于构造旋转平面（S-S 平面）的速度系数 μ 称为前进比，且

$$\mu=\frac{V_0\cos\alpha_s}{\Omega R} \tag{5-12}$$

（2）垂直于构造旋转平面的速度系数 λ_0 称为轴向来流系数，或称为流入比，且

$$\lambda_0=\frac{V_0\sin\alpha_s}{\Omega R} \tag{5-13}$$

在悬停飞行时，由于 $V_0=0$，μ 及 β 皆为 0，此时 α_s 没有意义；在垂直下降状态，V_0 自下而上流向旋翼，α_s 及 λ_0 为正值；而垂直上升时，α_s 及 λ_0 为负值。在前飞状态，飞行速度越大，μ 值越大。迎角 α_s 随飞行状态也有变化。一般来说，只有在下降中 α_s 及 λ_0 才可能为正

值。在爬高及常用的平飞状态，旋翼处于负迎角下工作，即来流从斜上方吹向旋翼，λ_0 为负值。通常，平飞时旋翼迎角 $\alpha_s \approx -5° \sim -10°$，而普通固定翼飞机的机翼一般处于小的正迎角状态下。

前飞速度造成旋翼旋转平面上左右两边的相对气流速度不对称。在前行桨叶区域桨叶逆风旋转，相对气流速度当然比顺风旋转的后行桨叶要大些，相对方向也有不同。旋翼飞行器的前飞速度越大，旋翼旋转平面上相对气流的不对称程度也就越大。

3. 旋翼桨叶的挥舞运动

旋翼桨叶如果固接在旋转轴上，前飞时由于旋转平面上气流的不对称，必然引起左右两边的拉力不对称，前行桨叶拉力大，后行桨叶拉力小，因而形成侧倾力矩使旋翼飞行器倾转。前飞速度越大，侧倾力矩也越大，如无有效措施，旋翼飞行器将难以前飞。另外，由于桨叶像一根很长的悬臂梁，分布的空气动力载荷引起很大的根部弯矩，而且这种弯矩随着周向气流速度的周期变化而相应地改变。桨叶在大的交变弯矩作用下容易发生疲劳损坏。铰接式旋翼消除了上述障碍，桨叶根部通过挥舞铰与旋转轴相连，桨叶可以绕挥舞铰做上下挥舞运动。桨叶在挥舞运动中偏离 S-S 平面向上抬起的角度称为桨叶挥舞角 β。桨叶挥舞运动所在的平面称为挥舞平面，挥舞平面与 S-S 平面相垂直。

旋翼飞行器在稳定悬停状态时，桨叶的周向相对气流速度不随方位角变化。在旋转时各片桨叶应抬起相同的角度，该角度的大小取决于挥舞平面内桨叶拉力、重力和离心力三者对挥舞铰力矩的平衡。拉力使桨叶上扬，重力使桨叶下垂，而不论桨叶是处在上扬（$\beta>0$）或下垂（$\beta<0$）位置，离心力总是企图把它拉回到 S-S 平面上（$\beta=0$）。由于重力远小于升力，因此它对挥舞角的影响通常忽略不计。

在垂直飞行状态，虽然桨叶因上扬脱离了 S-S 平面，桨尖面平行于 S-S 平面，这种均匀挥舞并不影响桨叶空气动力的对称性。旋翼飞行器前飞时旋翼处于斜流状态，桨叶的相对气流及空气动力沿方位角周期变化，致使桨叶在旋转中又有周期挥舞运动，可观察到此时旋翼锥体（或叶尖平面）大致向侧后方有些倾倒。无论如何，挥舞角 β 可以写为傅里叶级数形式：

$$\beta = a_0 - a_1\cos\psi - b_1\sin\psi - a_2\cos 2\psi - b_2\sin 2\psi \tag{5-14}$$

式中，a_0 是挥舞角 β 中不随方位角改变的常数部分，在悬停状态，$\beta=a_0$。

由于桨叶做周期挥舞运动，因此在挥舞平面内，除拉力、重力和离心力之外，还有挥舞惯性力。这些力对挥舞铰的力矩之和应为 0，经过简化处理，可推导得到桨叶挥舞运动的近似微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\mathrm{d}\psi^2} + \beta = \frac{1}{\Omega^2 I_{ye}} M_T \tag{5-15}$$

4. 旋翼桨叶的摆振运动

旋翼桨叶做挥舞运动时，桨叶重心距旋转轴的距离不断变化，它对旋转轴的相对速度（沿径向）为

$$V_r = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r_G\cos\beta) = -r_G\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}\sin\beta \tag{5-16}$$

由理论力学可知，旋转着的质量对旋转轴有相对运动时会受到科氏力的作用。设桨叶质量为 G_{ye}/g，旋转角速度为 Ω，经简化推导得到一片桨叶科氏力的表达式为

$$F_{gs}=2\frac{G_{ye}}{g}r_G\Omega^2\left(a_0a_1\sin\psi-a_0b_1\cos\psi-\frac{a_1^2-b_1^2}{2}\sin2\psi+a_1b_1\cos2\psi\right) \tag{5-17}$$

可见，挥舞运动引起的科氏力是周期交变力，而且一阶挥舞运动会引起二阶的科氏力。根据实际例子的计算，发现一片桨叶的科氏力的最大幅值竟高达桨叶自重的7倍以上，会在旋转平面内造成很大的交变弯矩，对桨叶结构的寿命非常不利。另外，桨叶在旋转平面内的空气动力阻力也造成根部弯矩，前飞时气动阻力同样随方位角变化，不过它所造成的弯矩交变部分比科氏力的交变弯矩小得多。

5.3 旋翼动量理论的基础知识

根据牛顿定律，旋翼拍击空气并将空气推向下方，空气加给旋翼的反作用力就是旋翼产生的拉力。动量理论以气流通过桨盘的动量和能量变化作为依据。把总的气流速度与总的旋翼拉力和功率联系起来，是流体力学中的基本守恒定律（质量守恒、动量守恒和能量守恒）在旋翼上的应用。

5.3.1 垂直飞行的动量理论

1. 旋翼动量理论的原理

旋翼动量理论将旋翼看成一个前进的桨叶片数无限多的桨盘，空气流连续地通过桨盘，在桨盘上产生的拉力分布是均匀的，即桨盘的气流速度在桨盘处各点为一常数。桨盘的前后存在压差，但桨盘前后的轴向速度是相等的（不考虑桨盘的厚度）。桨盘上无扭矩，通过桨盘的气流无旋转。此外，为了求解方便，进一步假定气体为理想不可压缩流体。在动量理论中，气流连续通过桨盘的流动情况如图5-3所示。

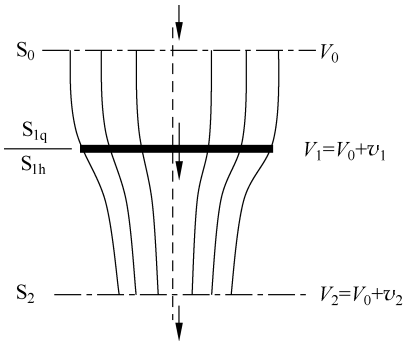


图5-3 气流连续通过桨盘的流动情况

旋翼动量理论的基本原理是依据动量守恒定律，建立旋翼拉力与流过旋翼桨盘的质量流量和远处尾迹中的诱导速度的关系。实质上，旋翼动量理论是牛顿定律在旋翼上的应用。把旋翼简单地看作作用盘，它拍击空气并将空气推向下方，而空气加给旋翼的反作用力就是旋翼产生的拉力。根据牛顿第二定律，该力正比于通过旋翼的空气质量流量和空气加速度的乘积。为了计算空气的流量和速度变化，要用到关于流体运动的质量守恒定律、动量定理和能量守恒定律。能量守恒定律把远处尾迹中的诱导速度与旋翼桨盘处的诱导速度联系起来，质量守恒定律则给出了流过旋翼桨盘的质量流量，三者相结合便能得出旋翼桨盘处的诱导速度与旋翼拉力和功率的关系。

2. 垂直上升状态

旋翼飞行器的垂直飞行含有相对于旋翼的轴流状态，这就意味着旋翼具有轴对称性，它表明流过旋翼的气流速度和桨叶上的载荷都与旋翼桨叶的方位角无关。因而，这种轴对称性大大简化了旋翼空气动力学。考虑旋翼飞行器垂直上升状态下的均匀载荷旋翼作用盘模型，如图5-3所示。旋翼作用盘位于中间截面，模型的边界截面位于上下两端。在上游远处

截面(S_0),气流速度 V_0 就是旋翼飞行器垂直上升的速度;在桨盘处的中间截面(S_1)和下游远处截面(S_2),气流速度分别增加至 V_1 和 V_2,图 5-3 中的 v_1 和 v_2 为当地气流诱导速度。诱导速度指由于某种作用在均匀流场内或静止空气中所引起的速度增量(包括大小和方向的改变)。由于旋翼的轴对称性,作用盘模型整个侧面上压强的水平横向分量自相平衡,而轴向分量构成的总压力与边界截面所承受的总压力互相平衡。此外,由于假设气流无黏性,因此边界截面上无切向力,仅受法向力。

1) 旋翼升力系数 C_T 和功率系数 C_P 的计算

根据动量定理,旋翼作用盘模型内流体动量的变化率在大小和方向上等于旋翼作用在该流体上的外力。根据旋翼气流应用定常条件下的能量守恒定律,因为气流上顶面(S_0)与下底面(S_2)压力所做的功互相抵消,而侧壁压强与流速垂直,功为零。所以,气流的动能变化所需的能量完全来自旋翼。旋翼所消耗的功率 P 可由气流的动能变化率确定:

$$P=\dot{m}\left(\frac{1}{2}V_2^2-\frac{1}{2}V_0^2\right) \tag{5-18}$$

式中,$\dot{m}$ 为单位时间内流过任意截面的空气质量,称为空气质量流量。旋翼付出的功率 P 应为

$$P=TV_1=TV_0+Tv_1 \tag{5-19}$$

旋翼功率等于旋翼拉力与桨盘处的气流速度 V_1 的乘积。在动量理论中,这个功率还可以分成两部分:一是拉力与运动速度 V_0 的乘积,称为“有效功率”;二是拉力与桨盘处诱导速度 v_1 的乘积,称为“诱导功率”,纯为损失。以 $\rho\pi R^2(\Omega R)^2$ 对 T、P 无量纲化,进一步得到旋翼拉力系数 C_T 的表达式和功率系数 C_P 的表达式:

$$C_T=2(\bar{V}_0+\bar{v}_1)\bar{v}_1 \tag{5-20}$$

$$C_P=2(\bar{V}_0+\bar{v}_1)^2\bar{v}_1 \tag{5-21}$$

2) 旋翼效率 η 计算

按照定义,效率是有效功率与全部消耗功率之比。如果把效率公式都写成无因次公式,有

$$\eta=\frac{C_T\bar{V}_0}{C_P}=\frac{\bar{V}_0}{\bar{V}_1} \tag{5-22}$$

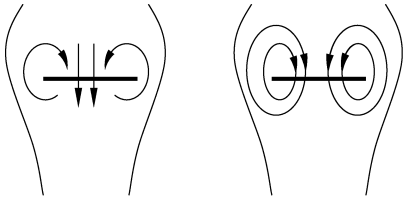
3. 垂直下降状态

旋翼动量理论分析的关键是要采用合适的旋翼作用盘模型。当旋翼飞行器垂直下降飞行时,来流速度朝上,气流速度递减。这是气流向下动量的一个有效增量,也是气流向上运动时产生向上拉力的原因。远处下游尾迹在旋翼的上方,旋翼诱导速度与相对气流方向相反,两股反向气流相遇形成紊乱的旋涡。此时如图 5-3 所示的旋翼作用盘模型不再适用。

1) 涡环状态

如图 5-4 所示,当旋翼飞行器低速下降时,靠近桨盘的逆行环流和它上方的非定常紊流开始出现。

此时,由于空气流动状态的改变是平缓的,旋翼附近并没有急剧的流动变化,故动量理论结果在进入涡环状态的某个范围内仍然适用。但是,当下降速度



(a) 低下降速度　　(b) 高下降速度

图 5-4　涡环状态的旋翼气流示意图

超过大约 $V_0=v_h/2$ 时，靠近桨盘处的气流也变得极不稳定和湍动。向上的自由流使桨尖涡螺旋线堆积在桨盘的下方，形成涡环。旋翼旋转一周，涡环累积着强度，直到这种流动突然崩溃，涡环破裂并离开桨盘平面为止。整个流场是非定常的，涡环周期性地逸散并且升入旋翼上方的气流中。这种状态下的旋翼承受着高水平的振动，易失去控制，且此时的需用功率对垂直速度非常不敏感。在此状态下旋翼动量理论失效。

2）紊流状态

旋翼处于垂直下降状态，当功率为负时，出现紊流状态，如图 5-5(b)所示。在这种状态下，气流仍然会有高水平的紊流，但是，因为桨盘处的速度向上，所以穿过旋翼的环流少了很多。旋翼承受着由于紊流造成的某些颠簸，但一点也不像涡环状态那样剧烈振动。平衡的自转通常出现于紊流状态，旋翼飞行器发动机停车时的下降会处于这种状态。此时，旋翼功率为零，虽然理论上(名义上)不存在穿过桨盘的气流，$|V_0|-v_1=0$(见图 5-5(a)中的理想自转)。但实际上有大量的环流和紊流。这种气流情况类似于圆盘的气流情况(没有穿过该圆盘的气流，在它上方有紊流尾迹)。据此可估算旋翼飞行器的垂直下降率。

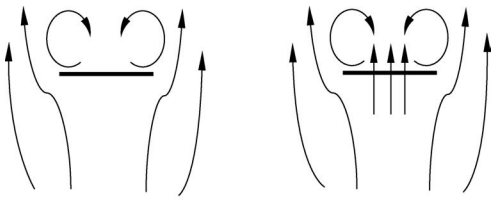


图 5-5　紊流状态的旋翼气流示意图

把该平衡自转时的旋翼假设为一个不透气的圆形平板，其拉力就是它的迎风阻力，因此拉力系数 C_T 可写为

$$C_T=\frac{1}{2}C_D\,|\,\bar{V}_0\,|^2 \tag{5-23}$$

式中，C_D 为阻力系数。对于理想情况下平衡的自转，旋翼拉力系数与悬停情况一致，$C_T=2\bar{v}_h^2$。

5.3.2　前飞时的动量理论

当旋翼飞行器以一定水平分速向前飞行时，旋翼桨盘为了给旋翼飞行器提供推进力而向前倾斜，此时，整个旋翼处于一段斜吹的气流中。在运用旋翼动量理论分析时，可以把该段气流看作一股理想流体斜向流过桨盘来处理。为简化处理，宏观上认为流过旋翼的这段流体具有轴对称性，气流速度和桨叶上的载荷均与旋翼的方位角无关。

1. 平飞状态

旋翼飞行器平飞状态下的均匀载荷旋翼作用盘模型如图 5-6 所示。旋翼作用盘位于 S_1 截面，模型的边界截面位于上游远处 S_0 截面和下游远处 S_2 截面。在 S_0 截面，气流速度 V_0 在大小上等于旋翼飞行器定直平飞的速度，与平飞速度方向相反；在 S_1 截面和 S_2 截面，气流速度分别增加至 V_1 和 V_2，图 5-6 中的 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 为当地气流诱导速度；α_1 和 α_2 分别为来流速度 V_0 在 S_1 截面和 S_2 截面的夹角，其中 α_1 就是旋翼桨盘迎角(此种流动情况下定义为正)。与垂直上升状态的作用盘模型分析情况

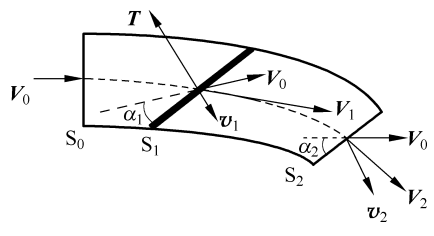


图 5-6　平飞状态下的均匀载荷旋翼作用盘模型

基本一致，由于流过旋翼的气流的轴对称性，作用盘模型整个侧面上压强的法向分量自相平衡，而轴向分量构成的总压力与边界截面所承受的总压力互相平衡。此外边界截面同样无切向力，仅受法向力。

根据动量定理，旋翼拉力为

$$\boldsymbol{T}=-\dot{m}(\boldsymbol{V}_2-\boldsymbol{V}_0)=-\dot{m}\boldsymbol{v}_2 \tag{5-24}$$

根据质量守恒定律依然可以确定流过作用盘模型任意截面的流体质量流量 $\dot{m}$ 为常数。气流穿过旋翼作用盘模型时，总是垂直穿过以旋翼直径为直径的一个圆。这样，流过模型的质量流量可以写为

$$\dot{m}=\rho\pi R^2 V_1 \tag{5-25}$$

式中，ρ 为空气密度。根据能量守恒定律，得到旋翼拉力系数和功率系数表达式：

$$C_T=2\bar{V}_1\bar{v}_1 \tag{5-26}$$

$$C_P=2(\bar{V}_0\sin\alpha_1+\bar{v}_1)\bar{V}_1\bar{v}_1 \tag{5-27}$$

2. 爬升和下滑状态

旋翼飞行器爬升状态下的均匀载荷旋翼作用盘模型与上升状态下的模型基本一致，此时旋翼桨盘的来流速度 $\boldsymbol{V}_0$ 与惯性水平面构成一个夹角 α_0。实际上这个夹角 α_0 就是旋翼飞行器的爬升角。此种状态下的动量理论分析方法与平飞状态无异，平飞状态中推导的一系列结论对于爬升状态而言都是适用的。值得注意的是，平飞状态的爬升率与诱导功率无关，仅仅取决于旋翼飞行器的剩余功率。

旋翼飞行器沿向下倾斜的轨迹所做的飞行，叫作下滑。从基于垂直下降状态的分析结果不难看出，旋翼飞行器的下滑状态随下滑率的增大而可能由正常工作状态转至涡环状态、紊流状态。与垂直飞行状态不同的是，在下滑状态中，旋翼飞行器带有一定的前飞速度。从理论上来说，用动量理论分析下滑状态时，其分析方法与垂直状态基本一致。

5.4　旋翼叶素理论的基础知识

由动量理论确定的理想效率仅考虑了旋翼的轴向效应，而未考虑旋翼的旋转效应，因此并不完全符合旋翼的实际气流特征。为了能够合理模拟桨叶绕流，叶素理论将桨叶分为有限个微小段（称为叶素），然后计算每一个叶素上的气动力，最后沿径向求和得到桨叶上的总气动力。

5.4.1　垂直飞行的叶素理论

1. 旋翼拉力和功率的一般表达式

旋翼飞行器垂直飞行时旋翼叶素理论下的桨叶剖面如图 5-7 所示，选取坐标系 $Oxyz$ 为旋翼叶素坐标系。叶素平面垂直于桨叶变距轴线，坐标原点 O 位于叶素平面与桨叶变距轴线的交点处。z 轴与变距轴线重合，指向叶尖；x 轴平行于构造旋转平面，指向叶素的旋转方向；y 轴指向上方。α^* 为桨叶剖面的气动迎角，β^* 为桨叶剖面的来流角，φ 为桨叶剖面安装角，W 为桨叶剖面的相对气流合速度。

从图 5-7 可知：流向桨叶翼型的相对气流合速度为 W，因此，作用在翼型上的空气动力

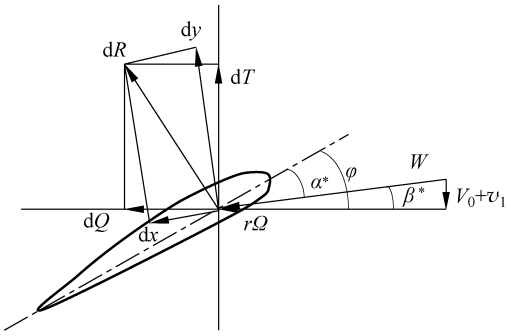


图 5-7 垂直飞行时旋翼桨叶剖面坐标示意图

包括升力和阻力，分别为

$$\mathrm{d}y=\frac{1}{2}C_y\rho W^2 b\,\mathrm{d}r \tag{5-28}$$

$$\mathrm{d}x=\frac{1}{2}C_x\rho W^2 b\,\mathrm{d}r \tag{5-29}$$

式中，C_y 为翼型升力系数；C_x 为型阻系数。翼型升力 $\mathrm{d}y$ 与 W 相垂直，指向上。型阻 $\mathrm{d}x$ 沿 W 方向，指向后。$\mathrm{d}y$ 和 $\mathrm{d}x$ 的合力以 $\mathrm{d}R$ 表示（如图 5-7 所示）。

气动合力 $\mathrm{d}R$ 沿旋翼旋转轴的分力称翼型拉力；$\mathrm{d}R$ 在构造旋转平面的分力 $\mathrm{d}Q$ 为翼型旋转阻力，逆于旋转方向为正。注意到翼型升力 $\mathrm{d}y$ 和拉力 $\mathrm{d}T$ 之间的夹角为来流角 β^*，翼型旋转阻力 $\mathrm{d}Q$ 乘以半径 r 即为翼型扭矩 $\mathrm{d}M$，乘以 $r\Omega$ 即为翼型所消耗的功率 $\mathrm{d}P$。总和各个翼型的拉力和功率，就是整片桨叶的拉力和功率。κ 为旋翼桨叶的叶端损失系数，旋翼的 k 片桨叶加起来便得到整个旋翼的拉力和功率。写成无因次形式为

$$C_T=\kappa\frac{k}{\pi}\int_0^1 C_y\bar{r}^2\bar{b}\,\mathrm{d}\bar{r} \tag{5-30}$$

$$m_k=\frac{k}{\pi}\int_0^1 C_x\bar{r}^3\bar{b}\,\mathrm{d}\bar{r}+\frac{k}{\pi}\int_{\bar{r}_0}^{\bar{r}_1} C_y\bar{r}^3\beta^*\bar{b}\,\mathrm{d}\bar{r} \tag{5-31}$$

对于升力来说，要考虑桨叶的叶端损失。另外，一般来说，旋翼桨叶 β^* 角度小于 10°，故推导计算公式时可近似认为 $\cos\beta^*=1$，$\sin\beta^*=\beta^*$，从而得出拉力系数和功率系数分别为

$$C_T=\frac{T}{\frac{1}{2}\rho\pi R^2(\Omega R)^2} \tag{5-32}$$

$$m_k=\frac{75N}{\frac{1}{2}\rho\pi R^2(\Omega R)^3} \tag{5-33}$$

式中，N 为功率，单位是马力。

2. 矩形桨叶旋翼的拉力和功率

1）矩形桨叶的拉力系数

在旋翼飞行器的旋翼中，矩形桨叶是用得最多的。对于矩形桨叶，b＝常数，K_T 是拉力修正系数，表示拉力沿桨叶分布的不均匀程度。对于线性扭转的常用矩形桨叶，$K_T\approx 0.96$。由此得出矩形桨叶旋翼拉力公式为

$$\frac{C_T}{\sigma}=\frac{k}{3}K_T C_{y7} \tag{5-34}$$

式中，C_{y7} 是桨叶特征剖面的升力系数；k 为桨叶片数；C_T/σ 表示单位桨叶面积的拉力系数，在旋翼设计的参数选择中要用到。一般来说，旋翼拉力系数值为 0.01～0.02。

2）矩形桨叶型阻功率系数

在矩形桨叶的情况下，假设以桨叶特征剖面的型阻系数 C_{x7} 表征各个桨叶的剖面型阻系数，同时用一修正系数 K_P 来考虑型阻分布不均匀对旋翼型阻功率带来的影响，因此

$$m_{K_x}=\sigma\int_0^1 C_x\bar{r}^3\,\mathrm{d}\bar{r}=\sigma\int_0^1 K_P C_{x7}\bar{r}^3\,\mathrm{d}\bar{r}=\frac{1}{4}K_P\sigma C_{x7} \tag{5-35}$$

式中，K_P 称为型阻功率修正系数，其值与桨叶几何形状有关。对于常用的矩形桨叶，$K_P\approx 1$。梯形桨叶的 K_P 值比矩形桨叶的小。表 5-1 列出了 K_P 与桨叶根梢比 η_{ye} 的近似关系。

表 5-1　K_P 与桨叶根梢比 η_{ye} 的近似关系

η_{ye}	1	2	3	4
K_P	1.0	0.94	0.91	0.88

3）有效功率系数

$$m_{K_{yx}}=\int_{\bar{r}_0}^{\bar{r}_1} C_y\bar{r}^2\bar{V}_0\,\mathrm{d}\bar{r}=C_T\bar{V}_0 \tag{5-36}$$

4）诱导功率系数

先假设诱导速度沿桨盘均匀分布为常数，C_y 用特征剖面的 C_{y7} 代替。为了考虑实际上的诱导速度非均匀分布的影响，引入一个诱导功率修正系数 J，其量值由下面章节确定。

$$m_{K_i}=\sigma\int_{\bar{r}_0}^{\bar{r}_1} C_y\bar{r}^2\bar{v}^*\,\mathrm{d}\bar{r}=JC_T\bar{v}_1 \tag{5-37}$$

总结起来，矩形桨叶的旋翼需用功率为

$$m_K=\frac{1}{4}K_P\sigma C_{x7}+C_T\bar{V}_0+JC_T\bar{v}_1 \tag{5-38}$$

对于悬停状态，此时没有有效功率，因而

$$m_K=\frac{1}{4}K_P\sigma C_{x7}+JC_T\bar{v}_{10} \tag{5-39}$$

比较以上两式，似乎垂直爬升状态的需用功率总是大于悬停状态，差值即有效功率。但实际并非如此，一方面，爬升时通过旋翼的空气流量比悬停时大，因而诱导速度减小，即 $v_1<v_{10}$；另一方面，V_0 增大了滑流速度，使各片桨叶的尾迹和尾桨的尾迹较快地远离桨盘平面，从而减小了桨叶之间的干扰，缓和了桨盘平面上速度分布的不均匀性。上述原因导致诱导功率减小。

3. 儒氏旋翼

儒可夫斯基曾经证明当诱导速度沿桨盘均匀分布时，诱导功率最小。若要保持诱导速度沿桨叶半径不变（称为儒氏条件），需使桨叶速度环量沿半径不变，即

$$C_y\bar{b}\bar{r}=C_{y7}\bar{b}_7(0.7)=\text{常数} \tag{5-40}$$

实际上，此数为两倍翼型环量。由此，拉力系数可以积分出来。

$$C_T = k\sigma C_{y7}\frac{0.7}{2} \tag{5-41}$$

式中 σ 是以相对半径为 0.7 处桨叶特征剖面的相对宽度代入的。在矩形桨叶条件下，则

$$\varphi = \alpha^* + \beta^* = \frac{0.7C_{y7}}{\alpha_\infty \bar{r}} + \frac{\bar{V}_0 + \bar{v}_1}{\bar{r}} \tag{5-42}$$

式中，φ、α^*、β^* 分别为矩形桨叶儒氏旋翼的安装角、来流角、迎角。

在使用矩形桨叶的情况下，儒氏旋翼的桨叶安装角 φ 与半径 r 成反比。φ 在叶根处大，桨尖处小，负扭转是很急剧的。飞行状态不同，儒氏旋翼桨叶的扭转规律也不相同。虽然从气动上说，对某一设计状态而言，儒氏旋翼是性能最好的旋翼，即拉力一定时，所需功率最小，或功率一定时拉力最大。不过，由于儒氏桨叶的几何扭转过于急剧，会造成工艺制造上的不便，以及桨叶的刚度降低，容易发生弯曲和扭转变形。所以，通常不采用桨叶最佳扭转，而采用简单线性规律扭转。

5.4.2 前飞时的叶素理论

1. 前飞时旋翼桨叶叶素的工作环境

旋翼飞行器在前飞时，旋翼一方面要提供升力以平衡全机的重量，另一方面要提供向前的推进力以平衡旋翼和机身的气动阻力。前飞时旋翼桨叶的叶素理论旨在建立桨叶几何参数同它的空气动力之间的关系，与垂直飞行状态不同，旋翼诱导速度不是假定为均匀分布，而是采用由涡流理论给出的傅氏级数形式表达式，它比均匀分布假定更真实地反映了诱导速度沿半径及方位角的变化。对于旋翼气动性能分析，诱导速度取到一阶谐波已够精确，即

$$v_1 = v_0(r) + v_{1c}(r)\cos\psi + v_{1s}(r)\sin\psi \tag{5-43}$$

前飞时旋翼桨叶的叶素理论同垂直飞行时的叶素理论一样，首先分析桨叶剖面的相对流动，进而确定叶素上的基元力，然后通过积分得出桨叶及旋翼的空气动力。为了分析桨叶剖面的相对气流、迎角变化和它的工作特性，假定桨叶为中心铰式，而且不考虑摆振运动。取径向位置为 r 的一个剖面，各速度皆是已化为无因次的相对量(除以 ΩR)，由图 5-7 可写出速度沿剖面坐标系各轴的分量为

$$\bar{W}_x = \bar{r} + \mu\sin\psi \tag{5-44}$$

$$\bar{W}_z = \mu\cos\psi - (\bar{v}_1 - \lambda_0)\beta \tag{5-45}$$

$$\bar{W}_y = \left(\bar{v}_0 - \lambda_0 - \frac{1}{2}\mu a_1\right)\cos 2\psi + \left(-\frac{1}{2}\mu b_1\right)\sin 2\psi \tag{5-46}$$

式中，μ 为旋翼前进比；λ_0 为旋翼流入比；β 为桨叶挥舞角；ψ 为桨叶方位角。

考虑到桨叶几何扭转带来的安装角 φ 的变化和诱导速度 v_1 的不均匀分布，桨叶在旋转一周过程中剖面迎角的变化是相当复杂的。即使同一剖面，在不同方位角处的迎角也不同，亦即在旋转中剖面迎角发生周期变化，变化幅度在 10°以上。

桨盘平面上的剖面迎角分布很不均匀，后行桨叶一侧迎角大，容易发生气流分离。桨叶挥舞是造成迎角变化大的主要原因。迎角与速度相匹配，消除了倾翻力矩。不仅迎角，剖面的相对气流速度也是周期变化的。用速度对声速的比值马赫数 Ma 表示，前行桨叶 Ma 值大，后行桨叶 Ma 值小。随着 μ 值的增加，剖面迎角和 Ma 值的变化幅度都会

增大。

2. 前飞时旋翼桨叶叶素的空气动力

取桨叶上径向位置为 r，宽度为 $\mathrm{d}r$ 的叶素，叶素的空气动力在旋翼的构造轴系中的投影，构成了旋翼的基元力。旋翼空气动力在桨毂中心分解为：基元拉力 $\mathrm{d}T_s$ 沿旋翼轴向上；基元后向力 $\mathrm{d}H_s$ 垂直于旋翼轴顺风向后；基元侧向力 $\mathrm{d}S_s$ 指向方位角 90°方向；基元反扭矩 $\mathrm{d}M_k$ 与旋转方向相反。

$$\mathrm{d}T_s = \mathrm{d}T\cos\beta \tag{5-47}$$

$$\mathrm{d}H_s = \mathrm{d}Q\sin\psi - \mathrm{d}T\sin\beta\cos\psi \tag{5-48}$$

$$\mathrm{d}S_s = -\mathrm{d}Q\cos\psi - \mathrm{d}T\sin\beta\sin\psi \tag{5-49}$$

$$\mathrm{d}M_k = \mathrm{d}Qr\cos\beta \tag{5-50}$$

将基元拉力沿桨叶积分，并取其对方位角的平均值，再乘以桨叶片数即得到整个旋翼产生的拉力。考虑旋翼桨叶叶端损失系数 $\kappa \approx 0.91 \sim 0.94$，桨盘载荷较大者取较小值。求解无因次的拉力系数时，利用定积分公式对 ψ 积分后得到

$$C_T = \kappa\frac{k}{\pi}a_\infty\int_0^1\left\{[\varphi_7]\left(\bar{r}^2+\frac{1}{2}\mu^2\right)-(\bar{v}_0-\lambda_0)\bar{r}-\frac{1}{2}\bar{v}_{1s}\mu+\theta_2\mu\bar{r}\right\}\bar{b}\,\mathrm{d}\bar{r} \tag{5-51}$$

可以看出，挥舞运动对于拉力系数没有影响。旋翼飞行器旋翼无周期变距，对于矩形桨叶，桨叶宽度为常数，或者对于有尖削的桨叶近似地取 $\bar{b}=\bar{b}_7$，又假定诱导速度直线分布，即自前向后直线增大，线性扭转 $\Delta\varphi$ 对拉力系数影响很小，则拉力系数公式简化为

$$C_T = \frac{1}{3}\kappa\sigma a_\infty\left[(\varphi_7 - Ka_0)\left(1+\frac{3}{2}\mu^2\right)+\frac{3}{2}\lambda_1\right] \tag{5-52}$$

通常 C_T 已预先确定，需要计算 φ_7，由式(5-52)得到

$$\varphi_7 = \left[\left(\frac{3C_T}{\kappa\sigma a_\infty}-\frac{3}{2}\lambda_1\right)\Big/\left(1+\frac{3}{2}\mu^2\right)\right]+Ka_0 \tag{5-53}$$

用同样的方法，可得到后向力 C_H、侧向力 C_S，在此不再赘述。

旋翼的扭矩公式虽然可以像推导拉力公式那样经过二重积分来导出，但是在有了拉力、纵向力和侧向力的表达式之后，能够用比较简洁的推导过程得到。基元功率系数为

$$\mathrm{d}m_k = \overline{W}\,\mathrm{d}\overline{X}+\bar{v}_1\mathrm{d}C_T+(-\lambda_0)\mathrm{d}C_T+\bar{V}_\beta\mathrm{d}C_T-\mu\mathrm{d}C_H \tag{5-54}$$

经推导和简化，最后旋翼的功率系数(扭矩系数)为

$$m_k = \frac{1}{4}\sigma C_{x7}K_{P0}(1+5\mu^2)+C_T\bar{v}_{dx}J_0(1+3\mu^2)+C_T(-\lambda_0)-C_{H\mu} \tag{5-55}$$

5.5　旋翼经典涡流理论的基础知识

由于动量理论是根据整个气流的运动特性描述旋翼桨盘的作用，无法涉及旋翼的几何形状；叶素理论虽然从桨叶剖面的受力情况分析问题，建立了旋翼几何特性、运动特性与其空气动力的关系，可用于旋翼设计，但不能确定各叶素处的诱导速度；旋翼涡流理论则可以求得旋翼周围任意点处的诱导速度，从而能够确定在叶素上的诸力，最后算出旋翼的拉力和功率。

5.5.1 垂直飞行的经典涡流理论

1. 旋翼涡流理论的基本假设

从理论空气动力学的观点来看，旋翼对周围空气的作用，就相当于某一涡系在起作用。

旋翼的每片桨叶可用一条附着涡及很多由桨叶后缘逸出的，顺流而延伸到无限远的涡来代替，作以下基本假设：

(1) 空气是无黏性、不可压缩的气体；

(2) 气流是定常的(相当于无限多片桨叶)；

(3) 桨叶环量沿半径不变(只在桨尖有尾涡逸出)；

(4) 不计径向诱导速度和周向诱导速度对涡线延伸方向的影响；

(5) 轴向诱导速度对涡线延伸方向的影响，用桨盘处的等效诱导速度来代表。

2. 轴向气流中旋翼涡系

在轴向气流中旋翼的涡系如图 5-8 所示，桨盘上均匀分布着无限多但强度无限小的附着涡，在每片桨叶后缘，又有由大量自由涡形成的螺旋涡面逸出，形成一个由螺旋线所编织的圆柱，称为旋翼的固定涡系。轴向气流中，旋翼涡系由三部分构成。

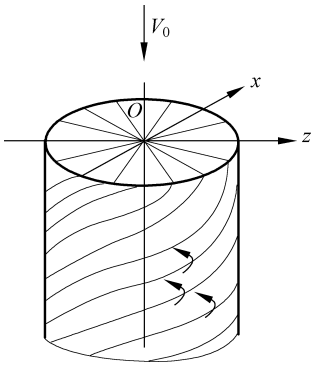


图 5-8 在轴向气流中旋翼的涡系示意图

(1) 附着涡盘。旋翼有 k 片桨叶，每片桨叶环量为 Γ，假设 $k\Gamma$ 的总环量均匀分布在桨盘上，即在桨盘上有无限多、强度无限小的附着涡。桨盘平面上，中心角为 $\mathrm{d}\theta$ 的微元中，附着环量为 $(k\Gamma/2\pi)\mathrm{d}\theta$。

(2) 桨尖涡的圆柱面。在叶尖处，每个微元附着涡转换成一条桨尖涡顺流逸出，它与桨盘圆周形成的螺旋线角度为 $\arctan(V_1/\Omega\rho)$，全部螺旋线桨尖涡形成圆筒形涡面。

(3) 中央涡束。中央涡束在叶根处，附着涡汇集成环量为 $k\Gamma$ 的中央涡束沿轴进入。

已知在流场内存在着一根或多根涡线时，它或它们对其周围流体质点所激起的诱导速度在理想情况下可按毕奥-萨伐尔定律确定。假定有一根环量为 Γ 的涡线，涡线上某一微段 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 在某点 M 处所激起的微元诱导速度为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{v}=\frac{\Gamma}{4\pi}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{l}}{l^3} \tag{5-56}$$

式中，$\boldsymbol{l}$ 表示涡线微段 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 到 M 点的距离，这一诱导速度的方向按矢量法则来规定，诱导速度在直角坐标轴系中的分量可由下列各式写出：

$$\mathrm{d}v_x=\frac{\Gamma}{4\pi l^3}(l_z\mathrm{d}s_y-l_y\mathrm{d}s_z) \tag{5-57}$$

$$\mathrm{d}v_y=\frac{\Gamma}{4\pi l^3}(l_x\mathrm{d}s_z-l_z\mathrm{d}s_x) \tag{5-58}$$

$$\mathrm{d}v_z=\frac{\Gamma}{4\pi l^3}(l_y\mathrm{d}s_x-l_x\mathrm{d}s_y) \tag{5-59}$$

3. 轴向(y 向)诱导速度

螺线自由涡所构成圆柱涡面上任一点 A 处的涡元对桨盘面上点 M_0 所激起的微元轴向

诱导速度为

$$\mathrm{d}v_y = \frac{k\Gamma \mathrm{d}\theta}{8\pi^2} \frac{\cos(\phi-\theta) l_0 \mathrm{d}s_0}{(l_0^2+y^2)^{3/2}} \tag{5-60}$$

式中，l_0 表示点 A 与点 M_0 之间的距离。

求圆柱涡面所激起的轴向诱导速度，先沿圆柱面的母线（平行于圆柱轴的直线）积分，因为沿此线的各个微元涡的强度及方向都相同。再沿 θ 积分，可得整个圆柱涡面对 M_0 点所激起的轴向诱导速度。圆柱涡面在桨盘平面处轴向诱导速度分量 v_ψ 在圆柱涡面以内为零，在圆柱涡面以外方向相逆于桨叶旋转方向，且随远离圆柱涡面而减小。考虑到所有的同心圆柱涡面的贡献，沿整个半径进行积分，经简化处理，得到轴向诱导速度为

$$v_y = -\frac{k\Omega}{4\pi V_1}\Gamma^*(r) \tag{5-61}$$

式中，$\Gamma^*(r)$ 为当地的桨叶环量。可以看出，在变环量的情况下，所有的圆柱涡面（也就是整个涡系）在桨盘上点 M_0 处所激起的轴向诱导速度只与该点所在处的桨叶环量有关。

同理可推导出在桨盘平面的 r 处的轴向诱导速度（指向桨叶旋转方向）为

$$v_\psi = \frac{k}{4\pi r}\Gamma^*(r) \tag{5-62}$$

4. 拉力公式

在涡流理论中，升力是借助于环量来处理的。根据儒可夫斯基定理，用系数来表示桨叶剖面当地的环量 Γ^*

$$\Gamma^* = \frac{1}{2}C_y \bar{w}\bar{b} \approx \frac{1}{2}C_y \bar{r}\bar{b} \tag{5-63}$$

如果 Γ^* 沿 r 为一常数，即在所谓“儒氏旋翼”的情况下，那么，令 $\Gamma^* = \Gamma_7$（以特征剖面的值来表示），容易得出

$$C_T = k\,\frac{\kappa}{\pi}\bar{\Gamma}_7 \tag{5-64}$$

$$\bar{\Gamma}_{dx} = \int_0^1 \bar{\Gamma}^* \bar{r}\,\mathrm{d}\bar{r} \Big/ \int_0^1 \bar{r}\,\mathrm{d}\bar{r} \tag{5-65}$$

式中，$\bar{\Gamma}_{dx}$ 为等效环量。

在叶素理论中，已得到拉力系统的公式，修正系数 K_T 并未给出，此处由涡流理论导出。为了分析方便起见，把 C_T 写成另一形式，用桨叶上特征剖面处的值来表示

$$C_T = \kappa\,\frac{k}{\pi}\bar{\Gamma}_7 \int_0^1 2\left(\frac{\bar{\Gamma}^*}{\bar{\Gamma}_7}\right)\bar{r}\,\mathrm{d}\bar{r} = \kappa\left(\frac{\kappa\bar{b}_7}{\pi}\right)C_{y7}K_T/3 \tag{5-66}$$

式中，K_T 叫作拉力修正系数。

$$K_T = 3\times 0.7\int_0^1 \left(\frac{\bar{\Gamma}^*}{\bar{\Gamma}_7}\right)\bar{r}\,\mathrm{d}\bar{r} = 3\int_0^1 \frac{\bar{b}C_y}{\bar{b}_7 C_{y7}}\bar{r}^2\,\mathrm{d}\bar{r} \tag{5-67}$$

在儒氏旋翼的情况下，$K_T = 3\times 0.7 \div 2 = 1.05$，若环量沿径向按三角形分布，则 $K_T = 1$。

5. 功率公式

根据桨叶叶素的速度关系和受力关系，得出旋翼需用功率的表达式为

$$m_k = m_{kx} + m_{kyx} + m_{ki} \tag{5-68}$$

式中，第一项表示型阻功率；第二项表示有效功率；第三项表示诱导功率。

第一项为

$$m_{kx}=\left(\frac{k\bar{b}_7}{\pi}\right)C_{x7}K_p/4 \tag{5-69}$$

式中，K_p 为型阻功率修正系数，其定义是

$$K_p=\int_0^1\left(\frac{\bar{b}}{\bar{b}_7}\right)\left(\frac{C_x}{C_{x7}}\right)\bar{r}^3\mathrm{d}\bar{r}\Big/\int_0^1\bar{r}^3\mathrm{d}\bar{r} \tag{5-70}$$

如果 $b=b_7$，则 $C_x\approx C_{x7}$，$K_p\approx 1$。但在一般情况下，K_p 与 $C_x(r)$ 及 $b(r)$ 有关。

第二项为

$$m_{kyx}=C_T\bar{V}_0 \tag{5-71}$$

第三项中含有诱导速度。在涡流理论中利用诱导速度与环量的关系式，把它代入，得到

$$m_{ki}=C_T\bar{v}_{dx}J \tag{5-72}$$

式中，J 称为诱导功率修正系数，有

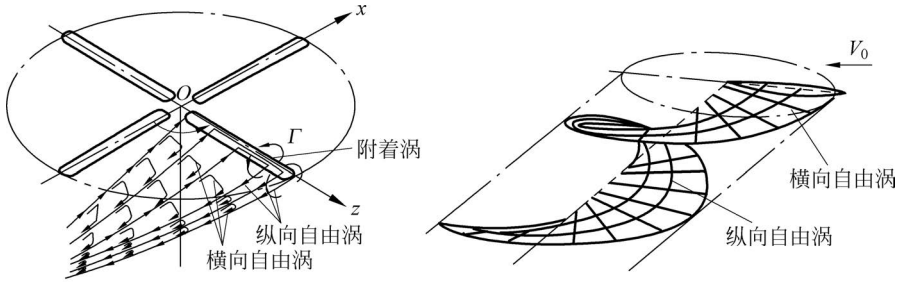
$$J=\int_0^1\left(\frac{\Gamma^*}{\Gamma_{dx}}\right)^2 2\bar{r}\mathrm{d}\bar{r} \tag{5-73}$$

当 $\Gamma^*=\Gamma_7$ 时，在儒氏旋翼的情况下，$J=1$。但在一般情况下，J 与 $\Gamma^*(r)$ 的分布有关。

5.5.2 前飞时的经典涡流理论

1. 旋翼广义涡流理论的基本假设

在固定涡系中桨叶以附着涡来代替，而尾随涡即纵向自由涡，在不同的飞行状态下的涡流图像不同，在悬停时，旋翼尾迹近似为一轴向涡柱，在小速度平飞时近似为一斜向涡柱，在大速度平飞时近似为一平面涡系。有了旋翼尾迹的涡系模型，在桨叶分化为无限多片的处理下，利用毕奥-萨伐尔定律，可得空间任意点的诱导速度时均值。最初，人们考虑环量沿桨叶半径为常值，这样，只从叶尖处拖出螺线尾随涡，即纵向自由涡(亦即螺旋自由涡)；之后，有人又考虑到环量沿桨叶半径是不均匀的，$\Gamma=\Gamma(r)$，于是从桨叶不同半径处拖出许多不同的螺线尾随涡；最后，在广义上，再考虑到环量沿桨盘方位角也是不均匀的，$\Gamma=\Gamma(r,\psi)$，那么当桨叶运动时，还要在不同方位处逸出射线形状的脱体涡，即横向自由涡，而横向自由涡与纵向自由涡构成网格的斜向螺旋涡面，如图 5-9 所示。



(a) 附着涡和纵、横向自由涡　　(b) 斜向螺旋涡面

图 5-9　前飞时的旋翼固定涡系模型

在广义的固定涡系旋翼理论中，为了便于分析而又不致歪曲基本物理图像，作出如下四点假设。

（1）气流是定常的，即分化装叶为无限多片，附着涡满布于桨盘平面。

（2）涡系没有收缩，自由涡尾迹不随时间发生变化，是固定的。

（3）附加旋转影响不计。

（4）涡系延伸方向按桨盘平面处的某一气流合速度方向来考虑：$\boldsymbol{V}_1=\boldsymbol{V}_0+\boldsymbol{v}_{dx}$ 或 $\alpha=(-\alpha_0)+\varepsilon$，其中，$\varepsilon$ 为 $\boldsymbol{V}$ 相对于 $\boldsymbol{V}_0$ 的夹角。

在一般情况下，旋翼尾迹涡系既不在一平面内，环量分布也不是与方位角无关。1961 年，王适存创立了旋翼广义涡流理论，由此能够确定旋翼在任何定常飞行状态空间任意点的诱导速度。

2. 旋翼桨盘平面上的诱导速度

桨盘平面上附着涡面的环量分布用傅氏级数表示：

$$\bar{\Gamma}_*(\bar{r},\psi)=\bar{\Gamma}_0(\bar{r})+\bar{\Gamma}_{1c}(\bar{r})\cos\psi+\bar{\Gamma}_{1s}(\bar{r})\sin\psi+\cdots \tag{5-74}$$

由于实际公式既长又烦琐，因此在运算处理中，诱导速度只取一阶谐波，而且认为诱导速度是由同阶环量及前阶环量所激起的，根据王适存广义涡流理论，有

$$\bar{v}_0=\bar{v}_0^0=\frac{k}{4\pi\bar{V}_1}\bar{\Gamma}_0 \tag{5-75}$$

$$\bar{v}_{1c}=\bar{v}_{1c}^0+\bar{v}_{1c}^{1c}=\frac{k}{4\pi\bar{V}_1}\left\{\frac{-\cos\alpha_1}{1+\sin\alpha_1}\left[\int_0^{\bar{r}}\frac{\partial\bar{\Gamma}_0}{\partial\bar{\rho}}\left(\frac{\bar{\rho}}{\bar{r}}\right)^2F\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},2,\frac{\bar{\rho}^2}{\bar{r}^2}\right)\mathrm{d}\bar{\rho}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\int_{\bar{r}}^1\frac{\partial\bar{\Gamma}_0}{\partial\bar{\rho}}\left(\frac{\bar{r}}{\bar{\rho}}\right)F\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},2,\frac{\bar{r}^2}{\bar{\rho}^2}\right)\mathrm{d}\bar{\rho}\right]+\frac{2\sin\alpha_1}{1+\sin\alpha_1}\bar{\Gamma}_{1c}\right\} \tag{5-76}$$

$$\bar{v}_{1s}=\bar{v}_{1s}^0+\bar{v}_{1s}^{1s}=\frac{k}{4\pi\bar{V}_1}\left\{\frac{\cos\alpha_1}{1+\sin\alpha_1}\left(\frac{2\bar{V}_1}{\bar{r}}\right)\bar{\Gamma}_0+\frac{2}{1+\sin\alpha_1}\bar{\Gamma}_{1s}\right\} \tag{5-77}$$

式中，F 为超几何函数，定义为

$$F(\alpha,b,d,z)=1+\sum_{k=1}\frac{(a)_k(b)_k}{(d)_k k!}z^k \tag{5-78}$$

可以看出，在悬停时或轴向气流中，以上这些公式就简化为一个零阶的公式。

3. 拉力系数

沿旋翼桨盘的环量分布以及升力分布是复杂的，为了便于旋翼飞行器空气动力性能估算，可以通过桨叶的挥舞条件，辅以适当的假设近似地处理。所谓挥舞条件，对于铰接式的桨叶来说，取一阶挥舞系数为限。如果对 $\bar{\Gamma}^*$ 也以一阶谐波为限，那么代入挥舞条件式中，经简化处理得

$$\bar{\Gamma}^*(\bar{r},\psi)\approx\bar{\Gamma}_7\frac{(\bar{r}-\mu)}{(0.7-\mu)}\left[1-\frac{5}{3}\mu\bar{r}\sin\psi\right] \tag{5-79}$$

再把上式关系转到 C_y 上，得到

$$C_y(\bar{r},\psi)=\frac{2\bar{\Gamma}^*}{\bar{b}\bar{W}^*} \tag{5-80}$$

对于矩形桨叶，半径位置为 0.7 处的 C_y 为

$$C_y(0.7,\psi) \approx C_{y7} \frac{\left(1-\frac{7}{6}\mu\sin\psi\right)}{\left(1+\frac{\mu}{0.7}\sin\psi\right)} \tag{5-81}$$

4. 需用功率修正系数

旋翼飞行器在前飞状态的需用功率系数，正如叶素理论中所推导出的，由4个部分组成：

$$m_k = m_{kx} + m_{ki} + C_T(-\lambda_0) - C_{H\mu} \tag{5-82}$$

其中，第一项型阻功率系数为

$$m_{kx} = \frac{1}{4}\sigma C_{x7} K_P \tag{5-83}$$

式中型阻功率修正系数 $K_P = K_{P0}(1+5\mu^2)$，其中 K_{P0} 为悬停时的型阻功率修正系数。

第二项诱导功率修正系数为

$$m_{ki} = C_T \bar{v}_{dx} J \tag{5-84}$$

式中诱导功率修正系数 $J = J_0(1+3\mu^2)$，其中 J_0 为悬停时的诱导功率修正系数。

5.6 旋翼现代涡流理论的基础知识

旋翼经典涡流理论以固定涡系模型为基础，不能分析诱导速度随时间的变化，也不能计入桨叶之间的气动干扰和涡系形状的畸变，计算得出的诱导速度不够精确。针对这一缺点，旋翼现代涡流理论以自由涡系随时间变化的模型为基础，计入尾流速度的不均匀性，大大提高了旋翼空气动力计算精度。

5.6.1 悬停时旋翼自由尾迹分析

自由尾迹分析法认为旋翼的尾涡系按照当地速度延伸，允许涡线自由地移动，并计入桨叶片数的影响，包括随时间变化的桨叶间干扰和旋转中桨叶位置的变化，最后得到形状畸变的涡系。按照流场速度分布确定涡系的几何形状，因而能够给出较为真实的诱导速度分布及瞬时值。由自由涡面不承力条件，通过逐次迭代，确定所有站点的位置和速度，从而得到自由尾迹的形状和流场诱导速度分布。由于描述涡元运动的微分方程是强非线性的，因此需要采用数值方法进行求解。

1. 圆弧曲涡元模型

尾迹计算中基本而重要的一步就是求解涡线对指定点的诱导速度。在数值计算中，涡线由一组离散涡点给出，每相邻两点规定为一个涡元(涡段)。传统的旋翼尾迹分析中，一直采用直线涡元作为基本涡元，但直线涡元不能计及涡线实际的弯曲，从而对于螺旋、畸变的复杂旋翼尾迹不能给出很好的精度。采用曲涡元除可计入涡线实际的弯曲，使用更长的涡元等优点外，还允许在涡线附近点进行较准确的诱导速度计算，这对于小速度飞行时的旋翼尾迹特别重要。

曲涡元及其在自由尾迹中的应用，目前仍处于发展阶段。迄今只有两种曲涡元模型：一是 Bliss 等提出的抛物拱弧，这是尾迹分析的基本涡元；二是由楼武疆提出并由徐国华加

以改进的圆弧曲涡元。前者利用抛物线方程求得诱导速度的近似解析公式，但缺点是在涡元生成方面较为复杂，且当在涡元近点进行计算时需将区间分成三个子区间；而后者将涡元的诱导速度计算设法表达为标准的不完全椭圆积分，并找出了椭圆积分的近似公式，从而使圆弧曲涡元既具有解析公式又具有生成较为灵活的优点，优于抛物拱弧涡元，可更为有效地应用于旋翼自由尾迹的计算。

考虑一个有限长度的圆弧线涡元，点 A(x_A，y_A，z_A)是该涡元的起点，点 B(x_B，y_B，z_B)是终点。设涡元具有常值环量 Γ_e，圆弧半径为 r，如图 5-10 所示。图 5-10 中涡元位于坐标系的 xy 平面，M(x_m，y_m，z_m)是要计算诱导速度的点。

圆弧曲涡元的诱导速度由毕奥-萨伐尔定律确定：

$$\boldsymbol{v}=\int_0^1 \frac{\Gamma_e}{4\pi}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{l}}{l^3} \tag{5-85}$$

2. 自由尾迹分析方法

采用随桨叶旋转的坐标系，如图 5-11 所示，图 5-11 中坐标系与参考桨叶固连，x 轴沿桨叶变距轴线指向外。z 轴与 x 轴相垂直，位于旋转平面内。y 轴与 xz 平面垂直，指向上。

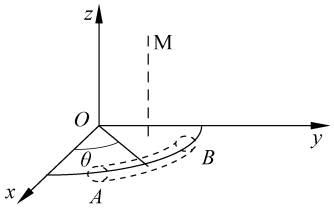


图 5-10　圆弧曲涡元诱导速度计算示意图

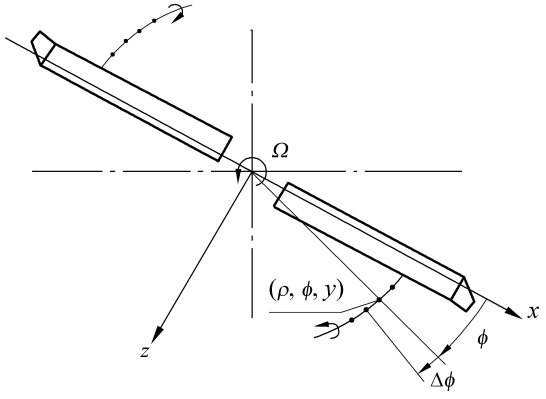


图 5-11　悬停时的桨叶旋转涡系

悬停尾迹具有轴对称的特点，若引入柱坐标($r(\phi)$，ϕ，$y(\phi)$)来表示尾迹点的位置则更为方便，如图 5-11 所示。那么，以直角坐标系表示的尾迹点可表达为

$$\begin{cases} x=r(\phi)\cos\phi \\ y=y(\phi) \\ z=r(\phi)\sin\phi \end{cases} \tag{5-86}$$

式中，ϕ 是尾迹角。对于畸变的尾迹，不同的 ϕ 角对应不同的 r 和 y 值，若保持 r 为常数，$y=k\phi$(k＝常数)，则上式给出非畸变的尾迹形状。

在悬停旋翼尾迹分析中，桨叶的气动模型采用二阶升力线模型，即各片桨叶用四分之一弦线位置的附着涡来代替，控制点取在四分之三弦线点处。桨叶由展向附着涡和弦向附着涡组成的附着涡面(线)表示。由于桨叶附着环量的展向变化，在桨叶的后缘有许多尾随涡线拖出，以当地速度向下游延伸。因此，将自由尾迹的涡线沿桨叶展向顺序放置，即采用所谓的全展自由尾迹分析方法。

自由尾迹计算的时间强烈依赖涡元长度的选取和自由尾迹的周数。为减少计算时间，依据尾迹对桨盘处诱导速度贡献的大小，将整个尾迹区分为近尾迹区和远尾迹区。近尾迹靠近桨盘，既是最易畸变的部分，也是对旋翼性能影响较为敏感的区域，所以需认真划分和细致处理。在近尾迹区，使尾迹完全自由，即在每次迭代中尾迹点的诱导速度都重新确定；在远尾迹区，尾迹采用等螺距和等半径的预定形状，并与近尾迹光滑连接。

5.6.2 前飞时旋翼自由尾迹分析

1. 自由尾迹计算的基本步骤

与悬停相比，前飞时的自由尾迹计算更复杂。前飞时自由尾迹的求解方法大多数采用时间步进方式进行，与桨叶旋转时的方位步进相协调。该方式最具代表意义的例子是Landgrebe发展的尾迹相容法和Sadler的“启动过程”。前者假设初始尾迹和环量分布，通过在桨叶旋转的每个时间步长内不断求解涡系新的位置和形状，直到取得与尾迹环量相容的解。这一方法事实上已成为目前多数前飞自由尾迹分析的基础，并得到不断改进和发展；而后者由类似旋翼的启动过程来产生自由尾迹，尾迹求解从旋翼静止启动开始，其计算量可能更大。

这里，采用圆弧曲涡元和类似Landgrebe时间步进的方式建立一个前飞旋翼全展自由尾迹分析模型。采用的远尾迹模型与悬停时的不同，远尾迹的涡线形状依据自由尾迹确定。这种远尾迹模型能较好地保证尾迹的光滑过渡和形状的相似性。

自由尾迹的计算包括两个基本步骤：

(1) 计算涡元的诱导速度；

(2) 在给定的时间步长内更新尾迹。

2. 前飞时自由尾迹的分析方法

旋翼的各片桨叶由四分之一弦线位置的附着涡代替，尾涡从桨叶拖出，以当地速度向下游移动。依据尾迹对桨盘入流贡献的大小，将整个尾迹区分为近尾迹和远尾迹两部分，近尾迹上连桨叶，下接远尾迹，在尾迹求解中是完全自由的；而远尾迹与近尾迹相连，向下游延伸，其形状依据近尾迹形状确定。设前飞速度为 $\boldsymbol{V}_0$，旋翼桨盘平面迎角为 $-\alpha_s$，则前飞速度为 V_0，有

$$\boldsymbol{V}_0 = -V_0\cos(-\alpha_s)\boldsymbol{i}_s - V_0\sin(-\alpha_s)\boldsymbol{j}_s \tag{5-87}$$

计算诱导速度时，将尾迹涡线离散为若干有限长度的圆弧曲涡元。首先求出每一涡元对节点的诱导速度，然后确定各条涡线的全部涡元对该点的诱导速度，最后将所有桨叶的全部涡线的贡献相加就得到该节点总的诱导速度。桨叶的附着环量的计算在旋翼桨盘不同径向和方位角位置的各离散点上进行，因为前飞尾迹解是周期的，所以各离散方位点要覆盖桨叶完整的一周，即

$$\psi_l = l \cdot \Delta\psi \quad (l = 1,2,\cdots,N_A) \tag{5-88}$$

式中，N_A 是桨叶的方位角步长数，且有 $\Delta\psi = 2\pi/N_A$。

设在 t 时刻桨叶当前方位位置为 ψ，考虑一尾迹角为 ϕ_k 的涡元。当桨叶以 Ω 旋转角速度转过 $\Delta\psi$ 角后，对应的时间变化为 $\Delta t = \Delta\psi/\Omega$。尾迹的更新按下式进行：

$$\begin{cases}\Delta x=[v_{xi}-V_0\cos(-\alpha_s)]\dfrac{\Delta\psi}{\Omega}\\ \Delta y=[v_{yi}-V_0\sin(-\alpha_s)]\dfrac{\Delta\psi}{\Omega}\\ \Delta z=v_{zi}\dfrac{\Delta\psi}{\Omega}\end{cases}\tag{5-89}$$

此式在给定初始尾迹后，便可对整个尾迹进行迭代计算了。在每个时间步长（保持常数）内，重复地计算涡元的诱导速度，并更新尾迹，直到所有方位的尾迹均达到收敛，则得出所需的自由尾迹。就整个尾迹而言，每当桨叶旋转一个增量，相应地在尾迹开始处会增加一个节点和一段涡元。为保持尾涡元的总数不增加，需相应地舍弃最后一个涡元和最后一个尾迹点。尾迹的长度包括近尾迹和远尾迹的长度。显然，尾迹所取长度越长，计算精度越高，但同时涡元的数量亦随尾迹周数的增加而迅速增大，计算时间也大量增加。通常截取 2 倍旋翼直径的尾迹长度即可满足尾迹计算的要求。

3. 旋翼尾迹涡系的等环量线数值描述

旋翼尾迹的分析包括尾迹结构的描述以及尾迹形状的求解。第一方面的工作通常都采用涡网格方式来描述旋翼的尾迹。在这种传统的描述方式里，涡量被分解为尾随涡量与脱体涡量。这种分解固然遵守涡强守恒定律，并与旋翼问题求解的方位步进方式相协调，但从它提供的尾迹图像上却几乎看不出尾迹结构信息，如涡量分布的集中与否、涡系卷绕等，难以从中了解尾迹的物理特征。

针对这一问题，1987 年 Bliss 等发表了用等环量涡线描述随桨叶载荷变化的尾迹涡系的报告。涡线放置在等强度线上，每条涡线的环量为常数，任两条等强度线间包含的环量相同。这样的一组涡线在尾涡面上布置的疏密程度与走向便提供了尾涡面涡量场分布的直观图像（如图 5-12 所示）。用等环量线描述尾迹结构，由于直接依据于涡量场，要比涡网格描述方式自然、合理；而且尾迹离散化后，由于等环量线自动计入脱体与尾随涡量，涡元的数目可减少一半。这种新描述方式曾用于大速度前飞旋翼的尾迹模拟，不仅使研究人员就大速度飞行尾迹结构取得了一些新认识，而且在载荷预测上也取得了令人鼓舞的成功，体现出这一描述方式在尾迹描述与计算中的优点和潜力。

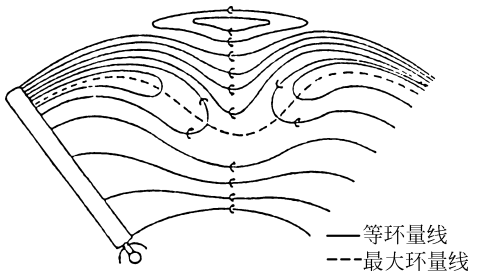


图 5-12　典型的等环量线尾迹示意图

等环量线定义为放置在尾涡面涡量场上的、代表其周围一支涡管的涡线。其特点如下。

（1）沿每一条等环量线上不同的点，虽然是在不同的时刻生成（从桨叶上拖出）的，但却有相同的附着环量。这实际上是亥姆霍兹定理规定的，它要求桨叶附着涡量与尾迹涡量连续过渡（如图 5-12 所示）。若把桨叶取为升力线，则升力线强度就等于贯入升力线的尾迹涡量总和。假如从桨叶根部到桨叶展向某点为止共有 N 条等环量线进入到升力线，等环量线强度为 $\Delta\Gamma$，则该点的桨叶附着环量为 $\Delta\Gamma\cdot N$。反之，给定环量分布与 $\Delta\Gamma$，可逐个分割得到 $\Delta\Gamma$ 的倍分点（环量应为 $\Delta\Gamma$ 的整数倍），进而可得出等环量线与附着涡线的连接点，也就是等环量线生成点。

(2) 由于环量分布随方位角变化,相应的等环量线生成点的展向位置也随方位角变化。在很多情况下环量分布并不是已知的,所以等环量线的生成点也不是可以预先确定的。等环量线生成点与环量分布间的协调往往需要一个迭代过程。

(3) 当桨叶最大附着环量增加或减少时,新添的涡段只能跨过最大环量线(最大环量点在不同方位时的连线),形成一端封闭的等环量线(回线)。

4. 桨叶升力面涡格法分析

在升力面涡格法中,桨叶用涡面代表,并在整个翼面满足边界条件,能较为充分地考虑附着涡面各元素及其与尾迹之间的相互作用,因此升力面理论可改进发生在桨尖或桨叶与尾涡靠近相遇情况下的大变化诱速和载荷的计算。由于桨叶的旋转和尾迹自身的诱导以及桨叶尾迹的相互干扰,尾迹具有螺旋、畸变、卷绕的特征,为了与升力面理论匹配,尾迹也必须相应地采用较为精确的模型(如图 5-13 所示)。

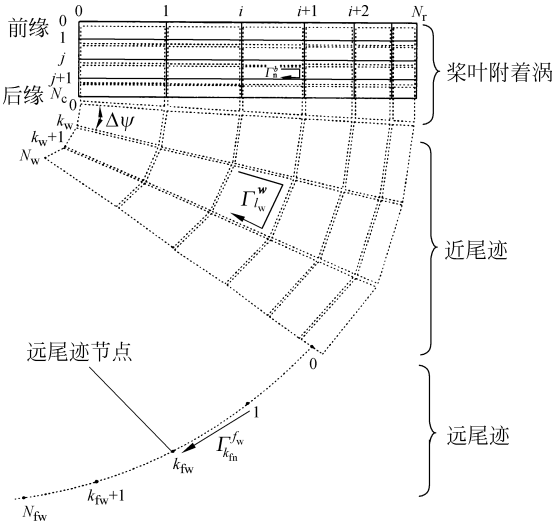


图 5-13 旋翼自由涡系模型示意图

运用自由尾迹分析技术,采用离散涡元来表示尾迹,其核心问题是尾迹涡元的空间位置(即尾迹几何形状)和涡强的确定以及尾迹诱导速度的计算,主要包括以下几个方面。

1) 旋翼桨叶涡系模型

采用升力面理论来建立桨叶涡系模型,用一阶升力面(也即二阶升力线)来模拟桨叶,在计算精度上已明显高于升力线代替桨叶建立的模型。将升力面布置为与桨叶中弧面重合,将环量沿展向连续变化近似为阶梯的环量分布,在弦向也用离散的附着涡代替弦向连续分布的涡线,在每条附着涡的两端拖出自由涡,沿着来流方向伸向无穷远。其具体做法是:首先将中弧面沿展向分成 N_r 个桨叶微段,桨叶微段间的分界线相互平行。然后将桨叶微段沿弦向的分界线等分为 N_c 段,并沿展向连接相应的等分点,这样桨叶中弧面就被划分为 $N_r \times N_c$ 个网格,每个网格的 4 个节点构成了四边形面元。这样,整个桨叶基本平面用有限个微小面元,即离散马蹄涡系代替,称为涡格法。

2) 旋翼尾迹模型

前飞时从桨叶不同半径处逸出许多不同的尾随涡,即纵向自由涡。与此同时,由于桨叶

环量随时间变化，从桨叶不同方位处还会逸出射线状的脱体涡，即横向自由涡。纵向自由涡与横向自由涡构成网格状的斜向螺旋涡面，从桨叶后缘拖入尾迹中。就整个尾迹而言，当桨叶旋转一个增量，相应地在尾迹开始处会增加一个节点和一段涡元，为保持尾涡元的总数不增加，需相应地舍弃最后一个涡元和最后一个尾迹点。所以尾迹是有时间步长（Δt）的，将尾迹生成时刻到当前时刻这段时间内桨叶扫过的方位角度定义为尾迹步长角。旋翼尾迹模型主要有以下四个特点。

（1）在旋翼桨尖处，尾迹涡环量大，涡量集中度高，在整个旋翼流场中起着主导作用。

（2）升力面绕流场满足库塔条件，即升力面后缘处的涡强为零。

（3）离桨叶后缘较近的尾迹称为近尾迹，其尾迹步长角在 30°以内。在该区域内，桨尖涡处于卷起过程中，尾迹仍保持涡片的形式，采用涡格的形式来表示。

（4）旋翼远尾迹是指尾迹步长角大于 30°的尾迹，桨尖涡采用单根涡丝来表示，是完全自由的尾迹。

尾迹的长度包括近尾迹和远尾迹的长度。显然，尾迹所取长度越长，计算精度越高，但同时涡元的数量亦随尾迹周数的增加而迅速增大，从而计算工作量和时间也大量增加。实际上，就尾迹对桨叶入流作用而言，尾迹在离桨盘稍远的地方，其作用已越来越小，影响可忽略不计。特别是对于前飞状态，由于自由流作用，尾迹向后移动较悬停快得多，因此，多数自由尾迹分析都采用有限长度的尾迹模型，这在物理上也是正确的。

3）旋翼桨尖涡模型

在旋翼自由涡系模型中，远尾迹涡丝是由近尾迹涡片卷起形成的，其卷起过程相当复杂。为便于分析，主要利用在自由尾流分析中广泛采用的 Vatistas 涡来模拟桨尖涡。Vatistas 涡量分布函数主要基于理想流体涡量运动的三个不变量（涡量、涡心和涡矩）守恒定理，用来确定初始桨尖涡的环量、展向位置和涡核大小。经过复杂的推导与分析，发现卷起后涡管的环量应等于附着涡环量的峰值。

5.7　旋翼 CFD 理论基础知识

计算流体动力学是基于计算机技术的一种数值计算工具，用于求解流体的流动和传热问题。它是流体力学的一个分支，是近代流体力学、数值数学和计算机科学结合的产物，是一门具有强大生命力的边缘科学。它以电子计算机为工具，应用各种离散化的数学方法，对流体力学的各类问题进行数值实验、计算机模拟和分析研究，以解决各种实际问题。计算流体动力学采用离散方程解决空气动力学中的流体力学问题，包括求解固定几何形状空间内的流体的动量、热量和质量方程以及相关的其他方程，并通过计算机模拟获得流体在特定条件下的有关数据。

5.7.1　计算流体动力学的定义和特点

1. 计算流体动力学的定义

计算流体动力学（Computational Fluid Dynamics，CFD）是建立在流体力学与数值计算方法基础上的独立的新型学科，通过计算机数值计算和图像显示的方法，在时间和空间上定量描述流场的数值解，从而达到辅助物理问题研究的目的。它兼有理论性和实践性的双重

特点，建立了理论和方法，为现代科学中许多复杂的流动和传热问题提供了有效的计算技术。

计算流体动力学是通过计算机数值计算和图像显示，对包含流体流动和热传导等相关物理现象的系统所做的分析。它的基本思想是：把原来在时间域及空间域上连续的物理量的场，如速度场和压力场，用一系列有限个离散点上的变量值来代替，通过一定的原则和方式建立关于这些离散点上场变量之间关系的代数方程组，然后用数值计算求解代数方程组，获得场变量的近似值。

2. CFD 方法的特点

CFD 方法和传统的理论分析方法、实验测量方法构成了解决流体力学问题的三个支柱手段（如图 5-14 所示）。三者相互之间并不独立，而是相辅相成的，组成了研究流体力学问题的完整体系。

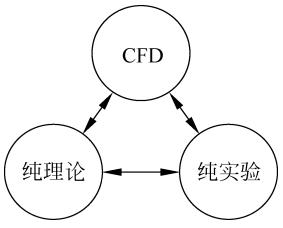


图 5-14 流体力学三个支柱手段示意图

理论分析方法的优点在于所得结果具有普遍性，各种影响因素清晰可见，是指导实验研究和验证数值计算方法的理论基础，但是它往往要求对计算进行抽象和简化，才可能得出理论解。对于非线性情况，只有少数流体能给出解析结果。

实验测量方法所得到的实验结果真实可信，它是理论分析和数值方法的基础，其重要性不容低估。然而，实验往往受到模型尺寸、流场流动、人身安全和测量精度的限制，有时可能很难通过实验的方法得到满意的结果。

CFD 方法恰好克服了前面两种方法的弱点。在计算机上实现一个特定的计算，就好像在计算机上做一个物理实验。近 30 年来，计算机及计算技术发展很快，使得许多过去不能求解的空气动力学问题现在可以用数值方法求解了。Anderson 在 1995 年出版了一本专著《计算流体动力学：基础理论及其应用》，全面论述了 CFD 方法的发展、理论、方法及应用。CFD 有多种计算方法，其中主要有差分法、有限元法和有限体积法。计算流体动力学是多领域交叉的学科，涉及计算机科学、流体力学、偏微分方程的数学理论、计算几何学、数值分析等学科。这些学科的交叉融合、相互促进和支持也推动着这些学科的深入发展。CFD 方法的优势主要有：

（1）可以更细致地分析、研究流体的流动、物质和能量的传递等过程；

（2）可以容易地改变实验条件和参数，以获取大量在传统实验中很难得到的信息资料；

（3）研究、设计全程所花的时间大大减少；

（4）可以方便地用于无法实现具体测量的场合，如高温和危险的环境；

（5）根据模拟数据，可以全方位地控制过程和优化设计。

5.7.2 旋翼流场的控制方程

旋翼的流场和气动性能对旋翼飞行器的性能、飞行品质、噪声、振动特性具有重要的影响，采用计算流体力学方法准确地计算旋翼的流场和性能是旋翼飞行器空气动力学的一个重要发展方向。流体的运动满足质量守恒、动量守恒和能量守恒的规律。在牛顿流体范围内，这些规律可以用 Navier-Stokes 方程描述。按照求解流场的控制方程，旋翼流场计算的 CFD 方法实质上是求解 Navier-Stokes 方程。

1. 质量守恒方程(连续方程)

任何流体问题都必须满足质量守恒定律。该定律可表达为：单位时间内流体微元体中质量的增加，等于同一时间间隔内流入该微元的净质量。按照这一定律，可以得出质量守恒方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial t}=0 \tag{5-90}$$

式中，ρ 是密度；t 是时间；u 是速度矢量；u、v、w 是速度矢量在 x、y、z 方向的分量。

若流体不可压，则密度 ρ 是常数，式(5-90)变为

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{5-91}$$

2. 动量守恒方程

动量守恒定律也是任何流体系统都必须满足的基本定律。该定律可表达为：微元体中流体的动量对时间的变化率等于外界作用在该微元体上的各种力之和。该定律实际上是牛顿第二定律。按照这一定律，可以导出 x、y、z 三个方向的动量守恒方程

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho u \boldsymbol{u})=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}+F_x \tag{5-92}$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho v \boldsymbol{v})=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}+F_y \tag{5-93}$$

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho w \boldsymbol{w})=-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}+F_z \tag{5-94}$$

式中，p 是流体微元上的压力；τ_{xx}、τ_{xy} 和 τ_{xz} 是因分子黏性作用而产生的作用在微元体表面上的黏性应力的分量；F_x、F_y 和 F_z 是微元体上的体力。上式是对任何类型的流体均成立的动量守恒方程。对于牛顿流体，黏性应力与流体的变形率成正比，有变形后的表达式，这里就不写了。

3. 能量守恒方程

能量守恒定律可以表达为：微元体中能量的增加等于进入微元体的净热流量加上体力与面力对微元体所做的功。该定律实际上是热力学第一定律。其表达式如下：

$$\frac{\partial(\rho T)}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho u T)=\operatorname{div}\left(\frac{k}{C_p}\operatorname{grad} T\right)+S_T \tag{5-95}$$

该式可写成展开形式：

$$\begin{aligned}&\frac{\partial(\rho T)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u T)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v T)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w T)}{\partial z}\\&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k}{C_p}\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{k}{C_p}\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{k}{C_p}\frac{\partial T}{\partial z}\right)+S_T\end{aligned} \tag{5-96}$$

式中，C_p 为比热容；T 为温度；k 为流体的传热系数；S_T 为黏性耗散项。需要注意的是虽然能量方程是流体流动与传热问题的基本控制方程，但对于不可压流动，若热交换量很小以至可以忽略，可以不考虑能量守恒方程。

4. N-S 方程

根据达兰贝尔原理(作用于一个物体的外力与动力的反作用之和等于零)列出流体微团在质量力和表面力作用下的平衡方程，考虑流体微团在流动中变形的问题，经过进一步的推

导，得到不可压缩黏性流体的运动微分方程如下：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t} = X - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} + v\left(\dfrac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right) \\ \dfrac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}t} = Y - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} + v\left(\dfrac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\right) \\ \dfrac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}t} = Z - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} + v\left(\dfrac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right) \end{cases} \tag{5-97}$$

此式由法国人 L. Navier 和英国人 G. Stokes 先后提出，称为纳维尔-斯托克斯方程，简称 N-S 方程。由 N-S 方程忽略黏性可得到 Euler 方程。

5. 控制方程的选择形式

对流项采用离散的形式来表示的控制方程，称为控制方程的守恒形式。从微元体的角度，控制方程的守恒形式与非守恒形式是等价的，都是物理的守恒定律的数学表示。但是数值计算是对有限大小的计算单元进行的，对有限大小的计算体积，两种形式的控制方程则有不同的特性。讨论控制方程守恒形式与非守恒形式的目的在于：不论节点布置的疏密程度如何，根据控制方程导出的离散方程都具有对任意大小容积守恒的特性。凡是从守恒形式的控制方程出发，采用控制容积积分法导出的离散方程，可以保证具有守恒特性，即控制方程的守恒形式与非守恒形式在数学的角度上是完全等价的。

一般而言，非守恒形式的控制方程便于对所生成的离散方程进行理论上的分析，常用于有限元法；守恒形式的控制方程更能保持物理量守恒的性质，为算法设计和编程计算提供方便，因为其控制方程可以用下面这个通用方程来表示：

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial z} = J \tag{5-98}$$

式中，列向量 $\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{G}$、$\boldsymbol{H}$ 称为通量项，J 代表源项（当体积力可忽略时等于零），列向量 $\boldsymbol{U}$ 称为解向量。在 CFD 方法中要考虑边界条件，无论是黏性流还是无黏流，根据问题的不同，有多种边界条件，而边界条件是否合理往往也是数值模拟计算成败的关键。

5.7.3 控制方程的离散化方法

对于一个封闭形式的数学表达式，无论是微分形式还是积分形式，若在一个区域里连续，则总是有无穷多个值。离散化的实质就是用一个相似的表达式来近似它，但是这个近似表达式只在区域内有限多个离散点或控制体上取值。

1. 有限差分方法

有限差分方法（Finite Difference Method，FDM）是计算机数值模拟最早采用的方法，至今仍被广泛运用。该方法将求解域划分为差分网格，用有限个网格节点代替连续的求解域。有限差分法用 Taylor（泰勒）级数展开等方法，把控制方程中的导数用网格节点上的函数值的差商代替进行离散，从而建立以网格节点上的值为未知数的代数方程组。该方法是一种直接将微分问题变为代数问题的近似数值解法，数学概念直观、表达简单，是发展较早且比较成熟的数值方法，较多用于求解双曲型和抛物型问题。用它求解所需边界条件复杂，尤其是求解椭圆型问题不如有限元法或有限体积法方便。

有限差分格式从格式的精度来划分，有一阶格式、二阶格式和高阶格式；从差分的空间

形式来考虑，可分为中心格式和迎风格式。考虑时间因子的影响，差分格式还可以分为显格式、隐格式、显隐交替格式等。目前常见的差分格式主要是上述几种形式的组合，不同的组合构成不同的差分格式。差分方法主要适用于有结构网格，网格的步长一般根据实际地形的情况和柯朗稳定条件来决定。

构造差分的方法有多种形式，目前主要采用的是泰勒级数展开方法。其基本的差分表达式主要有一阶向前差分、一阶向后差分、一阶中心差分和二阶中心差分等。其中前两种格式为一阶计算精度，后两种格式为二阶计算精度。通过对时间和空间这几种不同差分格式的组合，可以组合成不同的差分计算格式。

2. 有限元方法

有限元方法（Finite Element Method，FEM）的基础是变分原理和加权余量法，其基本求解思想是把计算域划分为有限个互不重叠的单元，在每个单元内，选择一些合适的节点作为求解函数的插值点，将微分方程中的变量改写成由各变量或其导数的节点值与所选用的插值函数组成的线性表达式，借助变分原理或加权余量法，将微分方程离散求解。采用不同的权函数和插值函数形式，便构成不同的有限元方法。

有限元方法最早应用于结构力学，后来随着计算机的发展，逐渐用于流体力学的数值模拟。在有限元方法中，把计算域离散剖分为有限个互不重叠且相互连接的单元，在每个单元内选择基函数，用单元基函数的线性组合来逼近单元中的真解。整个计算域上总体的基函数可以看作是由每个单元基函数组成的，则整个计算域内的解可以看作是由所有单元上的近似解构成的。

在数值模拟中，常见的有限元计算方法是由变分法和加权余量法发展而来的里兹法和伽辽金法、最小二乘法等。根据所采用的权函数和插值函数的不同，有限元方法也分为多种计算格式。从权函数的选择来划分，有配置法、矩量法、最小二乘法和伽辽金法；从计算单元网格的形状来划分，有三角形网格、四边形网格和多边形网格；从插值函数的精度来划分，又分为线性插值函数和高次插值函数等。

不同的组合同样构成不同的有限元计算格式。对于权函数，伽辽金法是将权函数取为逼近函数中的基函数；最小二乘法是令权函数等于余量本身，而内积的极小值对待求系数的平方误差最小；在配置法中，先在计算域内选取 N 个配置点，令近似解在选定的 N 个配置点上严格满足微分方程，即在配置点上令方程余量为 0。插值函数一般由不同次幂的多项式组成，但也有采用三角函数或指数函数组成的乘积表示，最常用的是多项式插值函数。有限元插值函数分两类：一类只要求插值多项式本身在插值点取已知值，称为拉格朗日多项式插值；另一类不仅要求插值多项式本身，还要求它的导数值在插值点取已知值，称为哈密特多项式插值。单元坐标有笛卡尔直角坐标系和无因次自然坐标、有对称和不对称等。常采用的无因次坐标是一种局部坐标系，它的定义取决于单元的几何形状，一维看作长度比，二维看作面积比，三维看作体积比。在二维有限元中，三角形单元应用最早，近来四边形等参元的应用也越来越广。对于二维三角形和四边形单元，常采用的插值函数为有拉格朗日插值直角坐标系中的线性插值函数及二阶或更高阶插值函数、面积坐标系中的线性插值函数、二阶或更高阶插值函数等。

对于有限元方法，其基本思路和解题步骤可归纳如下。

（1）建立积分方程。根据变分原理或方程余量与权函数正交化原理，建立与微分方程

初值问题等价的积分表达式，这是有限元法的出发点。

(2) 区域单元剖分。根据求解区域的形状及实际问题的物理特点，将区域划分为若干相互连接、不重叠的单元。区域单元划分是采用有限元方法的前期准备工作，这部分工作量比较大，除了给计算单元和节点进行编号和确定相互之间的关系外，还要表示节点的位置坐标，同时还需要列出自然边界和本质边界的节点序号和相应的边界值。

(3) 确定单元基函数。根据单元中的节点数目及对近似解精度的要求，选择满足一定插值条件的插值函数作为单元基函数。有限元方法中的基函数是在单元中选取的，由于各单元具有规则的几何形状，在选取基函数时可遵循一定的法则。

(4) 单元分析。将各单元中的求解函数用单元基函数的线性组合表达式进行逼近；再将近似函数代入积分方程，并对单元区域进行积分，可获得含有待定系数(即单元中各节点的参数值)的代数方程组，称为单元有限元方程。

(5) 总体合成。在得出单元有限元方程之后，将区域中所有单元有限元方程按一定法则进行累加，形成总体有限元方程。

(6) 边界条件的处理。一般边界条件有三种形式，分为本质边界条件(狄利克雷边界条件)、自然边界条件(黎曼边界条件)、混合边界条件(柯西边界条件)。自然边界条件一般在积分表达式中可自动得到满足。本质边界条件和混合边界条件需按一定法则对总体有限元方程进行修正满足。

(7) 解有限元方程。根据边界条件修正的总体有限元方程组，是含所有待定未知量的封闭方程组，采用适当的数值计算方法求解，可求得各节点的函数值。有限元法对椭圆形问题有很好的适应性。目前商用 CFD 软件中 FIDAP 采用的是有限元法。

3. 有限体积法

有限体积法(Finite Volume Method，FVM)又称为控制体积法。其基本思路如下。

(1) 将计算区域划分为一系列不重复的控制体积，并使每个网格点周围有一个控制体积。

(2) 将待解的微分方程对每一个控制体积积分，便得出一组离散方程。其中的未知数是网格点上的因变量的数值。为了求出控制体积的积分，必须假定值在网格点之间的变化规律，即假设值的分段分布的分布剖面。

从积分区域的选取方法来看，有限体积法属于加权剩余法中的子区域法；从未知解的近似方法来看，有限体积法属于采用局部近似的离散方法。有限体积法的基本思路易于理解，并能得出直接的物理解释。离散方程的物理意义，就是因变量在有限大小的控制体积中的守恒原理，如同微分方程表示因变量在无限小的控制体积中的守恒原理一样。有限体积法得出的离散方程要求因变量的积分守恒使任意一组控制体积都得到满足，整个计算区域自然也得到满足。这是有限体积法的优点。有一些离散方法，如有限差分法，仅当网格极其细密时，离散方程才满足积分守恒；而有限体积法即使在粗网格情况下也显示出准确的积分守恒。

就离散方法而言，有限体积法可视作有限元法和有限差分法的中间物。有限元法必须假定值在网格点之间的变化规律(即插值函数)，并将其作为近似解；有限差分法只考虑网格点上的数值而不考虑值在网格点之间如何变化。有限体积法只寻求网格点的节点值，这与有限差分法相类似；但有限体积法在寻求控制体积的积分时，必须假定值在网格点之

间的分布，这又与有限元法相类似。在有限体积法中，插值函数只用于计算控制体积的积分，得出离散方程之后，便可忘掉插值函数；如果需要的话，可以对微分方程中不同的项采取不同的插值函数。就离散方法而言，有限体积法可视作有限元法和有限差分法的中间产物。

除了以上三种最常用的离散方法以外，还有边界元法、格子-玻尔兹曼方法、谱方法和多重网格方法等常用的离散方法，但由于篇幅有限，在此不再进行介绍和讨论。

本章小结

多旋翼无人机，也称为多旋翼无人直升机，是旋翼飞行器家族中的一员，其空气动力学属于旋翼飞行器空气动力学范畴，主要研究多旋翼无人机的旋翼与周围空气有相对运动时所产生的空气动力。研究的内容主要有四方面。一是基本理论方面：阐明旋翼与周围空气相互作用的空气动力现象、流动现象、流场分布等，分析空气流动时旋翼桨叶的受力情况，以便对桨叶的几何外形进行改造，来改善旋翼的气动特性，提高旋翼飞行器的性能，增进飞行品质。二是性能计算方面：在理论和试验的基础上，分析主要构造参数对飞行性能的影响，建立旋翼飞行器的空气动力计算方法，为旋翼飞行器设计所用。三是飞行力学方面：分析研究整体的平衡、稳定性和飞行品质问题。四是飞行品质方面：研究整架旋翼飞行器的平衡问题及其对操纵动作及推力与功率变化的反应；分析旋翼飞行器在各种飞行状态下的稳定性及操纵性包括对大气紊流的反应及如何控制的问题等。

本章重点讨论了旋翼三大经典理论、现代涡流理论和 CFD 理论的基本概念和内容。旋翼动量理论是牛顿定律在旋翼上的应用，其基本原理是依据动量守恒定律，建立旋翼拉力与流过旋翼桨盘的质量流量和远处尾迹中的诱导速度的关系。旋翼动量理论仅处理气流轴向流动，而叶素理论处理的是作用在桨叶上的气动力，把桨叶看成由无限个桨叶微段（即叶素）组成。考查每个叶素的运动、受力情况，并找出叶素的几何特性、运动特性和空气动力特性之间的关系。然后，对一片桨叶进而对整个旋翼进行积分，得到旋翼拉力和功率的公式。由于动量理论只是根据整个气流的运动特性描述旋翼桨盘的作用，无法涉及旋翼的几何形状；而叶素理论虽然从桨叶剖面的受力情况分析问题，但又不能解决沿半径的诱导速度分布。为了克服这些不足，产生了涡流理论。经典涡流理论包括桨盘涡系模型和桨叶涡系模型，前者旋翼被假设为具有无限片桨叶的桨盘，尾迹涡线连续地、规整地布置在圆柱涡面上；后者则由有限片桨叶后拖出的螺旋涡线组成，按来流速度和等效诱导入流确定其延伸方向的刚性尾迹。旋翼经典涡流理论以固定涡系模型为基础，不能分析诱导速度随时间的变化，也不能计入桨叶之间的气动干扰和涡系形状的畸变，计算得出的诱导速度不够精确。针对固定涡系存在的缺点，旋翼现代涡流理论以自由涡系模型为基础，计入尾流速度的不均匀性，从而大大提高旋翼空气动力计算精度。计算流体动力学（CFD）是建立在流体力学与数值计算方法基础上的独立的新型学科，通过计算机数值计算和图像显示的方法，在时间和空间上定量描述流场的数值解，从而达到对物理问题研究的目的。它兼有理论性和实践性的双重特点，建立了理论和方法，为现代科学中许多复杂的流动和传热问题提供了有效的计算技术。

本章的重点是学习旋翼的功用、旋翼数量和分布位置、飞行姿态与飞行状态的对应关

系、旋翼工作效率和结构形式、旋翼的几何参数和工作原理；了解和熟悉旋翼的动量理论、叶素理论、经典涡流理论、现代涡流理论和CFD(计算流体动力学)的基本概念和内容，包括它们各自的假设条件和坐标系统，以及它们在旋翼飞行器处于不同飞行状态(垂直飞行及前飞)下的工作原理、计算公式和数学处理方法等。

习题

1. 什么是空气动力学？它们各有什么特点？阐述空气动力学的研究方法和基本问题。
2. 简述旋翼飞行器空气动力学的定义、研究的内容和工具。
3. 旋翼主要的几何参数有哪些？旋翼的参数无因次化的目的是什么？
4. 旋翼桨叶发生挥舞运动和摆振运动的原因是什么？
5. 论述垂直飞行时旋翼动量理论与前飞时旋翼叶素理论的差别。
6. 简述旋翼叶素理论的基本概念和内容。
7. 什么是儒氏旋翼？它有什么优缺点？
8. 垂直飞行和前飞时的叶素理论模型有哪些区别？
9. 简述垂直飞行时旋翼经典涡流理论模型的结构和基本假设的内容。
10. 简述前飞时旋翼经典涡流理论模型的结构和基本假设的内容。
11. 用涡系来代表旋翼，两者在什么方面的作用是等价的？
12. 如果型阻功率保持不变，什么状态总的需用功率最大？什么状态总的需用功率最小？
13. 简述旋翼现代涡流理论的基本概念和内容，它与经典涡流理论有什么区别？
14. 简述旋翼现代涡流理论中前飞时自由尾迹分析方法。
15. 如何用升力面涡格法进行附着涡面各元素及尾迹划分。
16. 什么是CFD方法？它有什么特点？
17. 说明流体运动的质量守恒、动量守恒、能量守恒和N-S方程的含义。
18. 列举三种最常用的控制方程离散化方法，并说明如何应用来求解N-S方程。