第5章 系统运动的稳定性

稳定性问题是系统控制理论研究的一个重要课题。对大多数情形，稳定是控制系统能够正常运行的前提。系统运动稳定性可分为基于输入输出描述的外部稳定性和基于状态空间描述的内部稳定性。本章主要讨论内部稳定性，重点论述稳定性理论中最具重要性和普遍性的李雅普诺夫(A. M. Lyapunov)方法。讨论领域扩展到包括线性系统和非线性系统、时不变系统和时变系统、连续时间系统和离散时间系统各类系统。

5.1 外部稳定性和内部稳定性

本节针对连续时间线性系统，从概念和属性上，对两类基本稳定性即外部稳定性和内部稳定性进行简要讨论。本节内容对后续讨论是不可缺少的预备知识。

5.1.1 外部稳定性

考虑以输入输出关系表征的线性因果系统，假定初始条件为零，以保证系统输入输出描述的唯一性。现对系统外部稳定性引入如下定义。

定义 5.1[外部稳定性] 称一个因果系统为外部稳定，如果对任意有界输入$\boldsymbol{u}(t)$，即满足条件

$$\|\boldsymbol{u}(t)\| \leqslant \beta_1 < \infty, \quad \forall t \in [t_0, \infty) \tag{5.1}$$

的任意输入$\boldsymbol{u}(t)$，对应的输出$\boldsymbol{y}(t)$均为有界，即有

$$\|\boldsymbol{y}(t)\| \leqslant \beta_2 < \infty, \quad \forall t \in [t_0, \infty) \tag{5.2}$$

注 外部稳定性也常称为有界输入-有界输出稳定性，简称为 BIBO 稳定性。

对连续时间线性系统，外部稳定性即 BIBO 稳定性可根据系统脉冲响应矩阵或传递函数矩阵进行判别。

结论 5.1[线性时变系统 BIBO 稳定] 对零初始条件 p 维输入和 q 维输出连续时间线性时变系统，时间定义区间为$[t_0, \infty)$，则 t_0 时刻系统

BIBO 稳定的充分必要条件为，存在一个有限正常数 β，使对一切 $t\in[t_0,\infty)$，脉冲响应矩阵 $\boldsymbol{H}(t,\tau)$ 所有元

$$h_{ij}(t,\tau),\quad i=1,2,\cdots,q,\quad j=1,2,\cdots,p \tag{5.3}$$

均满足关系式：

$$\int_{t_0}^{t}\left|h_{ij}(t,\tau)\right|\mathrm{d}\tau\leqslant\beta<\infty \tag{5.4}$$

结论 5.2［线性时不变系统 BIBO 稳定］ 对零初始条件 p 维输入和 q 维输出连续时间线性时不变系统，初始时刻 $t_0=0$，则系统 BIBO 稳定的充分必要条件为，存在一个有限正常数 β，使脉冲响应矩阵 $\boldsymbol{H}(t)$ 所有元

$$h_{ij}(t),\quad i=1,2,\cdots,q,\quad j=1,2,\cdots,p \tag{5.5}$$

均满足关系式：

$$\int_{0}^{\infty}|h_{ij}(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant\beta<\infty \tag{5.6}$$

结论 5.3［线性时不变系统 BIBO 稳定］ 对零初始条件 p 维输入和 q 维输出连续时间线性时不变系统，令初始时刻 $t_0=0$，则系统 BIBO 稳定的充分必要条件为，真或严真传递函数矩阵 $\boldsymbol{G}(s)$ 所有极点均具有负实部。

注 对传递函数矩阵 $\boldsymbol{G}(s)$，为决定极点是否均具有负实部，即是否均位于左半开 s 平面，广为采用的方法是劳斯-赫尔维茨(Routh-Hurwitz)判据，即基于 $\boldsymbol{G}(s)$ 特征多项式 $\alpha_G(s)$ 的系数直接判断。劳斯-赫尔维茨判据常称为代数稳定判据，有关结论和判断方法可在经典控制理论教材中找到。

5.1.2 内部稳定性

考虑连续时间线性时变系统，其自治状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x},\quad \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0,\quad t\in[t_0,\infty) \tag{5.7}$$

其中，$\boldsymbol{A}(t)$ 为 $n\times n$ 时变矩阵，且满足解存在唯一性条件。表状态零输入响应即由任意非零初始状态 $\boldsymbol{x}_0$ 引起的状态响应为 $\boldsymbol{x}_{0u}(t)$，基此引入内部稳定性定义。

定义 5.2［内部稳定性］ 称连续时间线性时变系统在时刻 t_0 为内部稳定，如果由时刻 t_0 任意非零初始状态 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$ 引起的状态零输入响应 $\boldsymbol{x}_{0u}(t)$ 对所有 $t\in[t_0,\infty)$ 为有界，并满足渐近属性即成立：

$$\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{x}_{0u}(t)=\boldsymbol{0} \tag{5.8}$$

注 对于一般情况，不管系统为线性或非线性，内部稳定性意指自治系统状态运动的稳定性。实质上，内部稳定性等同于李雅普诺夫意义下渐近稳定性。

对连续时间线性系统，内部稳定性可根据状态转移矩阵或系数矩阵直接判别。

结论 5.4［线性时变系统内部稳定］ 对 n 维连续时间线性时变自治系统(5.7)，系统在时刻 t_0 是内部稳定即渐近稳定的充分必要条件为，状态转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$ 对所有 $t\in[t_0,\infty)$ 为有界，并满足渐近属性即成立：

$$\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)=\mathbf{0} \tag{5.9}$$

证　对时刻 t_0 任意非零初始状态 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$，状态零输入响应 $\boldsymbol{x}_{0u}(t)$ 为

$$\boldsymbol{x}_{0u}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{x}_0,\quad \forall t\in[t_0,\infty) \tag{5.10}$$

容易看出，$\boldsymbol{x}_{0u}(t)$ 有界当且仅当 $\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$ 有界，$\lim\limits_{t\to\infty}\boldsymbol{x}_{0u}(t)=\mathbf{0}$ 当且仅当 $\lim\limits_{t\to\infty}\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)=\mathbf{0}$。

结论 5.5［线性时不变系统内部稳定］　对 n 维连续时间线性时不变自治系统：

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u},\quad \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0,\quad t\geqslant 0 \tag{5.11}$$

系统是内部稳定即渐近稳定的充分必要条件为，矩阵指数函数 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$ 满足关系式：

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\mathbf{0} \tag{5.12}$$

证　对线性时不变系统，状态转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$，且 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$ 对所有 $t>0$ 为有界。于是，由结论 5.4 即可导出本结论。

结论 5.6［线性时不变系统内部稳定］　对 n 维连续时间线性时不变自治系统 (5.11)，系统是内部稳定即渐近稳定的充分必要条件为，系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 所有特征值 $\lambda_i(\boldsymbol{A})$，$i=1,2,\cdots,n$ 均具有负实部，即成立：

$$\mathrm{Re}\{\lambda_i(\boldsymbol{A})\}<0,\quad i=1,2,\cdots,n \tag{5.13}$$

注 1　同样，可以采用劳斯-赫尔维茨判据，根据矩阵 $\boldsymbol{A}$ 特征多项式

$$\alpha(s)\triangleq\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=s^n+\alpha_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\alpha_1 s+\alpha_0 \tag{5.14}$$

的系数 $\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$，直接判断 $\boldsymbol{A}$ 所有特征值是否均具有负实部即系统是否为内部稳定。

注 2　上述结论可能使人会对连续时间线性时变系统联想到一个推论，即系统为内部稳定，当且仅当矩阵 $\boldsymbol{A}(t)$ 所有特征值 $\lambda_1(t),\lambda_2(t),\cdots,\lambda_n(t)$ 对所有 $t\in[t_0,\infty)$ 均具有负实部。不幸的是，已经举出反例证明，这个推论尽管是自然的但一般是不正确的。在控制理论发展的早期阶段，控制工程师们曾习惯于把冻结参数法作为研究线性时变系统的一个常用手段。需要指出的是，这种处理方法对某些问题可能导致错误的结果。

注 3　对周期时变系统一类特殊连续时间线性时变系统，系统矩阵 $\boldsymbol{A}(t)$ 可通过李雅普诺夫变换化为时不变矩阵 $\bar{\boldsymbol{A}}$，系统内部稳定的充分必要条件归结为要求矩阵 $\bar{\boldsymbol{A}}$ 所有特征值均具有负实部。

5.1.3　内部稳定性和外部稳定性的关系

本小节限于连续时间线性时不变系统，讨论和给出内部稳定性和外部稳定性的等价条件，并将其归纳为如下的几个结论。

结论 5.7［内部稳定和外部稳定关系］　考虑连续时间线性时不变系统：

$$\begin{aligned}&\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u},\quad \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0,\quad t\geqslant 0\\&\boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}\end{aligned} \tag{5.15}$$

其中，$\boldsymbol{x}$ 为 n 维状态，$\boldsymbol{u}$ 为 p 维输入，$\boldsymbol{y}$ 为 q 维输出。若系统为内部稳定即渐近稳定，

则系统必为 BIBO 稳定即外部稳定。

证 对线性时不变系统(5.15),系统脉冲响应矩阵 $\boldsymbol{H}(t)$的关系式为

$$\boldsymbol{H}(t)=\boldsymbol{C}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}\delta(t) \tag{5.16}$$

再由结论 5.5 知,若系统为内部稳定,必有

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\ \text{为有界且}\lim_{t\to\infty}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{0} \tag{5.17}$$

从而,由式(5.16)和式(5.17)可以导出,脉冲响应矩阵 $\boldsymbol{H}(t)$所有元

$$h_{ij}(t),\quad i=1,2,\cdots,q,\quad j=1,2,\cdots,p \tag{5.18}$$

均满足关系式:

$$\int_0^\infty \left|h_{ij}(t)\right|\mathrm{d}t\leqslant\beta<\infty \tag{5.19}$$

据结论 5.2,系统为 BIBO 稳定。

结论 5.8[内部稳定和外部稳定关系] 对连续时间线性时不变系统(5.15),系统为 BIBO 稳定即外部稳定不能保证系统必为内部稳定即渐近稳定。

证 第 4 章中结构规范分解定理的推论指出,传递函数矩阵 $\boldsymbol{G}(s)$只能反映系统结构中能控能观测部分。据此,系统为 BIBO 稳定即 $\boldsymbol{G}(s)$极点均具有负实部的事实,只能保证系统的能控能观测部分特征值均具有负实部,既不表明也不要求系统的能控不能观测、不能控能观测和不能控不能观测各部分特征值均具有负实部。由此,系统为 BIBO 稳定不能保证系统为内部稳定。

结论 5.9[内部稳定和外部稳定等价性] 对连续时间线性时不变系统(5.15),若系统联合完全能控和完全能观测,则系统外部稳定当且仅当系统内部稳定。

证 由结论 5.7 知,系统内部稳定意味着系统外部稳定。而由结论 5.8 证明过程知,在系统联合完全能控和完全能观测条件下,系统外部稳定意味着系统内部稳定。从而,在结论条件下,系统外部稳定和系统内部稳定相等价。

5.2 李雅普诺夫意义下运动稳定性的一些基本概念

本节开始重点讨论分析系统稳定性的李雅普诺夫第二方法。作为随后各节讨论的基础,本节先就李雅普诺夫方法中的相关概念和基本定义进行介绍。内容包括李雅普诺夫第一方法和第二方法的主要思路,自治系统、平衡状态和受扰运动,李雅普诺夫意义下稳定、渐近稳定和不稳定的定义等。

5.2.1 李雅普诺夫第一方法和第二方法

一个多世纪以前,俄国力学家 A. M. 李雅普诺夫(A. M. Lyapunov)在 1892 年发表的《运动稳定性的一般问题》论文中,首先提出运动稳定性的一般理论。把由常微分方程组描述的动力学系统的稳定性分析方法区分为本质上不同的两种方法,现今称为李雅普诺夫第一方法和第二方法。李雅普诺夫方法同时适用于线性系统和非线性系统,时变系统和时不变系统,连续时间系统和离散时间系统。

李雅普诺夫第一方法也称为李雅普诺夫间接法，属于小范围稳定性分析方法。第一方法的基本思路为，将非线性自治系统运动方程在足够小邻域内进行泰勒展开导出一次近似线性化系统，再据线性化系统特征值在复平面上的分布推断非线性系统在邻域内的稳定性。若线性化系统特征值均具有负实部，则非线性系统在邻域内稳定；若线性化系统包含正实部特征值，则非线性系统在邻域内不稳定；若线性化系统除负实部特征值外包含零实部单特征值，则非线性系统在邻域内是否稳定需通过高次项分析进行判断。

李雅普诺夫第二方法也称为李雅普诺夫直接法，属于直接根据系统结构判断内部稳定性的方法。第二方法直接面对非线性系统，基于引入具有广义能量属性的李雅普诺夫函数和分析李雅普诺夫函数导数的定号性，建立判断系统稳定性的相应结论。直接法概念直观，方法具有一般性，当在 1960 年前后被引入系统控制理论后，很快显示出其在理论上和应用上的重要性，成为现代系统控制理论中研究系统稳定性的主要工具。

5.2.2　自治系统、平衡状态和受扰运动

系统运动的稳定性实质上归结为系统平衡状态的稳定性。系统平衡状态的稳定性问题就是，偏离平衡状态的受扰运动能否只依靠系统内部的结构因素，或者使之限制在平衡状态的有限邻域内，或者使之同时最终返回到平衡状态。为此，有必要先对自治系统、平衡状态和受扰运动等概念进行简要的讨论。

1. 自治系统

定义 5.3［自治系统］　自治系统定义为不受外部影响即没有输入作用的一类动态系统。

作为最一般情形，对连续时间非线性时变系统，自治系统状态方程具有形式：

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t),\quad \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0,\quad t\in[t_0,\infty) \tag{5.20}$$

其中，$\boldsymbol{x}$ 为 n 维状态，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)$ 为显含时间变量 t 的 n 维向量函数。对连续时间非线性时不变系统，自治系统状态方程形式上类同于方程(5.20)，但向量函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)$ 中不再显含时间变量 t，即方程形式相应地为 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$。

作为较特殊情形，对连续时间线性时变系统，方程(5.20)中的向量函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)$ 表为状态 $\boldsymbol{x}$ 的线性向量函数，自治系统状态方程具有形式：

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x},\quad \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0,\quad t\in[t_0,\infty) \tag{5.21}$$

而对连续时间线性时不变系统，自治系统状态方程形式上类同于方程(5.21)，但系统矩阵$\boldsymbol{A}(t)$不再显含时间变量 t，即方程形式相应地为 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$。

在随后各节的讨论中，总是假定自治系统(5.20)或(5.21)满足解存在唯一性条件。

2. 平衡状态

定义 5.4［平衡状态］　对连续时间非线性时变系统，自治系统(5.20)的平衡状

态 $\boldsymbol{x}_e$ 定义为状态空间中满足属性

$$\dot{\boldsymbol{x}}_e = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_e, t) = \boldsymbol{0}, \quad \forall\, t \in [t_0, \infty) \tag{5.22}$$

的一个状态或一类状态。

下面,对平衡状态给出如下的几点说明。

(i) 直观含义。平衡状态 $\boldsymbol{x}_e$ 直观上为系统处于平衡时可能具有的一类状态,系统平衡的基本特征为 $\dot{\boldsymbol{x}}_e = \boldsymbol{0}$。

(ii) 形式。平衡状态 $\boldsymbol{x}_e$ 可由求解方程(5.22)定出。对 2 维自治系统,$\boldsymbol{x}_e$ 的形式包括状态空间中的点和线段。

(iii) 不唯一性。自治系统的平衡状态 $\boldsymbol{x}_e$ 一般为不唯一。对连续时间线性时不变系统,平衡状态 $\boldsymbol{x}_e$ 为方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_e = \boldsymbol{0}$ 的解,若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 非奇异则有唯一解 $\boldsymbol{x}_e = \boldsymbol{0}$,若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 奇异则解不唯一即除 $\boldsymbol{x}_e = \boldsymbol{0}$ 还有非零 $\boldsymbol{x}_e$。

(iv) 零平衡状态。对自治系统(5.20)或(5.21),在大多数情况下,$\boldsymbol{x}_e = \boldsymbol{0}$ 即状态空间原点必为系统的一个平衡状态。

(v) 孤立平衡状态。孤立平衡状态即为状态空间中彼此分隔的孤立点形式平衡状态。孤立平衡状态的特性是,通过移动坐标系可将其转换为状态空间原点即零平衡状态。

(vi) 对平衡状态的约定。在李雅普诺夫直接法中,稳定性分析主要针对孤立平衡状态。基此,在随后的稳定性分析中,总是把平衡状态设为状态空间原点即 $\boldsymbol{x}_e = \boldsymbol{0}$。

3. 受扰运动

定义 5.5[受扰运动] 动态系统的受扰运动定义为其自治系统由初始状态扰动 $\boldsymbol{x}_0$ 引起的一类状态运动。

注 实质上,受扰运动就是系统的状态零输入响应。所以称其为受扰运动,起因于稳定性分析中将非零初始状态 $\boldsymbol{x}_0$ 看成为相对于零平衡状态即 $\boldsymbol{x}_e = \boldsymbol{0}$ 的一个状态扰动。

通常,为更清晰地表示受扰运动中的时间关系和因果关系,习惯地将受扰运动进一步表为如下形式:

$$\boldsymbol{x}_{0u}(t) = \boldsymbol{\phi}(t; \boldsymbol{x}_0, t_0), \quad t \in [t_0, \infty) \tag{5.23}$$

其中,$\boldsymbol{\phi}$ 代表向量函数,括号内分号前反映对时间变量 t 的函数关系,分号后用以强调导致运动的初始状态 $\boldsymbol{x}_0$ 及其作用时刻 t_0。并且,对 $t = t_0$,受扰运动向量函数显然满足:

$$\boldsymbol{\phi}(t_0; \boldsymbol{x}_0, t_0) = \boldsymbol{x}_0 \tag{5.24}$$

几何上,受扰运动 $\boldsymbol{\phi}(t; \boldsymbol{x}_0, t_0)$ 呈现为状态空间中从初始点 $\boldsymbol{x}_0$ 出发的一条轨线,对应不同初始状态受扰运动 $\boldsymbol{\phi}(t; \boldsymbol{x}_0, t_0)$ 构成一个轨线族。

5.2.3 李雅普诺夫意义下的稳定

先来引入李雅普诺夫意义下稳定的概念。它是进一步定义李雅普诺夫意义下

渐近稳定和不稳定的基础。

定义 5.6［李雅普诺夫意义下的稳定］　称自治系统(5.20)的孤立平衡状态 $\boldsymbol{x}_e=\boldsymbol{0}$ 在时刻 t_0 为李雅普诺夫意义下稳定，如果对任给一个实数 $\varepsilon>0$，都对应存在另一依赖于 ε 和 t_0 的实数 $\delta(\varepsilon,t_0)>0$，使得满足不等式

$$\|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}_e\|\leqslant\delta(\varepsilon,t_0) \tag{5.25}$$

的任一初始状态 $\boldsymbol{x}_0$ 出发的受扰运动 $\boldsymbol{\phi}(t;\boldsymbol{x}_0,t_0)$ 都满足不等式：

$$\|\boldsymbol{\phi}(t;\boldsymbol{x}_0,t_0)-\boldsymbol{x}_e\|\leqslant\varepsilon,\quad \forall t\geqslant t_0 \tag{5.26}$$

对上述李雅普诺夫意义下稳定的定义，进而给出如下几点说明。

1. 稳定的几何解释

李雅普诺夫意义下稳定具有直观的几何含义。把不等式(5.26)看成为状态空间中以 $\boldsymbol{x}_e$ 为球心和以 ε 为半径的一个超球体，其球域表为 $S(\varepsilon)$；把不等式(5.25)看成为状态空间中以 $\boldsymbol{x}_e$ 为球心和以 $\delta(\varepsilon,t_0)$ 为半径的一个超球体，其球域表为 $S(\delta)$，且球域的大小同时依赖于 ε 和 t_0。在此基础上，李雅普诺夫意义下稳定的几何含义就是，由域 $S(\delta)$ 内任意一点出发的运动轨线 $\boldsymbol{\phi}(t;\boldsymbol{x}_0,t_0)$ 对所有时刻 $t\in[t_0,\infty)$ 都不越出域 $S(\varepsilon)$ 的边界 $H(\varepsilon)$。对二维系统，上述几何含义可由图 5.1 形象地表示。

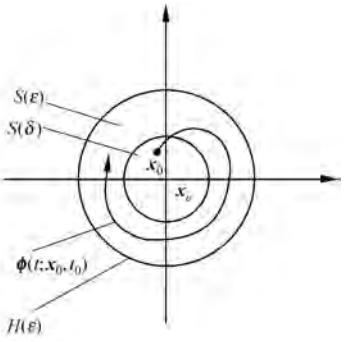

图 5.1　李雅普诺夫意义下稳定的平衡状态

2. 李雅普诺夫意义下一致稳定

在李雅普诺夫意义下的稳定定义中，若对取自时间定义区间的任一初始时刻 t_0，对任给实数 $\varepsilon>0$ 都存在与初始时刻 t_0 无关的实数 $\delta(\varepsilon)>0$，使相应受扰运动 $\boldsymbol{\phi}(t;\boldsymbol{x}_0,t_0)$ 满足条件(5.26)，则称平衡状态 $\boldsymbol{x}_e$ 为李雅普诺夫意义下一致稳定。通常，对于时变系统，一致稳定比之稳定更有实际意义。一致稳定意味着，若系统在一个初始时刻 t_0 为李雅普诺夫意义下稳定，则系统在取自时间定义区间的所有初始时刻 t_0 均为李雅普诺夫意义下稳定。

3. 时不变系统的稳定属性

对于时不变系统，不管线性系统还是非线性系统，连续时间系统还是离散时间系统，李雅普诺夫意义下的稳定和一致稳定必为等价。换句话说，若时不变系统的平衡状态 $\boldsymbol{x}_e$ 为李雅普诺夫意义下稳定，则 $\boldsymbol{x}_e$ 必为李雅普诺夫意义下一致稳定。

4. 李雅普诺夫意义下稳定的实质

定义表明，李雅普诺夫意义下稳定只能保证系统受扰运动相对于平衡状态的有界性，不能保证系统受扰运动相对于平衡状态的渐近性。因此，相比于稳定性的工

程理解，李雅普诺夫意义下的稳定实质上就是工程意义下的临界不稳定。

5.2.4 渐近稳定

稳定性问题中，无论理论上还是应用上，渐近稳定往往更有意义和更具重要性。

定义 5.7［渐近稳定］ 称自治系统(5.20)的孤立平衡状态 $\boldsymbol{x}_e=\boldsymbol{0}$ 在时刻 t_0 为渐近稳定，如果：(i)$\boldsymbol{x}_e=\boldsymbol{0}$ 在时刻 t_0 为李雅普诺夫意义下稳定；(ii)对实数 $\delta(\varepsilon,t_0)>0$ 和任给实数 $\mu>0$，都对应地存在实数 $T(\mu,\delta,t_0)>0$，使得满足不等式(5.25)的任一初始状态 $\boldsymbol{x}_0$ 出发的受扰运动 $\boldsymbol{\phi}(t;\boldsymbol{x}_0,t_0)$ 还同时满足不等式：

$$\| \boldsymbol{\phi}(t;\boldsymbol{x}_0,t_0)-\boldsymbol{x}_e \| \leqslant \mu, \quad \forall t \geqslant t_0+T(\mu,\delta,t_0) \tag{5.27}$$

下面，对渐近稳定概念作如下的几点说明。

1. 渐近稳定的几何解释

以二维系统为例，渐近稳定的几何含义如图 5.2 所示。其中，图(a)表征受扰运动相对于平衡状态的有界性，图(b)反映受扰运动相对于平衡状态随时间变化的渐近性。

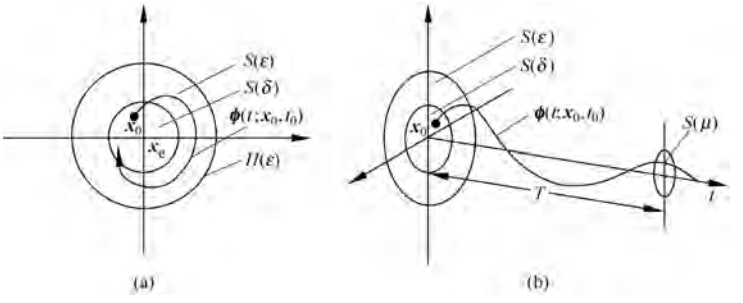

图 5.2 渐近稳定的几何含义

2. 渐近稳定的等价定义

在渐近稳定定义中，若取 $\mu\to 0$，则对应地有 $T(\mu,\delta,t_0)\to\infty$。基此，可进而对渐近稳定引入等价定义，以更为直观的形式反映稳定过程的渐近特征。等价定义可表述为，如果：(i)由任一初始状态 $\boldsymbol{x}_0\in S(\delta)$ 出发的受扰运动 $\boldsymbol{\phi}(t;\boldsymbol{x}_0,t_0)$ 相对于平衡状态 $\boldsymbol{x}_e=\boldsymbol{0}$ 对所有 $t\in[t_0,\infty)$ 均为有界；(ii)受扰运动相对于平衡状态 $\boldsymbol{x}_e=\boldsymbol{0}$ 满足渐近性，即成立

$$\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{\phi}(t;\boldsymbol{x}_0,t_0)=\boldsymbol{0}, \quad \forall \boldsymbol{x}_0 \in S(\delta)$$

称自治系统(5.20)的孤立平衡状态 $\boldsymbol{x}_e=\boldsymbol{0}$ 在时刻 t_0 为渐近稳定。

3. 一致渐近稳定

在渐近稳定定义中，若对取自时间定义区间的任意初始时刻 t_0，由任给实数 $\varepsilon>$

0 都存在与初始时刻 t_0 无关的实数 $\delta(\varepsilon)>0$，由实数 $\delta(\varepsilon)$ 和任给实数 $\mu>0$ 都存在与初始时刻 t_0 无关的实数 $T(\mu,\delta)>0$，使得相应受扰运动 $\boldsymbol{\phi}(t;\boldsymbol{x}_0,t_0)$ 相对于平衡状态为有界且满足条件(5.27)，则称平衡状态 $\boldsymbol{x}_e$ 为一致渐近稳定。对时变系统，一致渐近稳定比之渐近稳定更有意义。

4. 时不变系统的渐近稳定属性

对于时不变系统，不管线性系统还是非线性系统，连续时间系统还是离散时间系统，平衡状态 $\boldsymbol{x}_e$ 的渐近稳定和一致渐近稳定为等价，即有

$$\boldsymbol{x}_e \text{ 一致渐近稳定} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{x}_e \text{ 渐近稳定} \tag{5.28}$$

5. 小范围和大范围渐近稳定

小范围渐近稳定又称为局部渐近稳定。直观上，局部渐近稳定的含义为

“存在围绕 $\boldsymbol{x}_e=\boldsymbol{0}$ 超球域 $S(\delta)$，$\forall \boldsymbol{0}\neq\boldsymbol{x}_0\in S(\delta)$，$\boldsymbol{x}_e$ 为渐近稳定。” (5.29)

并且，称 $S(\delta)$ 为吸引区，以表示位于其内的所有状态点都可被“吸引”到平衡状态 $\boldsymbol{x}_e$ 的属性。对于小范围渐近稳定，将面临确定最大吸引区的问题。

大范围渐近稳定又称为全局渐近稳定。直观上，全局渐近稳定的含义为

$$\text{“}\forall \boldsymbol{0}\neq\boldsymbol{x}_0\in\mathcal{R}^n,\boldsymbol{x}_e=\boldsymbol{0} \text{ 为渐近稳定。”} \tag{5.30}$$

工程上，总是期望系统具有大范围渐近稳定属性。一个系统是否具有这种属性，完全由系统的结构和参数所决定。

6. 大范围渐近稳定的必要条件

由大范围渐近稳定含义(5.30)，容易理解，平衡状态 $\boldsymbol{x}_e=\boldsymbol{0}$ 为大范围渐近稳定的必要条件为，状态空间 $\mathcal{R}^n$ 中不存在其他渐近稳定的平衡状态。

7. 线性系统的渐近稳定属性

对于线性系统，不管时不变系统还是时变系统，连续时间系统还是离散时间系统，基于叠加原理可知，若平衡状态 $\boldsymbol{x}_e=\boldsymbol{0}$ 为渐近稳定，则其必为大范围渐近稳定。

8. 渐近稳定的工程含义

可以看出，把李雅普诺夫意义下渐近稳定和工程意义下稳定相比，有

$$\text{李雅普诺夫意义下渐近稳定}=\text{工程意义下稳定} \tag{5.31}$$

5.2.5　不稳定

最后，给出李雅普诺夫意义下不稳定的概念。

定义 5.8[不稳定]　称自治系统(5.20)的孤立平衡状态 $\boldsymbol{x}_e=\boldsymbol{0}$ 在时刻 t_0 为不稳定，如果不管取实数 $\varepsilon>0$ 为多么大，都不存在对应一个实数 $\delta(\varepsilon,t_0)>0$，使得满足

不等式

$$\| \boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_e \| \leqslant \delta(\varepsilon, t_0) \tag{5.32}$$

的任意初始状态 $\boldsymbol{x}_0$ 出发的受扰运动 $\boldsymbol{\phi}(t; \boldsymbol{x}_0, t_0)$ 满足不等式：

$$\| \boldsymbol{\phi}(t; \boldsymbol{x}_0, t_0) - \boldsymbol{x}_e \| \leqslant \varepsilon, \quad \forall t \geqslant t_0 \tag{5.33}$$

对于二维系统，不稳定的几何含义如图 5.3 所示。可以看出，若平衡状态 $\boldsymbol{x}_e = \boldsymbol{0}$ 为不稳定，则不管取域 $S(\varepsilon)$ 多么大，也不管取域 $S(\delta)$ 多么小，总存在非零点 $\boldsymbol{x}_0^* \in S(\delta)$，使由 $\boldsymbol{x}_0^* \in S(\delta)$ 出发的受扰运动轨线越出域 $S(\varepsilon)$。李雅普诺夫意义下不稳定等同于工程意义下发散性不稳定。

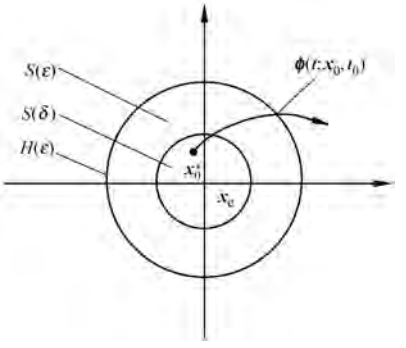

图 5.3 不稳定的几何含义

5.3 李雅普诺夫第二方法的主要定理

本节重点讨论李雅普诺夫第二方法的主要定理。第二方法主要定理的提出基于物理学中这样一个直观启示，即系统运动的进程总是伴随能量的变化，如果做到使系统能量变化的速率始终保持为负，也就是使运动进程中能量为单调减少，那么系统受扰运动最终必会返回到平衡状态。

5.3.1 大范围渐近稳定的判别定理

在李雅普诺夫第二方法的稳定性结论中，大范围渐近稳定判别定理具有基本的重要性。考虑最为一般情形的连续时间非线性时变自治系统：

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t), \quad t \in [t_0, \infty) \tag{5.34}$$

其中，$\boldsymbol{x}$ 为 n 维状态。并且，对所有 $t \in [t_0, \infty)$ 成立 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0}, t) = \boldsymbol{0}$，即状态空间原点 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 为系统孤立平衡状态。

下面，给出李雅普诺夫主稳定性定理。

结论 5.10［李雅普诺夫主稳定性定理］ 对连续时间非线性时变自治系统 (5.34)，若可构造对 $\boldsymbol{x}$ 和 t 具有连续一阶偏导数的一个标量函数 $V(\boldsymbol{x}, t)$，$V(\boldsymbol{0}, t) =$

0，且对状态空间 $\mathcal{R}^n$ 中所有非零状态点 $\boldsymbol{x}$ 满足如下条件：

(i) $V(\boldsymbol{x},t)$正定且有界，即存在两个连续的非减标量函数 $\alpha(\|\boldsymbol{x}\|)$和 $\beta(\|\boldsymbol{x}\|)$，其中 $\alpha(0)=0$ 和 $\beta(0)=0$，使对所有 $t\in[t_0,\infty)$和所有 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 成立：

$$\beta(\|\boldsymbol{x}\|)\geqslant V(\boldsymbol{x},t)\geqslant\alpha(\|\boldsymbol{x}\|)>0 \tag{5.35}$$

(ii) $V(\boldsymbol{x},t)$对时间 t 的导数 $\dot{V}(\boldsymbol{x},t)$负定且有界，即存在一个连续的非减标量函数$\gamma(\|\boldsymbol{x}\|)$，其中 $\gamma(0)=0$，使对所有 $t\in[t_0,\infty)$和所有 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 成立：

$$\dot{V}(\boldsymbol{x},t)\leqslant-\gamma(\|\boldsymbol{x}\|)<0 \tag{5.36}$$

(iii) 当 $\|\boldsymbol{x}\|\to\infty$，有 $\alpha(\|\boldsymbol{x}\|)\to\infty$即 $V(\boldsymbol{x},t)\to\infty$。

则系统的原点平衡状态 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 为大范围一致渐近稳定。

进而，对李雅普诺夫主稳定性定理给出如下的几点讨论。

1. 判据的特点

李雅普诺夫主稳定性定理的基本特点是其普适性和直观性。普适性体现在，作为渐近稳定性的判据，可同时适用于线性和非线性、时变和时不变等各类动态系统。直观性表现为，从广义能量的角度，可直观地理解结论中给出条件的合理性。

2. 判据条件的物理含义

对李雅普诺夫主稳定性定理，从物理学角度，把正定有界标量函数 $V(\boldsymbol{x},t)$视为“广义能量”，把 $V(\boldsymbol{x},t)$对时间 t 的导数 $\dot{V}(\boldsymbol{x},t)$视为“广义能量变化率”，则其结论反映了物理世界中的一个直观事实，即只要系统的能量有限，且能量变化率始终为负，则随着系统能量有界并最终趋于零，系统运动对应地必有界并最终返回原点平衡状态。

3. 李雅普诺夫函数

在李雅普诺夫主稳定性定理中，$V(\boldsymbol{x},t)$毕竟不能等同于能量，且 $V(\boldsymbol{x},t)$的含义和形式随着系统物理属性的不同而不同。基此，通常称满足稳定性定理条件的 $V(\boldsymbol{x},t)$为李雅普诺夫函数。判断系统的渐近稳定性，归结为对给定系统构造李雅普诺夫函数 $V(\boldsymbol{x},t)$。

4. 候选李雅普诺夫函数的选取

对李雅普诺夫主稳定性定理，李雅普诺夫函数的选取是一个试选和验证的过程。对较为简单的系统，候选李雅普诺夫函数常先试取为状态 $\boldsymbol{x}$ 的二次型函数，若验证不满足定理条件，再试取四次型函数，如此等等。但总的来说，至今还缺少一般性的有效方法。

5. 判据的充分性属性

对李雅普诺夫主稳定性定理或李雅普诺夫第二方法其他定理，定理指出的条件

只是保证自治系统(5.36)为大范围一致渐近稳定或具有其他稳定不稳定属性的一个充分条件。充分条件的局限性在于,如果对给定系统找不到满足定理条件的李雅普诺夫函数 $V(\boldsymbol{x},t)$,并不能对系统的相应稳定性作出否定性的结论。

现在,转而讨论连续时间非线性时不变系统,自治状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\quad t\geqslant 0 \tag{5.37}$$

其中,$\boldsymbol{x}$ 为 n 维状态,对所有 $t\in[0,\infty)$ 有 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$,即状态空间原点 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 为系统的孤立平衡状态。

时不变系统为时变系统的一类特殊情形。直接基于时变情形的李雅普诺夫主稳定性定理可导出时不变情形的对应结论。并且可以看到时不变情形定理的条件在形式和判断上都可得到很大简化。

结论 5.11[李雅普诺夫主稳定性定理] 对连续时间非线性时不变自治系统(5.37),若可构造对 $\boldsymbol{x}$ 具有连续一阶偏导数的一个标量函数 $V(\boldsymbol{x})$,$V(\boldsymbol{0})=0$,且对状态空间 $\mathscr{R}^n$ 中所有非零状态点 $\boldsymbol{x}$ 满足如下条件:

(i) $V(\boldsymbol{x})$为正定;

(ii) $\dot{V}(\boldsymbol{x})\triangleq \mathrm{d}V(\boldsymbol{x})/\mathrm{d}t$ 为负定;

(iii) 当 $\|\boldsymbol{x}\|\to\infty$,有 $V(\boldsymbol{x})\to\infty$;

则系统的原点平衡状态 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 为大范围渐近稳定。

例 5.1 给定连续时间非线性时不变自治系统:

$$\dot{x}_1=x_2-x_1(x_1^2+x_2^2)$$

$$\dot{x}_2=-x_1-x_2(x_1^2+x_2^2)$$

易知,$x_1=0$ 和 $x_2=0$ 为唯一平衡状态。

首先,取候选李雅普诺夫函数 $V(\boldsymbol{x})$为状态 $\boldsymbol{x}$ 的二次型函数:

$$V(\boldsymbol{x})=x_1^2+x_2^2$$

可知 $V(\boldsymbol{x})$为正定,且 $V(\boldsymbol{0})=0$。

进而,计算得到

$$\begin{aligned}\dot{V}(\boldsymbol{x})&=\frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial x_2}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}\\&=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial x_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}2x_1 & 2x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_2-x_1(x_1^2+x_2^2)\\ -x_1-x_2(x_1^2+x_2^2)\end{bmatrix}\\&=-2(x_1^2+x_2^2)^2\end{aligned}$$

容易看出,$\dot{V}(\boldsymbol{x})$为负定。

最后,当 $\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2}\to\infty$,有

$$V(\boldsymbol{x})=\|\boldsymbol{x}\|^2=(x_1^2+x_2^2)\to\infty$$

据结论 5.11 知，系统原点平衡状态 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 为大范围渐近稳定。

研究表明，对不少系统，结论 5.11 中“条件 $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 为负定”是构造 $V(\boldsymbol{x})$ 的主要困难。同时直观上容易理解，$\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 为负定也是导致结论过于保守的条件。下面，限于连续时间非线性时不变系统，给出放宽上述条件后的李雅普诺夫主稳定性定理。

结论 5.12［李雅普诺夫主稳定性定理］　对连续时间非线性时不变自治系统 (5.37)，若可构造对 $\boldsymbol{x}$ 具有连续一阶偏导数的一个标量函数 $V(\boldsymbol{x})$，$V(\boldsymbol{0})=0$，且对状态空间 $\mathscr{R}^n$ 中所有非零状态点 $\boldsymbol{x}$ 满足如下条件：

(i) $V(\boldsymbol{x})$ 为正定；

(ii) $\dot{V}(\boldsymbol{x})\triangleq \mathrm{d}V(\boldsymbol{x})/\mathrm{d}t$ 为负半定；

(iii) 对任意非零 $\boldsymbol{x}_0\in\mathscr{R}^n$，$\dot{V}(\boldsymbol{\phi}(t;\boldsymbol{x}_0,0))\not\equiv 0$；

(iv) 当 $\|\boldsymbol{x}\|\to\infty$，有 $V(\boldsymbol{x})\to\infty$；

则系统的原点平衡状态 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 为大范围渐近稳定。

注　结论 5.12 相比于结论 5.11，用“$\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 负半定，且 $\dot{V}(\boldsymbol{\phi}(t;\boldsymbol{x}_0,0))\not\equiv 0$”代替“$\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 负定”。放宽后条件的直观含义是，允许系统运动过程在某些状态点上“能量”速率为零，而由 $\dot{V}(\boldsymbol{\phi}(t;\boldsymbol{x}_0,0))\not\equiv 0$ 保证运动过程能够脱离这类状态点而继续收敛到原点平衡状态。例子表明，试取的候选李雅普诺夫函数，对条件“$\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 负定”难于满足，但对条件“$\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 负半定，且 $\dot{V}(\boldsymbol{\phi}(t;\boldsymbol{x}_0,0))\not\equiv 0$”则易于满足。

例 5.2　给定连续时间非线性时不变系统：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=x_2\\ \dot{x}_2&=-x_1-(1+x_2)^2x_2\end{aligned}$$

易知，$x_1=0$ 和 $x_2=0$ 为唯一平衡状态。

首先，取候选李雅普诺夫函数 $V(\boldsymbol{x})$ 为状态 $\boldsymbol{x}$ 的二次型函数：

$$V(\boldsymbol{x})=x_1^2+x_2^2$$

可知 $V(\boldsymbol{x})$ 为正定，且 $V(\boldsymbol{0})=0$。

进而，计算得到

$$\begin{aligned}\dot{V}(\boldsymbol{x})&=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial x_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}2x_1 & 2x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_2\\ -x_1-(1+x_2)^2x_2\end{bmatrix}\\ &=-2x_2^2(1+x_2)^2\end{aligned}$$

可以看出，使 $\dot{V}(\boldsymbol{x})=0$ 的情况有“x_1 任意，$x_2=0$”和“x_1 任意，$x_2=-1$”，此外均有 $\dot{V}(\boldsymbol{x})<0$。表明，$\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 为负半定。

现在，检查 $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 是否满足条件 $\dot{V}(\boldsymbol{\phi}(t;\boldsymbol{x}_0,0))\not\equiv 0$。为此，问题归结为判断上述

使$\dot{V}(\boldsymbol{x})=0$的两种情况是否为系统受扰运动解。对“$x_1$任意，$x_2=0$”情形，表

$$\bar{\boldsymbol{\phi}}(t;\boldsymbol{x}_0,0)=[x_1(t),0]^{\mathrm{T}}$$

则由$x_2(t)\equiv 0$可导出$\dot{x}_2(t)=0$，将此代入系统方程得到

$$\dot{x}_1(t)=x_2(t)=0$$

$$0=\dot{x}_2(t)=-(1+x_2(t))^2x_2(t)-x_1(t)=-x_1(t)$$

这表明，除原点($x_1=0,x_2=0$)外，$\bar{\boldsymbol{\phi}}(t;\boldsymbol{x}_0,0)=[x_1(t),0]^{\mathrm{T}}$不是系统受扰运动解。对“$x_1$任意，$x_2=-1$”情形，表

$$\tilde{\boldsymbol{\phi}}(t;\boldsymbol{x}_0,0)=[x_1(t),-1]^{\mathrm{T}}$$

则由$x_2(t)=-1$可导出$\dot{x}_2(t)=0$，将此代入系统的方程得到

$$\dot{x}_1(t)=x_2(t)=-1$$

$$0=\dot{x}_2(t)=-(1+x_2(t))^2x_2(t)-x_1(t)=-x_1(t)$$

显然，这是一个矛盾的结果。从而意味着，$\tilde{\boldsymbol{\phi}}(t;\boldsymbol{x}_0,0)=[x_1(t),-1]^{\mathrm{T}}$同样不是系统受扰运动解。综上可知，条件$\dot{V}(\boldsymbol{\phi}(t;\boldsymbol{x}_0,0))\not\equiv 0$满足。

最后，当$\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2}\to\infty$，有

$$V(\boldsymbol{x})=\|\boldsymbol{x}\|^2=(x_1^2+x_2^2)\to\infty$$

据结论5.12知，系统原点平衡状态$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$为大范围渐近稳定。并且，还可看出，对此系统所取候选李雅普诺夫函数$V(\boldsymbol{x})$不满足结论5.11条件，但满足结论5.12条件。

5.3.2 小范围渐近稳定的判别定理

在李雅普诺夫第二方法应用中，当难以判断系统大范围渐近稳定性时，应当转而判断系统的小范围渐近稳定性。这一部分给出李雅普诺夫第二方法关于小范围渐近稳定性的一些基本定理。

对连续时间非线性时变系统，有如下一个结论。

结论5.13［小范围渐近稳定性定理］ 对连续时间非线性时变自治系统(5.34)，若可构造对$\boldsymbol{x}$和t具有连续一阶偏导数的一个标量函数$V(\boldsymbol{x},t)$，$V(\boldsymbol{0},t)=0$，以及围绕状态空间原点的一个吸引区Ω，使对所有非零状态$\boldsymbol{x}\in\Omega$和所有$t\in[t_0,\infty)$满足如下条件：

(i) $V(\boldsymbol{x},t)$为正定且有界；

(ii) $\dot{V}(\boldsymbol{x},t)\triangleq \mathrm{d}V(\boldsymbol{x},t)/\mathrm{d}t$为负定且有界；

则系统原点平衡状态$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$在$\Omega$域内为一致渐近稳定。

对连续时间非线性时不变系统，有如下两个结论。

结论5.14［小范围渐近稳定性定理］ 对连续时间非线性时不变自治系统

(5.37),若可构造对 $\boldsymbol{x}$ 具有连续一阶偏导数的一个标量函数 $V(\boldsymbol{x})$,$V(\boldsymbol{0})=0$,以及围绕状态空间原点的一个吸引区 Ω,使对所有非零状态 $\boldsymbol{x}\in\Omega$ 满足如下条件:

(i) $V(\boldsymbol{x})$为正定;

(ii) $\dot{V}(\boldsymbol{x})\triangleq \mathrm{d}V(\boldsymbol{x})/\mathrm{d}t$ 为负定;

则系统原点平衡状态 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 在 Ω 域内为渐近稳定。

结论 5.15[小范围渐近稳定性定理]　对连续时间非线性时不变自治系统(5.37),若可构造对 $\boldsymbol{x}$ 具有连续一阶偏导数的一个标量函数 $V(\boldsymbol{x})$,$V(\boldsymbol{0})=0$,以及围绕状态空间原点的一个吸引区 Ω,使对所有非零状态 $\boldsymbol{x}\in\Omega$ 满足如下条件:

(i) $V(\boldsymbol{x})$为正定;

(ii) $\dot{V}(\boldsymbol{x})\triangleq \mathrm{d}V(\boldsymbol{x})/\mathrm{d}t$ 为负半定;

(iii) 对任意非零 $\boldsymbol{x}_0\in\Omega$,$\dot{V}(\boldsymbol{\phi}(t;\boldsymbol{x}_0,0))\not\equiv 0$;

则原点平衡状态 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 在 Ω 域内为渐近稳定。

5.3.3　李雅普诺夫意义下稳定的判别定理

同样,当难以判断系统的小范围渐近稳定性时,应当转而判断李雅普诺夫意义下稳定性。这一部分给出系统为李雅普诺夫意义下稳定的一些判别准则。

对连续时间非线性时变系统,有如下的结论。

结论 5.16[稳定性定理]　对连续时间非线性时变自治系统(5.34),若可构造对 $\boldsymbol{x}$ 和 t 具有连续一阶偏导数的一个标量函数 $V(\boldsymbol{x},t)$,$V(\boldsymbol{0},t)=0$,以及围绕状态空间原点的一个吸引区 Ω,使对所有非零状态 $\boldsymbol{x}\in\Omega$ 和所有 $t\in[t_0,\infty)$满足如下条件:

(i) $V(\boldsymbol{x},t)$为正定且有界;

(ii) $\dot{V}(\boldsymbol{x},t)\triangleq \mathrm{d}V(\boldsymbol{x},t)/\mathrm{d}t$ 为负半定且有界;

则系统原点平衡状态 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 在 Ω 域内为李雅普诺夫意义下一致稳定。

对连续时间非线性时不变系统,有如下的结论。

结论 5.17[稳定性定理]　对连续时间非线性时不变自治系统(5.37),若可构造对 $\boldsymbol{x}$ 具有连续一阶偏导数的一个标量函数 $V(\boldsymbol{x})$,$V(\boldsymbol{0})=0$,以及围绕状态空间原点的一个吸引区 Ω,使对所有非零状态 $\boldsymbol{x}\in\Omega$ 满足如下条件:

(i) $V(\boldsymbol{x})$为正定;

(ii) $\dot{V}(\boldsymbol{x})\triangleq \mathrm{d}V(\boldsymbol{x})/\mathrm{d}t$ 为负半定;

则系统原点平衡状态 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 在 Ω 域内为李雅普诺夫意义下稳定。

5.3.4　不稳定的判别定理

对连续时间非线性时变系统,系统不稳定的判别准则由下述结论给出。

结论 5.18［不稳定性定理］ 对连续时间非线性时变自治系统(5.34),若可构造对 $\boldsymbol{x}$ 和 t 具有连续一阶偏导数的一个标量函数 $V(\boldsymbol{x},t)$,$V(\boldsymbol{0},t)=0$,以及围绕状态空间原点的一个区域 Ω,使对所有非零状态 $\boldsymbol{x}\in\Omega$ 和所有 $t\in[t_0,\infty)$ 满足如下条件:

(i) $V(\boldsymbol{x},t)$为正定且有界;

(ii) $\dot{V}(\boldsymbol{x},t)\triangleq \mathrm{d}V(\boldsymbol{x},t)/\mathrm{d}t$ 为正定且有界;

则系统原点平衡状态 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 为不稳定。

对连续时间非线性时不变系统,系统不稳定的判别准则由下述结论给出。

结论 5.19［不稳定性定理］ 对连续时间非线性时不变自治系统(5.37),若可构造对 $\boldsymbol{x}$ 具有连续一阶偏导数的一个标量函数 $V(\boldsymbol{x})$,$V(\boldsymbol{0})=0$,以及围绕状态空间原点的一个区域 Ω,使对所有非零状态 $\boldsymbol{x}\in\Omega$ 满足如下条件:

(i) $V(\boldsymbol{x})$为正定;

(ii) $\dot{V}(\boldsymbol{x})\triangleq \mathrm{d}V(\boldsymbol{x})/\mathrm{d}t$ 为正定;

则系统原点平衡状态 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 为不稳定。

注 由上述两个结论看出,当 $V(\boldsymbol{x},t)$或 $V(\boldsymbol{x})$和其导数 $\dot{V}(\boldsymbol{x},t)$或 $\dot{V}(\boldsymbol{x})$同号时,系统必为不稳定,理论上受扰运动轨线将会发散到无穷大。

5.4 构造李雅普诺夫函数的规则化方法

李雅普诺夫第二方法的核心是构造李雅普诺夫函数。构造的先前途径是基于经验的多次试取。本节介绍的变量梯度法和克拉索夫斯基方法属于规则化方法。虽然它们并不总是有效的,但对某些较为复杂的系统,可以提供构造李雅普诺夫函数的非试凑性途径。

5.4.1 变量梯度法

变量梯度法的特点是采用基于反向思维的构造思路。构造原则是,先按定理条件构造候选李雅普诺夫函数的导数,在此基础上定出候选李雅普诺夫函数,再判断其正定性。若判断成立则构造成功,若判断不成立则构造失败。

限于讨论连续时间非线性时不变系统,自治状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\quad t\geqslant 0 \tag{5.38}$$

其中,$\boldsymbol{x}$ 为 n 维状态,对所有 $t\in[0,\infty)$有 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$,即状态空间的原点为系统的孤立平衡状态。下面,给出变量梯度法构造系统李雅普诺夫函数的思路和方法。

1. 选取候选李雅普诺夫函数 V(x)的梯度∇V(x)

对系统(5.38),表 $\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}$,则 $V(\boldsymbol{x})$的梯度定义为

$$\nabla V(\boldsymbol{x})=\frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}\\ \vdots \\ \dfrac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial x_n}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\nabla V_1(\boldsymbol{x})\\ \vdots \\ \nabla V_n(\boldsymbol{x})\end{bmatrix} \tag{5.39}$$

进而，取梯度$\nabla V(\boldsymbol{x})$的形式为

$$\nabla V(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}\\ \vdots \\ \dfrac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial x_n}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\\ \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n\end{bmatrix} \tag{5.40}$$

其中

$$\text{待定量 } a_{ij}=\text{常数或}\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\text{ 的函数}$$

2. 按稳定性结论的条件引入对梯度∇V(x)的限制

首先，由“$\mathrm{d}V(\boldsymbol{x})/\mathrm{d}t$ 为负定”条件，即由

$$\begin{aligned}0>\frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}t}&=\frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}+\cdots+\frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial x_n}\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}\\ &=\left[\frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial x_n}\right]\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \vdots \\ \dot{x}_n\end{bmatrix}\\ &=[\nabla V(\boldsymbol{x})]^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{x}}\end{aligned} \tag{5.41}$$

导出梯度$\nabla V(\boldsymbol{x})$应满足的一个关系式：

$$\frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}t}<0\quad\Leftrightarrow\quad[\nabla V(\boldsymbol{x})]^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{x}}<0 \tag{5.42}$$

进而，基于简化计算要求，设梯度$\nabla V(\boldsymbol{x})$对应于有势场。基此，由场论知识导出梯度$\nabla V(\boldsymbol{x})$应满足的另一个关系式：

$$\begin{aligned}&\text{有势场}\quad\Leftrightarrow\quad\text{旋度 rot }\nabla V(\boldsymbol{x})=0\\ &\Leftrightarrow\quad\frac{\partial\,\nabla V_j(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}=\frac{\partial\,\nabla V_i(\boldsymbol{x})}{\partial x_j},\quad\forall\, i\neq j\end{aligned} \tag{5.43}$$

3. 确定∇V(x)的待定系数 a_{ij}(i,j= 1,2,…,n)

对梯度$\nabla V(\boldsymbol{x})$表达式(5.40)，由满足“$\mathrm{d}V(\boldsymbol{x})/\mathrm{d}t$ 为负定”条件导出的关系式(5.42)和由简化计算要求导出的关系式(5.43)，定出全部待定系数 a_{ij}，得到确知的$\nabla V(\boldsymbol{x})$。

4. 定出对应于梯度∇V(x)的候选李雅普诺夫函数 V(x)

首先，导出理论关系式：

$$V(\boldsymbol{x})=\int_0^{V(\boldsymbol{x})}\mathrm{d}V(\boldsymbol{x})=\int_0^t\frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\int_0^t[\nabla V(\boldsymbol{x})]^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^x[\nabla V(\boldsymbol{x})]^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_0^x[\nabla V_1(\boldsymbol{x}),\cdots,\nabla V_n(\boldsymbol{x})]\begin{bmatrix}\mathrm{d}x_1\\ \vdots\\ \mathrm{d}x_n\end{bmatrix}\tag{5.44}$$

进而，利用有势场特性即上述积分结果与积分路径无关，按如下方式选取积分路径：

取 $x_2=\cdots=x_n=0$，取 x_1 为 $0\to x_1$

固定 x_1，取 $x_3=\cdots=x_n=0$，取 x_2 为 $0\to x_2$

……

固定 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-2}$，取 $x_n=0$，取 x_{n-1} 为 $0\to x_{n-1}$

固定 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$，取 x_n 为 $0\to x_n$

对 $n=3$ 情形，上述积分路径如图 5.4 所示。相应地，导出 $V(\boldsymbol{x})$计算关系式：

$$V(\boldsymbol{x})=\int_0^{x_1(x_2=\cdots=x_n=0)}\nabla V_1(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_1+$$
$$\int_0^{x_2(x_1=x_1,x_3=\cdots=x_n=0)}\nabla V_2(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_2+\cdots+\tag{5.45}$$
$$\int_0^{x_n(x_1=x_1,\cdots,x_{n-1}=x_{n-1})}\nabla V_n(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_n$$

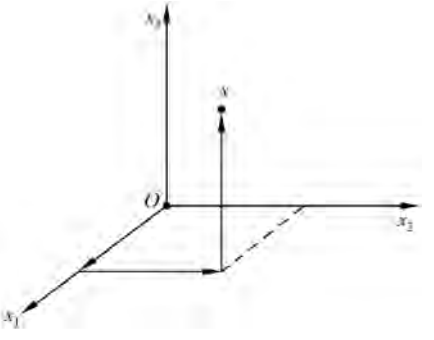

图 5.4　积分路径示例

5. 判断 V(x)计算结果的正定性

若计算结果满足 $V(\boldsymbol{x})>0$ 即为正定，则 $V(\boldsymbol{x})$是一个李雅普诺夫函数，系统平衡状态为局部或全局渐近稳定。若计算结果不满足 $V(\boldsymbol{x})>0$ 即为非正定，则表明变量梯度法对此系统不成功。

例 5.3　给定连续时间非线性时不变系统：

$$\Sigma:\dot{x}_1=x_2$$
$$\dot{x}_2=-x_1^3-x_2$$

易知，$(x_1=0,x_2=0)$为系统唯一平衡状态。

首先，由 $n=2$，取梯度$\nabla V(\boldsymbol{x})$形式为

$$\nabla V(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}\nabla V_1(\boldsymbol{x})\\ \nabla V_2(\boldsymbol{x})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2\end{bmatrix}$$

其中，不妨取 $a_{22}=2$。

进而，基于关系式(5.43)和(5.42)确定系数 a_{ij}。对此，由要求

$$\frac{\partial\nabla V_j(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}=\frac{\partial\nabla V_i(\boldsymbol{x})}{\partial x_j},\forall\, i\neq j$$

可导出

$$a_{12}=\frac{\partial\nabla V_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_2}=\frac{\partial\nabla V_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}=a_{21}$$

再由要求

$$[\nabla V(\boldsymbol{x})]^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{x}}<0$$

可导出

$$0>[a_{11}x_1+a_{12}x_2,a_{21}x_1+2x_2]\begin{bmatrix}x_2\\ -x_1^3-x_2\end{bmatrix}$$

$$=(a_{11}-a_{21}-2x_1^2)x_1x_2+(a_{12}-2)x_2^2-a_{21}x_1^4$$

由同时满足上述两个关系式要求，取系数为

$$a_{12}=a_{21}$$

$$a_{11}=a_{12}+2x_1^2$$

$$0<a_{12}<2$$

基此，定出梯度$\nabla V(\boldsymbol{x})$为

$$\nabla V(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}(a_{12}+2x_1^2)x_1+a_{12}x_2\\ a_{12}x_1+2x_2\end{bmatrix},\quad 0<a_{12}<2$$

再之，基于梯度$\nabla V(\boldsymbol{x})$结果计算 $V(\boldsymbol{x})$，得到

$$V(\boldsymbol{x})=\int_0^{x_1(x_2=0)}(a_{12}x_1+2x_1^3)\mathrm{d}x_1+\int_0^{x_2(x_1=x_1)}(a_{12}x_1+2x_2)\mathrm{d}x_2$$

$$=\frac{1}{2}x_1^4+\frac{a_{12}}{2}x_1^2+a_{12}x_1x_2+x_2^2$$

$$=\frac{1}{2}x_1^4+[x_1\quad x_2]\begin{bmatrix}\dfrac{a_{12}}{2} & \dfrac{a_{12}}{2}\\ \dfrac{a_{12}}{2} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

最后，判断 $V(\boldsymbol{x})$结果的正定性。由

$$\text{当 } 0<a_{12}<2,\text{矩阵}\begin{bmatrix}\dfrac{a_{12}}{2} & \dfrac{a_{12}}{2}\\ \dfrac{a_{12}}{2} & 1\end{bmatrix}>0\ \text{即正定}$$

可以推知，当 $0<a_{12}<2, V(\boldsymbol{x})>0$ 即正定。并且，当 $\|\boldsymbol{x}\|\to\infty$ 有 $V(\boldsymbol{x})\to\infty$。于是，可以得到结论，上述导出的 $V(\boldsymbol{x})$ 为满足渐近稳定性定理条件的一个李雅普诺夫函数，系统原点平衡状态 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 为大范围渐近稳定。

5.4.2 克拉索夫斯基方法

克拉索夫斯基方法由苏联学者克拉索夫斯基(Krasovskii)在 20 世纪 60 年代提出。方法的特点是，不是相对于状态 $\boldsymbol{x}$ 而是相对于状态导数 $\dot{\boldsymbol{x}}$ 构造候选李雅普诺夫函数。

考虑连续时间非线性时不变系统：

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\quad t\geqslant 0 \tag{5.46}$$

其中，$\boldsymbol{x}$ 为 n 维状态，对所有 $t\in[0,\infty)$ 有 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$，即状态空间原点 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 为系统孤立平衡状态。再表 $\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=[f_1(\boldsymbol{x}),\cdots,f_n(\boldsymbol{x})]^{\mathrm{T}}$，并进而定出系统的雅可比(Jacobi)矩阵为

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial f_n(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n(\boldsymbol{x})}{\partial x_n}\end{bmatrix} \tag{5.47}$$

下面给出克拉索夫斯基定理的两个结论。

结论 5.20［克拉索夫斯基定理］ 对连续时间非线性时不变系统(5.46)和围绕原点平衡状态的一个域 $\Omega\subset\mathcal{R}^n$，原点 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 为域 Ω 内唯一平衡状态，若 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})<0$ 即为负定，则系统平衡状态 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 为域 Ω 内渐近稳定，且 $V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 为一个李雅普诺夫函数。进而，若原点 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 为状态空间 $\mathcal{R}^n$ 内唯一平衡状态，且当 $\|\boldsymbol{x}\|\to\infty$ 有 $\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\to\infty$，则系统平衡状态 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 为大范围渐近稳定。

结论 5.21［克拉索夫斯基定理］ 对连续时间线性时不变系统 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异，若 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$ 为负定，则原点平衡状态 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 为大范围渐近稳定。

例 5.4 给定连续时间非线性时不变系统：

$$\Sigma:\ \dot{x}_1=-3x_1+x_2$$

$$\dot{x}_2=2x_1-x_2-x_2^3$$

易知，$(x_1=0,x_2=0)$ 为状态空间 $\mathcal{R}^2$ 内唯一平衡状态。

首先，计算定出：

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_2}\\ \dfrac{\partial f_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 2 & -1-3x_2^2\end{bmatrix}$$

和

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=-\begin{bmatrix}6 & -3\\ -3 & 2+6x_2^2\end{bmatrix}$$

进而，由判断结果

$$\text{对}\begin{bmatrix}6 & -3\\ -3 & 2+6x_2^2\end{bmatrix}\text{，有 }\Delta_1=6>0,\Delta_2=36x_2^2+3>0,\begin{bmatrix}6 & -3\\ -3 & 2+6x_2^2\end{bmatrix}>0$$

可知

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=-\begin{bmatrix}6 & -3\\ -3 & 2+6x_2^2\end{bmatrix}<0$$

同时，当 $\|\boldsymbol{x}\|\to\infty$，有

$$\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=(-3x_1+x_2)^2+(2x_1-x_2-x_2^3)^2\to\infty$$

基于上述结果可得结论，系统平衡状态 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 为大范围渐近稳定，且相应的一个李雅普诺夫函数为

$$\begin{aligned}V(\boldsymbol{x})&=\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=(-3x_1+x_2)^2+(2x_1-x_2-x_2^3)^2\\&=13x_1^2-10x_1x_2-4x_1x_2^3+2x_2^2+2x_2^4+x_2^6\end{aligned}$$

显然，上述形式的李雅普诺夫函数是采用经验方法所难以找到的，这从一个方面反映了规则化方法的效果。

5.5　连续时间线性系统的状态运动稳定性判据

本节基于李雅普诺夫第二方法的概念和结果，就线性时不变系统和线性时变系统，讨论受扰运动即状态零输入响应的稳定性，给出判别系统运动稳定性的一些常用判据。

5.5.1　线性时不变系统的稳定判据

考虑连续时间线性时不变系统，自治状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\quad \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0,\quad t\geqslant 0 \tag{5.48}$$

其中，$\boldsymbol{x}$ 为 n 维状态，状态空间原点即 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 为系统的一个平衡状态。

首先给出基于特征值的线性时不变系统稳定性判据。

结论 5.22［特征值判据］　对连续时间线性时不变系统(5.48)，原点平衡状态即 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是李雅普诺夫意义下稳定的充分必要条件为，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值均具有非正实部即实部为零或负，且零实部特征值只能为 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式的单根。

结论 5.23［特征值判据］　对连续时间线性时不变系统(5.48)，原点平衡状态 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是渐近稳定的充分必要条件为，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值均具有负实部。

注　可以看出，上述结论中的渐近稳定性等同于 5.1 节中的内部稳定性。

进而，基于李雅普诺夫第二方法，给出线性时不变系统的李雅普诺夫稳定性判据。

结论 5.24［李雅普诺夫判据］ 对 n 维连续时间线性时不变系统(5.48)，原点平衡状态 $\boldsymbol{x}_e=\boldsymbol{0}$ 是渐近稳定的充分必要条件为，对任给一个 $n\times n$ 正定对称矩阵 $\boldsymbol{Q}$，李雅普诺夫方程

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{Q} \tag{5.49}$$

有唯一 $n\times n$ 正定对称解阵 $\boldsymbol{P}$。

证 先证充分性。已知 $n\times n$ 解阵 $\boldsymbol{P}$ 正定，欲证 $\boldsymbol{x}_e=\boldsymbol{0}$ 渐近稳定。取候选李雅普诺夫函数 $V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$，且由 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}>0$ 知 $V(\boldsymbol{x})$正定。进而，可得

$$\begin{aligned}\dot{V}(\boldsymbol{x})&=\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{x}}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})\\&=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}\end{aligned} \tag{5.50}$$

且由 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}>0$ 知 $\dot{V}(\boldsymbol{x})$负定。据李雅普诺夫主稳定性定理，$\boldsymbol{x}_e=\boldsymbol{0}$ 为渐近稳定。

再证必要性。已知 $\boldsymbol{x}_e=\boldsymbol{0}$ 渐近稳定，欲证 $n\times n$ 解阵 $\boldsymbol{P}$ 正定。考虑矩阵方程：

$$\dot{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{X}(0)=\boldsymbol{Q},\quad t\geqslant 0 \tag{5.51}$$

易知，$n\times n$ 解矩阵 $\boldsymbol{X}$ 为

$$\boldsymbol{X}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}t}\boldsymbol{Q}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t},\quad t\geqslant 0 \tag{5.52}$$

对式(5.51)由 $t=0$ 至 $t=\infty$进行积分，可得

$$\boldsymbol{X}(\infty)-\boldsymbol{X}(0)=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\left(\int_0^{\infty}\boldsymbol{X}(t)\mathrm{d}t\right)+\left(\int_0^{\infty}\boldsymbol{X}(t)\mathrm{d}t\right)\boldsymbol{A} \tag{5.53}$$

且由系统为渐近稳定知，当 $t\to\infty$ 有 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\to\boldsymbol{0}$，从而由(5.52)导出 $\boldsymbol{X}(\infty)=\boldsymbol{0}$。基此，并考虑到 $\boldsymbol{X}(0)=\boldsymbol{Q}$，再表 $\boldsymbol{P}=\int_0^{\infty}\boldsymbol{X}(t)\mathrm{d}t$，可将式(5.53) 进而表为

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{Q} \tag{5.54}$$

这就表明，$\boldsymbol{P}=\int_0^{\infty}\boldsymbol{X}(t)\mathrm{d}t$ 为李雅普诺夫方程解阵。且由 $\boldsymbol{X}(t)$ 存在唯一和 $\boldsymbol{X}(\infty)=\boldsymbol{0}$ 可知，$\boldsymbol{P}=\int_0^{\infty}\boldsymbol{X}(t)\mathrm{d}t$ 存在唯一。而由

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\int_0^{\infty}[\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}t}\boldsymbol{Q}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}]^{\mathrm{T}}\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}t}\boldsymbol{Q}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\mathrm{d}t=\boldsymbol{P} \tag{5.55}$$

可知 $\boldsymbol{P}=\int_0^{\infty}\boldsymbol{X}(t)\mathrm{d}t$ 为对称。再对任意非零 $\boldsymbol{x}_0\in\mathscr{R}^n$，有

$$\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}_0=\int_0^{\infty}(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}_0)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}_0)\mathrm{d}t \tag{5.56}$$

其中，可表正定 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}$，$\boldsymbol{N}$ 为非奇异。基此，由(5.56)可进而导出：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}_0&=\int_0^{\infty}(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}_0)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}_0)\mathrm{d}t\\&=\int_0^{\infty}\left\|\boldsymbol{N}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}_0\right\|^2\mathrm{d}t>0\end{aligned} \tag{5.57}$$

从而，证得解阵 $\boldsymbol{P}$ 为唯一正定。证明完成。

进一步，对李雅普诺夫判据给出如下的几点说明。

1. 矩阵 Q 的选取

对李雅普诺夫判据，矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 在保证正定前提下可任意选取，且判断结果与 $\boldsymbol{Q}$ 的不同选取无关。

2. 李雅普诺夫判据的实质

从系统特征值分布角度，李雅普诺夫判据给出了使矩阵 $\boldsymbol{A}$ 所有特征值均具有负实部即均分布于左半开 s 平面的充分必要条件。基此理解，提供了可把李雅普诺夫判据推广为更一般形式的可能性。

3. 李雅普诺夫判据的应用

李雅普诺夫判据应用中的困难主要在于李雅普诺夫方程的求解。但是，随着基本软件如 MATLAB 等的日益普及，求解李雅普诺夫方程的任务完全可由计算机来完成。

例 5.5　给定连续时间线性时不变系统：

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & -3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

为简化计算过程，取 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{I}_2$。进而，由李雅普诺夫方程

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_1 & p_3\\ p_3 & p_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}p_1 & p_3\\ p_3 & p_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=-\boldsymbol{Q}$$

导出：

$$\begin{aligned}-2p_1+0p_2+4p_3&=-1\\ 0p_1-6p_2+2p_3&=-1\\ p_1+2p_2-4p_3&=0\end{aligned}$$

基此，按代数方程组求解方法，定出：

$$\begin{bmatrix}p_1\\ p_2\\ p_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 4\\ 0 & -6 & 2\\ 1 & 2 & -4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-1\\ -1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{5}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{3}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ -1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{7}{4}\\ \frac{3}{8}\\ \frac{5}{8}\end{bmatrix}$$

从而，导出李雅普诺夫方程解阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\frac{7}{4} & \frac{5}{8}\\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8}\end{bmatrix}>0$$

且由 $\boldsymbol{P}$ 为正定知，系统为渐近稳定。

下面给出李雅普诺夫判据的推广形式。

结论 5.25［李雅普诺夫判据推广形式］ 对 n 维连续时间线性时不变系统(5.48)和任给实数 $\sigma \geqslant 0$，令矩阵 $\boldsymbol{A}$ 特征值为 $\lambda_i(\boldsymbol{A})$，$i=1,2,\cdots,n$，则系统所有特征值均位于 s 平面的直线 $-\sigma+\mathrm{j}\omega$ 左半开平面上，即成立

$$\mathrm{Re}\lambda_i(\boldsymbol{A}) < -\sigma, \quad i=1,2,\cdots,n \tag{5.58}$$

的充分必要条件为，对任给一个 $n\times n$ 正定对称矩阵 $\boldsymbol{Q}$，推广李雅普诺夫方程

$$2\sigma\boldsymbol{P}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{Q} \tag{5.59}$$

有唯一正定解阵 $\boldsymbol{P}$。

5.5.2 线性时变系统的稳定判据

现在，转而讨论连续时间线性时变系统，自治状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0, \quad t\in[t_0,\infty), \quad t_0\in[0,\infty) \tag{5.60}$$

其中，$\boldsymbol{x}$ 为 n 维状态，$\boldsymbol{A}(t)$ 满足解存在唯一性条件，$\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}}=\boldsymbol{0}$ 为系统的一个平衡状态。一般，除零平衡状态 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}}=\boldsymbol{0}$ 外，还可有非零平衡状态 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}}$。

对线性时变系统，同样可以采用两种方法判断平衡状态的稳定性，即基于状态转移矩阵的判断方法和基于李雅普诺夫判据的判断方法。

结论 5.26［基于状态转移矩阵的判据］ 对连续时间线性时变系统(5.60)，表 $\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$ 为系统状态转移矩阵，则系统原点平衡状态 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}}=\boldsymbol{0}$ 在时刻 t_0 是李雅普诺夫意义下稳定的充分必要条件为，存在依赖于 t_0 的一个实数 $\beta(t_0)>0$，使下式成立：

$$\|\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\| \leqslant \beta(t_0) < \infty, \quad \forall t \geqslant t_0 \tag{5.61}$$

进一步，当且仅当对所有 t_0 都存在独立实数 $\beta>0$ 使(5.61)成立，系统原点平衡状态 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}}=\boldsymbol{0}$ 为李亚普诺夫意义下一致稳定。

结论 5.27［基于状态转移矩阵的判据］ 对连续时间线性时变系统(5.60)，表 $\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$ 为系统状态转移矩阵，则系统唯一平衡状态 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}}=\boldsymbol{0}$ 在时刻 t_0 是渐近稳定的充分必要条件为，存在依赖于 t_0 的一个实数 $\beta(t_0)>0$，使同时成立：

$$\begin{aligned} &\|\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\| \leqslant \beta(t_0) < \infty, \quad \forall t \geqslant t_0 \\ &\lim_{t\to\infty}\|\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\| = 0 \end{aligned} \tag{5.62}$$

进一步，当且仅当对所有 $t_0\in[0,\infty)$ 都存在独立实数 $\beta_1>0$ 和 $\beta_2>0$，使下式成立：

$$\|\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\| \leqslant \beta_1 \mathrm{e}^{-\beta_2(t-t_0)} \tag{5.63}$$

系统原点平衡状态 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}}=\boldsymbol{0}$ 为一致渐近稳定。

结论 5.28［李雅普诺夫判据］ 对 n 维连续时间线性时变系统(5.60)，设 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}}=\boldsymbol{0}$ 为系统唯一平衡状态，$n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}(t)$ 的元均为分段连续的一致有界实函数，则原点平衡状态 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{e}}=\boldsymbol{0}$ 一致渐近稳定的充分必要条件为，对任给的一个实对称、一致有界、一致正定的 $n\times n$ 时变矩阵 $\boldsymbol{Q}(t)$，即存在两个实数 $\beta_1>0$ 和 $\beta_2>0$ 使

$$0<\beta_1\boldsymbol{I}\leqslant\boldsymbol{Q}(t)\leqslant\beta_2\boldsymbol{I}, \quad \forall t\geqslant t_0 \tag{5.64}$$

李雅普诺夫方程

$$-\dot{\boldsymbol{P}}(t)=\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{A}(t)+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}(t)+\boldsymbol{Q}(t),\quad \forall t\geqslant t_0 \tag{5.65}$$

的 $n\times n$ 解阵 $\boldsymbol{P}(t)$ 为实对称、一致有界和一致正定，即存在两个实数 $\alpha_1>0$ 和 $\alpha_2>0$ 使

$$0<\alpha_1\boldsymbol{I}\leqslant\boldsymbol{P}(t)\leqslant\alpha_2\boldsymbol{I},\quad \forall t\geqslant t_0 \tag{5.66}$$

证　由李雅普诺夫第二方法主稳定性定理可导出本结论。推证过程略去。

5.6　连续时间线性时不变系统稳定自由运动的衰减性能的估计

本节针对渐近稳定的线性时不变系统，基于李雅普诺夫判据讨论系统自由运动衰减性能的估计问题，特点是可在不必求解系统自由运动解即零输入响应解情形下直接估计运动过程的衰减性能。

5.6.1　衰减系数

这一部分中，先来引入用以度量自由运动衰减性能的衰减系数。考虑渐近稳定的连续时间线性时不变系统，自治状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\quad \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0,\quad t\geqslant 0 \tag{5.67}$$

其中，$\boldsymbol{x}$ 为 n 维状态，状态空间原点即 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 为系统唯一平衡状态。系统为渐近稳定意味着，系统零输入响应即由任意初始状态 $\boldsymbol{x}_0\in\mathcal{R}^n$ 出发的自由运动轨线 $\boldsymbol{\phi}(t;\boldsymbol{x}_0,0)$，将随时间 t 的增加最终趋于状态空间原点即 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$。并且，伴随着运动最终收敛于 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，能量相应地最终衰减到零。

定义 5.9［衰减系数］　对渐近稳定的连续时间线性时不变自治系统(5.67)，用以表征自由运动衰减性能的衰减系数定义为如下的一个正实数：

$$\eta=-\frac{\dot{V}(\boldsymbol{x})}{V(\boldsymbol{x})} \tag{5.68}$$

其中，$V(\boldsymbol{x})$ 为系统的一个李雅普诺夫函数，$\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 为 $V(\boldsymbol{x})$ 对时间变量 t 的导数。

下面，进一步对衰减系数作如下几点说明。

1. 衰减系数对运动状态的依赖性

由定义式(5.68)可以看出，在一般情形下，衰减系数是系统自由运动状态 $\boldsymbol{x}$ 的一个标量函数，记之为 $\eta(\boldsymbol{x})$。

2. 衰减系数定义的合理性

在定义式(5.68)中，若将正定 $V(\boldsymbol{x})$ 视为“能量”，负定 $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 视为“能量下降速

率”，则衰减系数 $\eta(\boldsymbol{x})$ 的量纲就为 1/秒。这从一个角度说明衰减系数定义在物理上的合理性。

3. 衰减系数的属性

从定义式(5.68)看出，“能量”$V(\boldsymbol{x})$ 愈大，“能量下降速率”$\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 的值愈小，则 $\eta(\boldsymbol{x})$ 愈小，对应于运动衰减愈慢；“能量”$V(\boldsymbol{x})$ 愈小，“能量下降速率”$\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 的值愈大，则 $\eta(\boldsymbol{x})$ 愈大，对应于运动衰减愈快。因此，由 $\eta(\boldsymbol{x})$ 的大小可直观地来表征运动衰减的快慢。

4. 最小衰减系数 $\eta_{\min}$

考虑到衰减系数 $\eta(\boldsymbol{x})$ 为状态 $\boldsymbol{x}$ 的标量函数，在系统自由运动衰减性能的分析中，直接运用 $\eta(\boldsymbol{x})$ 无论对于计算还是估计都将是不方便的。据此，从兼顾计算上简单性和估计上直观性角度，下面将采用最小衰减系数 $\eta_{\min}$ 作为反映运动衰减快慢的一个指标。

5.6.2 计算最小衰减系数 $\eta_{\min}$ 的关系式

对渐近稳定的 n 维连续时间线性时不变自治系统(5.67)，李雅普诺夫判据指出，对任给一个 $n\times n$ 正定对称实常阵 $\boldsymbol{Q}$，李雅普诺夫方程

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{Q} \tag{5.69}$$

的 $n\times n$ 解阵 $\boldsymbol{P}$ 存在唯一且为对称正定。并且，基此组成的李雅普诺夫函数 $V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$ 为正定，导数 $\dot{V}(\boldsymbol{x})=-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}$ 为负定。

定义 5.10［最小衰减系数 $\eta_{\min}$］ 对渐近稳定的连续时间线性时不变自治系统(5.67)，自由运动的最小衰减系数 $\eta_{\min}$ 定义为

$$\eta_{\min}=\min_{x}\left[-\frac{\dot{V}(\boldsymbol{x})}{V(\boldsymbol{x})}\right] \tag{5.70}$$

并且，基于分析上的方便性，进一步将其规范化为

$$\begin{aligned}\eta_{\min}&=\min_{x}\left[-\frac{\dot{V}(\boldsymbol{x})}{V(\boldsymbol{x})}\right]=\min_{x}\left[\frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}}\right]\\&=\min_{x}\{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}=1\}\end{aligned} \tag{5.71}$$

注 定义式(5.71)的几何含义为，最小衰减系数 $\eta_{\min}$ 就等于状态空间中单位超球面即 $V(\boldsymbol{x})=1$ 超球面上 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}$ 的极小值。

下面，给出计算最小衰减系数 $\eta_{\min}$ 的一个关系式。

结论 5.29［计算 $\eta_{\min}$ 关系式］ 对 n 维渐近稳定的连续时间线性时不变自治系统(5.67)，给定 $n\times n$ 正定矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和相应李雅普诺夫方程的 $n\times n$ 正定解阵 $\boldsymbol{P}$，则可

导出计算 $\eta_{\min}$ 的关系式为

$$\eta_{\min}=\lambda_{\min}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}^{-1})=\lambda_{\min}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Q}) \tag{5.72}$$

其中，$\lambda_{\min}(\cdot)$表示所属矩阵的最小特征值。

5.6.3　自由运动衰减快慢的估计

基于上述分析进而讨论渐近稳定线性时不变系统的零输入响应衰减快慢估计。

结论 5.30［$V(\boldsymbol{x})$衰减快慢估计］　对渐近稳定线性时不变自治系统(5.67)，给定 $n\times n$ 正定矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和相应李雅普诺夫方程的 $n\times n$ 正定解阵 $\boldsymbol{P}$，$V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$，则可导出估计 $V(\boldsymbol{x})$衰减快慢的关系式为

$$V(\boldsymbol{x})\leqslant V(\boldsymbol{x}_0)\mathrm{e}^{-\lambda_{\min}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Q})t} \tag{5.73}$$

或

$$V(\boldsymbol{x})\leqslant V(\boldsymbol{x}_0)\mathrm{e}^{-\lambda_{\min}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}^{-1})t} \tag{5.74}$$

其中，$\boldsymbol{x}_0\in\mathscr{R}^n$ 为任意非零初始状态。

结论 5.31［$V(\boldsymbol{x})$衰减快慢估计］　对渐近稳定的连续时间线性时不变自治系统(5.67)，给定 $n\times n$ 正定矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和相应李雅普诺夫方程的 $n\times n$ 正定解阵 $\boldsymbol{P}$，$V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$，则可采用 $\lambda_{\min}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Q})$或 $\lambda_{\min}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}^{-1})$来表征 $V(\boldsymbol{x})$的衰减快慢，且 $\lambda_{\min}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Q})$或$\lambda_{\min}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}^{-1})$愈大则衰减愈快。

结论 5.32［自由运动衰减快慢估计］　对渐近稳定线性时不变自治系统(5.67)，给定 $n\times n$ 正定矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和相应李雅普诺夫方程的 $n\times n$ 正定解阵 $\boldsymbol{P}$，则可采用 $\lambda_{\min}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Q})$或 $\lambda_{\min}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}^{-1})$来表征自由运动的衰减快慢，且 $\lambda_{\min}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Q})$或 $\lambda_{\min}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}^{-1})$愈大则衰减愈快。

5.7　离散时间系统状态运动的稳定性及其判据

本节转而讨论离散时间系统的稳定性及其判据。对象限于非线性时不变系统和线性时不变系统。内容包括李雅普诺夫主稳定性定理、李雅普诺夫判据和特征值判据等。考虑到结果推导思路类同于连续时间系统的对应结论，本节讨论中将只限于给出结论。

5.7.1　离散时间非线性时不变系统的李雅普诺夫主稳定性定理

考虑离散时间非线性时不变系统，自治状态方程为

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(k)),\quad \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0,\quad k=0,1,2,\cdots \tag{5.75}$$

其中，$\boldsymbol{x}$ 为 n 维状态，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$ 即状态空间原点 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 为系统平衡状态。

结论 5.33［大范围渐近稳定判据］　对离散时间非线性时不变自治系统(5.75)，

若存在一个相对于离散状态 $\boldsymbol{x}(k)$ 的标量函数 $V(\boldsymbol{x}(k))$，使对任意 $\boldsymbol{x}(k)\in\mathcal{R}^n$ 满足：

(i) $V(\boldsymbol{x}(k))$ 为正定；

(ii) 表 $\Delta V(\boldsymbol{x}(k))=V(\boldsymbol{x}(k+1))-V(\boldsymbol{x}(k))$，$\Delta V(\boldsymbol{x}(k))$ 为负定；

(iii) 当 $\|\boldsymbol{x}(k)\|\to\infty$，有 $V(\boldsymbol{x}(k))\to\infty$；

则原点平衡状态即 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 为大范围渐近稳定。

注 从上述结论的应用中可以发现，结论中条件(ii)的保守性会使不少系统导致判断失败。对此，同样可以通过对此条件的放宽，以得到较少保守性的李雅普诺夫主稳定性定理。

结论 5.34［大范围渐近稳定判据］ 对离散时间非线性时不变自治系统(5.75)，若存在一个相对于离散状态 $\boldsymbol{x}(k)$ 的标量函数 $V(\boldsymbol{x}(k))$，使对任意 $\boldsymbol{x}(k)\in\mathcal{R}^n$ 满足：

(i) $V(\boldsymbol{x}(k))$ 为正定；

(ii) 表 $\Delta V(\boldsymbol{x}(k))=V(\boldsymbol{x}(k+1))-V(\boldsymbol{x}(k))$，$\Delta V(x(k))$ 为负半定；

(iii) 对由任意非零初始状态 $\boldsymbol{x}(0)\in\mathcal{R}^n$ 确定的所有自由运动即(5.75)所有解 $\boldsymbol{x}(k)$ 的轨线，$\Delta V(\boldsymbol{x}(k))$ 不恒为零；

(iv) 当 $\|\boldsymbol{x}(k)\|\to\infty$，有 $V(\boldsymbol{x}(k))\to\infty$；

则原点平衡状态即 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 为大范围渐近稳定。

基于上述主稳定性定理，还可导出对离散时间系统的一个含义直观和应用方便的稳定性判据。

结论 5.35［大范围渐近稳定判据］ 对离散时间非线性时不变系统(5.75)，设 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$ 即状态空间原点 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 为系统平衡状态，若 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(k))$ 为收敛即对 $\boldsymbol{x}(k)\neq\boldsymbol{0}$ 有

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(k))\|<\|\boldsymbol{x}(k)\| \tag{5.76}$$

则原点平衡状态即 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 为大范围渐近稳定。

证 对给定离散时间系统，取候选李雅普诺夫函数为

$$V(\boldsymbol{x}(k))=\|\boldsymbol{x}(k)\| \tag{5.77}$$

易知，$V(\boldsymbol{x}(k))$ 为正定。进而，导出：

$$\begin{aligned}\Delta V(\boldsymbol{x}(k))&=V(\boldsymbol{x}(k+1))-V(\boldsymbol{x}(k))=\|\boldsymbol{x}(k+1)\|-\|\boldsymbol{x}(k)\|\\&=\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(k))\|-\|\boldsymbol{x}(k)\|\end{aligned} \tag{5.78}$$

运用式(5.76)，可知 $\Delta V(\boldsymbol{x}(k))$ 为负定。并且，当 $\|\boldsymbol{x}(k)\|\to\infty$，有 $V(\boldsymbol{x}(k))\to\infty$。据结论 5.33，原点平衡状态即 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 为大范围渐近稳定。

5.7.2 离散时间线性时不变系统的稳定判据

考虑离散时间线性时不变系统，自治状态方程为

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(k),\quad \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0,\quad k=0,1,2,\cdots \tag{5.79}$$

其中，$\boldsymbol{x}$ 为 n 维状态，$\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}_e=\boldsymbol{0}$ 的解状态 $\boldsymbol{x}_e$ 为系统平衡状态。若矩阵 $\boldsymbol{G}$ 为奇异，则除

原点平衡状态即 $\boldsymbol{x}_e=\boldsymbol{0}$ 还有非零平衡状态；若矩阵 $\boldsymbol{G}$ 为非奇异，则只有唯一平衡状态 $\boldsymbol{x}_e=\boldsymbol{0}$。

下面，给出线性时不变系统的平衡状态稳定性的相应判据。

结论 5.36［特征值判据］ 对离散时间线性时不变自治系统(5.79)，原点平衡状态即 $\boldsymbol{x}_e=\boldsymbol{0}$ 是李雅普诺夫意义下稳定的充分必要条件为，$\boldsymbol{G}$ 的全部特征值 $\lambda_i(\boldsymbol{G})$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 的幅值均等于或小于 1，且幅值等于 1 的特征值只能为 $\boldsymbol{G}$ 的最小多项式的单根。

结论 5.37［特征值判据］ 对离散时间线性时不变自治系统(5.79)，原点平衡状态即 $\boldsymbol{x}_e=\boldsymbol{0}$ 是渐近稳定的充分必要条件为，$\boldsymbol{G}$ 的全部特征值 $\lambda_i(\boldsymbol{G})(i=1,2,\cdots,n)$ 的幅值均小于 1。

结论 5.38［李雅普诺夫判据］ 对 n 维离散时间线性时不变自治系统(5.79)，原点平衡状态即 $\boldsymbol{x}_e=\boldsymbol{0}$ 渐近稳定，即 $\boldsymbol{G}$ 的全部特征值 $\lambda_i(\boldsymbol{G})(i=1,2,\cdots,n)$ 的幅值均小于 1，当且仅当对任一给定 $n\times n$ 正定对称矩阵 $\boldsymbol{Q}$，离散型李雅普诺夫方程

$$\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{G}-\boldsymbol{P}=-\boldsymbol{Q} \tag{5.80}$$

有唯一 $n\times n$ 正定对称解阵 $\boldsymbol{P}$。

结论 5.39［扩展李雅普诺夫判据］ 对 n 维离散时间线性时不变自治系统(5.79)，原点平衡状态即 $\boldsymbol{x}_e=\boldsymbol{0}$ 以实数 $\sigma>0$ 为幂指数稳定，即 $\boldsymbol{G}$ 的特征值满足：

$$|\lambda_i(\boldsymbol{G})|<\sigma,\quad 0\leqslant\sigma\leqslant 1,\quad i=1,2,\cdots,n \tag{5.81}$$

当且仅当对任一给定 $n\times n$ 正定对称矩阵 $\boldsymbol{Q}$，扩展离散型李雅普诺夫方程

$$(1/\sigma)^2\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{G}-\boldsymbol{P}=-\boldsymbol{Q} \tag{5.82}$$

有唯一 $n\times n$ 正定对称解阵 $\boldsymbol{P}$。

5.8　小结和评述

(1) 本章的定位。本章是对系统稳定性问题的一个较为系统的讨论。稳定性是表征系统运动行为的一类重要结构特性。本章的内容偏重于李雅普诺夫第二方法。第二方法已成为现今系统控制理论中研究稳定性问题的基本理论工具。

(2) 两类稳定性。系统稳定性可区分为外部稳定性和内部稳定性。外部稳定性基于系统输入输出描述，属于有界输入有界输出稳定性，简称 BIBO 稳定性。内部稳定性基于系统状态空间描述，属于系统自由运动的稳定性，即为李雅普诺夫意义稳定性。对连续时间线性时不变系统，BIBO 稳定充分必要条件为传递函数矩阵所有极点均具有负实部，渐近稳定充分必要条件为系统特征值均具有负实部。若系统为联合完全能控和完全能观测，则渐近稳定性和 BIBO 稳定性为等价。

(3) 李雅普诺夫主稳定性定理。主稳定性定理给出系统大范围渐近稳定的充分性判据。判据归结为构造一个候选李雅普诺夫函数 $V(\boldsymbol{x})$，使 $V(\boldsymbol{x})$ 正定，$\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 负定或 $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 负半定并附加其他条件，且当 $\|\boldsymbol{x}\|\to\infty$ 有 $V(\boldsymbol{x})\to\infty$。主稳定性定理同时适

用于线性系统和非线性系统及时变系统和时不变系统。

(4) 李雅普诺夫函数 $V(\boldsymbol{x})$的构造方法。对于较为简单的系统,可采用规则化方法如变量梯度法和克拉索夫斯基方法构造 $V(\boldsymbol{x})$。对于较为复杂的系统,构造 $V(\boldsymbol{x})$的主要途径至今仍限于基于经验的试凑性方法。

(5) 线性时不变系统的李雅普诺夫判据。李雅普诺夫判据给出线性时不变系统渐近稳定的充分必要性判据。对连续时间情形,归结为对系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和任给正定矩阵 $\boldsymbol{Q}$,求解方程 $\boldsymbol{PA}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}=-\boldsymbol{Q}$ 并判别解阵 $\boldsymbol{P}$ 正定性。对离散时间情形,归结为对系统矩阵 $\boldsymbol{G}$ 和任给正定矩阵 $\boldsymbol{Q}$,求解方程 $\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PG}-\boldsymbol{P}=-\boldsymbol{Q}$ 并判别解阵 $\boldsymbol{P}$ 正定性。李雅普诺夫判据的意义主要在于系统分析和系统综合中的应用。

(6) 稳定性的鲁棒分析。鲁棒分析讨论线性时不变系统在参数摄动下稳定性的判别准则和保持条件。这是出现于稳定性研究领域的一个新生长点。研究途径包括系统矩阵范数分析和特征多项式区间分析。在矩阵范数分析方法中,针对系统矩阵的加性或乘性摄动和通过引入相应匹配条件,建立使系统保持稳定的条件。在特征多项式区间分析中,着重于讨论多项式系数区间摄动下保持稳定的有限或最小检验问题,其中最为基本的结果是哈列托诺夫定理。本章没有涉及稳定性鲁棒分析问题,有兴趣读者可参看有关文献。

(7) 绝对稳定性和超稳定性。这是李雅普诺夫第二方法基础上提出的两类特殊稳定性问题。绝对稳定性研究对象为一类单输入单输出时不变系统,正向通道环节为线性时不变系统,反馈通道环节为非线性时不变系统。绝对稳定性给出当非线性环节特性为位于一、三象限扇形区域内的任意形状曲线时系统为渐近稳定的条件。超稳定性属于线性时不变系统在输入输出乘积积分受限下的一类稳定性。超稳定性的基本结论为,系统超稳定等价于系统传递函数矩阵为正实,系统超渐近稳定等价于系统传递函数矩阵为严正实。本章没有涉及绝对稳定性和超稳定性问题,有兴趣读者可参看有关文献。

习题

5.1 给定一个单输入单输出连续时间线性时不变系统为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 250 & 0 & -5\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 10\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}-25 & 5 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

试判断:(i) 系统是否为渐近稳定;(ii) 系统是否为 BIBO 稳定。

5.2 给定一个二阶连续时间非线性时不变系统为

$$\dot{x}_1=x_2$$

$$\dot{x}_2=-\sin x_1-x_2$$

试：(i) 定出系统所有平衡状态；(ii)定出各平衡点处线性化状态方程，并分别判断是否为渐近稳定。

5.3　对下列连续时间非线性时不变系统，判断原点平衡状态即 $\boldsymbol{x}_e=\boldsymbol{0}$ 是否为大范围渐近稳定：

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-x_1-x_1^2x_2\end{cases}$$

5.4　对下列连续时间非线性时不变系统，判断原点平衡状态即 $\boldsymbol{x}_e=\boldsymbol{0}$ 是否为大范围渐近稳定：

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-x_1^3-x_2\end{cases}$$

5.5　对下列连续时间线性时变系统，判断原点平衡状态即 $\boldsymbol{x}_e=\boldsymbol{0}$ 是否为大范围渐近稳定：

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\dfrac{1}{t+1} & -10\end{bmatrix}\boldsymbol{x},\quad t\geqslant 0$$

(提示：取 $V(\boldsymbol{x},t)=\dfrac{1}{2}[x_1^2+(t+1)x_2^2]$)。

5.6　给定连续时间非线性时不变自治系统 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$，再表系统的雅可比(Jacobi)矩阵为

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\triangleq\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial f_n(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n(\boldsymbol{x})}{\partial x_n}\end{bmatrix}$$

试证明：若 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})$ 为负定，则系统原点平衡状态即 $\boldsymbol{x}_e=\boldsymbol{0}$ 为大范围渐近稳定。

5.7　利用上题给出的结论，判断下列连续时间非线性时不变系统是否为大范围渐近稳定：

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-3x_1+x_2\\ \dot{x}_2=x_1-x_2-x_2^3\end{cases}$$

5.8　给定二阶连续时间线性时不变自治系统为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}\triangleq\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

试用李雅普诺夫判据证明：系统原点平衡状态 $\boldsymbol{x}_e=\boldsymbol{0}$ 是大范围渐近稳定的条件为

$$\det\boldsymbol{A}>0,\quad a_{11}+a_{22}<0$$

(提示：李雅普诺夫方程中取 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{I}$)。

5.9　对下列连续时间线性时不变系统，试用李雅普诺夫判据判断是否为大范

围渐近稳定：

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & -3\end{bmatrix}\boldsymbol{x},\quad \boldsymbol{Q}=\boldsymbol{I}$$

5.10 给定渐近稳定的单输入单输出连续时间线性时不变系统为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}u,\quad y=\boldsymbol{c}\boldsymbol{x},\quad \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$$

其中 $u(t)\equiv 0$。再表 $\boldsymbol{P}$ 为李雅普诺夫方程

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}=-\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}$$

的正定对称解阵。试证明：

$$\int_0^{\infty} y^2(t)\mathrm{d}t=\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}_0$$

5.11 给定完全能控的连续时间线性时不变系统为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u},\quad \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$$

其中，取 $\boldsymbol{u}=-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}t}\boldsymbol{W}^{-1}(0,T)\boldsymbol{x}_0$，而

$$\boldsymbol{W}(0,T)=\int_0^T \mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}t}\mathrm{d}t,\quad T>0$$

试证明：基此构成的闭环系统为渐近稳定。

5.12 给定离散时间线性时不变系统为

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\begin{bmatrix}1 & 4 & 0\\ -3 & -2 & -3\\ 2 & 0 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(k)$$

试用两种方法判断系统是否为渐近稳定。