

线性系统的时域分析

前面的章节着重对信号的分类及其分析方法进行了探讨。然而,信号和系统之间有着十分密切的联系,这是因为,无论是信号传输,还是信号处理,都离不开系统。因此,从本章开始进入对系统的讨论,本章主要对系统的分类和时域分析方法加以介绍。

5.1 系统的概念、描述及分类

5.1.1 系统的概念

系统是一个具有一定功能的有机整体,通常由若干相互作用、相互关联的单元组成。例如,通信系统的功能是实现信号的传输(如语言、文字、图像、数据、指令等),将信号从甲方送至乙方,如图 5-1 所示。它由三部分组成:发送端、信道和接收端。为了实现传输,在发送端先由信号转换单元将所要传送的内容按一定规律变换为相应的信号(如电信号、光信号),通过发射机发送出去,经过适当的传输介质(如传输线、电缆、光纤、光缆、空间等),将信号传送到接收方,接收端再将其转换为相应的声音、文字、图像等信号形式。

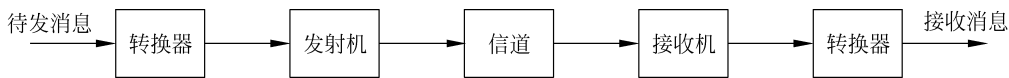


图 5-1 通信系统的基本组成

图 5-2 给出了一个收音机系统的组成图,它实际上是一个音频通信系统的接收端。其中,振荡器的主要功能是产生一个外加正弦信号,将此正弦信号通过混频器和接收信号进行混频,形成一个固定频率的中频信号,再利用中频放大器对信号进行放大,最后通过检波器获得所广播的音频信号。由于检波后的音频信号比较微弱,故需通过音频放大后送到扬声器进行收听。

再如,飞机自动驾驶仪是通过飞机计算机控制系统实现自动飞行的。飞机控制系统利用其他机载系统测得的飞行速度、高度和航向等相关信号来调节油门大小、方向舵和飞机副翼的位置等变量,用以保证飞机沿着指定的航线平稳飞行,并增强对飞行员命令的反应速度,这是一个典型的反馈控制系统的例子。又如,飞机的领航员在与地面空中交通管制塔台

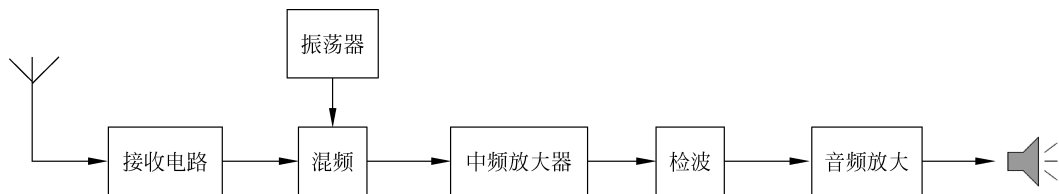


图 5-2 收音机的基本组成

通话时,话音信号可能受到驾驶舱内严重的背景噪声影响,这种情况下,需要设计出一个系统,在保留领航员的话音信号的同时尽可能地抑制掉噪声信号,这是一个典型的信号处理系统,实现噪声抑制的功能,通常也称这样的系统为滤波器。

一个系统既可以是由看得见、摸得到的硬件设备组成,也可以是看不见、摸不到但又确实存在的系统,比如生态系统、经济系统等。再者,由程序代码在一定平台上实现相应功能也称为系统,比如计算机的 Windows 操作系统,手机的安卓操作系统及各种具有一定功能的信号处理软件等。

5.1.2 系统的分类

在系统分析中,通常从不同的角度将系统分为连续时间系统与离散时间系统、线性系统与非线性系统、时变系统与时不变系统、因果系统与非因果系统、稳定系统与非稳定系统等。

1. 连续时间系统和离散时间系统

若系统的输入和输出都是连续时间信号,且其内部也未转换为离散时间信号,则称此系统为连续时间系统。若系统的输入和输出都是离散时间信号,则称此系统为离散时间系统。实际上,离散时间系统经常与连续时间系统组合运用,这种情况称为混合系统。

2. 线性系统和非线性系统

具有叠加性和均匀性(也称为齐次性)的系统称为线性系统,反之,为非线性系统。

3. 时变系统与时不变系统

如果组成系统的参数不随时间的变化而变化,则称此系统为时不变系统(或非时变系统、定常系统)。如果系统的参数随时间的改变而改变,则称其为时变系统或参变系统。

4. 因果系统与非因果系统

因果系统是指当且仅当输入信号激励系统时才产生系统输出响应的系统,有因才有果,即系统的输出出现在激励加入之后,或与激励加入时刻同时出现,否则称为非因果系统。

5. 稳定系统与不稳定系统

若系统对任意的有界输入其零状态响应也是有界的,则称此系统为稳定系统,也可称为有界输入有界输出(Bounded Input Bounded Output, BIBO)稳定系统,否则称为不稳定系统。

6. 记忆系统与非记忆系统

如果系统的输出信号不仅取决于同时刻的激励信号,而且与它过去的工作状态有关,这种系统称为记忆系统。凡是包含有记忆作用的元件(如电容、电感、磁芯等)或记忆电路(如寄存器)的系统都属于此类系统。如果系统的输出信号只决定于同时刻的激励信号,与它过去的工作状态无关,则称此系统为非记忆系统。例如,只由电阻元件组成的系统就是非记忆系统。

7. 集总参数系统与分布参数系统

只由集总参数元件组成的系统称为集总参数系统。含有分布参数元件的系统是分布参数系统(如传输线、波导等)。集总参数系统用常微分方程作为它的数学模型。而分布参数系统的数学模型是偏微分方程,这时描述系统的独立变量不仅是时间变量,还要考虑空间位置。

本书重点讨论线性时不变的连续时间系统和离散时间系统,它们也是系统理论的核心与基础。在以后的章节中,凡是没有特别说明的系统,都是指线性时不变系统(Linear Time-Invariant, LTI)。

5.2 线性时不变系统的描述

5.2.1 连续时间系统的数学模型与结构框图描述

通常还采用数学模型或结构框图的形式来描述系统的输入与输出关系或系统的组成。连续的线性时不变系统用常数系数线性微分方程来描述。例如,图 5-3 所示的系统是由电阻、电感串联构成的。若激励信号是电压源,系统响应为回路电流,根据元件的伏安特性与基尔霍夫电压定律(Kirchhoff Voltage Laws, KVL)可建立输入与输出的关系,即

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = e(t)$$

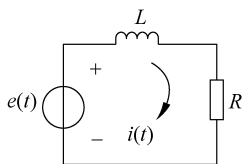


图 5-3 RL 电路

这个微分方程就是该系统的数学模型。

微分方程的阶数表示系统的阶数,阶数越高,系统越复杂。对于一个 n 阶线性时不变连续系统,其数学模型为

$$\begin{aligned} C_n \frac{d^n}{dt^n} r(t) + C_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} r(t) + \cdots + C_1 \frac{d}{dt} r(t) + C_0 r(t) \\ = E_m \frac{d^m}{dt^m} e(t) + E_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} e(t) + \cdots + E_1 \frac{d}{dt} e(t) + E_0 e(t) \end{aligned}$$

即

$$\sum_{k=0}^n C_k \frac{d^k}{dt^k} r(t) = \sum_{i=0}^m E_i \frac{d^i}{dt^i} e(t)$$

式中, $e(t)$ 表示激励; $r(t)$ 表示响应。

由上述数学模型可见,其中有的运算关系包括加法、乘法及微分运算(微分运算常用积分表示),将这些运算分别用相应的符号表示,作为系统的基本运算单元,如图 5-4 所示。

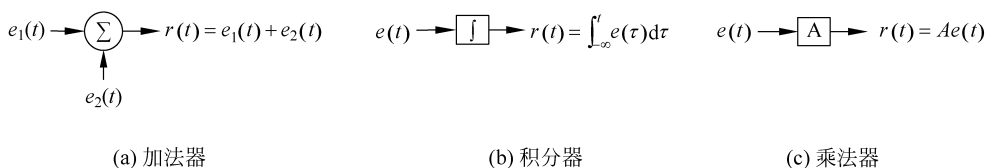


图 5-4 连续系统基本单元方框图

利用这些基本运算单元符号,即可将整个系统的输入输出关系描述出来,例如图 5-4 所

示的一阶系统,根据其输入输出方程将其用图 5-5 所示的方框图形式表示,该图表示这个一阶系统由乘法器、积分器及加法器组成,其中,系统的输出端含有一个反馈环节与输入信号共同参与运算,确定输出。

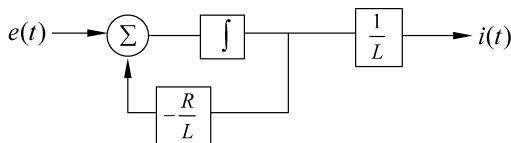


图 5-5 连续时间系统的方框图描述

5.2.2 离散时间系统的数学模型与结构框图表示

与连续系统类似,离散的线性时不变系统的数学模型通常用常系数线性差分方程来描述。下面以客户在银行的存款情况来说明离散时间系统建立数学模型的过程。

若一个客户每个月都将工资存入银行,设第 n 个月的工资金额用 $x(n)$ 来表示,银行的月利率为 a (其中 $a < 1$),则第 n 个月月底该用户在银行的存款金额 $y(n)$ 可表示为

$$y(n) = (1 + a)y(n-1) + x(n) \quad (5-1)$$

或者表示为

$$y(n) - (1 + a)y(n-1) = x(n)$$

这就是一个常系数线性差分方程式,或称递归关系式。一般情况下,等式左端由系统输出序列 $y(n)$ 及其移位序列 $y(n-1)$ 构成,等式右端是系统激励 $x(n)$,有时,还可以包括 $x(n)$ 的延序列,如 $x(n-1)$,式中 a 是常数。由于此方程中包含 $y(n)$ 和 $y(n-1)$,二者仅相差一个位移序数,因此是一阶差分方程。如果给定 $x(n)$,而且知道 $y(n)$ 的边界条件,解此差分方程即可求得响应序列 $y(n)$ 。

如图 5-6 所示的电阻梯形网络,其各支路电阻都为 R ,每个结点对地的电压为 $y(n)$, $n=0,1,\dots,N$ 。已知两边界结点电压为 $y(0)=E, y(N)=0$ 。请写出求第 n 个结点电压 $y(n)$ 的差分方程式。

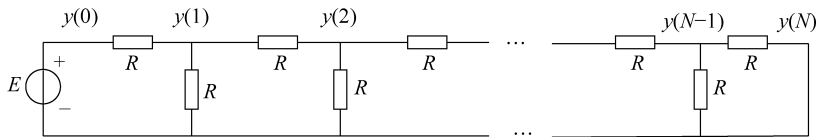


图 5-6 电阻梯形网络

对于任一结点 $n-1$,运用基尔霍夫电流定律(Kirchhoff Current Laws, KCL)不难写出

$$\frac{y(n-1)}{R} = \frac{y(n) - y(n-1)}{R} + \frac{y(n-2) - y(n-1)}{R}$$

可化简为

$$y(n) - 3y(n-1) + 2y(n-2) = 0$$

此方程中包含的 $y(n)$ 和 $y(n-2)$,二者相差两个位移序数,因此是二阶差分方程。借助两个边界条件,经求解即可得到 $y(n)$ 。

如果方程式中还包括输出序列的其他位移项 $y(n-3), y(n-4), \dots, y(n-N)$ 等,就可

构成 N 阶差分方程式。差分方程式的阶数等于系统输出序列变量序号的最高与最低值之差。

这里举出的差分方程,各输出序列之序号自 n 以递减方式给出,称为后向(或向右移序的)差分方程。也可从 n 以递增方式给出,即由 $y(n), y(n+1), \dots, y(n+N)$ 等项组成,称为前向(或向左移序的)差分方程。需要说明的是,实际生活中,许多问题都可用差分方程来描述。本书采用后向差分分析系统,对于一个 N 阶线性时不变离散系统,其数字模型

$$a_0 y(n) + a_1 y(n-1) + \dots + a_N y(n-N) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \dots + b_M x(n-M)$$

即

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$

由上述差分方程可见,其中所包含的运算关系包括加法、乘法及延时等,将这些运算分别用相应的符号表示,作为系统的基本运算单元。图 5-7(a)~(c)分别给出了离散时间系统中加法器、单位延时器和乘法器的方框图。

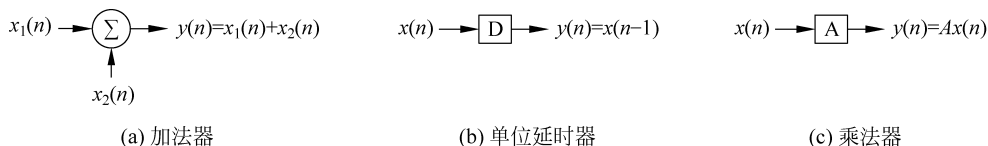


图 5-7 离散系统基本单元方框图

同样,利用这些基本方框图单元,也可将整个离散系统的输入输出关系描述出来,例如式(5-1)所示的一阶系统,可表示为图 5-8 所示的方框图形式。

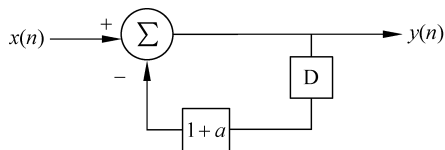


图 5-8 离散时间系统的方框图描述

与微分方程的分类相对应,差分方程也可划分为线性的与非线性的、常系数的与参变系数的。一般情况下,线性时不变离散时间系统需要由常系数线性差分方程描述。

5.2.3 线性时不变系统的特性

1. 均匀性与叠加性

对于给定的连续时间系统,若激励为 $e(t)$ 时,输出为 $r(t)$,若将激励扩大 k 倍即 $ke(t)$ 时,输出也相应能扩大为 $kr(t)$,则说明此系统满足均匀性。

若激励为 $e_1(t)$ 时,响应为 $r_1(t)$,激励为 $e_2(t)$ 时,响应为 $r_2(t)$,当激励变为 $e_1(t) + e_2(t)$ 时,若输出也为 $r_1(t) + r_2(t)$,则说明此系统满足叠加性。如果一个系统同时满足均匀性和叠加性,即若输入 $k_1 e_1(t) + k_2 e_2(t)$ 时,系统的响应为 $k_1 r_1(t) + k_2 r_2(t)$,则说明该系统为线性系统,此特性如图 5-9 所示。

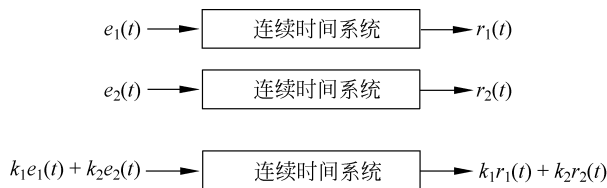


图 5-9 线性连续系统的叠加性与均匀性

上述特性同样适用于离散时间系统,如图 5-10 所示。图中, $y_1(n)$ 是对应激励 $x_1(n)$ 的响应; $y_2(n)$ 是对应激励 $x_2(n)$ 的响应。

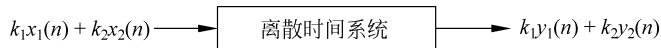


图 5-10 线性离散系统的叠加性与均匀性

例 5-1 判断图 5-11(a)~(c)所示的系统是否为线性系统。

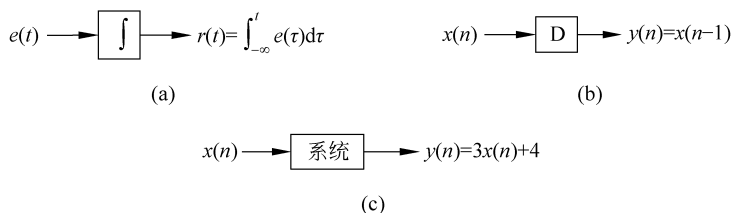


图 5-11 例 5-1 各系统框图

解 (a) 由系统输入输出关系,设激励为 $e_1(t)$ 时,对应响应为 $r_1(t) = \int_{-\infty}^t e_1(\tau) d\tau$; 激励为 $e_2(t)$ 时,响应为 $r_2(t) = \int_{-\infty}^t e_2(\tau) d\tau$ 。则当激励为 $e_3(t) = k_1 e_1(t) + k_2 e_2(t)$ 则响应为

$$\begin{aligned}
 r_3(t) &= \int_{-\infty}^t e_3(\tau) d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^t [k_1 e_1(\tau) + k_2 e_2(\tau)] d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^t [k_1 e_1(\tau)] d\tau + \int_{-\infty}^t [k_2 e_2(\tau)] d\tau \\
 &= k_1 r_1(t) + k_2 r_2(t)
 \end{aligned}$$

因此,该系统为线性系统。

(b) 设激励为 $x_1(n)$ 时,响应为 $y_1(n) = x_1(n-1)$; 激励为 $x_2(n)$ 时,响应为 $y_2(n) = x_2(n-1)$ 。则激励为

$$x_3(n) = k_1 x_1(n) + k_2 x_2(n)$$

时,则响应为

$$\begin{aligned}
 y_3(n) &= x_3(n-1) \\
 &= k_1 x_1(n-1) + k_2 x_2(n-1) \\
 &= k_1 y_1(n) + k_2 y_2(n)
 \end{aligned}$$

因此,该系统是线性系统。

(c) 当激励为 $x_1(n)$ 时,响应为 $y_1(n)=3x_1(n)+4$; 当激励为 $x_2(n)$ 时,响应为 $y_2(n)=3x_2(n)+4$ 。当激励为

$$x_3(n)=k_1x_1(n)+k_2x_2(n)$$

时,则响应为

$$\begin{aligned} y_3(n) &= 3x_3(n) + 4 \\ &= 3k_1x_1(n) + 3k_2x_2(n) + 4 \end{aligned}$$

而

$$k_1y_1(n) + k_2y_2(n) = 3k_1x_1(n) + 3k_2x_2(n) + 4k_1 + 4k_2$$

经判断

$$y_3(n) \neq k_1y_1(n) + k_2y_2(n)$$

因此,该系统为非线性系统。

2. 时不变特性

线性系统的时不变特性是指在同样起始状态下,系统响应的变化形式与激励施加于系统的时刻无关。即:若激励为 $e(t)$,产生的响应为 $r(t)$,则当激励为 $e(t-t_0)$ 时,响应为 $r(t-t_0)$ 。此特性如图 5-12 所示,它表明当激励延迟一段时间 t_0 时,其输出响应也同样延迟 t_0 ,波形形状保持不变。

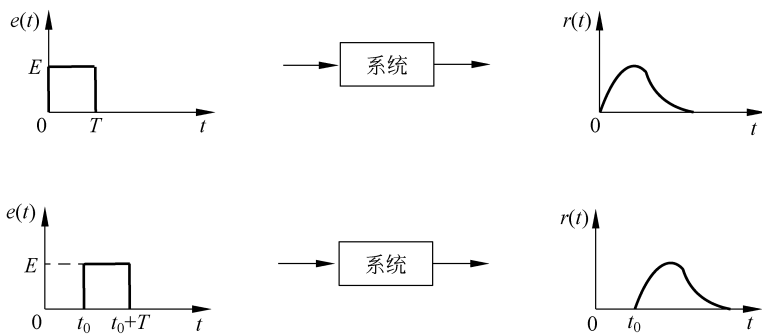


图 5-12 时不变特性

同样,对于线性离散时间系统同样可满足时不变特性,即若激励为 $x(n)$,产生的响应为 $y(n)$; 当激励为 $x(n-n_0)$ 时,响应为 $y(n-n_0)$,其中 n_0 为整数。

3. 微分特性与差分特性

对于线性时不变连续系统,其具有微分特性,即:若系统在激励 $e(t)$ 作用下产生响应 $r(t)$,则当激励为 $\frac{de(t)}{dt}$ 时,响应为 $\frac{dr(t)}{dt}$,并且此结论可扩展至高阶导数。图 5-13 表明了这一特性。

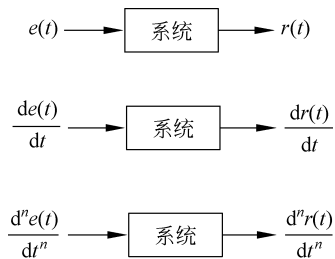


图 5-13 微分特性

对于线性离散时间 LTI 系统,若系统在激励信号 $x(n)$ 作用下产生的响应为 $y(n)$,则当激励为 $x(n)-x(n-1)$ 时,响应为 $y(n)-y(n-1)$,称 $[x(n)-x(n-1)]$ 、 $[y(n)-y(n-1)]$ 为一阶差分形式。

4. 积分与求和特性

对于 LTI 连续系统,若系统的输入是原激励信号 $e(t)$ 的积分 $\int_{-\infty}^t e(\tau) d\tau$,则系统的响应 $r(t)$ 也是原响应的积分 $\int_{-\infty}^t r(\tau) d\tau$,称为积分特性,如图 5-14 所示。

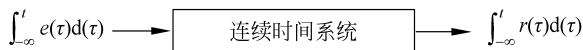


图 5-14 连续时间系统的积分特性

对于 LTI 离散系统,也有类似的结论,若系统的输入是原激励信号 $x(n)$ 的求和 $\sum_{m=-\infty}^n x(m)$,则系统的响应 $y(n)$ 也是原响应的求和 $\sum_{m=-\infty}^n y(m)$,如图 5-15 所示。

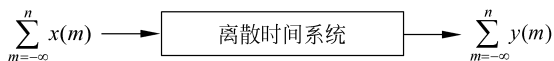


图 5-15 离散时间系统的求和特性

5. 因果性

因果性是指系统在某一时刻的输出响应只取决于该时刻的输入和该时刻之前的输入。

(1) 对于连续系统,若 $t < t_0$, $e(t) = 0$,则输出 $r(t) = 0$ 。

(2) 对于离散系统,若 $n < n_0$, $x(n) = 0$,则输出 $y(n) = 0$ 。

即满足因果性。

例 5-2 判断下列系统是否满足因果性。

(1) $r_1(t) = e_1(t-1)$;

(2) $r_2(t) = e_2(t+1)$;

(3) $y(n) = (n-2)x(n)$ 。

解 (1) 若 $t < t_0$, $e_1(t) = 0$,则当 $t < t_0$ 时, $t-1 < t_0-1 < t_0$,所以

$$r_1(t) = e_1(t-1) = 0$$

故此系统为因果系统。实际上,可令 $t_0 = 0$,此时 $r(0) = e_1(-1)$ 。这说明, $r(t)$ 在“0”时刻的响应是由激励 $e(t)$ 在“-1”时刻,也就是“0”时刻之前决定的,同理可得, $r(t)$ 在 t 时刻的响应是由 $e(t)$ 在“ $t-1$ ”时刻的激励决定的。因此,此系统是因果系统。

(2) 若 $t < t_0$, $e_2(t) = 0$,则当 $t < t_0$ 时,可能会出现 $t+1 > t_0$,所以可能有

$$r_1(t) = e_1(t+1) \neq 0$$

也就是说系统响应 $r(t)$ 在 t 时刻的值由“ $t+1$ ”时刻的激励决定,响应出现在激励加入之前,因此该系统是非因果系统。

(3) 若 $n < n_0$, $x(n) = 0$,则当 $n < n_0$,也有

$$y(n) = (n-2)x(n) = 0$$

也就是说系统响应 $y(n)$ 在 n 时刻的输出除了一个系数项“ $n-2$ ”之外,仅由当前时刻的输入 $x(n)$ 来决定,因此该系统是因果系统。

借助系统的“因果”这一词,通常把 $t=0$ 接入系统的信号(在 $t<0$ 时函数值为零)称为因果信号(或有始信号)。对于因果系统,在因果信号的激励下,响应也为因果信号。

5.3 连续时间系统的时域分析

系统分析主要有两个方面的内容:一是已知系统,求解不同激励下系统的响应;二是分析系统自身的特性。本节首先讲解连续系统响应的时域求解方法。

5.3.1 系统响应的经典求解方法

由于连续时间 LTI 系统的数学模型是常系数线性微分方程,故可以采用求解微分方程的方法求解系统的响应。由电路分析理论已知,一个系统的响应分为零输入响应和零状态响应。零输入响应是指系统在没有外加激励信号的作用下,仅由系统的起始状态所产生的响应,通常以 $r_{zi}(t)$ 来表示。零状态响应是指在系统的起始状态等于零时,仅由外加激励信号作用所产生的响应,通常以 $r_{zs}(t)$ 来表示。利用微分方程求解 $r_{zi}(t)$ 和 $r_{zs}(t)$ 的方法在电路与分析课程中已有详细讲解,在此处只做简要介绍。

1. 零输入响应的求解

设系统的激励为 $e(t)$,响应为 $r(t)$,对 n 阶系统,其数学模型为

$$\begin{aligned} C_n \frac{d^n}{dt^n} r(t) + C_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} r(t) + \cdots + C_1 \frac{d}{dt} r(t) + C_0 r(t) \\ = E_m \frac{d^m}{dt^m} e(t) + E_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} e(t) + \cdots + E_1 \frac{d}{dt} e(t) + E_0 e(t) \end{aligned} \quad (5-2)$$

按照上述零输入响应的定义,令 $e(t)=0$, $r_{zi}(t)$ 必然满足齐次方程

$$C_n \frac{d^n}{dt^n} r_{zi}(t) + C_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} r_{zi}(t) + \cdots + C_1 \frac{d}{dt} r_{zi}(t) + C_0 r_{zi}(t) = 0 \quad (5-3)$$

设特征根为 α ,其是如下特征方程的根

$$C_n \alpha^n + C_{n-1} \alpha^{n-1} + \cdots + C_1 \alpha + C_0 = 0$$

若上述特征方程有 n 个不相等的特征根,即 $\alpha_1 \neq \cdots \neq \alpha_k \neq \cdots \neq \alpha_n$,对应的零输入解为

$$r_{zi}(t) = \sum_{k=1}^n A_{zik} e^{\alpha_k t}$$

$r_{zi}(t)$ 中的常系数 A_{zik} 可由 $r(0^-)$, $r'(0^-)$, $\cdots$, $r^{(n)}(0^-)$ 的值来求解,其中 $r^{(k)}(0^-)$ 表示 $\frac{d^{(k)} r(t)}{dt^k} \Big|_{t=0^-}$ ($k=1,2,\cdots,n$)。这是因为从 $t<0$ 到 $t>0$ 都没有激励的作用,而且系统内部结构不会发生变化,因而系统的状态在零点不会发生变化,即 $r^{(k)}(0^+) = r^{(k)}(0^-)$ 。其中 $r^{(k)}(0^-)$ 表示 $r(t)$ 及其各阶导数在 0^- 时刻的取值,称其为 0^- 状态或起始状态,它包含了为计算未来响应所需要的过去全部信息。 $r(0^+)$, $r'(0^+)$, $\cdots$, $r^{(k)}(0^+)$ 表示 0^+ 状态或初始状态。表 5-1 给出不同特征根类型所对应的齐次解形式。

表 5-1 不同特征根所对应的齐次解形式

特 征 根	齐次解形式
单实根 α	$C e^{\alpha t}$
k 重实根 α	$e^{\alpha t} (C_1 + C_2 t + \cdots + C_k t^{k-1})$
一对单复根 $\alpha \pm j\beta$	$e^{\alpha t} [C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)]$
一对 k 重复根 $\alpha \pm j\beta$	$e^{\alpha t} [(C_1 + C_2 t + \cdots + C_k t^{k-1}) \cos(\beta t) + (D_1 + D_2 t + \cdots + D_k t^{k-1}) \sin(\beta t)]$

注： C, C_i 和 D_i 均为待定系数。

2. 零状态响应的求解

根据前述的零状态响应的定义可知, $r_{zs}(t)$ 应满足方程

$$\begin{aligned} & C_n \frac{d^n}{dt^n} r_{zs}(t) + C_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} r_{zs}(t) + \cdots + C_1 \frac{d}{dt} r_{zs}(t) + C_0 r_{zs}(t) \\ &= E_m \frac{d^m}{dt^m} e(t) + E_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} e(t) + \cdots + E_1 \frac{d}{dt} e(t) + E_0 e(t) \end{aligned} \quad (5-4)$$

并符合 $r^{(k)}(0^-) = 0$ 的约束。其表达式为

$$r_{zs}(t) = r_{\text{齐次解}}(t) + B(t)$$

其中 $B(t)$ 是式(5-4)的特解。而特解的形式与输入信号的形式有关,表 5-2 给出了常用输入信号所对应的特解表达式,求解表达式中的系数 $B, B_1, B_2, \dots, D_1, D_2, \dots$ 时,需将 $B(t)$ 代入原方程,利用方程左右对应项系数相等方法进行求解。

表 5-2 几种典型激励信号对应的特解

激 励 函 数	响应函数 $r(t)$ 的特解
E (常数)	B (常数)
t^p	$B_1 t^p + B_2 t^{p-1} + \cdots + B_p t + B_{p+1}$
$e^{\alpha t}$	$B e^{\alpha t}$
$\cos(\omega t)$ 或 $\sin(\omega t)$	$B_1 \cos(\omega t) + B_2 \sin(\omega t)$
$t^p e^{\alpha t} \cos(\omega t)$ 或 $t^p e^{\alpha t} \sin(\omega t)$	$(B_1 t^p + B_2 t^{p-1} + \cdots + B_p t + B_{p+1}) e^{\alpha t} \cos(\omega t) + (D_1 t^p + D_2 t^{p-1} + \cdots + D_p t + D_{p+1}) e^{\alpha t} \sin(\omega t)$

齐次解中的系数需利用初始状态值 $r(0^+)$ 及其各阶导 $r^{(k)}(0^+)$ 通过待定系数法确定。这就需要解决由 0^- 状态导出 0^+ 状态的问题。一般情况下,激励 $e(t)$ 是一个连续信号,若其不含冲激或阶跃信号时,起始状态与初始状态相同,即 $r(0^-) = r(0^+)$ 。但是,当激励中含有冲激或阶跃信号时,系统的状态可能会在 0 时刻发生跳变。例如,电容两端加入一个电压激励 $v_c(t) = u(t)$,激励加入之前电容两端电压为 0,此时 $v_c(0^-) = 0, v_c(0^+) = 1$,故 $v_c(0^-) \neq v_c(0^+)$,有跳变。再如,电感两端加入一个冲激电压源,同样,激励加入之前电感电流为 0,此时两端的电流 $i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \frac{1}{L} u(t)$,所以 $i_L(0^-) \neq i_L(0^+)$,有跳变。这样,求解描述 LTI 系统的微分方程时,就需要从已知的 $r^{(k)}(0^-)$ 来设法求得 $r^{(k)}(0^+)$ 。下面先以一个二阶系统为例说明如何由 $r^{(k)}(0^-)$ 来求得 $r^{(k)}(0^+)$ 。

例 5-3 若描述某 LTI 系统的微分方程为

$$r''(t) + 3r'(t) + 2r(t) = e'(t) + 3e(t)$$

已知 $r(0^-) = 1, r'(0^-) = 2, e(t) = u(t)$, 求 $r(0^+)$ 和 $r'(0^+)$ 。

解 将输入 $e(t) = u(t)$ 代入微分方程, 得

$$r''(t) + 3r'(t) + 2r(t) = \delta(t) + 3u(t) \quad (5-5)$$

可以看出, 方程右边的激励端出现了 $\delta(t)$ 和 $u(t)$, 这就会导致系统的起始状态 $r(0^-)$ 、 $r'(0^-)$ 有可能与 $r(0^+)$ 、 $r'(0^+)$ 不相等, 故需单独确定 $r(0^+)$ 、 $r'(0^+)$ 等。这里采用方程左右系数对等的方法求解。由于等号两端 $\delta(t)$ 及其各阶导数的系数应分别相等, 于是可知式(5-5)中 $r''(t)$ 必含有 $\delta'(t)$, 即 $r''(t)$ 含有冲激函数导数的最高阶为一阶, 故令

$$r''(t) = a\delta'(t) + b\delta(t) + m_0(t)u(t) \quad (5-6)$$

式中, a, b 为待定常数, 函数 $m_0(t)$ 中不含 $\delta(t)$ 及其各阶导数的 t 的连续函数, 即

$$m_0(0^+) = m_0(0^-)$$

对式(5-6)等号两端从 $-\infty$ 到 t 积分, 得

$$\begin{aligned} r'(t) &= a\delta(t) + bu(t) + \left[\int_0^t m_0(x) dx \right] u(t) \\ &= a\delta(t) + m_1(t)u(t) \end{aligned} \quad (5-7)$$

式中

$$m_1(t) = bu(t) + \left[\int_0^t m_0(x) dx \right] u(t)$$

由 $r'(t)$ 可知, $r'(t)$ 在 0^- 到 0^+ 时, 有一个跳变量 $bu(t)$, $r'(0^+) - r'(0^-) = b$ 。

再对式(5-7)等号两端从 $-\infty$ 到 t 积分, 得

$$\begin{aligned} r(t) &= au(t) + \left[\int_0^t m_1(x) dx \right] u(t) \\ &= m_2(t)u(t) \end{aligned} \quad (5-8)$$

由 $r(t)$ 可知, $r(t)$ 在 0^- 到 0^+ 中存在跳变量 $au(t)$, 即 $r(0^+) - r(0^-) = a$, 这样只需要求解出 a, b , 即可确定 $r(0^+)$ 和 $r'(0^+)$ 。

将式(5-6)~式(5-8)代入式(5-5)并稍加整理, 得

$$a\delta'(t) + (3a + b)\delta(t) + [m_0(t) + 3m_1(t) + 2m_2(t)]u(t) = \delta(t) + 3u(t) \quad (5-9)$$

式(5-9)中等号两端各项系数对应相等, 故得

$$\begin{cases} a = 0 & (1) \\ 3a + b = 1 & (2) \\ m_0(t) + 3m_1(t) + 2m_2(t) = 3 & (3) \end{cases}$$

由式(1)和式(2)可解得 $a = 0, b = 1$ 。则

$$b = r'(0^+) - r'(0^-) = 1$$

根据已知条件知 $r'(0^-) = 2$, 将其代入上式得

$$r'(0^+) = r'(0^-) + 1 = 3$$

类似地, 再将已知条件 $r(0^-) = 1$ 代入上式得

$$r(0^+) = r(0^-) = 1$$

综上所述, 可得

$$\begin{cases} r(0^+) = 1 \\ r'(0^+) = 3 \end{cases}$$

由例 5-3 可见,当微分方程等号右端含有冲激函数及其各阶导数时,响应 $r(t)$ 及其各阶导数由 0^- 到 0^+ 的瞬间将发生跃变。这时可按下述步骤由 0^- 求得 0^+ 值(仍以二阶系统为例)。

(1) 将输入 $e(t)$ 代入微分方程。若激励端含有 $\delta(t)$ 及其各阶导数,根据微分方程等号两端各奇异函数的各对应项相等的原理,判断方程左端 $r(t)$ 的最高阶导数(对于二阶系统为 $r''(t)$)所含 $\delta(t)$ 导数的最高阶次(例如为 $\delta''(t)$)。

(2) 令 $r''(t) = a\delta''(t) + b\delta'(t) + c\delta(t) + m_0(t)u(t)$, 对 $r''(t)$ 进行积分(从 $-\infty$ 到 t), 逐次求得 $r'(t)$ 和 $r(t)$, 并确定 $r'(t)$ 、 $r(t)$ 中的跳变量。

(3) 将 $r''(t)$ 、 $r'(t)$ 和 $r(t)$ 代入微分方程, 根据方程等号两端各奇异函数的系数相等, 从而求得 $r''(t)$ 中的各待定系数。

(4) 将所求得的待定系数, 代入第(2)步中确定的跳变量, 即可求出 0^+ 时刻的 $r(0^+)$ 和 $r'(0^+)$ 。

例 5-4 某系统的微分方程为

$$r''(t) + 4r'(t) + 3r(t) = 2e'(t) - 3e(t)$$

起始状态 $r(0^-) = 1$, $r'(0^-) = 3$, 且当输入 $e(t) = u(t)$ 时, 求系统的零输入响应 $r_{zi}(t)$ 和零状态响应 $r_{zs}(t)$ 。

解 (1) 由于需要求零输入响应 $r_{zi}(t)$, 所以令 $e(t) = 0$, 代入微分方程的右端即有

$$r''_{zi}(t) + 4r'_{zi}(t) + 3r_{zi}(t) = 0$$

则其特征方程为

$$\alpha^2 + 4\alpha + 3 = 0$$

求得特征根 $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = -3$, 故零输入响应为

$$r_{zi}(t) = A_{zi1}e^{-t} + A_{zi2}e^{-3t}$$

求 $r_{zi}(t)$ 的一阶导数, 即

$$r'_{zi}(t) = -A_{zi1}e^{-t} - 3A_{zi2}e^{-3t}$$

在零输入情况下, 则有

$$\begin{cases} r_{zi}(0^-) = r(0^-) = 1 \\ r'_{zi}(0^-) = r'(0^-) = 3 \end{cases}$$

令 $t = 0$, 将起始条件 $r_{zi}(0^-) = 1$, $r'_{zi}(0^-) = 3$ 分别代入 $r_{zi}(t)$ 、 $r'_{zi}(t)$, 得

$$\begin{cases} A_{zi1} + A_{zi2} = 1 \\ -A_{zi1} - 3A_{zi2} = 3 \end{cases}$$

由上式解得 $A_{zi1} = 3$, $A_{zi2} = -2$, 将它们代入 $r_{zi}(t)$, 得系统的零输入响应为

$$r_{zi}(t) = (3e^{-t} - 2e^{-3t})u(t)$$

(2) 该系统的零状态响应满足方程

$$r''_{zs}(t) + 4r'_{zs}(t) + 3r_{zs}(t) = 2e'(t) - 3e(t) \quad (5-10)$$

及起始状态 $r_{zs}(0^-) = r'_{zs}(0^-) = 0$ 。当输入 $e(t) = u(t)$, 代入式(5-10)后, 则有

$$r''_{zs}(t) + 4r'_{zs}(t) + 3r_{zs}(t) = 2\delta(t) - 3u(t) \quad (5-11)$$

由于等号右端含有冲激函数, 故零状态响应在 $t = 0$ 时将发生突变, 其 0^+ 值不等于 0^- 值。

按上述求 0^+ 值的方法, 令

$$r''_{zs}(t) = a\delta(t) + m_0(t)u(t) \quad (5-12)$$

式中, $m_0(t)$ 为 t 的连续函数。对式(5-12)积分得

$$\begin{aligned} r'_{zs}(t) &= au(t) + \left(\int_0^t m_0(\tau) d\tau \right) u(t) \\ &= m_1(t)u(t) \end{aligned} \quad (5-13)$$

此时, $r'_{zs}(t)$ 中有跳变量 $au(t)$, 故 $r'_{zs}(0^+) - r'_{zs}(0^-) = a$ 。进一步积分得

$$\begin{aligned} r_{zs}(t) &= \left(\int_0^t m_1(\tau) d\tau \right) u(t) \\ &= m_2(t)u(t) \end{aligned} \quad (5-14)$$

此时, $r_{zs}(t)$ 中无跳变量, 故 $r_{zs}(0^+) - r_{zs}(0^-) = 0$ 。这样, 只要求出 a 即可。将式(5-12)~式(5-14)分别代入式(5-11)得

$$a\delta(t) + [m_0(t) + 4m_1(t) + 3m_2(t)]u(t) = 2\delta(t) - 3u(t)$$

上式中等号两端各项系数对应相等, 故得

$$\begin{cases} a = 2 \\ m_0(t) + 4m_1(t) + 3m_2(t) = -3 \end{cases}$$

则

$$\begin{cases} r'_{zs}(0^+) - r'_{zs}(0^-) = a \\ r_{zs}(0^+) - r_{zs}(0^-) = 0 \end{cases}$$

所以

$$\begin{cases} r'_{zs}(0^+) = r'_{zs}(0^-) + a = 2 \\ r_{zs}(0^+) = r_{zs}(0^-) = 0 \end{cases} \quad (5-15)$$

对于 $t > 0$, 式(5-11)可写为

$$\begin{aligned} r''_{zs}(t) + 4r'_{zs}(t) + 3r_{zs}(t) &= -3 \\ r_{zs}(t) &= r_{\text{齐次解}}(t) + B(t) \end{aligned}$$

其中, 齐次解为

$$r_{\text{齐次解}}(t) = A_{zs1}e^{-t} + A_{zs2}e^{-3t}$$

特解 $B(t) = -1$, 于是有

$$r_{zs}(t) = A_{zs1}e^{-t} + A_{zs2}e^{-3t} - 1$$

对 $r_{zs}(t)$ 及其导数 $r'_{zs}(t)$ 取 $t=0$, 并将式(5-15)的初始条件代入可得

$$\begin{cases} A_{zs1} + A_{zs2} - 1 = 0 \\ -A_{zs1} - 3A_{zs2} = 2 \end{cases}$$

由上式可解得

$$\begin{cases} A_{zs1} = \frac{5}{2} \\ A_{zs2} = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

故系统的零状态响应为

$$r_{zs}(t) = \left(\frac{5}{2}e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-3t} - 1 \right) u(t)$$

3. 系统的全响应

如果系统的起始状态不为零,在激励 $e(t)$ 的作用下,LTI 系统的响应称为全响应。它是零输入响应与零状态响应之和,即

$$r(t) = r_{zi}(t) + r_{zs}(t)$$

例如,在例 5-4 中已经求得系统的零输入响应和零状态响应分别为

$$r_{zi}(t) = (3e^{-t} - 2e^{-3t})u(t)$$

和

$$r_{zs}(t) = \left(\frac{5}{2}e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-3t} - 1 \right) u(t)$$

所以该系统的全响应为

$$\begin{aligned} r(t) &= r_{zi}(t) + r_{zs}(t) \\ &= \left(\frac{11}{2}e^{-t} - \frac{7}{2}e^{-3t} - 1 \right) u(t) \end{aligned}$$

另外,全响应还可分为自由响应(固有响应)和强迫响应。其中自由响应是指由系统特征根所决定的那部分响应,它仅依赖于系统本身的特性,而和激励信号的形式无关。而由激励信号所确定的那部分响应,称为强迫响应。若微分方程的特征根均为单根,设为 α_k ,则系统全响应可以分解为

$$\begin{aligned} r(t) &= r_{zi}(t) + r_{zs}(t) \\ &= \underbrace{\sum_{k=1}^n A_{zik} e^{a_k t}}_{\text{零输入响应}} + \underbrace{\sum_{k=1}^n A_{zsk} e^{a_k t} + B(t)}_{\text{零状态响应}} \\ &= \underbrace{\sum_{k=1}^n A_{zik} e^{a_k t} + \sum_{k=1}^n A_{zsk} e^{a_k t}}_{\text{自由响应}} + \underbrace{B(t)}_{\text{强迫响应}} \\ &= \underbrace{\sum_{k=1}^n A_k e^{a_k t}}_{\text{自由响应}} + \underbrace{B(t)}_{\text{强迫响应}} \end{aligned}$$

式中

$$\sum_{k=1}^n A_k e^{a_k t} = \sum_{k=1}^n A_{zik} e^{a_k t} + \sum_{k=1}^n A_{zsk} e^{a_k t}$$

即

$$A_k = A_{zik} + A_{zsk} \quad (k=1,2,\cdots,n)$$

可见,两种分解方式有明显的区别。虽然自由响应和零输入响应都是齐次方程的解,但二者系数各不相同, A_{zik} 仅由系统的起始状态所决定,而 A_k 要由系统的起始状态和激励信号共同来确定。在起始状态为零时,零输入响应为零,但在激励信号的作用下,自由响应并不为零。也就是说,系统的自由响应包含零输入响应和零状态响应的一部分。

在例 5-4 中,这几种响应之间的关系为

$$\begin{aligned}
 r(t) &= r_{zi}(t) + r_{zs}(t) \\
 &= \underbrace{(3e^{-t} - 2e^{-3t})u(t)}_{\text{零输入响应}} + \underbrace{\left(\frac{5}{2}e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-3t} - 1\right)u(t)}_{\text{零状态响应}} \\
 &= \underbrace{\left(\frac{11}{2}e^{-t} - \frac{7}{2}e^{-3t}\right)u(t)}_{\text{自由响应}} + \underbrace{(-u(t))}_{\text{强迫响应}}
 \end{aligned}$$

在采用经典法求解系统响应时,求解过程比较烦琐,而且存在很多局限性。特别是在求解零状态响应时,若描述系统的微分方程中激励信号较复杂,则难以设定相应的特解形式。若激励信号发生变化,则系统零状态响应需全部重新求解。不过,这种方法对于表明和理解系统产生响应的物理概念较为清楚。对于系统的零状态响应,还可以根据系统的时域特性,利用卷积积分的方法求解。5.3.2节将给出具体求解方法。

5.3.2 线性时不变系统零状态响应的近代解法——卷积积分

1. $\delta(t)$ 作用于系统产生的零状态响应——单位冲激响应

为描述系统零状态响应的近代求解方法,先给出系统冲激响应的定义:当激励为单位冲激信号 $\delta(t)$ 时系统所产生的零状态响应称为系统的冲激响应,通常以符号 $h(t)$ 表示,其关系如图 5-16 所示。

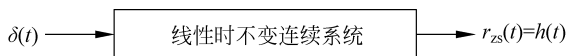


图 5-16 线性时不变系统的单位冲激响应

冲激响应 $h(t)$ 在求解系统的零状态响应 $r_{zs}(t)$ 时起着非常重要的作用,除此之外,后面将会看到 $h(t)$ 还可以用来描述系统本身的特性。因此,对冲激响应 $h(t)$ 的分析是系统分析中重要的内容。下面先研究 $h(t)$ 的时域求解方法。

设 N 阶线性时不变系统,其数学模型为

$$\begin{aligned}
 &C_n \frac{d^n r(t)}{dt^n} + C_{n-1} \frac{d^{n-1} r(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + C_1 \frac{dr(t)}{dt} + C_0 r(t) \\
 &= E_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + E_{m-1} \frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + E_1 \frac{de(t)}{dt} + C_0 e(t)
 \end{aligned} \quad (5-16)$$

令 $e(t) = \delta(t)$, 则系统对应的零状态响应 $r(t) = h(t)$, 则式(5-16)变为

$$\begin{aligned}
 &C_n \frac{d^n h(t)}{dt^n} + C_{n-1} \frac{d^{n-1} h(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + C_1 \frac{dh(t)}{dt} + C_0 h(t) \\
 &= E_m \frac{d^m \delta(t)}{dt^m} + E_{m-1} \frac{d^{m-1} \delta(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + E_1 \frac{d\delta(t)}{dt} + E_0 \delta(t)
 \end{aligned} \quad (5-17)$$

及起始状态 $h(0^-)$ 及 $h^{(i)}(0^-)$ 均为零。此时,求解 $h(t)$ 可采用 5.3.1 节零状态响应求解方法来解。在此,需要注意的是, $h(0^+)$ 及 $h(0^+)$ 各阶导数会发生跳变问题。这里也可以采用以下方法求解:由于 $\delta(t)$ 及其各阶导数在 $t \geq 0^+$ 时都等于零,因此式(5-17)右端各项在 $t \geq 0^+$ 时恒等于零,这时式(5-17)成为齐次方程,这样冲激响应 $h(t)$ 在 $t \geq 0^+$ 时,其形式应与齐次解的形式相同。例如,当系统有 n 个单特征根时,且 $n > m$ 时, $h(t)$ 可表示为

$$h(t) = \left[\sum_{k=1}^n A_k e^{a_k t} \right] \cdot u(t) \quad (5-18)$$

式中,当 $n > m$ 时,待定系数 A_k 可以采用冲激平衡法确定,即将式(5-18)代入式(5-17),为保持系统对应的方程恒等,方程式两边所具有的冲激信号及其高阶导数必须相等,根据此规则即可求得系统的冲激响应 $h(t)$ 的待定系数。

例 5-5 设描述系统的微分方程式为

$$\frac{d^2 r(t)}{dt^2} + 4 \frac{dr(t)}{dt} + 3r(t) = \frac{de(t)}{dt} + 2e(t)$$

试求出其冲激响应 $h(t)$ 。

解 根据系统冲激响应 $h(t)$ 的定义,设 $e(t) = \delta(t)$, $r(t)$ 即为 $h(t)$, 则微分方程为

$$\frac{d^2 h(t)}{dt^2} + 4 \frac{dh(t)}{dt} + 3h(t) = \delta'(t) + 2\delta(t) \quad (5-19)$$

首先求其特征根为

$$\alpha_1 = -1, \quad \alpha_2 = -3$$

于是有

$$h(t) = (A_1 e^{-t} + A_2 e^{-3t}) u(t)$$

对 $h(t)$ 逐次求导得到

$$\frac{dh(t)}{dt} = (A_1 + A_2)\delta(t) + (-A_1 e^{-t} - 3A_2 e^{-3t})u(t)$$

$$\frac{d^2 h(t)}{dt^2} = (A_1 + A_2)\delta'(t) + (-A_1 - 3A_2)\delta(t) + (A_1 e^{-t} + 9A_2 e^{-3t})u(t)$$

将 $h(t)$ 、 $\frac{dh(t)}{dt}$ 、 $\frac{d^2 h(t)}{dt^2}$ 代入式(5-19)得

$$(A_1 + A_2)\delta'(t) + (3A_1 + A_2)\delta(t) = \delta'(t) + 2\delta(t)$$

令左右两端 $\delta'(t)$ 的系数以及 $\delta(t)$ 系数对应相等,得到

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 1 \\ 3A_1 + A_2 = 2 \end{cases}$$

解得

$$A_1 = \frac{1}{2}, \quad A_2 = \frac{1}{2}$$

故冲激响应的表达式为

$$h(t) = \frac{1}{2}(e^{-t} + e^{-3t})u(t)$$

由此题可以看出,这种方法无须求解 $h(0^+)$ 及 $h(0^+)$ 各阶导数,计算更为简单。另外,当 $n \leq m$ 时,要使方程式两边所具有的冲激信号及其高阶导数相等,则 $h(t)$ 表示式中除含式(5-18)外,还需含有 $\delta(t)$ 及其相应阶的导数 $\delta^{(m-n)}(t), \delta^{(m-n-1)}(t), \dots, \delta'(t)$ 。

例 5-6 已知某线性时不变系统的微分方程为

$$\frac{dr(t)}{dt} + 6r(t) = 2e(t) + 3e'(t) \quad (t \geq 0)$$

试求系统的冲激响应 $h(t)$ 。

解 当 $e(t) = \delta(t)$ 时, $r(t)$ 即为 $h(t)$, 原微分方程式为

$$\frac{dh(t)}{dt} + 6h(t) = 2\delta(t) + 3\delta'(t) \quad (t \geq 0)$$

特征根 $\alpha = -6$, 且存在 $n = m$, 注意, 微分方程中, 为了保持微分方程式的左右平衡, 冲激响应 $h(t)$ 除具有奇次解表达式外, 还应含有 $\delta(t)$ 项, 即

$$h(t) = Ae^{-6t}u(t) + B\delta(t)$$

式中, A 、 B 为待定系数。将 $h(t)$ 代入原微分方程式有

$$\frac{d}{dt}[Ae^{-6t}u(t) + B\delta(t)] + 6[Ae^{-6t}u(t) + B\delta(t)] = 2\delta(t) + 3\delta'(t)$$

化简得

$$(A + 6B)\delta(t) + B\delta'(t) = 2\delta(t) + 3\delta'(t)$$

所以有

$$\begin{cases} A + 6B = 2 \\ B = 3 \end{cases}$$

解得 $A = -16$, $B = 3$ 。因此可得系统的冲激响应为

$$h(t) = 3\delta(t) - 16e^{-6t}u(t)$$

需要说明的是, 除可用 $h(t)$ 描述系统的时域输出外, 还可用系统的阶跃响应来描述。所谓阶跃响应, 是指当激励为 $u(t)$ 时系统所产生的零状态响应, 通常用 $g(t)$ 表示。对于线性时不变系统, 这两种响应之间有一定的依从关系, 当已求得其中之一, 则另一响应即可确定。这是因为由 LTI 系统的微积分特性, 根据 $\delta(t)$ 与 $u(t)$ 的关系, 可得出 $h(t)$ 与 $g(t)$ 的关系, 即

$$\begin{aligned} \delta(t) &\xrightarrow{\text{LTI系统}} h(t) \\ u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau &\xrightarrow{\text{LTI系统}} g(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau \\ \delta(t) = \frac{du(t)}{dt} &\xrightarrow{\text{LTI系统}} h(t) = \frac{dg(t)}{dt} \end{aligned}$$

阶跃响应 $g(t)$ 也可利用系统的微分方程求解, 在此不再详述, 感兴趣读者可参见其他相关书籍。

2. 任意激励下, 系统的零状态响应近代解法——卷积积分

系统的零状态响应除了利用微分方程求解的经典解法之外, 还可以借助 $h(t)$, 利用卷积积分的方法求解, 人们将这种解法称为近代解法。

根据 2.3.1 节所讲的信号分解理论, 设 $e(t)$ 为因果信号, 则

$$e(t) = \int_0^t e(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = \lim_{\Delta t_1 \rightarrow 0} \sum_{t_1=0}^t e(t_1)\delta(t-t_1)\Delta t_1$$

即任意信号 $e(t)$ 都可分解为无限多个冲激信号的叠加。利用线性时不变系统的特性, 任一信号 $e(t)$ 作用于系统产生的零状态响应 $r_{zs}(t)$ 可由冲激信号 $\delta(t)$ 及 $\delta(t)$ 的一系列延迟 $\delta(t-t_1)$ 产生的响应叠加而成。

设线性时不变连续系统的冲激响应为 $h(t)$, 即

$$\delta(t) \rightarrow h(t)$$

则

$$\delta(t - t_1) \rightarrow h(t - t_1)$$

由线性系统的均匀性得

$$e(t_1) \cdot \delta(t - t_1) \rightarrow e(t_1) \cdot h(t - t_1)$$

由线性系统的叠加性得

$$\sum_{t_1=0}^t e(t_1) \delta(t - t_1) \Delta t_1 \rightarrow \sum_{t_1=0}^t e(t_1) h(t - t_1) \Delta t_1$$

当 $\Delta t_1 \rightarrow 0$ 时, 上式取极限得

$$\lim_{\Delta t_1 \rightarrow 0} \sum_{t_1=0}^t e(t_1) \delta(t - t_1) \Delta t_1 \rightarrow \lim_{\Delta t_1 \rightarrow 0} \sum_{t_1=0}^t e(t_1) h(t - t_1) \Delta t_1$$

由此得

$$\int_0^t e(t_1) \delta(t - t_1) dt_1 \rightarrow \int_0^t e(t_1) h(t - t_1) dt_1$$

令 $t_1 = \tau$, 上式写为

$$\begin{aligned} \int_0^t e(\tau) \delta(t - \tau) d\tau &\rightarrow \int_0^t e(\tau) h(t - \tau) d\tau \\ &= e(t) * h(t) \end{aligned}$$

即

$$e(t) \rightarrow r_{zs}(t)$$

故系统的零状态输出

$$r_{zs}(t) = e(t) * h(t) \quad (5-20)$$

其为激励 $e(t)$ 与系统冲激响应 $h(t)$ 的卷积积分, 如图 5-17 所示。



图 5-17 系统的零状态响应

例 5-7 已知 $e(t) = u(t) - u(t - t_0)$, $h(t) = Ae^{-t}u(t)$, 求 $r(t) = e(t) * h(t)$ 的表达式。

解

$$\begin{aligned} r(t) &= \int_0^t [u(\tau) - u(\tau - t_0)] A e^{-(t-\tau)} u(t - \tau) d\tau \\ &= \int_0^t A e^{-(t-\tau)} d\tau u(t) - \int_0^t A e^{-(t-\tau)} d\tau u(t - t_0) \\ &= \frac{1}{R} e^{-(t-\tau)} \Big|_0^t u(t) - \frac{1}{R} e^{-(t-\tau)} \Big|_0^t u(t - t_0) \\ &= \frac{1}{R} (1 - e^{-t}) u(t) - \frac{1}{R} (1 - e^{-(t-t_0)}) u(t - t_0) \end{aligned}$$

在实际应用中, 经常会出现几个子系统级联或并联后形成一个总系统。下面给出系统级联和并联情况下各子系统和总系统的冲激响应之间的关系式。若总系统是由不同子系统级联在一起的, 如图 5-18 所示。

容易证明, 总系统的单位冲激响应是各子系统的单位冲激响应的卷积, 即有

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t)$$

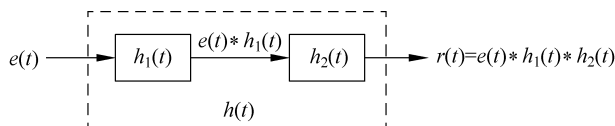


图 5-18 子系统级联

其等效图如图 5-19 所示。

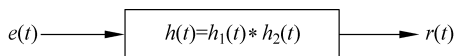


图 5-19 子系统级联等效图

若总系统是由不同子系统并联在一起,如图 5-20 所示。

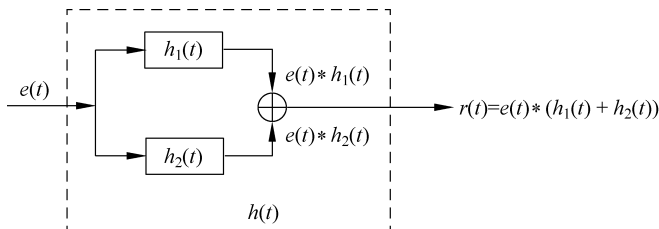


图 5-20 子系统并联

很容易证明,总系统的冲激响应为

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t)$$

其等效图如图 5-21 所示。

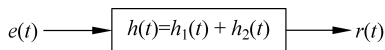


图 5-21 子系统并联等效图

对于既有级联又有并联的系统,则总系统的冲激响应仍服从上述原则。

5.3.3 利用 $h(t)$ 分析连续系统因果性和稳定性

$h(t)$ 除了可以用于求解系统的零状态响应之外,还可用于描述系统本身的特性,如因果性和稳定性。

1. 系统的因果性

一个连续时间系统是因果系统的充分必要条件可表示为

$$h(t) = 0 \quad (t < 0)$$

这是因为根据系统因果性的定义可知,因果系统在 t_0 时刻的响应只与 $t=t_0$ 和 $t < t_0$ 时刻的输入有关,而 $h(t)$ 是当激励为 $\delta(t)$ 时的响应, $\delta(t)$ 是在 $t=0$ 时刻加入, $h(t)$ 只有在 $t \geq 0$ 时刻值不为零,在 $t < 0$ 时的值均应为零时,系统才是因果系统。

2. 系统的稳定性

稳定性是系统自身的性质之一,根据稳定系统的定义:若系统对任意的有界输入,其零状态响应也是有界的。即对任意的激励信号 $e(t)$,满足

$$|e(t)| \leq M_e$$

若其响应 $r(t)$ 满足

$$|r(t)| \leq M_r$$

式中, M_e 和 M_r 为有界正值, 则称该系统是稳定的。在此定义下, 可以推出一个连续时间系统是稳定系统的充分必要条件为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt \leq M$$

式中, M 为有界正值。因此, 若冲激响应 $h(t)$ 绝对可积, 则系统是稳定的, 也就是说稳定系统的 $h(t)$ 是收敛信号, 即

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = 0$$

综上所述, 可以看出, $h(t)$ 在线性时不变连续系统分析中占有非常重要的地位, 用它既可以求解系统的零状态响应, 又可以分析系统在时域中的特性。

5.4 线性时不变离散时间系统的时域分析

同连续系统分析一样, 离散系统的时域分析, 也包括系统响应的时域求解及系统时域特性(如因果性、稳定性)的分析。下面先来看离散系统响应的求解方法。 N 阶 LTI 离散时间系统的数学模型是常系数线性差分方程, 其一般形式表示为

$$a_0 y(n) + a_1 y(n-1) + \cdots + a_N y(n-N) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \cdots + b_M x(n-M) \quad (5-21)$$

即

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$

其中, $x(n)$ 为激励; $y(n)$ 为响应。其求解方法一般可采用迭代法、经典法、卷积和法(求解零状态响应)。卷积和法在离散时间系统的分析中占据十分重要的位置。

5.4.1 差分方程的时域解法

1. 迭代法

离散时间系统的差分方程具有递推关系。若已知初始状态和 $x(n)$, 就可利用迭代法求得差分方程的数值解。

例 5-8 已知 $y(n) = ay(n-1) + x(n)$, $x(n) = \delta(n)$, $n < 0$ 时 $y(n) = 0$, 求 $y(n)$ 的表达式。

解 分别令 $n=0, 1, 2, \cdots, n$, 代入原差分方程, 依次可求出 $y(0), y(1), \cdots, y(n)$, 即

$$n=0 \quad y(0) = ay(-1) + x(0) = 0 + \delta(0) = 1$$

$$n=1 \quad y(1) = ay(0) + x(1) = a + 0 = a$$

$$n=2 \quad y(2) = ay(1) + x(2) = a \cdot a + 0 = a^2$$

$$\vdots$$

$$n=n \quad y(n) = ay(n-1) + x(n) = a^n$$

根据 $y(0), y(1), \cdots, y(n)$ 的规律, 可以得到

$$y(n) = a^n u(n)$$

用迭代法求解差分方程思路清楚,便于编写计算程序,能得到方程的数值解,但不易得到解析形式的解。此种方法更适用于求解 $y(n)$ 的前 n 个值,不要求封闭表达式解时的情况。

2. 解差分方程

与微分方程的时域经典解法类似,差分方程的解也是由齐次解和特解两部分组成,即

$$y(n) = y_h(n) + y_p(n)$$

式中, $y_h(n)$ 表示齐次解; $y_p(n)$ 表示特解。其中齐次解的形式由齐次方程的特征根确定,特解的形式由差分方程中激励信号的形式确定。

首先给出齐次解法:由式(5-21),令方程右端等于 0,得齐次差分方程为

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = 0$$

写出特征方程应为

$$\sum_{k=0}^N a_k \lambda^{N-k} = 0$$

式中有 N 个特征根 $\lambda_i (i=1, 2, \dots, N)$ 。根据特征根的不同情况,齐次解将具有不同的形式。

当特征根是互不相等的实根 $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_N$ 时,齐次解的形式为

$$y_h(n) = \sum_{k=0}^N C_k \lambda_k^n = C_0 \lambda_0^n + C_1 \lambda_1^n + \dots + C_N \lambda_N^n$$

当特征根在 λ_0 处有 L 次重根时,其余为单根时,齐次解的形式为

$$\begin{aligned} y_h(n) &= \sum_{k=1}^L C_k n^{L-k} \lambda_0^n + \sum_{i=1}^{N-L} B_i \lambda_i^n \\ &= [C_1 n^{L-1} + C_2 n^{L-2} + \dots + C_{L-1} n + C_L] \lambda_0^n + \sum_{i=1}^{N-L} B_i \lambda_i^n \end{aligned}$$

当特征根是共轭复根 $\lambda_1 = a + jb = \rho e^{j\Omega_0}$, $\lambda_2 = a - jb = \rho e^{-j\Omega_0}$ 时,仍按照前述表示方法,并可进一步整理得到如下形式

$$y_h(n) = C_1 \rho^n \cos(n\Omega_0) + C_2 \rho^n \sin(n\Omega_0)$$

上面各式中的待定系数 $C_1, C_2, \dots, C_N$ 在全解的形式确定后,由给定的 N 个初值来确定。表 5-3 列出了特征根和齐次解的对应关系。

表 5-3 不同特征根所对应的齐次解形式

特征根特性	齐次解 $y_h(n)$ 的形式
特征根是 N 个互不相等的实根,即 $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_N$	$y_h(n) = \sum_{k=0}^N C_k \lambda_k^n = C_0 \lambda_0^n + C_1 \lambda_1^n + \dots + C_N \lambda_N^n$
特征根在 λ_0 处有 L 次重根,其余为单根	$\begin{aligned} y_h(n) &= \sum_{k=1}^L C_k n^{L-k} \lambda_0^n + \sum_{i=1}^{N-L} B_i \lambda_i^n \\ &= [C_1 n^{L-1} + C_2 n^{L-2} + \dots + C_{L-1} n + C_L] \lambda_0^n + \sum_{i=1}^{N-L} B_i \lambda_i^n \end{aligned}$
特征根是一对共轭复根 $\lambda_1 = a + jb = \rho e^{j\Omega_0}$, $\lambda_2 = a - jb = \rho e^{-j\Omega_0}$	$y_h(n) = C_1 \rho^n \cos(n\Omega_0) + C_2 \rho^n \sin(n\Omega_0)$

差方特解的形式与方程右端 $x(n)$ 的形式有关。表 5-4 列出了常用激励信号所对应的特解形式。

表 5-4 几种常用激励信号对应的特解

$x(n)$	$y_p(n)$
a^n (a 不是齐次根)	Da^n
a^n (a 是单齐次根)	$(D_1n + D_2)a^n$
n^k 的多项式, 所有特征根不是 1	$D_0n^k + D_1n^{k-1} + \cdots + D_k$
n^k 的多项式, 1 是 r 重特征根	$(D_0n^k + D_1n^{k-1} + \cdots + D_k)n^r$
$a^n n^k$	$a^n (D_0n^k + D_1n^{k-1} + \cdots + D_k)$
$\sin(\omega_0 n)$ 或 $\cos(\omega_0 n)$	$D_1 \sin(\omega_0 n) + D_2 \cos(\omega_0 n)$
$a^n \sin(\omega_0 n)$ 或 $a^n \cos(\omega_0 n)$	$a^n (D_1 \sin(\omega_0 n) + D_2 \cos(\omega_0 n))$

得到齐次解和特解后, 将两者相加可得全解的表达式。将已知的 N 个初始条件代入全解中, 即可求得齐次解表达式中的待定系数, 由此获得差分方程的全解。

例 5-9 已知 $y(n) + 2y(n-1) = x(n) - x(n-1)$, $x(n) = n^2$, $y(-1) = -1$, 求 $y(n)$ 的表达式。

解 对应齐次方程的特征方程为

$$\lambda + 2 = 0$$

求得

$$\lambda = -2$$

则对应齐次解为

$$y_h(n) = C_1(-2)^n$$

下面求特解, 将 $x(n) = n^2$ 代入方程右端, 得

$$x(n) - x(n-1) = n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1$$

由表 5-2, 设特解的形式为

$$y_p(n) = D_0n + D_1$$

将 $y_p(n)$ 代入原差分方程得到

$$D_0n + D_1 + 2D_0(n-1) + 2D_1 = 2n - 1$$

整理得到

$$3D_0n + 3D_1 - 2D_0 = 2n - 1$$

利用方程左右系数对应相等原则, 求出 D_0 、 D_1 为

$$D_0 = \frac{2}{3}, \quad D_1 = \frac{1}{9}$$

则特解 $y_p(n)$ 为

$$y_p(n) = \frac{2}{3}n + \frac{1}{9}$$

全解 $y(n)$ 为

$$y(n) = C_1(-2)^n + \frac{2}{3}n + \frac{1}{9}$$

代入初值

$$y(-1) = -1$$

得到

$$C_1 = \frac{8}{9}$$

因此全解的表达式为

$$y(n) = \frac{8}{9}(-2)^n + \frac{2}{3}n + \frac{1}{9}$$

例 5-10 已知 $y(n) + 2y(n-1) + 2y(n-2) = \sin \frac{n\pi}{2}$, $y(0) = 1$, $y(-1) = 0$, 求 $y(n)$ 的表达式。

解 容易求得对应齐次方程的特征解为

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm j = -\sqrt{2} e^{\mp j\frac{\pi}{4}}$$

所以,得齐次解为

$$y_h(n) = (-\sqrt{2})^n \left(A_1 \cos \frac{n\pi}{4} + A_2 \sin \frac{n\pi}{4} \right)$$

根据方程右侧的形式,由表 5-2,设特解形式为

$$y_p(n) = D_1 \sin \frac{n\pi}{2} + D_2 \cos \frac{n\pi}{2}$$

代入方程得到

$$(2D_2 - D_1) \sin \frac{n\pi}{2} - (2D_2 + D_1) \cos \frac{n\pi}{2} = \sin \frac{n\pi}{2}$$

求出系数为

$$D_1 = -\frac{1}{5}, \quad D_2 = \frac{2}{5}$$

全解 $y(n)$ 为

$$y(n) = (-\sqrt{2})^n \left(A_1 \cos \frac{n\pi}{4} + A_2 \sin \frac{n\pi}{4} \right) - \frac{1}{5} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{2}{5} \cos \frac{n\pi}{2}$$

将初值 $y(0) = 1$, $y(-1) = 0$ 代入全解得到

$$A_1 = \frac{3}{5}, \quad A_2 = \frac{1}{5}$$

因此,全解表达式为

$$y(n) = (-\sqrt{2})^n \left(\frac{3}{5} \cos \frac{n\pi}{4} + \frac{1}{5} \sin \frac{n\pi}{4} \right) - \frac{1}{5} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{2}{5} \cos \frac{n\pi}{2}$$

5.4.2 LTI 离散系统的零输入响应和零状态响应

LTI 离散时间系统的全响应也可看作起始状态与输入激励分别单独作用于系统所产生的响应的叠加,即全响应等于零输入响应与零状态响应之和,即

$$y(n) = y_{zi}(n) + y_{zs}(n)$$

其中, $y_{zi}(n)$ 表示零输入响应; $y_{zs}(n)$ 表示零状态响应。

如果已知 N 阶 LTI 离散系统的数学模型, 即

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r) \quad (5-22)$$

如何利用求解差分方程的方法求解 $r_{zi}(n)$ 和 $r_{zs}(n)$ 。

1. 零输入响应求解

零输入响应是当输入为零时, 仅由系统的起始状态所产生的响应。在零输入情况下, 式(5-22)中等号右端 $x(n)$ 及 $x(n-r)$ 为零, 变为齐次方程。对应的解即为齐次解形式, 代入起始状态即可求出零输入响应。

例 5-11 若描述某离散系统的差分方程为

$$y(n) + 3y(n-1) + 2y(n-2) = x(n)$$

已知起始状态 $y(-1)=0, y(-2)=1/2$, 求系统的零输入响应 $y_{zi}(n)$ 。

解 特征方程为

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

解得特征根 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$, 则零输入响应为

$$y_{zi}(n) = C_1(-1)^n + C_2(-2)^n$$

代入起始状态, 有

$$y(-1) = -C_1 - \frac{1}{2}C_2 = 0$$

$$y(-2) = C_1 + \frac{1}{4}C_2 = \frac{1}{2}$$

解得 $C_1 = 1, C_2 = -2$, 故系统的零输入响应为

$$y_{zi}(n) = (-1)^n - 2(-2)^n \quad (n \geq 0)$$

2. 零状态响应求解

零状态响应是指起始状态为零时, 仅由激励所产生的响应。零状态响应的形式与全解的形式相同, 但其中齐次解的系数确定需由输入引起的初始状态 $y(0), y(1), \dots, y(N)$ 来确定, 此时需令 $y(-1)=y(-2)=\dots=y(-N)=0$, 可利用迭代法逐次导出 $y(0), y(1), \dots, y(N)$ 。

例 5-12 已知系统的差分方程表达式为

$$y(n) - 0.9y(n-1) = 0.05u(n)$$

(1) 若起始状态 $y(-1)=0$, 求系统的完全响应。

(2) 若起始状态 $y(-1)=1$, 求系统的完全响应。

解 (1) 根据已知条件 $y(-1)=0$ 可知, 系统的起始状态为零, 故零输入响应为零。因此只需求解系统的零状态响应。

由特征方程求得齐次解为 $y_h(n) = C(0.9)^n$ 。根据激励在 $n \geq 0$ 时是常数, 设特解 $y_p(n) = D$, 则全解的形式应为

$$y(n) = C(0.9)^n + D$$

为确定系数 D , 将特解代入方程得到

$$D(1 - 0.9) = 0.05$$

所以可得

$$D = 0.5$$

此时全解为

$$y(n) = C(0.9)^n + 0.5 \quad (n \geq 0)$$

下面来看系数 C 的求解方法, 由于激励在 $n=0$ 接入, 且给定 $y(-1)=0$, 系统处于零初始状态, 将 $y(-1)=0$ 代入系统的差分方程, 得 $y(0)=0.05$ 。再将 $y(0)$ 代入 $y(n)$ 表达式求出系数 C , 即

$$0.05 = y(0) = C + 0.5$$

$$C = 0.05 - 0.5 = -0.45$$

最后, 写出全响应为

$$\begin{aligned} y(n) &= -0.45 \times (0.9)^n u(n) + 0.5 u(n) \\ &= [-0.45 \times (0.9)^n + 0.5] u(n) \end{aligned}$$

波形如图 5-22 所示。

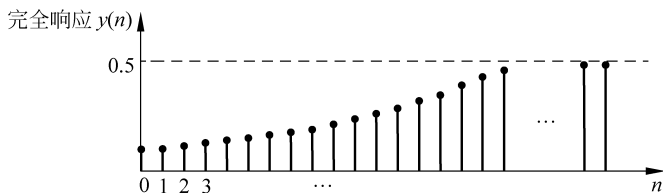


图 5-22 例 5-12(1) 的响应波形

(2) 先求零输入响应, 由于 $y(-1)=1$, 在激励加入之前, 系统起始状态不为 0, 故零输入响应不为 0。由于令激励信号等于零, 差分方程表达式为

$$y(n) - 0.9y(n-1) = 0$$

容易写出

$$y_{zi}(n) = C \times (0.9)^n$$

以 $y(-1)=1$ 代入求得系数

$$C = 0.9$$

于是有

$$y_{zi}(n) = 0.9 \times (0.9)^n$$

再求零状态响应, 此时需令 $y(-1)=0$, 此即第(1)问之结果, 可以写出

$$y(n) = [0.5 - 0.45 \times (0.9)^n] u(n)$$

将以上两部分结果叠加, 得到完全响应 $y(n)$ 表示式

$$\begin{aligned} y(n) &= \underbrace{0.5 - 0.45 \times (0.9)^n}_{\text{零状态响应}} + \underbrace{0.9 \times (0.9)^n}_{\text{零输入响应}} \\ &= 0.45 \times (0.9)^n + 0.5 \end{aligned}$$

最后, 将 $y(n)$ 的图形绘于图 5-23。

同样, 与连续系统类似, 一个起始状态不为零的 LTI 离散系统, 在外加激励作用下, 其完全响应除可以表示成零输入响应与零状态响应之和, 也可表示成自由响应和强迫响应之

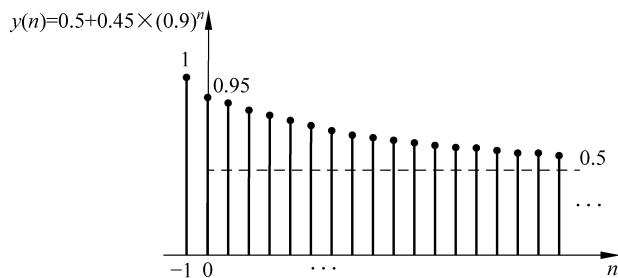


图 5-23 例 5-12(2) 的响应波形

和。即若特征根均为单根,则全响应为

$$\begin{aligned}
 y(n) &= \underbrace{\sum_{k=1}^N C_{zik} \lambda_k^n}_{\text{零输入响应}} + \underbrace{\sum_{k=1}^N C_{zsk} \lambda_k^n + y_p(n)}_{\text{零状态响应}} \\
 &= \underbrace{\sum_{k=1}^N C_k \lambda_k^n}_{\text{自由响应}} + \underbrace{y_p(n)}_{\text{强迫响应}}
 \end{aligned}$$

其中, C_{zik} 表示零输入响应的待定系数; C_{zsk} 表示零状态响应的待定系数。全响应的这两种分解方式有明显的区别,虽然自由响应和零输入响应都是奇次解的形式,但它们的系数并不相同, C_{zik} 仅由系统的起始状态所决定,而 C_k 是由初始状态和激励共同决定。另外,一般而言,如果差分方程所有的特征根均满足 $|\lambda_k| < 1$,那么其自由响应将随着 n 的增大而逐渐衰减趋近于零,这时自由响应也称为暂态响应,而全响应中随着 n 的增大趋于稳定的那部分响应也称为稳态响应。这种利用经典法求解系统的零状态响应相对复杂,后面将会看到,其可以通过离散卷积方便求出。

5.4.3 离散系统的时域特性——单位样值响应

与线性时不变连续时间系统相对应,线性时不变离散系统的时域特性也可用其单位样值响应来描述。只是此时的激励为单位样值函数 $\delta(n)$,由 $\delta(n)$ 产生的零状态响应记为 $h(n)$,如图 5-24 所示。

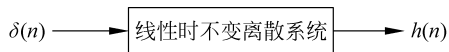


图 5-24 离散系统的单位样值响应

利用 $h(n)$ 可以很方便地求解离散系统的零状态响应,同时还可以用其分析系统的因果性和稳定性,下面逐一讲解。

首先,我们先介绍 $h(n)$ 的时域求解方法。

设 N 阶离散系统的差分方程为

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = b x(n)$$

由于 $h(n)$ 是激励为 $\delta(n)$ 系统产生的零状态响应,所以,首先将差分方程右端的激励项换为 $\delta(n)$,输出 $y(n)$ 换为 $h(n)$,得

$$\sum_{k=0}^N a_k h(n-k) = b\delta(n)$$

考虑当 $n > 0$ 时

$$\delta(n) = 0$$

此时方程变为

$$\sum_{k=0}^N a_k h(n-k) = 0$$

因此,在 $n > 0$ 时,上述方程解的形式与差分方程奇次解的形式相同。对于 $n = 0$ 时系统的单位样值响应,可通过 $n = 0$ 时刻系统的状态来求得。下面用具体例子说明求解过程。

例 5-13 系统的差分方程式为

$$y(n) - 3y(n-1) + 3y(n-2) - y(n-3) = x(n)$$

求系统的单位样值响应 $h(n)$ 。

解 令 $x(n) = \delta(n)$, 则 $y(n) = h(n)$, 而 $h(n)$ 满足差分方程

$$h(n) - 3h(n-1) + 3h(n-2) - h(n-3) = \delta(n) \quad (5-23)$$

此时,当 $n > 0$ 时,该方程变为

$$h(n) - 3h(n-1) + 3h(n-2) - h(n-3) = 0$$

求差分方程的齐次解。由特征方程

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$$

解得特征根 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, 即 1 为三重根。对应的齐次解的表达式为

$$h(n) = C_1 n^2 + C_2 n + C_3 \quad (5-24)$$

上述表达式中三个特征系数 C_1 、 C_2 、 C_3 需由三个初始条件来求得。此时根据线性时不变系统的特性,激励 $\delta(n)$ 是在 $n = 0$ 时刻加入,故在 $n = -1, -2, -3$ 时,冲激响应 $h(n)$ 为 0, 即 $h(-1) = h(-2) = h(-3) = 0$ 。而在 $n = 0$ 时刻的响应 $h(0)$ 可由式(5-23)求得。将 $n = 0$ 代入, $h(0) = 1$ 。将 $h(0)$ 、 $h(-1)$ 、 $h(-2)$ 代入式(5-24)中的 $h(n)$ 得

$$\begin{cases} 1 = C_3 \\ 0 = C_1 - C_2 + C_3 \\ 0 = 4C_1 - 2C_2 + C_3 \end{cases}$$

解得

$$C_1 = \frac{1}{2}, \quad C_2 = \frac{3}{2}, \quad C_3 = 1$$

则系统的单位样值响应为

$$h(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}(n^2 + 3n + 2) & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

例 5-14 已知系统的差分方程

$$y(n) - 5y(n-1) + 6y(n-2) = x(n) - 3x(n-2)$$

求系统的单位样值响应 $h(n)$ 。

解 令 $x(n) = \delta(n)$, 则 $y(n) = h(n)$, 代入原差分方程

$$h(n) - 5h(n-1) + 6h(n-2) = \delta(n) - 3\delta(n-2)$$

注意,此时方程右端可看作有两个激励,一个是 $\delta(n)$,另一个是 $-3\delta(n-2)$ 。为简化运算,首先考虑方程右端只有一个激励 $\delta(n)$ 作用下的单位样值响应 $h_1(n)$,然后依据系统的线性和时不变特性得出 $-3\delta(n-2)$ 作用下的 $h_2(n)=-3h_1(n-2)$,最后两个响应 $h_1(n)$ 和 $h_2(n)$ 相加即为系统总的单位样值响应 $h(n)$ 。

先来计算当只有一个激励 $\delta(n)$ 作用时的冲激响应 $h_1(n)$,此时原差分方程可变为

$$h_1(n) - 5h_1(n-1) + 6h_1(n-2) = \delta(n) \quad (5-25)$$

特征根 $\lambda_1=3, \lambda_2=2$,则对应的冲激响应为

$$h_1(n) = C_1 3^n + C_2 2^n \quad (n \geq 0)$$

将 $n=0$ 代入式(5-25)并根据 $h_1(-1)=h_1(-2)=0$ 得 $h_1(0)=1$,将 $h_1(0)=1, h_1(-1)=0$ 代入 $h_1(n)$,得

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 \\ 0 = \frac{1}{3}C_1 + \frac{1}{2}C_2 \end{cases}$$

解得

$$C_1 = 3, \quad C_2 = -2$$

则

$$h_1(n) = (3^{n+1} - 2^{n+1})u(n)$$

根据 $h_1(n)$ 可得 $-3\delta(n-2)$ 项作用引起的响应 $h_2(n)$ 。由线性时不变特性可知

$$\begin{aligned} h_2(n) &= -3h_1(n-2) \\ &= -3(3^{n-1} - 2^{n-1})u(n-2) \end{aligned}$$

系统总的响应 $h(n)$ 为

$$\begin{aligned} h(n) &= h_1(n) + h_2(n) \\ &= (3^{n+1} - 2^{n+1})u(n) - 3(3^{n-1} - 2^{n-1})u(n-2) \\ &= (3^{n+1} - 2^{n+1})[\delta(n) + \delta(n-1) + u(n-2)] - 3(3^{n-1} - 2^{n-1})u(n-2) \\ &= \delta(n) + 5\delta(n-1) + (3^{n+1} - 2^{n+1} - 3^n + 3 \times 2^{n-1})u(n-2) \\ &= \delta(n) + 5\delta(n-1) + (2 \times 3^n - 2^{n-1})u(n-2) \end{aligned}$$

由以上两例可知,线性时不变离散系统的样值响应形式即为差分方程奇次解的形式,奇次解中的待定系数求解时,需将 $n=0$ 时刻激励引起的响应作为初值求解。

5.4.4 离散系统零状态响应的近代解法——卷积和

在连续时间系统中,可以利用卷积积分的方法求系统的零状态响应。同样,对于离散时间系统,可以采用类似方法进行分析。

由于任意激励信号 $x(n)$ 可以表示为单位样值函数的线性组合,即

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)\delta(n-m)$$

如果已知系统在单位样值函数作用下的零状态响应为 $h(n)$,即

$$\delta(n) \rightarrow h(n)$$

由时不变特性则有

$$\delta(n-m) \rightarrow h(n-m)$$

同时,由线性特性的均匀性则有

$$x(m)\delta(n-m) \rightarrow x(m)h(n-m) \quad (m > 0)$$

再利用线性特性的叠加性,有

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)\delta(n-m) \rightarrow \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)h(n-m)$$

故

$$x(n) \rightarrow \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)h(n-m)$$

即激励 $x(n)$ 作用于系统产生的零状态响应是 $x(n)$ 与 $h(n)$ 的卷积和,如图 5-25 所示。

$$y_{zs}(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)h(n-m)$$

$$= x(n) * h(n)$$



图 5-25 离散系统的零状态响应

通常,一个离散时间系统是由几个子系统级联或并联在一起。下面分别给出系统级联和并联情况下的各子系统和总系统的单位样值响应之间的关系式。若总系统是由各子系统级联在一起,如图 5-26 所示。此时,总系统的单位样值响应是各子系统的单位样值响应的卷积和,即有

$$h(n) = h_1(n) * h_2(n)$$

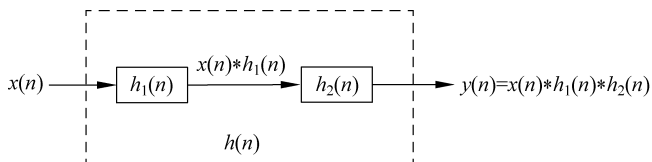


图 5-26 子系统级联

若总系统是由各子系统并联在一起,如图 5-27 所示。此时,总系统的单位样值响应是各子系统的单位样值响应之和,即有

$$h(n) = h_1(n) + h_2(n)$$

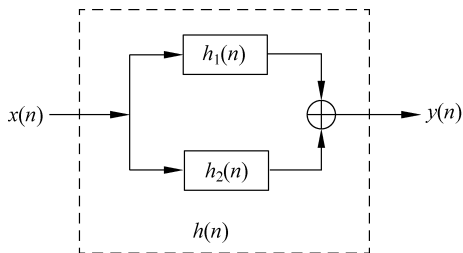


图 5-27 子系统并联

5.4.5 用 $h(n)$ 分析离散系统的因果性和稳定性

类似于连续时间系统的单位冲激响应 $h(n)$, 在离散系统时域分析中, 也可以根据 $h(n)$ 来分析系统的因果性和稳定性, 以此来区分因果系统和非因果系统、稳定系统和不稳定系统。

1. 系统的因果性

一个离散时间系统具有因果性的充分必要条件可表示为

$$h(n) = 0 \quad (n < 0)$$

式中, $h(n)$ 是当激励为 $\delta(n)$ 时的零状态响应, $\delta(n)$ 是在零时刻加入, 故若为因果系统, 响应 $h(n)$ 只有在 $n \geq 0$ 时刻值存在, 在 $n < 0$ 时的值均应为零。

2. 系统的稳定性

一个离散时间系统是稳定系统的充分必要条件可表示为

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| \leq M$$

式中, M 为有界正值。由此可见, 稳定的离散时间系统, 其时域特性 $h(n)$ 应是一个收敛序列, 即

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h(n) = 0$$

例 5-15 已知某系统的单位样值响应为 $h(n) = a^n u(n)$, 请判断

(1) 该系统是否是因果系统?

(2) 该系统是否是稳定系统?

解 (1) 因为, 当 $n < 0$ 时

$$u(n) = 0$$

所以

$$h(n) = a^n u(n) = 0 \quad (n < 0)$$

故可以判断该系统是因果系统。

(2) 根据 a 的取值, 可以判定当 $|a| > 1$ 时

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n \neq 0$$

此时, 系统不稳定。当 $|a| < 1$ 时

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0$$

此时, 系统稳定。或者根据稳定系统判定条件

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| \leq M$$

计算下式得到

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a|^n$$

这是一个等比数列, 公比为 $|a|$, 故当 $|a| < 1$ 时, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)|$ 收敛, 此时系统稳定, 当 $|a| > 1$

时, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)|$ 发散, 故系统不稳定。

5.5 相关的 MATLAB 函数

1. impulse

功能：求解连续时间系统冲激响应。

调用格式：y = impulse(num, den, t)

其中，若描述系统的微分方程为

$$\begin{aligned} C_n \frac{d^n r(t)}{dt^n} + C_{n-1} \frac{d^{n-1} r(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + C_1 \frac{dr(t)}{dt} + C_0 r(t) \\ = E_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + E_{m-1} \frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + E_1 \frac{de(t)}{dt} + E_0 e(t) \end{aligned}$$

则：num=[$E_m, E_{m-1}, \cdots, E_1, E_0$]; den=[$C_n, C_{n-1}, \cdots, C_1, C_0$]; t 为计算系统响应的抽样点向量；y 为系统冲激响应。

2. step

功能：求解连续时间系统阶跃响应。

调用格式：y = step(num, den, t)

其中，若描述系统的微分方程为

$$\begin{aligned} C_n \frac{d^n r(t)}{dt^n} + C_{n-1} \frac{d^{n-1} r(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + C_1 \frac{dr(t)}{dt} + C_0 r(t) \\ = E_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + E_{m-1} \frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + E_1 \frac{de(t)}{dt} + E_0 e(t) \end{aligned}$$

则：num=[$E_m, E_{m-1}, \cdots, E_1, E_0$]; den=[$C_n, C_{n-1}, \cdots, C_1, C_0$]; t 为计算系统响应的抽样点向量；y 为系统阶跃响应。

3. filter

功能：求解离散时间系统零状态响应数值解。

调用格式：y = filter(b, a, x)

其中，b、a 分别为系统的差分方程

$$\begin{aligned} a_0 y(n) + a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) + \cdots + a_N y(n-N) \\ = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2) + \cdots + b_M x(n-M) \end{aligned}$$

两端的系数向量[$b_0, b_1, \cdots, b_M$],[$a_0, a_1, \cdots, a_N$]; x 为输入序列；y 为输出序列。

4. impz

功能：求解离散时间系统单位样值响应。

调用格式：h = impz(b, a, k)

其中，b、a 分别为系统的差分方程

$$\begin{aligned} a_0 y(n) + a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) + \cdots + a_N y(n-N) \\ = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2) + \cdots + b_M x(n-M) \end{aligned}$$

两端的系数向量[$b_0, b_1, \cdots, b_M$],[$a_0, a_1, \cdots, a_N$]; k 为输出序列的取值范围；h 为系统单位样值响应。

习题

5-1 判断下列系统是否为线性的、时不变的、因果的,其中 $e(t)$ 表示系统的输入, $r(t)$ 表示输出。

$$(1) r(t) = \frac{de(t)}{dt};$$

$$(2) r(t) = e(t)u(t);$$

$$(3) r(t) = e(1-t);$$

$$(4) r(t) = e^2(t)。$$

5-2 以下每个系统 $x(n)$ 表示激励, $y(n)$ 表示响应。判断每个激励与响应的关系是否线性的? 是否时不变的?

$$(1) y(n) = 2x(n) + 3;$$

$$(2) y(n) = x(n) \sin\left(\frac{2\pi}{7}n + \frac{\pi}{6}\right)。$$

5-3 有一线性时不变系统,当激励是 $e_1(t) = u(t)$ 时,响应 $r_1(t) = e^{-at}u(t)$,试求当激励是 $e_2(t) = \delta(t)$,响应 $r_2(t)$ 的表示式(假定起始时刻系统无储能)。

5-4 已知描述系统的微分方程和起始状态如下,试求其零输入响应、零状态响应和全响应。

$$(1) \frac{d^2}{dt^2}r(t) + 4\frac{d}{dt}r(t) + 3r(t) = e(t), r(0^-) = r'(0^-) = 1, e(t) = u(t);$$

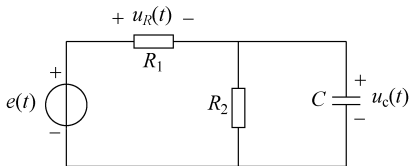
$$(2) \frac{d^2}{dt^2}r(t) + 4\frac{d}{dt}r(t) + 4r(t) = e'(t) + 3e(t), r(0^-) = 1, r'(0^-) = 2, e(t) = e^{-t}u(t)。$$

5-5 求下列微分方程描述的系统冲激响应 $h(t)$ 和阶跃响应 $g(t)$ 。

$$(1) \frac{d}{dt}r(t) + 3r(t) = 2\frac{d}{dt}e(t);$$

$$(2) \frac{d^2}{dt^2}r(t) + \frac{d}{dt}r(t) + r(t) = \frac{d}{dt}e(t) + e(t)。$$

5-6 如题图 5-6 所示的电路,若以 $e(t)$ 为输入, $u_c(t)$ 为输出, $R_1 = 1\Omega, R_2 = 1\Omega, C = 2F$ 。试列写其微分方程,并求出冲激响应和阶跃响应。

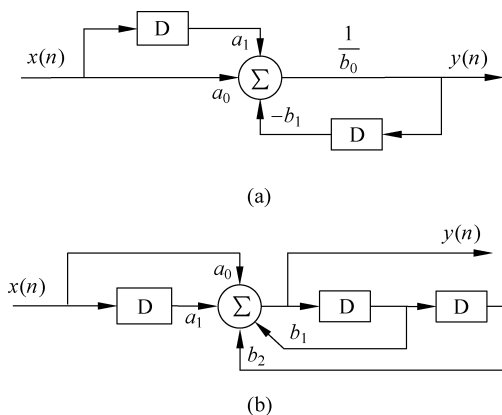


题图 5-6

5-7 列出题图 5-7 所示系统的差分方程,指出其阶次。

5-8 解差分方程 $y(n) + 2y(n-1) = n - 2$, 已知 $y(0) = 1$ 。

5-9 解差分方程 $y(n) + 2y(n-1) + y(n-2) = 3^n$, 已知 $y(-1) = 0, y(0) = 0$ 。



题图 5-7

5-10 解差分方程 $y(n) + y(n-2) = \sin(n)$, 已知 $y(-1) = 0, y(-2) = 0$ 。

5-11 描述某 LTI 离散系统的差分方程为

$$y(n] - y(n-1) - 2y(n-2) = x(n]$$

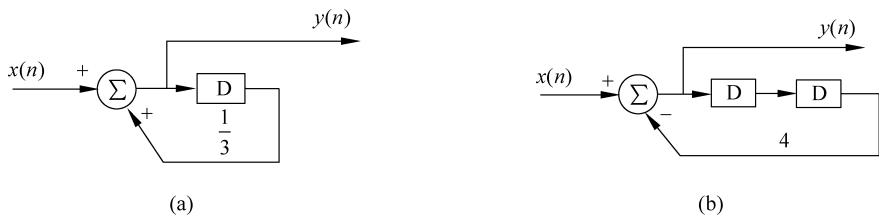
并且已知 $y(-1) = -1, y(-2) = \frac{1}{4}, x(n) = u(n)$, 求该系统的零输入响应 $y_{zi}(n)$ 、零状态响应 $y_{zs}(n)$ 及全响应 $y(n)$ 。

5-12 求下列差分方程所描述的离散时间系统的单位样值响应。

(1) $y(n] + 2y(n-1) = x(n-1]$;

(2) $y(n] - y(n-2) = x(n]$ 。

5-13 求题图 5-13 所示的各系统的单位样值响应。



题图 5-13

5-14 以下各序列中, $x(n]$ 是系统的激励, $h(n]$ 是线性时不变系统的单位样值响应。分别求出系统的响应 $y(n]$, 并画出波形(请利用卷积来做)。

(1) $x(n], h(n]$ 见题图 5-14(a);

(2) $x(n], h(n]$ 见题图 5-14(b);

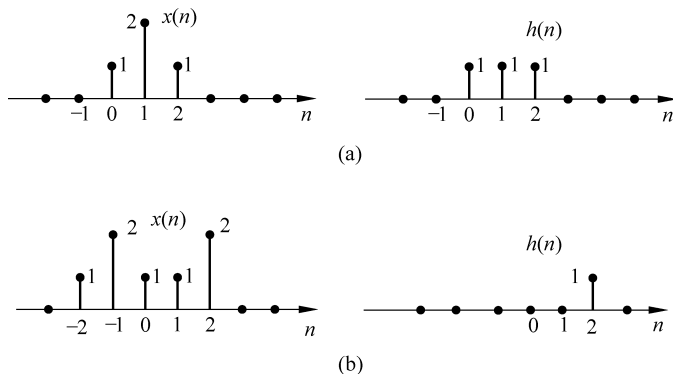
(3) $x(n] = \alpha^n u(n) (0 < \alpha < 1]$;

$h(n] = \beta^n u(n) (0 < \beta < 1, \beta \neq \alpha)$ 。

(4) $x(n] = u(n]$;

$h(n] = \delta(n-2) - \delta(n-3)$ 。

5-15 已知线性时不变系统的单位样值响应 $h(n]$ 以及输入 $x(n]$, 求输出 $y(n]$, 并绘图示出 $y(n]$ 。



题图 5-14

$$(1) h(n) = 2^n [u(n) - u(n-4)], x(n) = \delta(n) - \delta(n-2);$$

$$(2) h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n), x(n) = u(n) - u(n-5).$$

5-16 如题图 5-16 所示的系统包括两个级联的线性时不变系统, 它们的单位样值响应分别为 $h_1(n)$ 和 $h_2(n)$ 。已知 $h_1(n) = \delta(n) - \delta(n-3)$, $h_2(n) = (0.8)^n u(n)$ 。令 $x(n) = u(n)$ 。

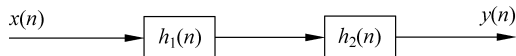
(1) 按下式求 $y(n)$ 。

$$y(n) = [x(n) * h_1(n)] * h_2(n) \quad (* \text{ 表示卷积符号})$$

(2) 按下式求 $y(n)$ 。

$$y(n) = x(n) * [h_1(n) * h_2(n)] \quad (* \text{ 表示卷积符号})$$

(3) 系统的总冲激响应 $h(n)$ 。



题图 5-16

上机习题

5-1 已知某 LTI 系统的微分方程为

$$\frac{d^2 r(t)}{dt^2} + 3 \frac{dr(t)}{dt} + 2r(t) = \frac{de(t)}{dt} + 5e(t)$$

(1) 用 MATLAB 命令求解绘出 $0 \leq t \leq 10$ 区间内系统的冲激响应 $h(t)$ 。

(2) 用 MATLAB 命令求解并绘出 $0 \leq t \leq 10$ 区间内系统的阶跃响应 $g(t)$ 。

5-2 已知某 LTI 系统的微分方程为

$$\frac{d^2 r(t)}{dt^2} + 5 \frac{dr(t)}{dt} + 6r(t) = 5e(t)$$

式中, $e(t) = e^{-t} u(t)$ 。用 MATLAB 中的 lsim 命令绘出 $0 \leq t \leq 10$ 区间内系统的零状态响应。

5-3 已知某 LTI 系统的差分方程为

$$y(n) - \frac{5}{6}y(n-1) + \frac{1}{6}y(n-2) = x(n)$$

(1) 用 MATLAB 中的 `impz` 函数求解并绘出 $0 \leq n \leq 50$ 区间内该系统的单位样值响应。

(2) 用 MATLAB 中的 `filter` 函数求解并绘出当激励信号 $x(n) = 2^n u(n)$ 时, 该系统的零状态响应。