

基于傅里叶级数和傅里叶变换的傅里叶分析方法,把信号(系统的激励信号和系统的响应信号)分解为基本信号 $e^{j\omega_1 t}$ 或 $e^{j\omega t}$ 之和,这种分解揭示了信号的频谱特性和系统的频率特性,是信号处理与系统分析和设计的重要基础,在许多领域获得了广泛的应用。但是傅里叶分析方法也存在着明显的缺陷。例如,傅里叶分析方法只能分析系统的零状态响应,不能分析全响应;大量如 $e^{\alpha t}u(t)$ ($\alpha > 0$) 和 At^n 等形式的信号傅里叶变换不存在,傅里叶变换和逆变换计算困难等。为了克服这些缺点,人们需要一种条件更宽松的变换方法,这种方法就是下面要学的拉普拉斯变换。



5.1 拉普拉斯变换的定义

首先分析信号 $g(t) = f(t)e^{-\sigma t}$ 的傅里叶变换和逆变换。容易得到:

$$G(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-(\sigma+j\omega)t} dt = F(\sigma + j\omega) \quad (5-1)$$

$$f(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\sigma + j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\sigma + j\omega) \cdot e^{\sigma t} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\sigma + j\omega) e^{(\sigma+j\omega)t} d\omega \quad (5-2)$$

在式(5-1)和(5-2)中,引入新的复数变量 $s = \sigma + j\omega$,并将 σ 看成常数,可以得到:

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (5-3)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds \quad (5-4)$$

称式(5-3)为 $f(t)$ 的双边拉普拉斯变换,称式(5-4)为 $F(s)$ 的双边拉普拉斯逆变换。

考虑因果信号的双边拉普拉斯变换可得:

$$F(s) = \int_{0_-}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (5-5)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds, \quad t > 0 \quad (5-6)$$

称式(5-5)和式(5-6)为单边拉普拉斯变换和逆变换,常常表示为 $F(s) = L[f(t)]$ 和

$f(t) = L^{-1}[F(s)]$ 。由于现实中处理的信号都是因果信号,所以单边拉普拉斯变换更常用。

任意信号 $f(t)$ 和它的双边或者单边拉普拉斯变换 $F(s)$ 之间是一一对应的。也就是说如果 $f(t)$ 的拉普拉斯变换是 $F(s)$, 那么 $F(s)$ 的逆变换一定是 $f(t)$ 。所以 $f(t)$ 和 $F(s)$ 常常称为拉普拉斯变换对, 用 $f(t) \leftrightarrow F(s)$ 表示, $f(t)$ 称为原函数, $F(s)$ 称为象函数。

从以上定义过程可以看出, 拉普拉斯变换是傅里叶变换从虚频域到复频域的推广, 也可以说, 傅里叶变换是拉普拉斯变换在 $\sigma=0$ 处, 即 $s=j\omega$ 时的特例。同时, 也容易看出, 拉普拉斯变换的参变量 $s=\sigma+j\omega$, 按照给定 σ 改变 ω 的方式在整个复平面变化, 而傅里叶变换的参变量 ω 只在虚轴上变化, 所以拉普拉斯变换定义在整个复平面, 而傅里叶变换只定义在复平面的虚轴上。



5.2 拉普拉斯变换的收敛域

收敛域就是指 $F(s)$ 存在的区域。由于 $F(s)$ 定义在整个复数平面, 它可以在整个复平面存在, 也可以在复平面的某个区域存在。而傅里叶变换 $F(j\omega)$ 只是定义在虚轴上, 所以它没有收敛域的概念。

5.2.1 双边拉普拉斯变换的收敛域

由式(5-1)所示的拉普拉斯变换的引出过程可以看出, $f(t)$ 的拉普拉斯变换可以看成是 $f(t)e^{-\sigma t}$ 的傅里叶变换, 所以若 $f(t)$ 满足式(5-7):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)e^{-\sigma t}| dt < \infty \quad (5-7)$$

则 $f(t)$ 的拉普拉斯变换一定存在。显然, 上述条件主要取决于 $\sigma = \text{Re}\{s\}$ 的选取。把能使信号 $f(t)$ 的拉普拉斯变换存在的 σ 的取值范围在 s 平面上的所确定的区域称为 $F(s)$ 的收敛域或收敛区 (Region Of Convergence, ROC)。

一般来说, 在整个时域上都不全为零的双边信号 $f(t)$, 选取任意时刻 t_0 , 都可以将其分成一个左边信号 $f_1(t)$ 和一个右边信号 $f_2(t)$ 之和, 如图 5-1 所示, 即:

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) \quad (5-8)$$

其中 $f_1(t)=0, t>t_0, f_2(t)=0, t<t_0$ 。其双边拉普拉斯变换为:

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) \quad (5-9)$$

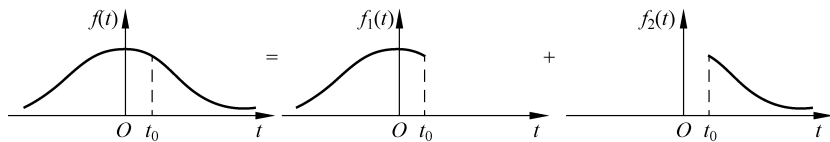


图 5-1 双边信号的分解

对于左边信号 $f_1(t)$, 如果其拉普拉斯变换存在, 总能找到一个最大的 σ_1 , 当 $\sigma < \sigma_1$ 时, 使 $\lim_{t \rightarrow -\infty} |f_1(t)e^{-\sigma t}| = 0$, 从而保证 $\int_{-\infty}^{t_0} |f_1(t)e^{-\sigma t}| dt < \infty$ 。

对于右边信号 $f_2(t)$, 总能找到一个最小的 σ_0 , 当 $\sigma > \sigma_0$ 时, 使 $\lim_{t \rightarrow \infty} |f_2(t)e^{-\sigma t}| = 0$, 从而保证 $\int_{t_0}^{\infty} |f_2(t)e^{-\sigma t}| dt < \infty$ 。

将 σ_0 和 σ_1 称为收敛坐标, $\sigma = \sigma_0$ 和 $\sigma = \sigma_1$ 为复平面上平行于虚轴的直线, 称其为收敛轴。综上分析, 不难得到不同信号的收敛域: ①左边信号的收敛域为 $\sigma = \text{Re}\{s\} < \sigma_1$, 也就是复平面收敛轴 $\sigma = \sigma_1$ 以左的区域; ②右边信号的收敛域为 $\sigma = \text{Re}\{s\} > \sigma_0$, 也就是复平面收敛轴 $\sigma = \sigma_0$ 以右的区域; ③双边信号的收敛域 $\sigma_0 < \text{Re}\{s\} = \sigma < \sigma_1$, 也就是两个收敛轴 $\sigma = \sigma_0$ 和 $\sigma = \sigma_1$ 之间的带状区域; ④如果找不到相应最小的 σ_0 , 则右边信号的拉普拉斯变换不存在; ⑤如果找不到相应最大的 σ_1 , 则左边信号的拉普拉斯变换不存在; ⑥若 $\sigma_0 > \sigma_1$, 则双边信号的拉普拉斯变换不存在。具体收敛域如图 5-2 所示。

收敛域之所以具有这样的规律性, 也和定义拉普拉斯变换的过程中, 假设 σ 为常数有关。当 σ 被看作常数时, 参变量 $s = \sigma + j\omega$, 只能按照给定 σ 改变 ω 的方式在整个复平面变化, 这就决定了收敛域的上述规律性。

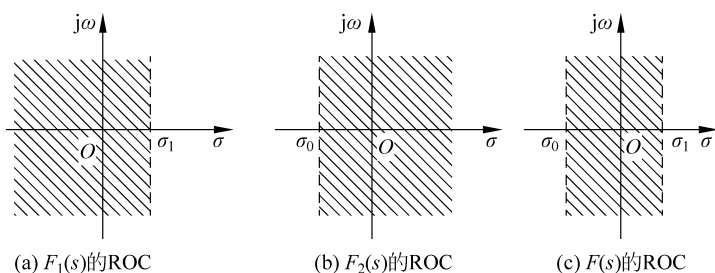


图 5-2 $F(s)$ 的 ROC

例 5.1 分别计算信号 $f(t) = e^{-|t|}$ 和 $g(t) = e^{|t|}$ 的双边拉普拉斯变换及其收敛域。

解:

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} e^{-st} dt = \int_{-\infty}^0 e^t e^{-st} dt + \int_0^{+\infty} e^{-t} e^{-st} dt$$

$$= -\left. \frac{e^{-(s-1)t}}{s-1} \right|_{-\infty}^0 - \left. \frac{e^{-(s+1)t}}{s+1} \right|_0^{\infty} = F_1(s) + F_2(s)$$

容易计算, 当 $\text{Re}\{s\} < 1$ 时, $F_1(s) = \frac{-1}{s-1}$; 当 $\text{Re}\{s\} > -1$ 时, $F_2(s) = \frac{1}{s+1}$ 。所以可得:

$$F(s) = \frac{-1}{s-1} + \frac{1}{s+1} = \frac{-2}{s^2-1}, \quad -1 < \text{Re}\{s\} < 1.$$

将 $-1 < \text{Re}\{s\} < 1$ 的区域称为该信号的收敛域, 该收敛域是一个带状区域, 如图 5-3(a) 所示。

同理, 可以计算:

$$G(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{|t|} e^{-st} dt = \int_{-\infty}^0 e^{-t} e^{-st} dt + \int_0^{+\infty} e^t e^{-st} dt = -\left. \frac{e^{-(s+1)t}}{s+1} \right|_{-\infty}^0 - \left. \frac{e^{-(s-1)t}}{s-1} \right|_0^{+\infty}$$

由于上式中第一项积分的收敛域为 $\text{Re}\{s\} < -1$; 第二项积分的收敛域为 $\text{Re}\{s\} > 1$, 如图 5-3(b) 所示。由于第一项积分和第二项积分的收敛域之间没有公共部分, 所以信号 $g(t) = e^{|t|}$ 的拉普拉斯变换不存在。

例 5.2 分别计算信号 $f(t) = e^{-t}u(t)$ 和 $g(t) = -e^{-t}u(-t)$ 的双边拉普拉斯变换。

解:

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t}u(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+1)t} dt = -\left. \frac{e^{-(s+1)t}}{s+1} \right|_0^{\infty}$$

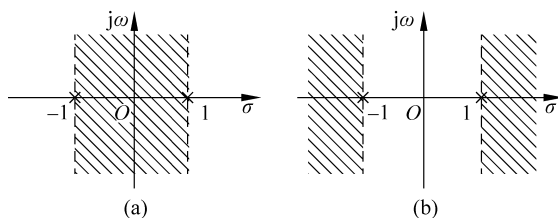


图 5-3 双边信号的收敛域

上式积分只有在 $\operatorname{Re}\{s\} + 1 > 0$, 即 $\operatorname{Re}\{s\} > -1$ 时存在, 此时

$$e^{-t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+1}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > -1$$

$$G(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} -e^{-t}u(-t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^0 -e^{-(s+1)t}dt = \left. \frac{e^{-(s+1)t}}{s+1} \right|_{-\infty}^0$$

上式积分只有在 $\operatorname{Re}\{s\} + 1 < 0$, 即 $\operatorname{Re}\{s\} < -1$ 时存在, 所以可得:

$$-e^{-t}u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{s+1}, \quad \operatorname{Re}\{s\} < -1$$

从例 5.1 可以看出, 双边拉普拉斯变换如果存在, 其收敛域一定是带状的。从例 5.2 可以看出, 两个不同的信号, 它们的双边拉普拉斯变换式完全相同, 仅仅是收敛域不同。换个方式说, 若不考虑拉普拉斯变换的收敛域, 求 $1/(s+1)$ 的拉普拉斯逆变换, 会得到两个完全不同的时域信号, 这显然是不对的。因此, 收敛域是双边拉普拉斯变换中很重要的概念, 只有双边拉普拉斯变换式和给定的收敛域相结合才能在原函数和象函数之间建立起一一对应的关系。这说明双边拉普拉斯变换比较复杂和麻烦。

5.2.2 单边拉普拉斯变换的收敛域

$f(t)$ 的单边拉普拉斯变换如式(5-5)所示。容易看出, 单边拉普拉斯变换就是 $t_0 = 0_-$ 情况下右边信号的双边拉普拉斯变换。关于其收敛域有如下收敛定理。

如果因果函数 $f(t)$ 满足: (1) 在有限区间 $a < t < b$ 内可积; (2) 对于某个 σ_0 , 当 $\sigma > \sigma_0$ 时, 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} |f(t)|e^{-\sigma t} = 0$; 则对于 $\operatorname{Re}\{s\} = \sigma > \sigma_0$, $F(s) = \int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$ 绝对且一致收敛。

收敛定理确定了单边拉普拉斯变换的收敛域, 就是复平面收敛轴 $\sigma = \sigma_0$ 以右的区域。如图 5-4 所示。这样, 在单边拉普拉斯变换情况下, 即使不标注收敛域, 也不会破坏其和原函数之间的一一对应关系, 不会出现例 5.2 的情况, 所以, 单边拉普拉斯变换一般不标注收敛域。

在涉及拉普拉斯变换的大多数实际问题中, 如 LTI 系统微分方程的求解、电路系统的分析等, 人们所关心的往往是有始信号, 单边拉普拉斯变换得到了更广泛的应用。鉴于此, 下面主要学习单边拉普拉斯。

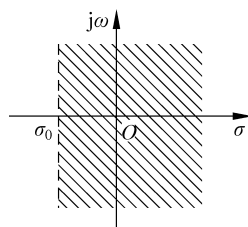


图 5-4 单边拉普拉斯变换的 ROC



5.3 单边拉普拉斯变换的性质

由于拉普拉斯变换是傅里叶变换的推广,因此拉普拉斯变换的大多数性质与傅里叶变换相似,所以在下面讨论这些性质时,将不再做详细推导,而将精力集中在讨论拉普拉斯变换所具有的特殊问题上。事实上,绝大多数单边拉普拉斯变换性质的证明,只要简单地将信号函数表达式直接代入变换关系式中做简单的推算即可,并不需要太多的技巧。

1. 线性性质

若 $f_1(t)u(t) \leftrightarrow F_1(s)$, $f_2(t)u(t) \leftrightarrow F_2(s)$, a_1, a_2 为任意常数,则:

$$a_1 f_1(t)u(t) + a_2 f_2(t)u(t) \leftrightarrow a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s) \quad (5-10)$$

例 5.3 计算 $\cos\omega t$ 的单边拉普拉斯变换。

解: 由欧拉公式可知 $\cos\omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$ 。先计算 e^{-at} 的单边拉普拉斯变换。 $L[e^{-at}] = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt = \frac{1}{s+a}$ $\sigma > -a$, 即: $e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a}$ $\sigma > -a$ 。由此,可得 $e^{-j\omega t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+j\omega}$ $\sigma > 0$; $e^{j\omega t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s-j\omega}$ $\sigma > 0$ 。利用线性性质可得: $(\cos\omega t)u(t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega^2}$, $\sigma > 0$;
同理可得: $(\sin\omega t)u(t) \leftrightarrow \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$, $\sigma > 0$ 。

2. 时域平移性质

若 $f(t)u(t) \leftrightarrow F(s)$, 则:

$$f(t \pm t_0)u(t \pm t_0) \leftrightarrow e^{\pm st_0} F(s) \quad (5-11)$$

证明:

$$\begin{aligned} L[f(t \pm t_0)u(t \pm t_0)] &= \int_0^{\infty} f(t \pm t_0)u(t \pm t_0)e^{-st} dt \\ &= \int_{\mp t_0}^{\infty} f(t \pm t_0)e^{-st} dt \end{aligned}$$

令 $\tau = t \pm t_0$, 则有 $t = \tau \mp t_0$, 代入上式得:

$$\begin{aligned} L[f(t \pm t_0)u(t \pm t_0)] &= \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-s(\tau \mp t_0)} d\tau \\ &= e^{\pm st_0} \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau} d\tau = e^{\pm st_0} F(s) \end{aligned}$$

注意,这里时域平移性质和傅里叶变换的时域平移性质有较大的区别,就是后面的阶跃信号也要平移。可以验证, $L[f(t \pm t_0)u(t)] \neq e^{\pm st_0} F(s)$ 。

例 5.4 计算门函数 $g_{\tau}(t)$ 的单边拉普拉斯变换。

解: 由于 $g_{\tau}(t)u(t) = u(t) - u(t - \frac{\tau}{2})$, 所以,先计算阶跃函数 $u(t)$ 的拉普拉斯变换。

$[u(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s}$, $\sigma > 0$ 。由拉普拉斯变换的线性性质和时移性质可得:

$$g_{\tau}(t)u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s} - \frac{e^{-\frac{\tau}{2}s}}{s} = \frac{1 - e^{-\frac{\tau}{2}s}}{s} \quad \sigma > -\infty$$

3. 尺度变换性质

若 $a > 0$ 为实常数, 则:

$$f(at)u(t) \leftrightarrow \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) \quad (5-12)$$

4. 时域微分性质

若 $f(t)u(t) \leftrightarrow F(s)$, 则:

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{dt}f(t)\right]u(t) &\leftrightarrow sF(s) - f(0^-) \\ \left[\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right]u(t) &\leftrightarrow s^2F(s) - sf(0^-) - f'(0^-) \\ \left[\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right]u(t) &\leftrightarrow s^nF(s) - \sum_{j=0}^{n-1} s^{(n-j-1)} \frac{d^j f(0^-)}{dt^j} \end{aligned} \quad (5-13)$$

证明: 对 $\frac{d}{dt}f(t)$ 直接进行单边拉普拉斯变换, 简单地使用分步积分就可得到:

$$\int_{0^-}^{+\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = f(t)e^{-st} \Big|_{0^-}^{+\infty} + s \int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt = -f(0^-) + sF(s)$$

同理可得 $\left[\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right]u(t) \leftrightarrow s^2F(s) - sf(0^-) - \frac{d}{dt}f(0^-)$

重复上述推算, 对信号 $f(t)$ 的 n 阶微分, 可得到:

$$\frac{d^n}{dt^n}f(t) \leftrightarrow s^nF(s) - \sum_{j=0}^{n-1} s^{(n-j-1)} \frac{d^j f(0^-)}{dt^j}$$

特别的, 若 $f(0^-) = 0$, 则 $\frac{d^n}{dt^n}f(t) \leftrightarrow s^nF(s)$ 。

注意, 这里的微分性质将信号的初始状态引入到了信号的象函数中, 有利于分析系统的全响应, 和傅里叶变换有明显区别。

例 5.5 计算冲激函数各阶导数 $\delta^{(n)}(t)$ 的单边拉普拉斯变换。

解: 容易计算 $L[\delta(t)] = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t)e^{-st} dt = 1$, 故有 $\delta^{(n)}(t) \leftrightarrow s^n$ 。

5. 时域积分性质

若 $f(t)u(t) \leftrightarrow F(s)$, 则:

$$\begin{aligned} \left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right]u(t) &\leftrightarrow \frac{1}{s}F(s) + \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{0^-} f(t) dt \\ [f^{(-n)}(t)]u(t) &\leftrightarrow \frac{1}{s^n}F(s) + \sum_{j=1}^n \frac{1}{s^{n-j+1}} f^{(-j)}(0^-) \end{aligned} \quad (5-14)$$

证明: 为了计算方便, 先将 $\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$ 改写为如下形式:

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{0^-} f(\tau) d\tau + \int_{0^-}^t f(\tau) d\tau$$

上式中, 等号右边第一项是常数, 第二项是函数, 两边作单边拉普拉斯变换, 有:

$$\int_{0^-}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right] e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{0^-} f(\tau) d\tau + \int_{0^-}^t f(\tau) d\tau\right] e^{-st} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{0^-}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{0^-} f(\tau) d\tau \right] e^{-st} dt + \int_{0^-}^{\infty} \left[\int_{0^-}^t f(\tau) d\tau \right] e^{-st} dt \\
&= \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{0^-} f(\tau) d\tau + \frac{1}{s} F(s)
\end{aligned}$$

重复上述过程,可得到更一般的结果。

$$[f^{(-n)}(t)]u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s^n} F(s) + \sum_{j=1}^n \frac{1}{s^{n-j+1}} f^{(-j)}(0^-)。$$

当 $\int_{-\infty}^{0^-} f(t) dt = 0$ 时, $[f^{(-n)}(t)]u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s^n} F(s)。$

例 5.6 计算 t^n 的单边拉普拉斯变换。

$$\begin{aligned}
\text{解: 由于 } L[t u(t)] &= \int_0^{\infty} t \cdot e^{-st} dt = \frac{1}{-s} \int_0^{\infty} t d e^{-st} = \frac{1}{-s} \left[t \cdot e^{-st} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{-st} dt \right] \\
&= -\frac{1}{s} \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} \right] = \frac{1}{s^2} \quad \sigma > 0
\end{aligned}$$

又由于 $t^2 u(t) = 2 \int_0^t \tau d\tau$, 所以由积分性质可得: $t^2 u(t) \leftrightarrow \frac{2}{s^3}$, 重复上述过程, 可得:

$$t^n u(t) \leftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \sigma > 0。$$

例 5.7 求图 5-5 所示梯形信号的拉普拉斯变换。

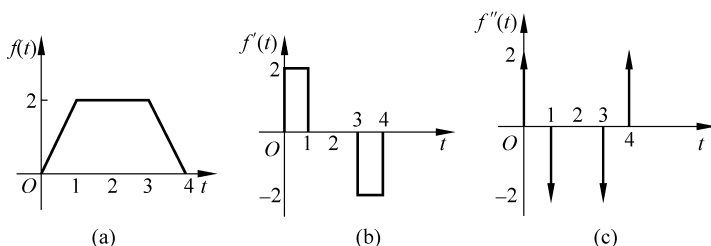


图 5-5 梯形信号波形及各阶导数

解: 直接对 $f(t)$ 求拉普拉斯变换, 需要分段求积, 较为麻烦。若利用时域微分和积分性质, 则可简化求解过程。

$f(t)$ 的一阶导数(参看图 5-5(b))为:

$$f'(t) = 2g_1\left(t - \frac{1}{2}\right) - 2g_1\left(t - \frac{7}{2}\right)$$

$f(t)$ 的二阶导数(参看图 5-5(c))为:

$$f''(t) = 2\delta(t) - 2\delta(t-1) - 2\delta(t-3) + 2\delta(t-4)$$

由于 $\delta(t) \leftrightarrow 1$, ROC 为整个 s 平面, 则由时域平移性质和线性性质, 得:

$$L[f''(t)] = 2 - 2e^{-s} - 2e^{-3s} + 2e^{-4s}$$

从一个信号的二阶微分求原信号可由积分完成, 由图 5-5(b)和(c)容易看出: $\int_{-\infty}^{0^-} f'(t) dt =$

$0, \int_{-\infty}^{0^-} f''(t) dt = 0$, 所以, 由时域积分性质, 得:

$$\begin{aligned}
 L[f(t)] &= \frac{1}{s^2} L[f''(t)] = \frac{2}{s^2} (1 - e^{-s} - e^{-3s} + e^{-4s}) \\
 &= \frac{2}{s^2} [(1 - e^{-s}) - e^{-3s} (1 - e^{-s})] = \frac{2(1 - e^{-s})}{s^2} (1 - e^{-3s})
 \end{aligned}$$

6. 时域卷积性质

若 $f_1(t)u(t) \leftrightarrow F_1(s)$, $f_2(t)u(t) \leftrightarrow F_2(s)$, 则:

$$f_1(t)u(t) * f_2(t)u(t) \leftrightarrow F_1(s)F_2(s) \quad (5-15)$$

$$\begin{aligned}
 \text{证明: } f_1(t)u(t) * f_2(t)u(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)u(\tau)f_2(t-\tau)u(t-\tau)d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F_1(s)e^{s\tau}ds \right) f_2(t-\tau)u(t-\tau)d\tau \\
 &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F_1(s) \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t-\tau)u(t-\tau)e^{s\tau}d\tau ds \\
 &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F_1(s) \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\tau+t)u(\tau+t)e^{-s\tau}d\tau ds \\
 &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F_1(s)F_2(s)e^{st}ds
 \end{aligned}$$

7. 频域卷积性质

如果 $f_1(t)u(t) \leftrightarrow F_1(s)$, $f_2(t)u(t) \leftrightarrow F_2(s)$, 则:

$$f_1(t)u(t) \times f_2(t)u(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi j} F_1(s) * F_2(s) \quad (5-16)$$

证明: 假设 $f(t) = f_1(t)u(t) \times f_2(t)u(t)$ 的拉普拉斯变换为 $F(s)$, 则:

$$\begin{aligned}
 F(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)u(t)f_2(t)u(t)e^{-st}dt \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F_1(s_1)e^{s_1\tau}ds_1 \right) f_2(t)u(t)e^{-st}dt \\
 &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F_1(s_1) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t)u(t)e^{-(s-s_1)t}dt \right) ds_1 \\
 &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F_1(s_1)F_2(s-s_1)ds_1 = \frac{1}{2\pi j} F_1(s) * F_2(s)
 \end{aligned}$$

证毕。注意, 以上两个性质和傅里叶变换对应的性质在形式上相同。

8. s 域平移性质

若 $f(t)u(t) \leftrightarrow F(s)$, 则:

$$e^{\pm s_0 t} f(t)u(t) \leftrightarrow F(s \mp s_0) \quad (5-17)$$

例 5.8 计算 $e^{-at}tu(t)$ 、 $e^{-at}(\sin\omega t)u(t)$ 和 $e^{-at}(\cos\omega t)u(t)$ 单边拉普拉斯变换。

$$\text{解: } L[e^{-at}tu(t)] = \frac{1}{(s+\alpha)^2}; \quad L[e^{-at}(\sin\omega t)u(t)] = \frac{\omega}{(s+\alpha)^2 + \omega^2}$$

$$L[e^{-at}(\cos\omega t)u(t)] = \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \omega^2}$$

9. s 域微分性质

若 $f(t)u(t) \leftrightarrow F(s)$, 则:

$$-tf(t)u(t) \leftrightarrow \frac{d}{ds}F(s) \quad (5-18)$$

推广到 n 阶复频域微分, 可得更一般的形式: $(-t)^n f(t)u(t) \leftrightarrow \frac{d^n}{ds^n}F(s)$ 。

例 5.9 求图 5-6 所示的周期信号的单边拉普拉斯变换。

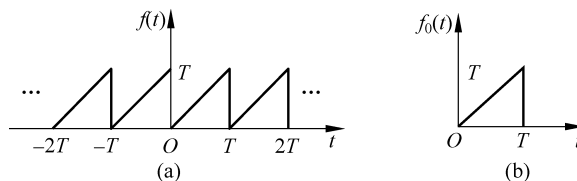


图 5-6 锯齿波信号的时域波形

解: 设 $f_0(t)$ 为 $f(t)$ 的一个周期(如图 5-6(b)所示), $f_0(t) = t[u(t) - u(t - T)]$ 则单边周期信号 $f(t)$ 可以表示为 $f(t)u(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_0(t - nT)$ 。由 s 域微分性质可得:

$$F_0(s) = -\frac{d}{ds} \frac{(1 - e^{-sT})}{s} = \frac{T e^{-sT}}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{e^{-sT}}{s^2} = \frac{e^{-sT}(sT + 1) - 1}{s^2}$$

由时移特性可得: $f(t)u(t) \leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nTs} F_0(s) = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} F_0(s)$

整理后可得: $f(t)u(t) \leftrightarrow \frac{1}{1 - e^{-sT}} \frac{e^{-sT}(sT + 1) - 1}{s^2}$ 。

例 5.10 计算冲激函数序列的单边拉普拉斯变换。

解: 由于 $\delta_T(t)u(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta(t - nT)$, $\delta(t) \leftrightarrow 1$, 所以容易得到:

$$\delta_T(t)u(t) \leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nTs} = \frac{1}{1 - e^{-sT}}$$

例 5.11 计算 $(t \sin \omega t)u(t)$ 和 $(t \cos \omega t)u(t)$ 的单边拉普拉斯变换。

解: 由 s 域微分性质可得:

$$\begin{aligned} (t \sin \omega t)u(t) &\leftrightarrow -\frac{d}{ds} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2} \\ (t \cos \omega t)u(t) &\leftrightarrow -\frac{d}{ds} \frac{s}{s^2 + \omega^2} = \frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2} \end{aligned}$$

10. 复频域积分性质

若 $f(t)u(t) \leftrightarrow F(s)$, 则:

$$\frac{1}{t} f(t)u(t) \leftrightarrow \int_s^{+\infty} F(s_1) ds_1 \quad (5-19)$$

证明: 因为 $F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$, 两边从 $s \rightarrow +\infty$ 取积分得:

$$\int_s^{+\infty} F(s_1) ds_1 = \int_s^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} f(t) e^{-s_1 t} dt \right] ds_1$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{+\infty} f(t) \left[\int_s^{+\infty} e^{-s_1 t} ds_1 \right] dt \\
 &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} f(t) e^{-st} dt
 \end{aligned}$$

证毕。

例 5.12 计算信号 $f(t) = \frac{\sin t}{t} u(t)$ 的单边拉普拉斯变换。

解：由于 $(\sin t)u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s^2+1}$ ，则利用复频域积分性质，有 $F(s) = \int_s^{+\infty} \frac{1}{s_1^2+1} ds_1$ 做变量代换： $s_1 = \frac{1}{s_0}$ ，则 $ds_1 = -\frac{1}{s_0^2} ds_0$ 。当 $s_1 \rightarrow \infty$ 时， $s_0 \rightarrow 0$ ，当 $s_1 \rightarrow s$ 时， $s_0 \rightarrow \frac{1}{s}$ ，所以有 $F(s) = \int_{\frac{1}{s}}^{\frac{1}{0}} \frac{1}{s_0^2+1} ds_0$ ，通过查积分表得到 $F(s) = \arctan \frac{1}{s}$ 。

11. 初值定理

若 $f(t)$ 的单边拉普拉斯变换为 $F(s)$ ，且 $\lim_{s \rightarrow +\infty} sF(s)$ 存在，则：

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow +\infty} sF(s) \quad (5-20)$$

证明：将 $f(t)$ 在 $t=0^+$ 处做泰勒级数展开：

$$f(t)u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n u(t) \frac{d^n}{dt^n} f(0^+) = f(0^+) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n u(t) \frac{d^n}{dt^n} f(0^+)$$

由于 $t^n u(t) \leftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}$ ，对上式两边进行单边拉普拉斯变换，得：

$$F(s) = \frac{1}{s} f(0^+) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{s^{n+1}} \frac{d^n}{dt^n} f(0^+)$$

两边同乘以 s ，并取 s 趋于无穷大的极限，有：

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = f(0^+) + \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{s^n} \frac{d^n}{dt^n} f(0^+)$$

所以，

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

可见，利用初值定理，可以直接从复频域中对 $sF(s)$ 取 $s \rightarrow +\infty$ 的极值求取信号 $f(t)$ 在 $t=0$ 时的初值 $f(0)$ ，而不需要求 $F(s)$ 的逆变换。为了使用初值定理，必须保证信号 $f(t)$ 在 $t=0$ 有确定的初值。这意味着要求 $f(t)$ 在 $t=0$ 处连续，即 $f(t)$ 在 $t=0$ 处不能包含有冲激函数及其导数。定理叙述中，条件“ $\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$ 存在”就是这个意思。

12. 终值定理

若信号 $f(t)$ 的单边拉普拉斯变换为 $F(s)$ ，且 $sF(s)$ 在 $s=0$ 处存在，则：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (5-21)$$

证明：由单边拉普拉斯变换的微分性质可得： $\int_0^{+\infty} f'(t) e^{-st} dt = sF(s) - f(0^+)$ ，又因为

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} f'(t) e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} df(t) = f(\infty) - f(0^+) = \lim_{s \rightarrow 0} [sF(s) - f(0^+)]$$

所以：
$$f(\infty)=\lim_{s\rightarrow 0}sF(s)$$

至此，讨论了单边拉普拉斯变换的 12 条性质，这些性质在计算单边拉普拉斯变换时是非常有用的，很多复杂信号的单边拉普拉斯变换都可以根据这些性质方便地求得。将上述例题中的结果总结到表 5-1 中，这些常用单边拉普拉斯变换对大家要熟记。

表 5-1 常用信号的单边拉普拉斯变换

信 号	变 换	收 敛 域
$\delta(t)$	1	整个 s 平面
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\text{Re}\{s\}>0$
$\frac{t^n}{n!}u(t)$	$\frac{1}{s^{n+1}}$	$\text{Re}\{s\}>0$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\text{Re}\{s\}>-\alpha$
$\frac{t^n}{n!}e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+\alpha)^{n+1}}$	$\text{Re}\{s\}>-\alpha$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}u(t)$	$\frac{1}{\sqrt{s}}$	$\text{Re}\{s\}>0$
$\cos(\omega t)u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\text{Re}\{s\}>0$
$\sin(\omega t)u(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\text{Re}\{s\}>0$
$e^{-at}\cos(\omega t)u(t)$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$	$\text{Re}\{s\}>-\alpha$
$e^{-at}\sin(\omega t)u(t)$	$\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$	$\text{Re}\{s\}>-\alpha$
$(t\sin\omega t)u(t)$	$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\text{Re}\{s\}>0$
$(t\cos\omega t)u(t)$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\text{Re}\{s\}>0$
$\frac{\sin t}{t}u(t)$	$\arctan\frac{1}{s}$	$\text{Re}\{s\}>0$
$\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT)$	$\frac{1}{1-e^{-sT}}$	$\text{Re}\{s\}>0$

5.4 单边拉普拉斯变换的零点和极点

1. 零点和极点的定义

一般来说，使象函数 $F(s)$ 为零的点定义为 $F(s)$ 的零点；使象函数 $F(s)$ 为无穷的点定义为 $F(s)$ 的极点。当象函数为有理分式的形式时，即 $F(s)=B(s)/A(s)$ ，其中 $B(s)$ 和 $A(s)$ 均为 s 的实系数多项式，将 $B(s)=0$ 的根定义为 $F(s)$ 的零点，将 $A(s)=0$ 的根定义为 $F(s)$ 的极点。在复平面上，极点一般用“ $\times$ ”表示，零点一般用“ $\circ$ ”表示。

零点和极点一般可以分为单阶零极点和多阶零极点，实零极点和复零极点等。由于 $B(s)$ 和 $A(s)$ 均为 s 的实系数多项式，如果出现复零点或者复极点，它们的共轭也一定是零

点或者极点,也就是说复零点和复极点都是共轭成对出现的。

常常将复平面以虚轴为分界线进行划分,将其以左的开平面称为左半开平面,将其以右的开平面称为右半开平面,所以复平面被分为三个区域,分别为左半开平面、虚轴和右半开平面。这些区域的极点或者零点分别称为位于左半开平面的零极点、位于虚轴上的零极点和位于右半开平面的零极点。

例 5.13 判断下述象函数具有哪些零点和极点,分别位于什么区域。

$$F(s) = \frac{(s^2 + 2s + 2)}{s^2(s+2)(s^2 + 4s + 4)(s^2 + 1)}$$

解: 容易得到 $F(s) = \frac{(s+1+j)(s+1-j)}{s^2(s+2)^3(s+j)(s-j)}$

所以该象函数的零点共有 2 个,分别为: $z_{1,2} = -1 \pm j$ 为一阶共轭复零点,位于左半开平面。该象函数的极点共有 7 个,分别为: $s_{1,2} = 0$ 为二阶实极点,位于虚轴上; $s_{3,4,5} = -2$ 为三阶实极点,位于左半开平面; $s_{6,7} = \pm j$ 为一阶共轭复极点,位于虚轴上。

2. 象函数极点分布与其收敛域的关系

由前面的分析知道,单边拉普拉斯变换的收敛域为收敛轴以右的区域。在收敛域内肯定不能出现极点,否则 $F(s)$ 将不收敛。所以 $F(s)$ 的所有极点都应该在收敛轴以左的区域。假设 $F(s)$ 有 N 个极点,分别为 $s_i, i=1, 2, \dots, N$, 则容易得到 $F(s)$ 的收敛坐标为:

$$\sigma_0 = \max_i \{ \operatorname{Re}[s_i] \mid i=1, 2, \dots, N \} \quad (5-22)$$

也就是说,其收敛坐标为最右边那个极点的实部。

3. $F(s)$ 与 $F(j\omega)$ 之间的转换关系

由前面分析知道, $F(s)$ 是定义在整个复平面上的,而 $F(j\omega)$ 是定义在复平面的虚轴上的。结合式(5-22),可以得到结论:

如果 $F(s)$ 的极点全在左半开平面,则其收敛域一定包含虚轴, $F(j\omega) = F(s)|_{s=j\omega}$; 如果 $F(s)$ 在虚轴或者在右半开平面有极点,则其收敛域一定不包含虚轴,上式不成立,即: $F(j\omega) \neq F(s)|_{s=j\omega}$ 。

5.5 拉普拉斯逆变换

在信号与系统的复频域分析中,经常会遇到求拉普拉斯逆变换的问题。由式(5-4)所示的拉普拉斯逆变换的定义式直接计算原函数的方法,在复变函数理论中,称为反演积分法,这是一个基本的方法。但是,它需要复变函数理论的支持,计算也比较困难。

本节主要讨论几种比较简单的常用的拉普拉斯逆变换计算方法,这些方法也可以推广到傅里叶逆变换的计算。

5.5.1 查表法

将常用信号的拉普拉斯变换收集成表,则通过表中给出的拉普拉斯变换对,从象函数查原函数是一种很方便的方法。在数学手册中,一般都有比较完备的拉普拉斯变换函数表,表 5-1 所列的仅是其中一部分。为了充分发挥拉普拉斯变换表的作用,应该熟练掌握拉普拉斯变换的各种性质,这是因为有些象函数不能直接从表中查到,往往需要通过性质将其形



式加以变换,使其能够匹配表中的函数形式,以便查找。

例 5.14 求 $F(s) = \frac{e^{-\tau s}}{\sqrt{s}}$ 的拉普拉斯逆变换。

解: 查表知 $\frac{1}{\sqrt{\pi t}}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{s}}$, 而 $e^{-\tau s}$ 仅反映原函数的延时 τ 。故有:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}u(t-\tau) \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{s}}e^{-s\tau}$$

例 5.15 求 $F(s) = \frac{2s+3}{(s+1)(s+2)}$ 的拉普拉斯逆变换。

解: 为了查表,将 $F(s)$ 展开为 $F(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2}$, 查表得 $f(t) = e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t)$ 。

例 5.16 已知 $F(s) = \frac{1}{1+e^{-2s}}$, 求 $F(s)$ 的原函数。

解: 例中 $F(s)$ 不是有理分式,但是查表 5-1 可知,它和冲激函数序列的象函数比较接近,所以将其整理如下:

$$F(s) = \frac{1}{1+e^{-2s}} = \frac{1-e^{-2s}}{(1+e^{-2s})(1-e^{-2s})} = \frac{1-e^{-2s}}{1-e^{-4s}} = \frac{1}{1-e^{-4s}} - \frac{e^{-2s}}{1-e^{-4s}}$$

查表 5-1,由单边冲激函数序列拉普拉斯变换对及时移性质,易得:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-4n) - \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-2-4n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [\delta(t-4n) - \delta(t-2-4n)] \end{aligned}$$

5.5.2 部分分式展开法

在实际问题中,象函数常常表现为有理分式形式。当对式(2-1)所示的 LTI 系统的数学模型,即一般的常系数线性微分方程两端取拉普拉斯变换,整理后可得有理分式形式的象函数为:



$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{j=0}^n a_j s^j} \quad (5-23)$$

式中 a_j, b_i 均为实数, n 和 m 分别为分母多项式 $A(s)$ 和分子多项式 $B(s)$ 的阶次。根据 n 和 m 相对大小的不同,有两种情况:

(1) $m \geq n$, 则 $F(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$ 为有理假分式。这时可用多项式除法将 $\frac{B(s)}{A(s)}$ 分解为一个有理多项式和一个有理真分式之和的形式,即:

$$\begin{aligned} F(s) &= c_0 + c_1 s + \cdots + c_{n-1} s^{m-n} + \frac{D(s)}{A(s)} \\ &= N(s) + \frac{D(s)}{A(s)} \end{aligned} \quad (5-24)$$

式中 $c_i (i=0, 1, \dots, n-1)$ 为实数, $N(s)$ 为有理多项式, $\frac{D(s)}{A(s)}$ 为有理真分式。

有理多项式 $N(s)$ 的拉普拉斯逆变换为: $c_0 \delta(t) + c_1 \delta^{(1)}(t) + \dots + c_{n-1} \delta^{(n-1)}(t)$;
 $\frac{D(s)}{A(s)}$ 的拉普拉斯逆变换可将其展开为部分分式之和后求取。

(2) $m < n$, $F(s)$ 的分子多项式 $B(s)$ 的阶次小于分母多项式 $A(s)$ 的阶次, 即 $F(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$ 为有理真分式, 故可直接将其展开为部分分式之和后求逆变换。

下面, 假设 $F(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$ 为有理真分式, 依据其分母多项式 $A(s)$ 根的具体情况, 也就是 $F(s)$ 极点的情况分别分析其部分分式展开方法。

1. $F(s)$ 仅有单极点

若 $F(s)$ 仅有 n 个单极点, 即 $A(s) = 0$ 有 n 个单根 $s_i (i=1, 2, \dots, n)$, 则无论 s_i 是实数、复数和虚数, 都可以将 $F(s)$ 展开为:

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{B(s)}{(s-s_1)(s-s_2)\dots(s-s_n)} = \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{s-s_i} \quad (5-25)$$

两边同乘 $(s-s_i)$, 并令 $s=s_i$, 则可求出各部分分式项的系数 k_i 为:

$$k_i = (s-s_i)F(s) \big|_{s=s_i} \quad (5-26)$$

由于 $e^{s_i t} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s-s_i}$, 所以, 当 $F(s)$ 仅有单阶极点时的单边拉普拉斯逆变换为:

$$f(t) = \sum_{i=1}^n k_i e^{s_i t} u(t) \quad (5-27)$$

(1) 若 n 个极点都是实极点, 此时部分分式的展开系数 k_i 均为实数, 假设 $s_i = -\sigma_i$, 则有:

$$f(t) = \sum_{i=1}^n k_i e^{-\sigma_i t} u(t) \quad (5-28)$$

(2) 若 $F(s)$ 中有一对复数极点 $s_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$, $F(s)$ 可展开为:

$$F(s) = \frac{B(s)}{(s+\alpha-j\beta)(s+\alpha+j\beta)A_1(s)}$$

容易计算:

$$k_1 = (s+\alpha-j\beta)F(s) \big|_{s=-\alpha+j\beta} = \frac{B(\alpha+j\beta)}{2j\beta A_1(\alpha+j\beta)}$$

$$k_2 = (s+\alpha+j\beta)F(s) \big|_{s=-\alpha-j\beta} = \frac{B(\alpha-j\beta)}{-2j\beta A_1(\alpha-j\beta)}$$

容易验证: $k_1 = k_2^*$, $k_2 = k_1^*$ 。若令 $k_1 = |k_1| e^{j\varphi}$, 则有:

$$F(s) = \frac{|k_1|}{s+\alpha+j\beta} e^{j\varphi} + \frac{|k_1|}{s+\alpha-j\beta} e^{-j\varphi} + \sum_{i=3}^n \frac{k_i}{s-s_i}$$

由复频域平移性质和线性性质, 可得 $F(s)$ 的原函数为:

$$f(t) = [|k_1| e^{j\varphi} \cdot e^{(-\alpha-j\beta)t} + |k_1| e^{-j\varphi} e^{(-\alpha+j\beta)t}] u(t) + L^{-1} \left[\sum_{i=3}^n \frac{k_i}{s-s_i} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= |k_1| e^{-at} [e^{-j(\beta t - \varphi)} + e^{j(\beta t - \varphi)}] u(t) + \sum_{i=3}^n k_i e^{s_i t} u(t) \\
&= 2 |k_1| e^{-at} \cos(\beta t - \varphi) u(t) + \sum_{i=3}^n k_i e^{s_i t} u(t) \quad (5-29)
\end{aligned}$$

(3) 由式(5-27)容易看出:

当一阶极点位于左半开平面时, 即 $\operatorname{Re}[s_i] = \sigma_i < 0$, 则其对应的原函数满足:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |k_i e^{s_i t} u(t)| = 0 \quad (5-30)$$

当一阶极点位于右半开平面时, 即 $\operatorname{Re}[s_j] = \sigma_j > 0$, 则其对应的原函数满足:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |k_j e^{s_j t} u(t)| = \infty \quad (5-31)$$

当一阶极点位于虚轴时, 即 $\operatorname{Re}[s_l] = \sigma_l = 0$, 则其对应的原函数满足:

$$k_l^* e^{s_l^* t} u(t) + k_l e^{s_l t} u(t) = 2 |k_l| \cos(\omega_l t - \varphi_l) \quad \text{或者} \quad k_l e^{s_l t} u(t) = k_l u(t) \quad (5-32)$$

例 5.17 已知象函数 $F(s) = \frac{2s^2 + 9s + 18}{s^2 + 4s + 8}$, 求其原函数 $f(t)$ 。

解: 整理上式为:

$$F(s) = \frac{(2s^2 + 8s + 16) + s + 2}{s^2 + 4s + 8} = \frac{s + 2}{s^2 + 4s + 8} + 2 = \frac{s + 2}{(s + 2)^2 + 4} + 2 = F_1(s) + 2$$

容易看出, $F_1(s) = \frac{s + 2}{(s + 2 + 2j)(s + 2 - 2j)}$ 具有两个共轭复根, $s_{1,2} = -\alpha \pm j\beta = -2 \pm j2$, 其对应的

系数 $k_1 = (s + 2 - j2)F_1(s)|_{s = -2 + j2} = \frac{1}{2}$ 。由式(5-29)可得: $f_1(t) = e^{-2t} \cos 2tu(t)$ 。

所以, $f(t) = 2\delta(t) + e^{-2t} \cos 2tu(t)$, $\lim_{t \rightarrow \infty} |f(t)| = 0$ 。该结果也可以通过查表得到。

例 5.18 求 $F(s) = \frac{2s^3 + 7s^2 + 10s + 6}{s^2 + 3s + 2}$ 的原函数 $f(t)$ 。

解: $F(s)$ 是一个有理假分式, 首先分解出真分式, 故采用多项式除法, 得:

$$\begin{array}{r}
2s+1 \\
s^2+3s+2 \overline{) 2s^2+7s^2+10s+6} \\
\underline{2s^2+6s^2+4s} \\
s^2+6s+6 \\
\underline{s^2+3s+2} \\
3s+4
\end{array}$$

$$F(s) = 1 + 2s + \frac{3s + 4}{s^2 + 3s + 2} = 1 + 2s + F_1(s)$$

$$F_1(s) = \frac{3s + 4}{(s + 1)(s + 2)} = \frac{k_1}{s + 1} + \frac{k_2}{s + 2}$$

$$k_1 = (s + 1)F_1(s)|_{s = -1} = (s + 1) \frac{3s + 4}{(s + 1)(s + 2)} \Big|_{s = -1} = \frac{3s + 4}{s + 2} \Big|_{s = -1} = 1$$

$$k_2 = (s + 2)F_1(s)|_{s = -2} = (s + 2) \frac{3s + 4}{(s + 1)(s + 2)} \Big|_{s = -2} = \frac{3s + 4}{s + 1} \Big|_{s = -2} = 2$$

则其逆变换为:

$$f(t) = \delta(t) + 2\delta'(t) + (e^{-t} + 2e^{-2t})u(t)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |f(t)| = 0$$

该例子的 MATLAB 实现的程序如下:

```
syms s % 定义符号变量 s
Fs = (2 * s^3 + 7 * s^2 + 10 * s + 6)/(s^2 + 3 * s + 2);
ft = ilaplace(Fs) % 拉普拉斯逆变换求原函数

计算结果: ft = exp(-t) + 2 * exp(-2 * t) + dirac(t) + 2 * dirac(1, t)
```

2. $F(s)$ 仅有重极点

假设 $F(s)$ 在 $s=s_1$ 处有 r 重极点, 则可以将 $F(s)$ 展开为:

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{B(s)}{(s-s_1)^r} = \sum_{i=1}^r \frac{k_{1i}}{(s-s_1)^{r-i+1}} = \frac{k_{11}}{(s-s_1)^r} + \frac{k_{12}}{(s-s_1)^{r-1}} + \cdots + \frac{k_{1r}}{(s-s_1)} \quad (5-33)$$

其展开系数 $k_{1i} (i=1, 2, \cdots, r)$ 可由式(5-34)确定:

$$k_{1i} = \frac{1}{(i-1)!} \frac{d^{i-1}}{ds^{i-1}} [F(s)(s-s_1)^r] \Big|_{s=s_1} \quad i=1, 2, \cdots, r \quad (5-34)$$

由式(5-34)容易得到:

$$K_{11} = [F(s)(s-s_1)^r] \Big|_{s=s_1}, \quad K_{12} = \frac{d}{ds} [F(s)(s-s_1)^r] \Big|_{s=s_1},$$

$$K_{13} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} [F(s)(s-s_1)^r] \Big|_{s=s_1} \cdots$$

由复频域平移性质、线性性质和 s 域微分性质可得, $F(s)$ 的原函数为:

$$f(t) = (k_{1,r} + k_{1,r-1}t + \frac{k_{1,r-2}}{2}t^2 + \cdots + \frac{k_{11}}{(r-1)!}t^{r-1})e^{s_1 t}u(t)$$

$$= \sum_{i=1}^r \frac{k_{1,i}}{(r-i)!} t^{r-i} e^{s_1 t} u(t) \quad (5-35)$$

(1) 若 r 重极点 $s_1 = -\sigma_1$ 是实极点, 则部分分式的展开系数 $k_{1i} (i=1, 2, \cdots, r)$ 为实数, 则:

$$f(t) = \sum_{i=1}^r \frac{k_{1,i}}{(r-i)!} t^{r-i} e^{-\sigma_1 t} u(t) \quad (5-36)$$

(2) 若 r 重极点 $s_1 = -\alpha + j\beta$ 是复极点, 则必有另一极点 $s_2 = -\alpha - j\beta$ 也是 r 重复极点, 且满足 $s_2 = s_1^*$ 。此时部分分式也呈现与复单极点类似的特点, 即若对应 s_1 和 s_2 各有 r 个展开系数, 分别为 $k_{11}, k_{12}, \cdots, k_{1i}, \cdots, k_{1r}$ 和 $k_{21}, k_{22}, \cdots, k_{2i}, \cdots, k_{2r}$, 则有: $k_{1i} = k_{2i}^* = |k_{1i}| e^{j\varphi_i}, i=1, 2, \cdots, r$ 。则原函数的一般形式为:

$$f(t) = 2 \sum_{i=1}^r \frac{|k_{1,i}|}{(r-i)!} t^{r-i} e^{-\alpha t} \cos(\beta t - \varphi_i) u(t) \quad (5-37)$$

例如, 设 $F(s)$ 有二重共轭复根, $s_1 = -\alpha + j\beta, s_2 = -\alpha - j\beta$, 则 $F(s)$ 可展开为:

$$\begin{aligned}
 F(s) &= \frac{B(s)}{(s+\alpha+j\beta)^2(s+\alpha-j\beta)^2} \\
 &= \frac{k_{12}}{(s+\alpha+j\beta)} + \frac{k_{11}}{(s+\alpha+j\beta)^2} + \frac{k_{22}}{(s+\alpha-j\beta)} + \frac{k_{21}}{(s+\alpha-j\beta)^2} \\
 &= \frac{k_{12}}{(s+\alpha+j\beta)} + \frac{k_{11}}{(s+\alpha+j\beta)^2} + \frac{k_{12}^*}{(s+\alpha-j\beta)} + \frac{k_{11}^*}{(s+\alpha-j\beta)^2} \\
 &= \frac{|k_{12}|e^{j\varphi_1}}{(s+\alpha+j\beta)} + \frac{|k_{11}|e^{j\varphi_2}}{(s+\alpha+j\beta)^2} + \frac{|k_{12}|e^{-j\varphi_1}}{(s+\alpha-j\beta)} + \frac{|k_{11}|e^{-j\varphi_2}}{(s+\alpha-j\beta)^2}
 \end{aligned}$$

由式(5-37)可得:

$$f(t) = 2|k_{12}|e^{-\alpha t}\cos(\beta t - \varphi_1)u(t) + 2|k_{11}|te^{-\alpha t}\cos(\beta t - \varphi_2)u(t)$$

(3) 由式(5-35)容易看出,

当 r 重极点位于左半开平面时, 即 $\operatorname{Re}[s_1] = \sigma_1 < 0$, 则其对应的原函数满足:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |f(t)| = \lim_{t \rightarrow \infty} \left| \sum_{i=1}^r \frac{k_{1,i}}{(r-i)!} t^{r-i} e^{s_1 t} u(t) \right| = 0 \quad (5-38)$$

当 r 重极点位于虚轴或者右半开平面时, 即 $\operatorname{Re}[s_1] = \sigma_1 \geq 0$, 则其原函数满足:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |f(t)| = \lim_{t \rightarrow \infty} \left| \sum_{i=1}^r \frac{k_{1,i}}{(r-i)!} t^{r-i} e^{s_1 t} u(t) \right| = \infty \quad (5-39)$$

3. 单根和重根同时存在的情况

一般情况下, $F(s)$ 既有各类单极点, 也会有各类 r 重极点, 即:

$$F(s) = \frac{B(s)}{(s-s_0)^r(s-s_1)\cdots(s-s_{n-r})} = \sum_{i=1}^r \frac{k_{1i}}{(s-s_0)^{r-i+1}} + \sum_{i=1}^{n-r} \frac{k_i}{s-s_i} = F_1(s) + F_2(s) \quad (5-40)$$

式中 $F_1(s)$ 仅含有 r 重极点, $F_2(s)$ 的极点全为单极点。根据线性性质, 可以分别用式(5-27)和式(5-35)中讨论的方法求出 $F_1(s)$ 和 $F_2(s)$ 对应的原函数, 从而得到:

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) = \sum_{i=1}^r \frac{k_{1,i}}{(r-i)!} t^{r-i} e^{s_0 t} u(t) + \sum_{i=1}^{n-r} k_i e^{s_i t} u(t) \quad (5-41)$$

例 5.19 计算 $F(s) = \frac{s^2}{(s+2)(s+1)^2}$ 的原函数。

解:

$$\begin{aligned}
 F(s) &= \frac{s^2}{(s+2)(s+1)^2} = \frac{k_1}{s+2} + \frac{k_{1,1}}{(s+1)^2} + \frac{k_{1,2}}{s+1} \\
 k_1 &= (s+2) \frac{s^2}{(s+2)(s+1)^2} \Big|_{s=-2} = \frac{s^2}{(s+1)^2} \Big|_{s=-2} = 4 \\
 k_{1,1} &= (s+1)^2 \frac{s^2}{(s+2)(s+1)^2} \Big|_{s=-1} = \frac{s^2}{(s+2)} \Big|_{s=-1} = 1 \\
 k_{1,2} &= \frac{d}{ds} \left[(s+1)^2 \frac{s^2}{(s+2)(s+1)^2} \right] \Big|_{s=-1} = \frac{d}{ds} \left[\frac{s^2}{s+2} \right] \Big|_{s=-1} \\
 &= \frac{2s(s+2) - s^2}{(s+2)^2} \Big|_{s=-1} = \frac{s^2 + 4s}{(s+2)^2} \Big|_{s=-1} = -3
 \end{aligned}$$

所以,查表可得: $f(t) = (4e^{-2t} - 3e^{-t} + te^{-t})u(t)$, $\lim_{t \rightarrow \infty} |f(t)| = 0$ 。

该例子的 MATLAB 实现的程序如下:

```
syms s % 定义符号变量 s
Fs = (s^2)/((s+2)*(s+1)*(s+1));
ft = ilaplace(Fs); % 拉普拉斯逆变换求原函数

计算结果: ft = 4 * exp(-2 * t) - 3 * exp(-t) + t * exp(-t)
```

本章小结

本章重点介绍了单边拉普拉斯变换的定义、收敛域、性质及正变换和逆变换的计算方法。介绍了象函数的零极点的概念,在此基础上,介绍了基于极点分布的收敛域判定方法,拉普拉斯变换和傅里叶变换的转换方法,以及不同区域极点所对应原函数的变化趋势。希望大家掌握这些概念和结论,熟练掌握拉普拉斯正变换和逆变换的计算方法。

习题

5.1 求下列信号的单边拉普拉斯变换,并注明收敛域。

- (1) $u(t+1)$ (2) $(e^{2t} + e^{-2t})u(t)$
 (3) $(t-1)u(t)$ (4) $(1+te^{-t})u(t)$

5.2 求下列函数的单边拉普拉斯变换。

- (1) $\sin\omega_0(t-1)U(t-1)$ (2) $1-2e^{-t}+e^{-2t}$
 (3) $2\delta(t)-e^{-t}$ (4) $3\sin t+2\cos t$
 (5) te^{-2t} (6) $e^{-t}\sin(2t)$

5.3 利用常用信号拉普拉斯变换对及拉普拉斯变换的性质,求下列函数的单边拉普拉斯变换。

- (1) $e^{-t}[u(t)-u(t-2)]$ (2) $\sin(\pi t)u(t)-\sin[\pi(t-1)]u(t-1)$
 (3) $\delta(4t-2)$ (4) $\sin\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)u\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)$
 (5) $\int_0^t \sin(\pi x)dx$ (6) $\frac{d^2 \sin(\pi t)}{dt^2}u(t)$
 (7) $t^2 e^{-2t}u(t)$ (8) $te^{-at}\cos(\beta t)u(t)$

5.4 设 $f(t)u(t) \leftrightarrow F(s)$, 且有实常数 $a>0, b>0$, 试证明:

- (1) $f(at-b)u(at-b) \leftrightarrow \frac{1}{a}e^{-\frac{b}{a}s}F\left(\frac{s}{a}\right)$
 (2) $\frac{1}{a}e^{-\frac{b}{a}t}f\left(\frac{t}{a}\right)u(t) \leftrightarrow F(as+b)$

5.5 图 5-7 所示均为从 $t=0$ 起始的周期信号。求 $f(t)$ 的单边拉普拉斯变换。

5.6 已知因果信号 $f(t)$ 的象函数为 $F(s)$, 利用初值和终值定理计算下列 $F(s)$ 的原函数 $f(t)$ 的初值 $f(0)$ 和终值 $f(\infty)$, 并检验其正确性。

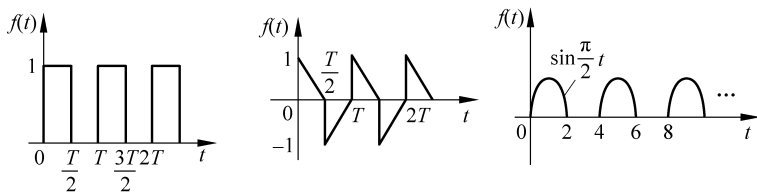


图 5-7 单边周期信号波形

$$(1) F(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)}$$

$$(2) F(s) = \frac{s+3}{s^2+6s+10}$$

$$(3) F(s) = \frac{2}{s(s+2)^2}$$

$$(4) F(s) = \frac{2s+1}{s^3+3s^2+2s} = \frac{2s+1}{s(s+1)(s+2)}$$

$$(5) F(s) = \frac{1-e^{-2s}}{s(s^2+4)}$$

5.7 已知 $f(t)$ 为因果信号, 求下列信号的象函数。

$$(1) e^{-2t}f(2t)$$

$$(2) (t-2)^2 f\left(\frac{1}{2}t-1\right)$$

$$(3) te^{-t}f(3t)$$

$$(4) f(at-b), a>0, b>0$$

5.8 求下列各象函数的拉普拉斯逆变换。

$$(1) \frac{1}{(s+2)(s+4)}$$

$$(2) \frac{s^2+1}{s^2+5s+6}$$

$$(3) \frac{2}{s(s^2+4)}$$

$$(4) \frac{2s}{(s+2)(s^2+2s+1)}$$

$$(5) \frac{s^2+4s+5}{s^2+3s+2}$$

$$(6) \frac{s^2+4s}{(s+1)(s^2-4)}$$

$$(7) \frac{1}{(s^2+1)^2}$$

$$(8) \frac{s+5}{s(s^2+2s+5)}$$

$$(9) \frac{1}{s(1+e^{-s})}$$

$$(10) \left(\frac{1-e^{-s}}{s}\right)^2$$

$$(11) \frac{\pi(1+e^{-s})}{(s^2+\pi^2)(1-e^{-2s})}$$

$$(12) \frac{\pi(1-e^{-2s})}{s^2+\pi^2}$$

$$(13) \frac{1}{(s+3)(s+2)^2}$$