

分数阶算子及分数阶变换

作为傅里叶变换的广义形式,分数阶傅里叶变换是一种统一的时频分析方法,且可以理解为角度 α 的时频平面旋转,因此依据分数阶傅里叶变换可以定义一些有用的分数阶算子和分数阶变换。

3.1 分数阶算子

在讨论分数阶变换之前,我们先来解释一下分数阶算子的概念。假设有算子 $O(\cdot)$,

$$O(g(x)) = G(y) \quad (3.1)$$

那么,它的分数阶算子(记作 $O^a(\cdot)$,其中 a 是实数)满足下列性质:

(1) 边界性

$$O^0(g(x)) = g(x), \quad O^1(g(x)) = G(y) \quad (3.2)$$

(2) 可加性

$$O^b(O^a(g(x))) = O^a(O^b(g(x))) = O^{a+b}(g(x)) \quad (3.3)$$

由于参数 a 可任意选取,一些由经典算子不能解决的问题,可用更为灵活的分数阶算子解决。

容易得出一些运算的分数阶形式,例如,可以将乘法运算 $O(g(x)) = g(x)f(x)$ 的分数阶算子定义为

$$O^a(g(x)) = g(x)f^a(x) \quad (3.4)$$

不过,对大多数运算来说,它们的分数阶算子并不显而易见,我们通过如下方法来求得。

假设算子 O 可以被分解为 O_1^{-1} 、 O_2 和 O_1 ,即

$$G(y) = O(g(x)) = O_1^{-1}(O_2[O_1(g(x))]) \quad (3.5)$$

且 O_2 的分数阶算子已知,则由此可得 O 的分数阶算子为

$$G_a(y') = O^a(g(x)) = O_1^{-1}(O_2^a[O_1(g(x))]) \quad (3.6)$$

如果 O_2 是乘法运算,那么它的分数阶算子的导出可进一步简化。由第 2 章内容,我们知道对于傅里叶变换

$$G(\omega) = \mathcal{F}(g(t)) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} g(t) dt \quad (3.7)$$

它的分数阶算子,也就是分数阶傅里叶变换(FRFT)定义为

$$G_p(u) = O_F^p(g(t)) = \sqrt{\frac{1-j\cot\alpha}{2\pi}} e^{\frac{j}{2}u^2\cot\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jut\csc\alpha} e^{\frac{j}{2}t^2\cot\alpha} g(t) dt \quad (3.8)$$

其中, $\alpha = p\pi/2$ 。由上式可以看出分数阶傅里叶变换能够分解为如下三步(图 3.1)^[1]:

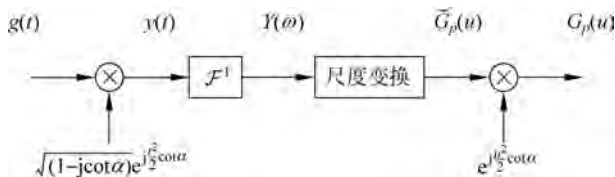


图 3.1 分数阶傅里叶变换的分解步骤示意图

(1) 乘以 chirp 信号

$$y(t) = \sqrt{(1-j\cot\alpha)} e^{\frac{j}{2}t^2\cot\alpha} g(t)$$

(2) 傅里叶变换(自变量存在尺度转变), $\tilde{G}_p(u) = Y \csc\alpha u$, 其中,

$$Y(\omega) = \mathcal{F}[y](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-j\omega t} dt$$

(3) 乘以 chirp 信号

$$G_p(u) = e^{\frac{j}{2}u^2\cot\alpha} \tilde{G}_p(u)$$

因此,我们可以将传统基于傅里叶变换的对偶算子($O, \tilde{O}$)推广到基于分数阶傅里叶变换的分数阶对偶算子($O^p, \tilde{O}^p$),其示意图如图 3.2 所示,图中 O 表示时域算子, $\tilde{O}$ 表示 O 的频域对偶算子, O^p 表示 O 的 p 阶分数阶算子, $\tilde{O}^p$ 表示 O^p 的 p 阶分数阶傅里叶域对偶算子,也就是 $\tilde{O}$ 的 p 阶分数阶算子。依据图 3.2,我们可以得到分数阶卷积的对偶形式。本章 3.3 节还将依据对偶转换的概念得到另外一些分数阶对偶算子。

3.1.1 分数阶卷积

在传统的傅里叶变换理论中,两个函数 $f(t)$ 与 $g(t)$ 的卷积定义为

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(t - \tau) d\tau \quad (3.9)$$

或简记为 $h = f * g$ 。其运算特性是:一个域的卷积对应于另一个域的乘积,即

$$f(t) * g(t) = h(t) \xrightarrow{\text{FT}} H(\omega) = \sqrt{2\pi} F(\omega) \times G(\omega) \quad (3.10)$$

$$\sqrt{2\pi} f(t) \times g(t) = h(t) \xrightarrow{\text{FT}} H(\omega) = F(\omega) * G(\omega) \quad (3.11)$$

接下来将这种传统的卷积理论直接推广到分数阶傅里叶域中^[2]。设 $s(t) = f(t) \times g(t)$, 则

$$S_p(u) = A_\alpha e^{j(u^2/2)\cot\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(t) e^{j(t^2/2)\cot\alpha - jut\csc\alpha} dt$$



教学视频



教学视频

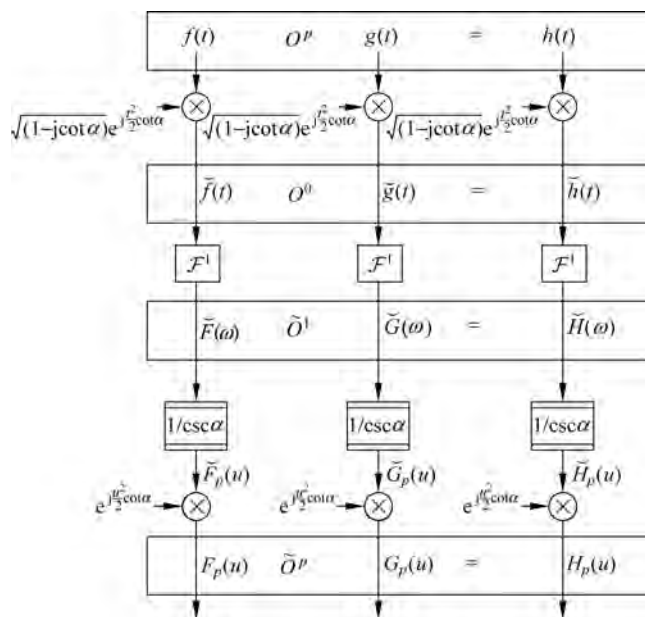


图 3.2 分数阶对偶算子构造示意图

$$= \frac{|\csc \alpha|}{\sqrt{2\pi}} e^{j(u^2/2)\cot \alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} F_p(v) G[(u-v)\csc \alpha] e^{-j(v^2/2)\cot \alpha} dv \quad (3.12)$$

其中, $A_\alpha = \sqrt{1-j\cot \alpha}$, $A_{-\alpha} = \sqrt{1+j\cot \alpha}$, $\alpha = p\pi/2$ 。这里所用的傅里叶变换为如下对称形式:

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.13)$$

同样, 令 $h(t) = f(t) * g(t)$, 则 $H(\omega) = \sqrt{2\pi} F(\omega) G(\omega)$ 。我们知道 $H_p(u)$ 可以看作对 $H(\omega)$ 作旋转角度为 $\alpha - \pi/2$ (即 $p-1$ 阶) 的分数阶傅里叶变换。这样, 根据式(3.12)可以得到

$$\begin{aligned} H_p(u) &= \mathcal{F}^{p-1} \{ \sqrt{2\pi} F(\omega) G(\omega) \} \\ &= |\sec \alpha| e^{-j(u^2/2)\tan \alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} F_p(v) g[(u-v)\sec \alpha] e^{j(u^2/2)\tan \alpha} dv \end{aligned} \quad (3.14)$$

显然式(3.12)、式(3.14)这样的表示并不令人满意, 因为它们并没有像经典傅里叶卷积定理那样明确的对偶表示形式。因此, 根据图 3.2, 我们可以得到另一种表达形式。

对于任意函数 $f(t)$, 定义函数 $f'(t) = f(t) e^{j\frac{\cot \alpha}{2} t^2}$, $f''(t) = f(t) e^{-j\frac{\cot \alpha}{2} t^2}$, 则两个函数 $f(t)$ 与 $g(t)$ 的分数阶卷积可以定义为

$$h(t) = (f \overset{p}{*} g)(t) = \frac{A_\alpha}{\sqrt{2\pi}} e^{-j\frac{\cot \alpha}{2} t^2} \left[f(t) e^{j\frac{\cot \alpha}{2} t^2} \right] * \left[g(t) e^{j\frac{\cot \alpha}{2} t^2} \right] \quad (3.15)$$

同样, 它们的分数阶乘积定义为

$$\begin{aligned} s(t) &= (f \overset{p}{\times} g)(t) = \frac{e^{j\frac{\cot \alpha}{2} t^2}}{\sqrt{2\pi}} (f'' * g'') \\ &= \frac{e^{j\frac{\cot \alpha}{2} t^2}}{\sqrt{2\pi}} [f(t) e^{-j\frac{\cot \alpha}{2} t^2}] * [g(t) e^{-j\frac{\cot \alpha}{2} t^2}] \end{aligned} \quad (3.16)$$

这样,分数阶卷积的实现就可分解成如图 3.3 所示的结构^[3]。

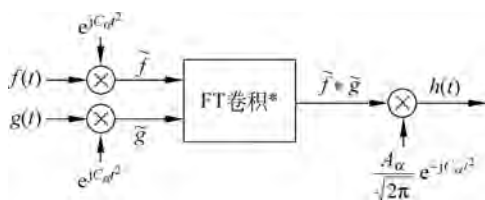


图 3.3 分数阶卷积分解结构($C_\alpha = \cot\alpha/2$)

通过推导,可以得到如下的分数阶卷积理论表示^[2]。

若 $h(t) = (f \overset{p}{*} g)(t)$, 则

$$H_p(u) = e^{-jC_\alpha u^2} F_p(u) \times G_p(u) \quad (3.17)$$

$$\mathcal{F}^p \{f(t)g(t)e^{jC_\alpha u^2}\} = A_{-\alpha} (F_p \overset{p}{\times} G_p)(u) \quad (3.18)$$

此时,分数阶傅里叶域的卷积与乘积理论的表达形式就比较明确了:两个函数在参照域的分数阶卷积对应于它们的分数阶傅里叶变换乘积再乘以一个线性调频信号;两个函数在参照域的乘积再乘以一个线性调频信号对应于它们的分数阶傅里叶变换的分数阶乘积再做幅值调制。

特别地,当 $\alpha=0$ (即 $p=0$) 时,两个函数的分数阶卷积和分数阶乘积就退化成两个时间函数的经典卷积和乘积;当 $\alpha=\pi/2$ (即 $p=1$) 时,两个函数的分数阶卷积和分数阶乘积就退化成两个频域函数的经典卷积和乘积。

3.1.2 分数阶相关

相关(Correlation)是信号处理特别是信号检测理论中一个十分重要的概念。相关运算主要用来对两个信号进行比较,或者从一个强信号中发现某种微弱信号。经典意义下的相关运算只限于在时域或频域进行,随着分数阶傅里叶变换的出现,有必要将相关运算推广到任意分数阶傅里叶域,由此产生了分数阶相关(Fractional Correlation)的概念。分数阶相关是经典相关的推广,下面将由相关的概念出发,导出分数阶相关的几种定义,分析它的时变性质,并介绍分数阶相关在信号检测中的应用。

3.1.2.1 分数阶相关的多种定义

若时域表示的输入信号和参考信号为 $s(t)$ 和 $h(t)$, 则两信号的时域相关和频域相关分别定义为

$$(s \otimes h)(\tau) = \int s(t)h^*(t-\tau)dt \quad (3.19)$$

$$(s \otimes_{\pi/2} h)(\nu) = \int s(t)h^*(t)e^{-j2\pi\nu t}dt \quad (3.20)$$

其中, $\otimes$ 表示相关符号。在信号处理领域,为了便于数学上表示各种变换关系,会定义一些算子,如傅里叶变换用算子 $\mathcal{F}$ 表示,分数阶傅里叶变换用算子 $\mathcal{F}^p$ 或 $\mathcal{F}^\alpha$ ($\alpha = p\pi/2$) 表示。为了描述相关运算,文献[4]引入了移位算子的概念。时移算子 $\mathcal{T}_\tau$ 和频移算子 $\mathcal{O}_\nu$ 分别定义为

$$(\mathcal{T}_\tau s)(t) = s(t-\tau) \quad (3.21)$$

和

$$(\mathcal{O}_\nu s)(t) = e^{j2\pi\nu t} s(t) \quad (3.22)$$

将时域相关用时移算子表示可写成

$$(s \otimes_0 h)(\tau) = \int s(\beta) h^*(\beta - \tau) d\beta = \langle s, \mathcal{T}_\tau h \rangle \quad (3.23)$$

同样地, 频域相关也可以用频移算子来表示, 即

$$(s \otimes_{\pi/2} h)(\nu) = \int s(t) h^*(t) e^{-j2\pi\nu t} dt = \langle s, \mathcal{O}_\nu h \rangle \quad (3.24)$$

从式(3.23)和式(3.24)可以发现, 所谓两个信号的时域相关或频域相关, 是指将一个信号做时移或频移再与另一个信号做内积的输出结果。时移算子和频移算子虽然不同, 但是根据傅里叶变换的性质可以建立两者之间的等效关系。这种关系可以写成

$$\mathcal{O}_\nu = \mathcal{F}^{-(\pi/2)} \mathcal{T}_\nu \mathcal{F}^{(\pi/2)} \quad (3.25)$$

因为分数阶傅里叶变换可看作傅里叶变换的一种广义形式, 仿照上式中的关系, 并且将式中的傅里叶变换算子 $\mathcal{F}^{\pi/2}$ 用分数阶傅里叶变换算子 $\mathcal{F}^\alpha$ 代替, 可定义一种新的分数阶移位算子 $\mathcal{R}_\rho^\alpha$, 它和时移算子之间的关系可写成^[4]

$$\mathcal{R}_\rho^\alpha = \mathcal{F}^{-\alpha} \mathcal{T}_\rho \mathcal{F}^\alpha \quad (3.26)$$

它可以理解为信号在分数阶傅里叶域产生某种位移。可以证明, 分数阶移位算子具备如下两个特性

$$\mathcal{R}_{\rho_1}^\alpha \mathcal{R}_{\rho_2}^\alpha = \mathcal{R}_{\rho_1 + \rho_2}^\alpha \quad (3.27)$$

$$(\mathcal{R}_\rho^\alpha)^{-1} = \mathcal{R}_{-\rho}^\alpha \quad (3.28)$$

用分数阶移位算子 $\mathcal{R}_\rho^\alpha$ 作用一个时域信号 $s(t)$ 将会使信号产生什么样的变化呢? 利用分数阶傅里叶变换的性质不难推导出

$$(\mathcal{R}_\rho^\alpha s)(t) = s(t - \rho \cos \alpha) e^{j2\pi(\rho^2/2) \cos \alpha \sin \alpha + j2\pi \rho \sin \alpha} \quad (3.29)$$

可以看出, 算子 $\mathcal{R}_\rho^\alpha$ 对信号的作用效果既有时移分量 $\rho \cos \alpha$, 又有频移分量 $\rho \sin \alpha$ 。由信号的时频表示出发, 我们也可以从信号时频分布的变化来理解算子 $\mathcal{R}_\rho^\alpha$ 的作用。如图 3.4 所示, $\mathcal{R}_\rho^\alpha$ 的作用是将信号 $s(t)$ 的 Wigner 分布在时频平面上沿 α 角方向移动距离 ρ 。

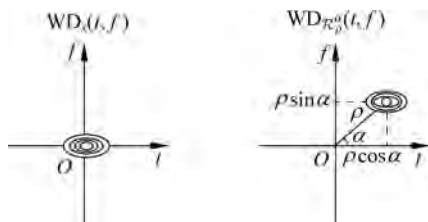


图 3.4 分数阶移位算子 $\mathcal{R}_\rho^\alpha$ 对信号的时频分布的作用效果

可以看出, 式(3.29)定义的分数阶平移算子 $\mathcal{R}_\rho^\alpha$ 表示时频平面上沿角度 α 方向(逆时针测得)的径向平移, 这样 $(\mathcal{R}_\rho^\alpha s)(t)$ 就是信号 $s(t)$ 经分数阶傅里叶域平移后的时域表示。可以看出, 当 $\alpha = 0$ 和 $\alpha = \pi/2$ 时, 分数阶平移算子就分别退化为时间平移算子和频率平移算子, 即 $(\mathcal{R}_\rho^0 s)(t) = s(t - \rho)$ 和 $(\mathcal{R}_\rho^{\pi/2} s)(t) = s(t) e^{j2\pi \rho}$ 。

用分数阶平移算子定义分数阶傅里叶域的相关概念需要把线性时不变系统(Linear

Time-Invariant, LTI) 推广为线性分数阶移不变系统, 参见图 3.5 和图 3.6。输入信号与系统响应函数的分数阶相关可以解释为输入信号与系统脉冲响应 $h(t)$ 分数阶平移 ρ 后的内积

$$\begin{aligned} \text{CORR}^p [s(t), h(t)](\rho) &= \langle s, \mathcal{R}_\rho^\alpha h \rangle \\ &= e^{-j2\pi\frac{\rho^2}{2}\cos\alpha\sin\alpha} \int s(t) h^*(t - \rho\cos\alpha) e^{-j2\pi t\rho\sin\alpha} dt \end{aligned} \quad (3.30)$$

其中, $\alpha = p\pi/2$, p 为分数阶傅里叶变换的阶数。

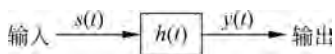


图 3.5 一个简单的 LTI 系统

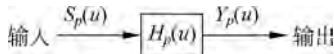


图 3.6 对应的 LFRT 系统

实际上, 与时移或频移算子相比, 分数阶移位算子是一种更为一般化的移位算子, 时移或频移算子是它的两个特例。当 $\alpha=0$ 时, 分数阶移位算子退化为时移算子; 当 $\alpha=\pi/2$ 时, 分数阶移位算子退化为频移算子。

此外, 我们还可导出另外两个等价的分数阶相关定义式, 这两种定义可用于分数阶相关的离散计算。

根据分数阶傅里叶变换的西特性^[5], 有 $\langle s, h \rangle = \langle \mathcal{F}^\alpha s, \mathcal{F}^\alpha h \rangle$, 由此, 可以导出分数阶相关的第二种定义式, 即

$$\begin{aligned} (s \otimes_\alpha h)(\rho) &= \langle s, \mathcal{R}_\rho^\alpha h \rangle = \langle s, \mathcal{F}^{-\alpha} \mathcal{T}_\rho \mathcal{F}^\alpha h \rangle = \langle \mathcal{F}^\alpha s, \mathcal{T}_\rho \mathcal{F}^\alpha h \rangle \\ &= \int S_\alpha(\beta) [H_\alpha(\beta - \rho)]^* d\beta = (S_\alpha \otimes_0 H_\alpha)(\rho) \end{aligned} \quad (3.31)$$

这表明分数阶相关可以通过输入信号与脉冲响应函数分别进行分数阶傅里叶变换后再进行经典相关计算得到。按照此定义, 计算分数阶相关的方法是先对信号求旋转角为 α 的分数阶傅里叶变换, 再在与 α 相应的分数阶傅里叶域内作经典相关运算。其中相关运算比较耗时, 可以利用傅里叶变换的卷积性质将相关运算转换为乘积运算。于是, 可导出分数阶相关的第三种定义式, 即

$$(s \otimes_\alpha h)(\rho) = (S_\alpha \otimes_0 H_\alpha)(\rho) = \mathcal{F}^{-\pi/2} \{ S_{\pi/2+\alpha}(u) [H_{\pi/2+\alpha}(u)]^* \}(\rho) \quad (3.32)$$

这里利用了 $p+1$ 阶分数阶傅里叶变换等价于对信号的 p 阶分数阶傅里叶变换作傅里叶变换。这种计算方法首先对信号求转角为 $\alpha + \pi/2$ 的分数阶傅里叶变换, 然后求它们的乘积, 再求逆傅里叶变换。分数阶傅里叶变换和逆傅里叶变换都有快速算法, 所以第三种定义是一种计算分数阶相关的有效方法。以上定义均为针对确定信号的分数阶相关定义, 第 8 章将进一步分析针对随机信号的分数阶相关函数。

3.1.2.2 分数阶相关的性质

前面介绍了分数阶相关的几种定义及计算方法, 下面将介绍其特性及应用。众所周知, 相关运算是移不变的, 也就是说, 如果输入信号有一个延迟, 相关输出也有同样一个延迟, 但波形不变。根据相关的移不变特性, 在一些应用中, 含有目标回波信号的输入信号与参考信号作相关运算(匹配滤波), 不论目标信号在什么位置, 只要与参考信号相匹配就能被检测到, 而且相关峰值的位置表明了被检测目标的位置。分数阶相关一般不具备上述特性, 它的最大特点在于它的移变属性。移变特性是分数阶相关最为显著的特性, 也是正确地将分数

阶相关运用于信号检测的基础。下面将从分数阶相关第一种定义出发,重点分析其移变特性。

首先对分数阶相关定义式(3.30)的两端取模,可以得到

$$g(\rho) = |(s \otimes_{\alpha} h)(\rho)| = \left| \int s(t) h^*(t - \rho \cos \alpha) e^{-j2\pi t \rho \sin \alpha} dt \right| \quad (3.33)$$

假定 $h_0(t)$ 为要检测的目标信号,输入信号 $s(t) = h_0(t - t_{\text{inp}})$, 参考信号 $h(t) = h_0(t - t_{\text{ref}})$, 对函数 $g(\rho)$ 求导并令其等于 0, 可得到分数阶相关峰值的位置为

$$\rho_{\text{peak}} = (t_{\text{inp}} - t_{\text{ref}}) \sec \alpha \quad (3.34)$$

在 $\rho = \rho_{\text{peak}}$ 处, 相关峰值为

$$g(\rho_{\text{peak}}) = \left| \int |h_0(t)|^2 e^{-j2\pi t (t_{\text{inp}} - t_{\text{ref}}) \tan \alpha} dt \right| \quad (3.35)$$

可以看出, 分数阶相关的峰值位置 and 高度与角度 α 以及目标相对位置均呈现一定关系, 我们将针对各种情况来进行分析。当 $\alpha = 0$ (经典相关) 时, 相关峰值位置 $\rho_{\text{peak}} = t_{\text{inp}} - t_{\text{ref}}$, 相关峰值 $g(\rho_{\text{peak}}) = \int |h_0(t)|^2 dt$, 这表明经典相关峰值高度与目标信号的位置无关, 不管目标在何处, 相关峰值都保持相同的高度; 对于分数阶相关, 当 $t_{\text{inp}} = t_{\text{ref}}$ 时, 峰值位置在零点, 且相关峰值达到最大高度 $g(\rho_{\text{peak}}) = \int |h_0(t)|^2 dt$; 当 $t_{\text{inp}} \neq t_{\text{ref}}$ 时, 随着 $|t_{\text{inp}} - t_{\text{ref}}|$ 的增大, $g(\rho_{\text{peak}})$ 中复指数项的振荡越来越快, 峰值高度不断减小。复指数项振荡频率取决于两个因素, 即 $|t_{\text{inp}} - t_{\text{ref}}|$ 和 $\tan \alpha$, 这两项的增大会导致指数项的振荡加快, 从而使峰值高度降低。峰值高度随着输入信号和参考信号之间的距离增加而降低, 而降低的快慢由分数阶的阶数决定。因此, 通过调整分数阶角度 α , 可控制相关峰值高度对输入信号和参考信号位置差异的敏感度。为了量化这种关系, 设 Δt 表示 $|h_0(t)|^2$ 的支撑区间, 为避免振荡和退化, 指数项必须小于 π , 于是可以得到如下条件

$$|t_{\text{inp}} - t_{\text{ref}}| \Delta t \leq \cot \alpha \quad (3.36)$$

这个公式定义了相关峰值允许的退化情况下输入信号和参考信号的最大位置差异。由式(3.36)我们发现, 当 $\alpha = 0$ 时, 公式右端为无穷大, 无论输入信号和参考信号位置差异多大, 相关都有最大峰值; 若 $0 < \alpha < \pi/2$, 相关峰值会随着位置差异的增加而减小, 而 α 越大, 减小的速率越快。

根据分数阶相关的上述移变性质, 我们可将其用于某种特定的目标检测系统, 该系统只检测参考信号一定范围内的目标, 而不检测此范围以外的目标, 范围可由分数阶来控制。文献[5]已经将其成功用于机器人的视觉识别系统中。由于一个机器人在行走时需要发现并躲避前方的障碍物, 于是要求它的视觉系统能发现一定距离内的障碍物, 在这种视觉识别系统中, 利用分数阶相关可以只检测某个距离以内, 而忽略范围以外的目标。

在分析了分数阶相关的移变性质的基础上, 可以进一步研究分数阶自相关与模糊函数的关系问题。根据第2章的分析, 分数阶傅里叶变换与 Wigner 分布之间有一个重要的关系, 即一个信号的分数阶傅里叶变换的模平方等于它的 Wigner 分布在分数阶域上的投影。那么分数阶自相关与模糊函数究竟是什么关系呢? 首先, 我们给出经典相关和模糊函数的一组关系。若用 $AF_s(\tau, \nu)$ 表示信号 $x(t)$ 的模糊函数, 则有

$$(s \otimes_0 s)(\tau) = AF_s(\tau, 0) \quad (3.37)$$

$$(s \otimes_{\pi/2} s)(\tau) = AF_s(0, \nu) \quad (3.38)$$

由于经典相关是分数阶相关的特例,可以将这种关系推广到分数阶相关,下面的定理描述了分数阶相关和模糊函数的关系。

定理 3.1: 一个信号的分数阶自相关等于它的模糊函数沿相应 α 角的径向切面。用公式表示为

$$(s \otimes_{\alpha} s)(\rho) = AF_s(\rho \cos \alpha, \rho \sin \alpha) \quad (3.39)$$

证明: 模糊函数可以看作信号关于时延 τ 和频移 ν 的二维联合相关函数。它的定义式为

$$AF_s(\tau, \nu) = \int s\left(t + \frac{\tau}{2}\right) s^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j2\pi \nu t} dt \quad (3.40)$$

信号 $s(t)$ 的分数阶自相关可表示为

$$(s \otimes_{\alpha} s)(\rho) = \langle s, R_{\rho}^{\alpha} s \rangle = e^{j2\pi(\rho^2/2)\cos\alpha\sin\alpha} \int s(t) s^*(t - \rho \cos \alpha) e^{-j2\pi t \rho \sin \alpha} dt \quad (3.41)$$

为了变为对称形式,令 $t = t' + \frac{\rho}{2} \cos \alpha$, 做变量替换可得

$$(s \otimes_{\alpha} s)(\rho) = \int s\left(t' + \frac{\rho}{2} \cos \alpha\right) s^*\left(t' - \frac{\rho}{2} \cos \alpha\right) e^{-j2\pi t' \rho \sin \alpha} dt' \quad (3.42)$$

将上式与模糊函数的定义式作比较,可建立分数阶自相关和模糊函数之间的关系

$$(s \otimes_{\alpha} s)(\rho) = AF_s(\rho \cos \alpha, \rho \sin \alpha) \quad (3.43)$$

式(3.43)表明,信号在旋转角为 α 的分数阶傅里叶域上的自相关等于其模糊函数在 α 角射线方向的切片,如图 3.7 所示。

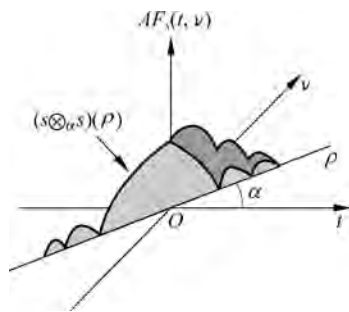


图 3.7 分数阶相关与模糊函数的关系图

3.1.2.3 分数阶相关在信号检测中的应用

根据定理 3.1,文献[4]提出了一种基于分数阶相关的线性调频(Linear Frequency Modulation, LFM)信号检测和参数估计的有效算法。这种算法主要是利用了分数阶相关和模糊函数的关系,在只需要估计信号的调频率参数的情况下,应用这种算法比较方便。类似的方法还有文献[6]提出的基于模糊函数和 Radon 变换的算法。由于 LFM 信号的模糊函数是在模糊平面上的一条过原点的斜线,而斜率为信号的调频率,为了检测参量未知的 LFM 信号,通过对模糊函数所有过原点的直线求 Radon 变换,可构造一个检测统计量

$$D(m) = \int |AF_s(\tau, m\tau)| d\tau \quad (3.44)$$

若 $D(m)$ 在某一点存在一个峰值且超过了预先确定的阈值,则认为检测到 LFM 信号,并且可由峰值点的位置估计出信号的调频率。

式(3.44)中右端的被积函数是过原点、斜率为 m 的模糊函数的切片。它可以由角度为 $\alpha = \arctan(m)$ 的分数阶自相关函数代替,于是可导出一个等价的检测统计量

$$L(\alpha) = \int |(s \otimes_{\alpha} s)(\rho)| d\rho \quad (3.45)$$

若以调频率为参量, 检验统计量为

$$L(m) = \int |(s \otimes_{\arctan(m)} s)(\rho)| d\rho \quad (3.46)$$

虽然由模糊函数导出的检测统计量和由分数阶自相关导出的检测统计量是等价的, 但两者的计算量不同。对于由分数阶自相关导出的检测统计量, 具体计算包含以下几个步骤: 首先对信号进行采样得到 $s(n) = s(nT)$, $n = 1, 2, \dots, N$, 采样周期 T 必须满足采样定理; 然后根据实际应用确定一组角度 α_k , $k = 1, 2, \dots, M$, 计算在每个角度 α_k 上信号的分数阶自相关并求其积分值。若在某个角度出现峰值, 则可检测到信号并估计出调频率参数。这里根据第三种定义来计算信号的分数阶自相关, 即

$$(s \otimes_{\alpha} s)(\rho) = \mathcal{F}^{-\pi/2} \{ |S^{\pi/2+\alpha}(u)|^2 \}(\rho) \quad (3.47)$$

计算过程包括: ①利用分数阶傅里叶变换的快速算法求角度 $\alpha + \pi/2$ 的分数阶傅里叶变换; ②求变换后的模平方; ③求逆傅里叶变换。因为分数阶傅里叶变换快速算法的计算量与快速傅里叶变换(Fast Fourier Transform, FFT)相当, 为 $O(N \log_2 N)$, 所以基于分数阶自相关的 LFM 信号检测算法总的计算量约为 $O(M(2N \log_2 N + N))$, 基于模糊函数的算法总的计算量为 $O(N^2 \log_2 N + MN)$ 。两者比较, 当 $M \ll N$ 时, 用分数阶自相关作信号检测需要相对较小的计算量。

为了说明这种方法的有效性, 下面给出一个仿真实例。假设有如下含离散多分量 LFM 信号的观测信号

$$s(k) = \sum_{i=0}^3 e^{j[2\pi f_i + m_i(\pi/4096)k]} + n(k), \quad k = 1, 2, \dots, 2048 \quad (3.48)$$

其中, 参数为 $f_0 = 1/1024$, $f_1 = 5/1024$, $f_2 = 3/1024$, $f_3 = 10/1024$, $m_0 = 0.124$, $m_1 = 0.136$, $m_2 = 0.3$, $m_3 = 0.5$, $n(k)$ 为加性高斯白噪声。取调频率样本值 $m_l = (0.6/200)l$, $l = 0, 1, 2, \dots, 199$, 求每个调频率 m_l 的检验统计量值 $L(m_l)$, 图 3.8 为不同信噪比情况下的仿真输出结果。

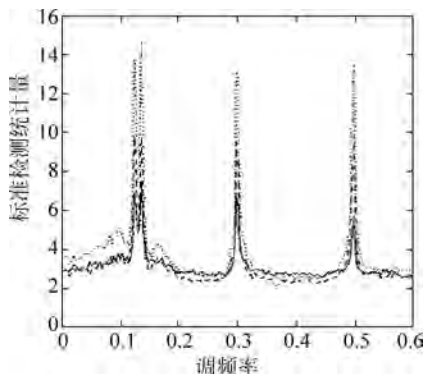


图 3.8 基于分数阶自相关的 LFM 信号检测在不同信噪比下的输出结果

虚线: 无噪声, 点画线: $\text{SNR} = -6\text{dB}$, 实线: $\text{SNR} = -12\text{dB}$

3.1.3 分数阶酉算子和 Hermite 算子

在时频分析理论中, 酉算子和 Hermite 算子是比较重要的两类算子, 酉性是设计变换

算子时经常需要考虑的要素之一,而不同的变换域表示往往能够通过某种 Hermite 算子联系起来,因此,推导分数阶酉算子和 Hermite 算子也得到了研究人员的广泛关注。基于时移算子和频移算子的概念(这是两种基本的酉算子),Akay 定义了分数阶位移算子 $T^{\phi,\tau}$,即分数阶酉算子^[7],如式(3.49)所示。利用 Stone's 定理可以得到分数阶 Hermite 算子,如式(3.50)所示。

$$T^{\phi,\tau}[x](t) = x(t - \tau \cos \phi) e^{-j\pi\tau^2 \cos \phi \sin \phi + j2\pi t \tau \sin \phi} \quad (3.49)$$

$$Z_{\phi}[x](t) = \cos \phi t x(t) + \sin \phi \frac{-j}{2\pi} \cdot \frac{d}{dt} x(t) \quad (3.50)$$

分数阶酉算子 $T^{\phi,\tau}$ 对信号的作用既有时移分量 $\tau \cos \phi$,又有频移分量 $\tau \sin \phi$,它是将信号在时频平面上沿着角度为 ϕ 的轴移动径向距离 τ ,所以称为分数阶位移算子。它与分数阶傅里叶变换的关系如式(3.51)所示,可以看出信号范数保持不变。对比式(3.30)和式(3.49)不难发现,分数阶相关与算子 $T^{\phi,\tau}$ 的关系如式(3.52)所示。

$$\begin{cases} \mathcal{F}^{p+1} T^{\phi,\tau}[x](u) = e^{-j2\pi\tau u} \mathcal{F}^{p+1}[x](u) \\ \mathcal{F}^p T^{\phi,\tau}[x](u) = \mathcal{F}^p[x](u - \tau) \end{cases}, \quad \phi = p\pi/2 \quad (3.51)$$

$$\text{CORR}^p[x, y](\eta) = \langle x, T^{\phi,\tau}[y](u) \rangle, \quad \phi = p\pi/2 \quad (3.52)$$

式中,符号 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示内积。

3.2 分数阶变换

由分数阶算子的定义出发,可引申出分数阶变换的概念。利用分数阶傅里叶变换来构造新的分数阶变换主要有如下两种方式,一种是基于分数阶傅里叶变换是傅里叶变换的广义形式,将以传统傅里叶变换为基础的变换推广为以分数阶傅里叶变换为基础的形式,这样得到的分数阶变换主要有分数阶 Hilbert 变换、分数阶余弦(Cosine)变换、分数阶正弦(Sine)变换、分数阶 Hartley 变换等;另一种是利用分数阶傅里叶变换是一种统一的时频分析方法、是对时频面的旋转,基于该性质可以得到一系列新的基于分数阶傅里叶变换的时频分析工具,如分数阶 Gabor 展开、分数阶小波包变换、分数阶模糊函数和分数阶 Wigner 分布等。

3.2.1 分数阶 Hilbert 变换

Hilbert 变换(Hilbert Transform, HT)是一种重要的信号处理工具,已经在通信调制、图像边缘检测等领域得到了广泛应用。通过对负谱的抑制由频谱扩展为分数阶傅里叶谱,可以得到分数阶 Hilbert 变换。在此基础上,Soo-Chang Pei 利用分数阶傅里叶变换的特征分解型离散算法给出了分数阶 Hilbert 变换的一种离散表达形式^[8],并将其应用于数字图像边缘检测。文献[9]进一步探讨了分数阶 Hilbert 变换器的设计 and 应用问题,提出了多种 FIR、IIR 分数阶 Hilbert 变换器的设计方法,并基于分数阶 Hilbert 变换对信号分数阶傅里叶变换负谱分量抑制提出了一种单边带(SSB)通信系统,利用分数阶 Hilbert 变换的变换阶数作为解调密钥来实现安全通信。

实信号 $f(t)$ 的 Hilbert 变换定义为^[11]



教学视频

$$\tilde{x}(t) = x(t) * h(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (3.53)$$

其中, $h(t)$ 是 Hilbert 变换的变换核。 $\tilde{x}(t)$ 的傅里叶变换为

$$\tilde{X}(\omega) = \mathcal{F}^{\pi/2} [\tilde{x}] (\omega) = -j \operatorname{sgn}(\omega) X(\omega) \quad (3.54)$$

其中, $\operatorname{sgn}(\omega)$ 为符号函数。信号 $x(t)$ 通过 Hilbert 变换和它的复信号联系起来, 可以构成解析信号^[11]

$$\bar{x}(t) = x(t) + j\tilde{x}(t) \quad (3.54)$$

解析信号的一个重要性质就是保留了 $f(t)$ 的正频率部分, 剔除 $f(t)$ 的负频率部分。与解析信号类似, 反解析信号保留了 $f(t)$ 的负频率部分, 剔除 $f(t)$ 的正频率部分, 反解析信号定义为

$$\hat{x}(t) = x(t) - j\tilde{x}(t) \quad (3.55)$$

3.2.1.1 分数阶 Hilbert 变换定义和仿真

1. 定义

文献[12]给出了两种分数阶 Hilbert 变换的定义, 一种是参数为 $\varphi = v \cdot \pi/2, v \in \mathbb{R}$ 的传统 Hilbert 变换相移版本(定义 3.1); 另一种是用分数阶傅里叶变换替换傅里叶变换在传统 Hilbert 变换中的角色(定义 3.2)。这两种定义方式不是等价的, 但是都满足在 $p=1$ 或 $v=1$ 情况下退化为经典 Hilbert 变换。利用文献[12]给出的第一种分数阶 Hilbert 变换定义, Tseng 和 Pei 提出了信号的解析表示和一种以分数阶相位参数为密钥的单边带调制方法^[9]。但由于实信号的分数阶傅里叶变换不满足共轭对称性, 因此上述两种定义均无法直接利用分数阶傅里叶正谱来重构原实信号。

定义 3.1: 信号 $x(t)$ 的分数阶 Hilbert 变换为

$$\tilde{x}_v(t) = \cos\varphi x(t) + \sin\varphi X_1(t) \quad (3.56)$$

其中, $X_1(t)$ 表示 $x(t)$ 的 1 阶分数阶傅里叶变换。

定义 3.2: 信号 $x(t)$ 的分数阶 Hilbert 变换为

$$\tilde{x}_p(t) = \mathcal{F}^{-p} \{H_1 \mathcal{F}^p [x(t)]\} \quad (3.57)$$

其中, $H_1(\omega) = \exp\left(j \frac{\pi}{2}\right) s(\omega) + \exp\left(-j \frac{\pi}{2}\right) s(-\omega)$, $s(\omega)$ 表示阶跃函数, $\mathcal{F}^p$ 表示 p 阶分数阶傅里叶变换算子。

此外, Zayed 还给出了另一种不同的分数阶 Hilbert 变换定义以及相应的解析信号表达式^[13]。

定义 3.3: 信号 $x(t)$ 的分数阶 Hilbert 变换为

$$\tilde{x}_p(t) = \mathcal{F}^{-1} \{ \mathcal{F}^1 [x(t) e^{j \frac{\cot \alpha}{2} t^2}] H_1 \} e^{-j \frac{\cot \alpha}{2} t^2}, \quad \alpha = \frac{\pi}{2} p \quad (3.58)$$

解析信号为

$$\bar{x}_p(t) = x(t) + j\tilde{x}_p(t)$$

Zayed 证明了由信号的分数阶傅里叶正谱能够恢复解析信号, 但该方法不能由信号的分数阶傅里叶正谱恢复实信号, 因此也不适用于处理实信号^[13]。Soo-Chang Pei 等讨论了因果信号和实信号的分数阶 Hilbert 变换^[14], 通过保留分数阶傅里叶谱的奇偶对称分量, 达到节省传输带宽的目的, 但这一方法计算过程非常复杂, 缺乏实用性。

在实际应用中,信号往往是实信号。由分数阶傅里叶变换的性质可知,这类信号的分数阶傅里叶变换不满足共轭对称性,仅从分数阶傅里叶正谱(或负谱)无法恢复原信号,所以基于分数阶傅里叶变换的 Hilbert 变换及解析信号用于单边带通信受到一定制约。接下来,我们将基于分数阶傅里叶变换的 Hilbert 变换理论,从分数阶卷积理论出发,给出一种分数阶 Hilbert 变换新定义(定义 3.4)。与已有定义不同的是,依据定义 3.4 得到的解析信号的分数阶傅里叶正谱能够被用来恢复实信号。因此,可以用分数阶傅里叶变换的旋转角度作为密钥,将定义 3.4 用于保密单边带通信系统,提高系统的安全性;也可以用于图像加密,增强图像的保密效果。

根据文献[15],任意信号 $f(t)$ 的分数阶傅里叶变换可以看作信号 $g(t) = c e^{j \frac{\cot \alpha}{2} t^2} f(t)$ ($c = \sqrt{1 - j \cot \alpha}$) 的傅里叶变换。那么,如果 $y(t)$ 为实信号,调制后可得到 $f(t) = y(t) e^{j m t^2}$, 当 $m = -\cot \alpha / 2$ 时有

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^\alpha[f](u) &= A_\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{j \frac{(u^2 + t^2)}{2} \cot \alpha} e^{-j u t \csc \alpha} dt \\ &= A_\alpha e^{j \frac{u^2}{2} \cot \alpha} \mathcal{F}^{\pi/2}[y](u \csc \alpha), \quad \alpha \neq n\pi \end{aligned} \quad (3.59)$$

其中, $\mathcal{F}^{\pi/2}[y](u \csc \alpha)$ 为 $y(t)$ 的傅里叶变换。从式(3.59)可以看出,信号 $f(t)$ 的分数阶傅里叶谱表现为 $y(t)$ 的频谱乘以线性调频信号 $e^{j \frac{u^2}{2} \cot \alpha}$ 。因为 A_α 与 u 无关, $e^{j \frac{u^2}{2} \cot \alpha}$ 关于 u 为偶对称,而且信号 $y(t)$ 的傅里叶变换满足共轭对称性,因此保留 $f(t)$ 的分数阶傅里叶正谱 $\mathcal{F}^\alpha[f](t) (u \geq 0)$, 就能够得到 $y(t)$ 的正频谱 $\mathcal{F}^{\pi/2}[y](u \csc \alpha) (u \geq 0)$, 从而恢复出实信号 $y(t)$ 。

定义 3.4: 根据 3.1.1 节的分数阶卷积理论,定义信号 $x(t)$ 的分数阶 Hilbert 变换为

$$\tilde{x}_\alpha(t) = A_\alpha e^{-j \frac{\cot \alpha}{2} t^2} [x'(t) * h'(t)] \quad (3.60)$$

式中, $x'(t) = x(t) e^{j \frac{\cot \alpha}{2} t^2}$; $h'(t) = h(t) e^{j \frac{\cot \alpha}{2} t^2}$; α 为分数阶傅里叶变换的旋转角度。则相应的解析信号为

$$\bar{x}_\alpha(t) = x(t) + j \tilde{x}_\alpha(t) \quad (3.61)$$

该解析信号 $\bar{x}_\alpha(t)$ 只包含 $x(t)$ 的分数阶傅里叶正谱分量,去掉了负谱分量。下面给出几个重要结论。

定理 3.2: 信号 $x(t)$ 的分数阶 Hilbert 变换的分数阶傅里叶谱为

$$\mathcal{F}^\alpha[\tilde{x}_\alpha](u) = -j \operatorname{sgn}(u) \mathcal{F}^\alpha[x](u) \quad (3.62)$$

证明: 既然 $h(t)$ 的分数阶傅里叶变换为

$$\mathcal{F}^\alpha[h](u) = -j \operatorname{sgn}(u) e^{j \frac{\cot \alpha}{2} u^2} \quad (3.63)$$

根据分数阶卷积理论,有

$$\mathcal{F}^\alpha[\tilde{x}_\alpha](u) = e^{-j \frac{\cot \alpha}{2} u^2} \mathcal{F}^\alpha[h](u) \mathcal{F}^\alpha[x](u) \quad (3.64)$$

将式(3.63)代入式(3.64),定理得证。

依据定理 3.2,显然可以得到

$$\mathcal{F}^{\alpha}[\bar{x}_{\alpha}](u) = \begin{cases} 2\mathcal{F}^{\alpha}[x](u), & u > 0 \\ \mathcal{F}^{\alpha}[x](u), & u = 0 \\ 0, & u < 0 \end{cases} \quad (3.65)$$

式(3.65)表明,解析信号 $\bar{x}_{\alpha}(t)$ 只包含 $x(t)$ 的正谱成分,去掉了负谱成分。

下面证明能够利用分数阶傅里叶正谱得到解析信号

$$\begin{aligned} \bar{x}_{\alpha}(t) &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) d\tau \left\{ \int_0^{+\infty} K_{\alpha}(u, \tau) K_{-\alpha}(u, t) du \right\} \\ &= A_{\alpha} e^{-j\frac{\cot\alpha}{2}t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{j\frac{\cot\alpha}{2}\tau^2} d\tau A_{-\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} [(1 + \operatorname{sgn}(u)) e^{j\frac{\cot\alpha}{2}u^2}] \cdot \\ &\quad e^{-j\frac{\cot\alpha}{2}u^2} e^{j\operatorname{csc}\alpha u(t-\tau)} du \end{aligned} \quad (3.66)$$

根据式(3.63),可以得到

$$\begin{aligned} \bar{x}_{\alpha}(t) &= x(t) + jA_{\alpha} e^{-j\frac{\cot\alpha}{2}t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{j\frac{\cot\alpha}{2}\tau^2} h(t-\tau) e^{j\frac{\cot\alpha}{2}(t-\tau)^2} d\tau \\ &= x(t) + j\tilde{x}_{\alpha}(t) \end{aligned} \quad (3.67)$$

式(3.65)、式(3.67)说明,解析信号 $\bar{x}_{\alpha}(t)$ 去除了信号 $x(t)$ 的负谱分量,并且能够从正谱分量恢复解析信号 $\bar{x}_{\alpha}(t)$ 。下面的定理给出从 $\bar{x}_{\alpha}(t)$ 得到实信号 $x_{\text{real}}(t)$,以及不同角度 α 时 $\bar{x}_{\alpha}(t)$ 与解析信号 $\bar{x}(t)$ 和反解析信号 $\hat{x}(t)$ 的关系。

定理 3.3: 解析信号 $\bar{x}_{\alpha}(t)$ 与实信号 $x_{\text{real}}(t)$ 及解析信号 $\bar{x}(t)$ 、反解析信号 $\hat{x}(t)$ 的关系如下

$$\bar{x}_{\alpha}(t) = \begin{cases} e^{-j\frac{\cot\alpha}{2}t^2} \bar{x}(t), & 0 < \alpha < \pi \\ e^{-j\frac{\cot\alpha}{2}t^2} \hat{x}(t), & \pi < \alpha < 2\pi \end{cases} \quad (3.68a)$$

$$x_{\text{real}}(t) = \operatorname{Re} [e^{j\frac{t^2}{2}\cot\alpha} \bar{x}_{\alpha}(t)] \quad (3.68b)$$

证明: 根据式(3.65),有

$$\begin{aligned} \bar{x}_{\alpha}(t) &= 2 \int_0^{+\infty} \mathcal{F}^{\alpha}[x](u) K_{-\alpha}(u, t) du \\ &= 2 \int_0^{+\infty} A_{\alpha} e^{j\frac{u^2}{2}\cot\alpha} \mathcal{F}^{\pi/2}[y](u \operatorname{csc}\alpha) K_{-\alpha}(u, t) du \\ &= 2A_{\alpha} A_{-\alpha} e^{-j\frac{t^2}{2}\cot\alpha} \int_0^{+\infty} \mathcal{F}^{\pi/2}[y](u \operatorname{csc}\alpha) e^{jut \operatorname{csc}\alpha} du \end{aligned} \quad (3.69)$$

其中, $A_{\alpha} A_{-\alpha} = |\operatorname{csc}\alpha|/2\pi$ 。应用 $\int_0^{+\infty} e^{j\operatorname{csc}\alpha ut} du = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} [1 + \operatorname{sgn}(u)] e^{j\operatorname{csc}\alpha ut} du$, 于是有

$$\bar{x}_{\alpha}(t) = \begin{cases} e^{-j\frac{\cot\alpha}{2}t^2} \bar{x}(t), & 0 < \alpha < \pi \\ e^{-j\frac{\cot\alpha}{2}t^2} \hat{x}(t), & \pi < \alpha < 2\pi \end{cases} \quad (3.70)$$

根据式(3.70),可得式(3.68b)。

式(3.60)、式(3.68)的结论很容易推广到实值图像信号处理。由于实值图像的二维 FFT 不具有共轭对称性,应用二维 Hilbert 变换不能恢复原实值图像。但是应用半平面

Hilbert 变换理论^[16]可以恢复实值图像,因此,将其推广可以得到基于分数阶傅里叶变换的半平面 Hilbert 变换理论。下面给出基于分数阶傅里叶变换的半平面 Hilbert 变换的解析信号及实值图像恢复的结果。

若 $y(t_1, t_2)$ 为实值图像,则关于 t_1 的调制图像 $f(t_1, t_2) = y(t_1, t_2)e^{-j\frac{\cot\alpha}{2}t_1^2}$, 与 $f(t_1, t_2)$ 对应的分数阶傅里叶变换解析信号为

$$\tilde{f}_a^{t_1}(t_1, t_2) = f(t_1, t_2) + jA_a e^{-j\frac{\cot\alpha}{2}t_1^2} [f'(t_1, t_2) * h'(t_1, t_2)] \quad (3.71)$$

式(3.71)的二维分数阶傅里叶变换为

$$\mathcal{F}^a[\tilde{f}_a^{t_1}](u_1, u_2) = \begin{cases} 2\mathcal{F}^a[f](u_1, u_2), & u_1 > 0 \\ \mathcal{F}^a[f](u_1, u_2), & u_1 = 0 \\ 0, & u_1 < 0 \end{cases} \quad (3.72)$$

实值信号 $y(t_1, t_2)$ 可以根据下面的公式得到

$$y(t_1, t_2) = \text{Re}[e^{j\frac{\cot\alpha}{2}t_1^2} \tilde{f}_a^{t_1}(t_1, t_2)] \quad (3.73)$$

实值图像关于 t_2 的基于分数阶傅里叶变换解析信号及图像恢复情况与上述处理过程类似,这里不再赘述。接下来给出建立在定义 3.4 相关理论上的两个仿真结果。

2. 仿真

1) 单边带通信系统

单边带通信系统结构如图 3.9 所示。在图 3.9(a)中,实信号 $x(t)$ 首先进行载波 $\cos\omega_c t$ 调制,得到 $y(t)$,然后对 $y(t)$ 应用分数阶 Hilbert 变换得到解析信号 $\bar{y}_a(t)$ 。由于载波信号 $\cos\omega_c t$ 是实信号,所以 $y(t)$ 也是实信号,因此这里主要讨论对 $y(t)$ 的处理。在图 3.9(b)所示解调过程中,首先对信号 $\bar{y}_a(t)$ 进行旋转角度 α 的 chirp 解调,然后对解调后的信号取实部得到实信号 $y(t)$,再进行载波 $\cos\omega_c t$ 解调,最后得到信号 $x(t)$ 。

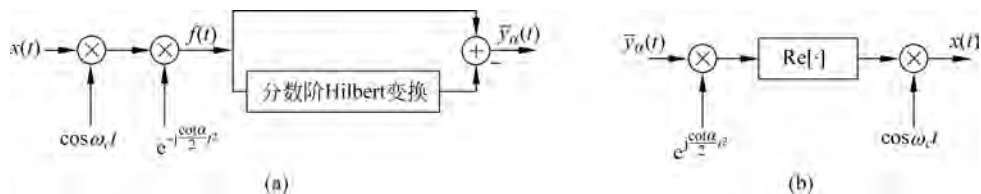


图 3.9 单边带通信系统框图

(a) 调制过程; (b) 解调过程

在解调系统中需要事先知道旋转角度 α , 如果使用的旋转角度不是 α 而是 β , 且 $\beta \neq \alpha$, 那么不可能从接收信号中恢复信号 $y(t)$ 。为了考查旋转角度为 β 时恢复 $y(t)$ 的情况, 在式(3.68b)中代入 β 并整理, 得到的结果为

$$z(t) = \cos\left[\left(\frac{\sin(\alpha - \beta)}{2\sin\alpha\sin\beta}\right)t^2\right] y(t) - \sin\left[\left(\frac{\sin(\alpha - \beta)}{2\sin\alpha\sin\beta}\right)t^2\right] \bar{y}(t) \quad (3.74)$$

可以看出, 只有在旋转角度满足关系 $\beta = \alpha$ 时, 才有 $z(t) = y(t)$, 否则输出的结果中存在误差, 从而得不到 $y(t)$ 。以单位幅值矩形实信号 $y(t)$ 为例, 取旋转角度 $\alpha = 0.3\pi$ 。在系统的解调过程中, 令旋转角度 β 在 $0 \sim \pi$ 变化。图 3.10 给出了从解析信号

$\bar{y}_\alpha(t)$ 恢复实信号 $y(t)$ 的情况。图 3.10(a) 是在 $\beta=\alpha=0.3\pi$ 时得到的与原信号相同的恢复信号 $z(t)=y(t)$; 图 3.10(b) 表示在 $\beta=0.35\pi$ 时得到的信号 $z(t)\neq y(t)$ 。从图 3.10 可以看出, 当旋转角度 $\beta\neq\alpha$ 时, 波形存在很大误差。图 3.11 给出了恢复信号与原信号之间的均方误差结果。图 3.11 表明, 只有在 $\beta=0.3\pi$ 时误差最小。因此, 基于定义 3.4 相关理论的保密单边带通信系统将旋转角度 α 作为密钥可以提高系统的安全性。

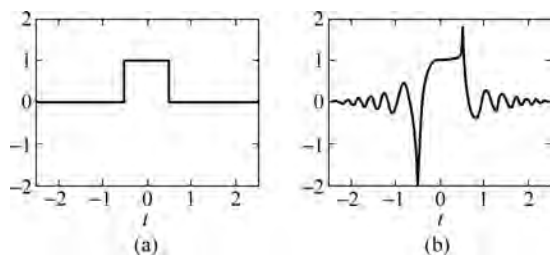


图 3.10 不同旋转角度时恢复的波形

(a) $\beta=\alpha=0.3\pi$; (b) $\beta=0.35\pi$

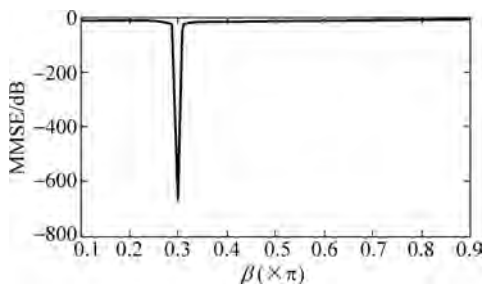


图 3.11 不同旋转角度下恢复信号的误差

2) 图像加密

从式(3.72)、式(3.73)可以看出, 通过图像分数阶傅里叶变换的半平面数据能恢复原实值图像, 因此将图像分数阶傅里叶变换数据的一半作为密图, 将旋转角度作为密钥, 可以实现对实值图像的加密。同时, 由于分数阶傅里叶变换的结果为复数, 将密图数据的虚部提取出来, 与实部重新组成一幅实值图像作为密图, 就可以得到实值加密图像, 并且对密图还可以进行重复加密, 提高图像的加密效果。图 3.12(a) 为原实值图像, 取旋转角度 $\alpha=0.3\pi$, 实值加密图像如图 3.12(b) 所示。

对图像解密时, 需要事先知道旋转角度。如果旋转的角度为 $\beta\neq\alpha$, 则得不到正确的结果。图 3.13(a) 为选择旋转角度 $\beta=0.38\pi$ 的解密图像, 图 3.13(b) 为正确的解密图像。从图 3.13(a) 可以看出, 在角度不匹配的情况下, 已经无法得到原图像的信息。恢复图像与原图像的均方误差如图 3.14 所示, 表明只有在角度 $\beta=\alpha=0.4\pi$ 时, 误差最小, 说明该方法具有较好的保密效果。因为实值加密图像为实值图像, 因此可以重复加密, 进一步提高图像的保密性。



图 3.12 原图像和加密图像

(a) 原实值图像; (b) 实值加密图像

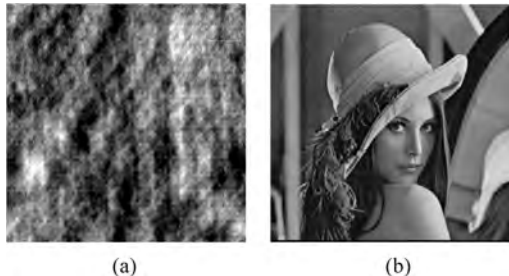


图 3.13 不同旋转角度时恢复的图像

(a) $\beta=0.38\pi$; (b) $\beta=\alpha=0.4\pi$

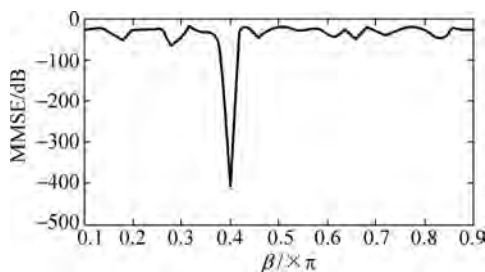


图 3.14 不同旋转角度下恢复图像的均方误差

3.2.1.2 广义分数阶 Hilbert 变换

1. 定义

定义 3.5: 将定义 3.1 和定义 3.2 结合起来就能够得到一种两参数的广义分数阶 Hilbert 变换^[12]

$$\tilde{x}_{p,v}(t) = \mathcal{F}^{-p} \{ H_v \mathcal{F}^p [x(t)] \} \quad (3.75)$$

其中

$$H_v(\omega) = \exp(j\varphi) s(\omega) + \exp(-j\varphi) s(-\omega) \quad (3.76)$$

$\varphi = \frac{\pi}{2}v$ 。式(3.76)也可以写成

$$H_v(\omega) = \cos\varphi H_0(\omega) + \sin\varphi H_1(\omega) \quad (3.77)$$

该两参数广义分数阶 Hilbert 变换能够通过改变分数阶傅里叶变换阶次 p 和分数阶 Hilbert 变换相位 φ 来实现图像压缩的边缘增强。以占空比是 40/256 的矩形函数为例, 图 3.15~图 3.17 给出了该矩形函数在固定阶次 p 下不同相位 φ 的广义分数阶 Hilbert 变换结果。可以看出: ①当 $0 < v < 1$ 时, 输入信号的负谱成分得到加强; 而在 $1 < v < 2$ 时, 输入信号的正谱成分得到强化。②当 p 从 1 降到 0.8 时, 正谱成分增大得多些; 而降到 0.5 时, 则没有明显的区别了。

定义 3.6: 文献[17]提出了一种新的广义分数阶 Hilbert 变换, 即

$$\tilde{x}_{p,v}(t) = \cos\varphi e^{-j\frac{\cot\alpha}{2}} x(t) + \sin\varphi e^{-j\frac{\cot\alpha}{2}} \tilde{x}(t), \quad \alpha = \frac{\pi}{2}p, \varphi = \frac{\pi}{2}v \quad (3.78)$$

式中, $\tilde{x}(t)$ 为 $x(t)$ 的传统 Hilbert 变换。相应的解析信号为

$$\bar{x}_{p,v}(t) = e^{-j\frac{t^2}{2}\cot\alpha} x(t) - e^{-j\varphi} \tilde{x}_{p,v}(t) \quad (3.79)$$

对式(3.79)两边都作 p 阶分数阶傅里叶变换, 得到

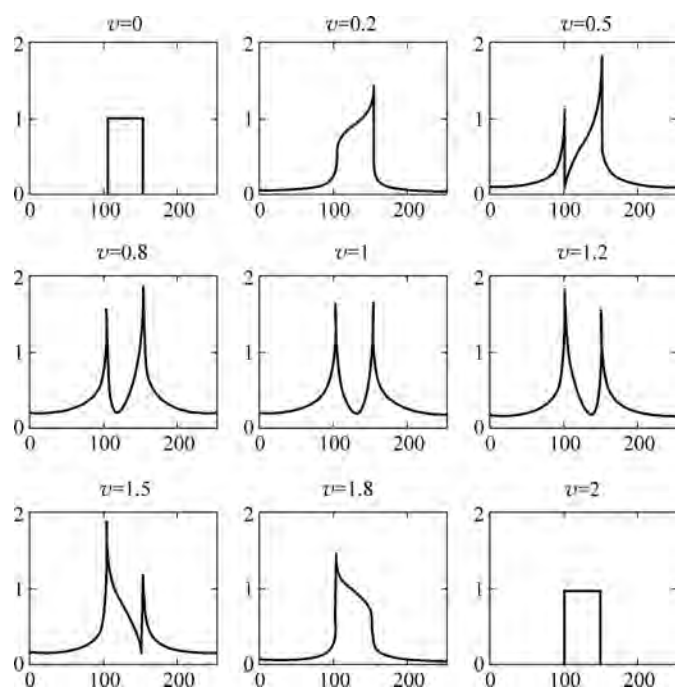
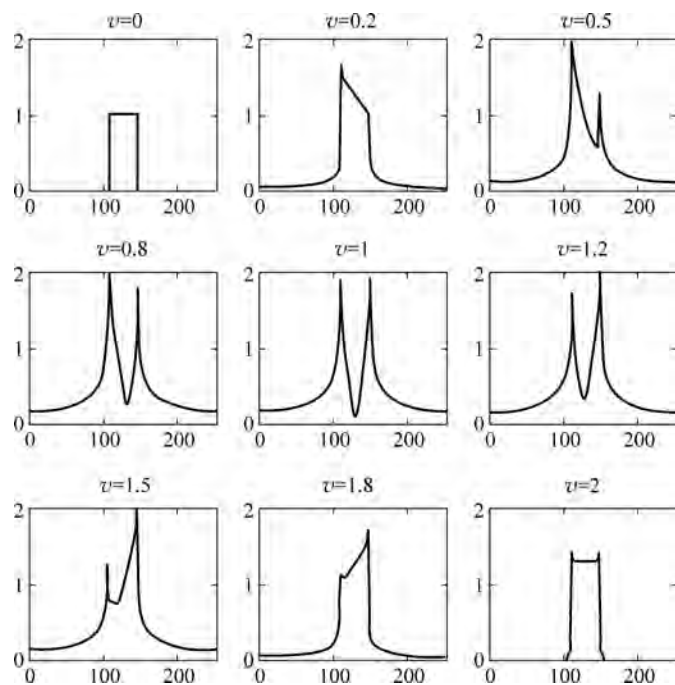
$$\mathcal{F}^p [\bar{x}_{p,v}](u) = A_\alpha e^{j\frac{u^2}{2}\cot\alpha} \mathcal{F}^1[x](u \csc\alpha) - e^{-j\varphi} \mathcal{F}^p [\tilde{x}_{p,v}](u) \quad (3.80)$$

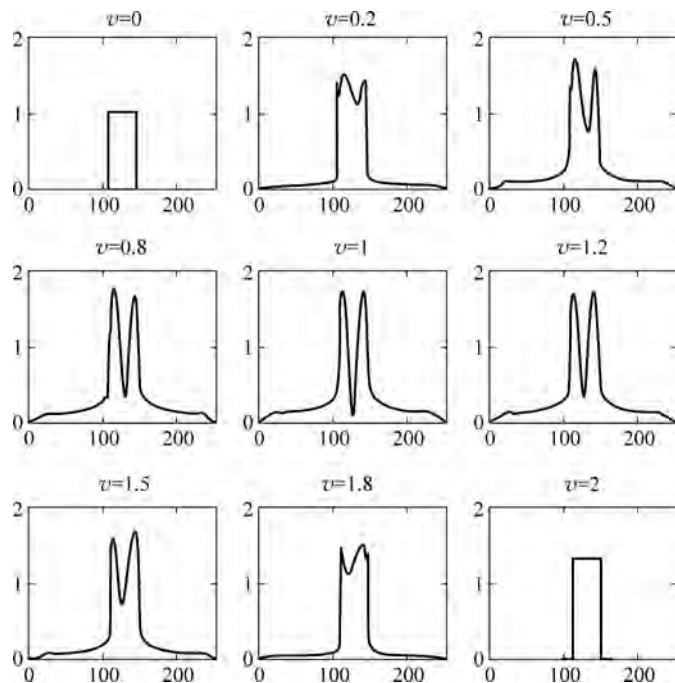
由于 $\tilde{x}_{p,v}(t)$ 的分数阶傅里叶变换是

$$\mathcal{F}^p [\tilde{x}_{p,v}](u) = A_\alpha e^{j\frac{u^2}{2}\cot\alpha} \mathcal{F}^1[x](u \csc\alpha) [\cos\varphi - j\sin\varphi \operatorname{sgn}(u)] \quad (3.81)$$

将式(3.81)代入式(3.80), 得到

$$\mathcal{F}^p [\bar{x}_{p,v}](u) = \begin{cases} 2A_\alpha j\sin\varphi e^{-j\varphi} e^{j\frac{u^2}{2}\cot\alpha} \mathcal{F}^1[x](u \csc\alpha), & u \geq 0 \\ 0, & u < 0 \end{cases} \quad (3.82)$$

图 3.15 矩形函数的广义分数阶 Hilbert 变换结果, $p=1$ 图 3.16 矩形函数的广义分数阶 Hilbert 变换结果, $p=0.8$

图 3.17 矩形函数的广义分数阶 Hilbert 变换结果, $p=0.5$

从上式可以看出,解析信号的 p 阶分数阶傅里叶变换只包含正谱成分。当 $\varphi \neq 0, \pi$ 且 $\alpha \neq 0, \pi$ 时,解析信号含有必需的半个分数阶傅里叶正谱,只是多了一个复因子 $2A_{\alpha} \text{j} \sin \varphi e^{-\text{j}\varphi} e^{\text{j}\frac{u^2}{2} \cot \alpha}$ 。

既然 chirp 信号 $e^{\text{j}\frac{u^2}{2} \cot \alpha}$ 是对称的,且 $\mathcal{F}^1[x](u \csc \alpha)$ 也是共轭对称的,那么实信号 $x(t)$ 能够通过 $\bar{x}_{p,v}(t)$ 重构,这样我们就能够抑制实信号的一半分数阶傅里叶谱宽。与定义 3.5 的广义分数阶傅里叶变换定义一样,定义 3.6 也同样拥有两个参数,但是它们也存在一些不同:①前者在变换域定义,后者是在时域定义;②后者的定义用于单边带通信,以两个参数作为双重密钥,而前者则用在图像处理上。

设 $g(t) = -\text{j} e^{\text{j}\frac{t^2}{2} \cot \alpha + \text{j}\varphi} \csc \varphi \bar{x}_{p,v}(t)$, 则

$$\begin{aligned} g(t) &= -\text{j} e^{\text{j}\varphi} \csc \varphi \{x(t) - e^{-\text{j}\varphi} [\cos \varphi x(t) + \sin \varphi \bar{x}_1(t)]\} \\ &= x(t) - \text{j} \cot \varphi x(t) + \text{j} \csc \varphi [\cos \varphi x(t) + \sin \varphi \bar{x}_1(t)] \end{aligned} \quad (3.83)$$

可以看出 $g(t)$ 的实部是 $x(t)$, 这样我们便能通过下式来恢复 $x(t)$

$$x(t) = \text{Re} [-\text{j} e^{\text{j}\frac{t^2}{2} \cot \alpha + \text{j}\varphi} \csc \varphi \bar{x}_{p,v}(t)] \quad (3.84)$$

基于式(3.79)和式(3.84),一个推广的单边带通信系统如图 3.18 所示。图中, u_c 是分数阶傅里叶域的载波频率, α 是分数阶傅里叶变换角度, φ 是分数阶 Hilbert 变换相位。

输出信号 $y(t)$ 如下

$$y(t) = \bar{x}_{p,v}(t) e^{\text{j}u_c t \csc \alpha} = \bar{x}_{p,v}(t) k(t) e^{\text{j}\frac{t^2}{2} \cot \alpha} \quad (3.85)$$

其中, $k(t) = e^{-\text{j}\frac{t^2}{2} \cot \alpha} e^{\text{j}u_c t \csc \alpha}$ 。根据分数阶卷积定理^[2],有

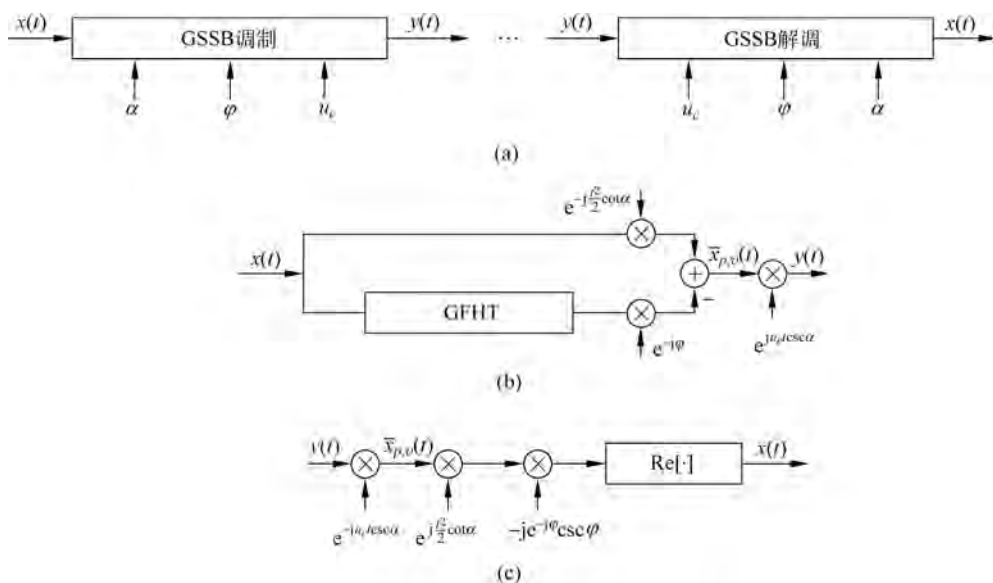


图 3.18 推广的单边带通信系统
(a) 系统框图; (b) 调制框图; (c) 解调框图

$$\mathcal{F}^p [\bar{x}_{p,v}(t)k(t)e^{j\frac{t^2}{2}\cot\alpha}] (u) = A_{-\alpha} e^{j\frac{u^2}{2}\cot\alpha} \tilde{\mathcal{F}}^p [\bar{x}_{p,v}] (u) * \tilde{\mathcal{F}}^p [k] (u) \quad (3.86)$$

其中, $\tilde{\mathcal{F}}^p = e^{-j\frac{u^2}{2}\cot\alpha} \mathcal{F}^p$, “*”表示卷积, $k(t)$ 的分数阶傅里叶变换为

$$\mathcal{F}^p [k] (u) = \frac{2\pi A_{\alpha}}{|\csc\alpha|} e^{j\frac{u^2}{2}\cot\alpha} \delta(u - u_c) \quad (3.87)$$

将式(3.87)代入式(3.86),得到

$$\mathcal{F}^p [y](u) = e^{-j\frac{u^2}{2}\cot\alpha + ju_c u \cot\alpha} \mathcal{F}^p [\bar{x}_{p,v}] (u - u_c) \quad (3.88)$$

考虑噪声时,接收信号为 $y(t) + n(t)$,解调输出信号为 $x(t) + v(t)$,其中

$$v(t) = \csc\varphi \operatorname{Re} \left[-j e^{-ju_c t} e^{j\frac{t^2}{2}\cot\alpha + j\varphi} n(t) \right] \quad (3.89)$$

从上式可以看出,噪声增益主要取决于因子 $\csc\varphi$,这与文献[9]的结果类似。通过在区间 $[\pi/6, \pi/2]$ 对 φ 取值,可以将 $\csc\varphi$ 限制在 $[1, 2]$ 范围内,这样能降低噪声的影响。

图 3.18 所示的单边带通信系统是对传统单边带通信系统的推广。对于解调来说,参数 α 和 φ 必须是已知的,否则很难从接收信号中恢复出 $x(t)$ 。以 β, γ 替换式(3.84)中的 α, φ ,并结合式(3.78)和式(3.79),则解调出的实信号可表示为

$$\begin{aligned} f(t) &= \operatorname{Re} \left[-j \csc\gamma e^{j\frac{t^2}{2}\cot\beta + j\gamma} \bar{x}_{\alpha,\varphi}(t) \right] \\ &= \operatorname{Re} \{ -j \csc\gamma e^{j\frac{t^2}{2}(\cot\beta - \cot\alpha) + j(\gamma - \varphi)} [e^{j\varphi} x(t) - \cos\varphi x(t) - \sin\varphi \tilde{x}(t)] \} \end{aligned} \quad (3.90)$$

令 $\xi = \frac{t^2}{2}(\cot\beta - \cot\alpha) + (\gamma - \varphi)$, 则

$$f(t) = \operatorname{Re} \{ -j \csc\gamma e^{j\xi} [e^{j\varphi} x(t) - \cos\varphi x(t) - \sin\varphi \tilde{x}(t)] \}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sin\varphi}{\sin\gamma} \operatorname{Re} [\cos\xi x(t) - \sin\xi\bar{x}(t) + j\sin\xi x(t) + j\cos\xi\bar{x}(t)] \\
&= \frac{\sin\varphi}{\sin\gamma} [\cos\xi x(t) - \sin\xi\bar{x}(t)]
\end{aligned} \quad (3.91)$$

由于 $\cot\beta - \cot\alpha = \sin(\alpha - \beta) / (\sin\alpha \sin\beta)$, 用 $\frac{\sin(\alpha - \beta)}{2\sin\alpha \sin\beta} t^2 + \gamma - \varphi$ 替换 ξ , 可以得到

$$\begin{aligned}
x(t) = \frac{\sin\varphi}{\sin\gamma} &\left[\cos\left(\frac{\sin(\alpha - \beta)}{2\sin\alpha \sin\beta} t^2 + \gamma - \varphi\right) x(t) - \right. \\
&\left. \sin\left(\frac{\sin(\alpha - \beta)}{2\sin\alpha \sin\beta} t^2 + \gamma - \varphi\right) \bar{x}(t) \right]
\end{aligned} \quad (3.92)$$

可以发现, 只有当 $\beta = \alpha$ 且 $\gamma = \varphi$ 时才有 $f(t) = x(t)$, 否则很难从接收信号中得到 $x(t)$ 。这样, 便能以 α, φ 为双重密钥来增强单边带通信系统的安全性。

2. 仿真

设待发送实信号为矩形脉冲, $\alpha = 0.3\pi, \varphi = 0.4\pi$ 。我们通过两种不同的方式来进行单边带通信。一种方式是直接利用实信号及其去掉 chirp 信号 $e^{-j0.363t^2}$ 的分数阶 Hilbert 变换来构成解析信号; 另一种方式是完整利用式(3.79)定义的解析信号形式。图 3.19 给出了忽略噪声影响后的解调器输出。从图 3.19(a)可以看出, 由于发送的解析信号不包含 $x(t)$ 完整信息而导致解调出的信号严重失真。而图 3.19(b)的结果正相反, 基于完整的定义 3.6 发送的信号被相当准确地恢复出来。

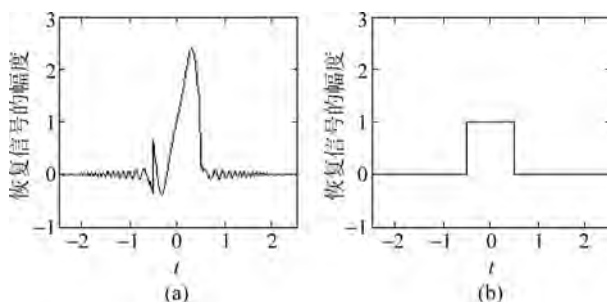


图 3.19 解调器输出信号

(a) 没有 chirp 信号 $e^{-j0.363t^2}$; (b) 具有 chirp 信号 $e^{-j0.363t^2}$

接下来, 将利用上述的矩形脉冲进行在不同参数下解调的效果比较。式(3.92)指出, 只有在 $\beta = \alpha$ 且 $\gamma = \varphi$ 时才能实现原信号的不失真解调。那么当 $\beta \neq \alpha$ 且 $\gamma \neq \varphi$ 时, 又会有什么样的结果呢? 我们将利用解调信号和原信号幅度的均方根误差来进行分析, 计算公式如下

$$E = \sqrt{\sum_{n=0}^{N-1} [\tilde{f}(n) - f(n)]^2}$$

式中, $\tilde{f}(n)$ 和 $f(n)$ 分别是解调信号和原信号的采样序列, N 是采样点数。 β 取值区间是 $[0.1\pi, 0.9\pi]$, γ 取值区间是 $[0.1\pi, \pi]$ 。图 3.20 给出了相应仿真结果。

从图 3.20 可以看出, β 和 γ 都能影响解调效果: ①当 $\gamma = \varphi = 0.4\pi$ 时, 误差只取决于参数 β , 且当 $\beta \in [0.25\pi, 0.35\pi]$ 时, 误差迅速降低为 0; ②当 $\beta = \alpha = 0.3\pi$ 时, 误差只取决于参

数 γ ; 同时, 曲线两边的误差值都比较大, 且缓慢地过渡到谷底; ③当 $\beta \neq \alpha$ 且 $\gamma \neq \varphi$ 时, 误差都比较大; 只有当 $\gamma = \varphi = 0.4\pi$ 和 $\beta = \alpha = 0.3\pi$ 时, 误差才等于 0。这样, 参数 α, φ 就能够用作单边带保密通信的密钥。

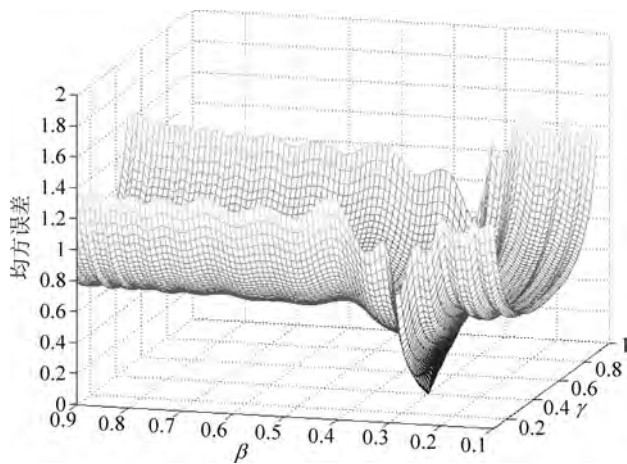


图 3.20 解调的幅度误差均方根

3.2.2 分数阶余弦变换、分数阶正弦变换

正弦变换、余弦变换和 Hartley 变换都属于酉变换, 已经在图像压缩和自适应滤波方面得到了广泛应用, 利用它们与傅里叶变换的关系, 我们可以得到分数阶正弦变换、余弦变换和 Hartley 变换^[10]。需要注意的是: ①与分数阶傅里叶变换周期为 4 不同, 分数阶正弦变换、余弦变换和 Hartley 变换的周期都是 2; ②分数阶正弦变换没有偶特征函数, 而分数阶余弦变换 (Fractional Cosine Transform, FRCT) 没有奇特征函数, 因此, 最好用分数阶正弦变换 (Fractional Sine Transform, FRST) 来处理奇函数, 而用分数阶余弦变换来处理偶函数。

3.2.2.1 定义

首先回顾第 2 章利用傅里叶变换的特征函数分解来导出分数阶傅里叶变换多样性的有关内容。我们知道傅里叶变换 $G(\omega) = \mathcal{F}^1[g(t)]$ 可以分解为

$$(1) \quad g(t) \rightarrow \{a_m \mid m = 0, 1, 2, 3, \dots\} \quad (3.93)$$

其中, $a_m = C_m^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) H_m(t) e^{-t^2/2} dt$,

$$C_m = \int_{-\infty}^{+\infty} H_m^2(t) e^{-t^2} dt \quad (3.94)$$

$H_m(t)$ 是 m 阶 Hermite 多项式。

$$(2) \quad b_m = (-j)^m a_m \quad (3.95)$$

$$(3) \quad G(\omega) = \sum_{m=0}^{+\infty} b_m e^{-\omega^2/2} H_m(\omega) \quad (3.96)$$

若改变第 (2) 步, 即令

$$b_m = e^{-jm \cdot \alpha \cdot \pi/2} a_m \quad (3.97)$$

并且保留第 (1)、(3) 步不变, 即得到相应的分数阶傅里叶变换。余弦变换、正弦变换与傅里

叶变换有如下关系

$$\begin{cases} O_{\cos}(g(t)) = \frac{(G(\omega) + G(-\omega))}{2} \\ O_{\sin}(g(t)) = \frac{(G(\omega) - G(-\omega))}{2} \end{cases} \quad (3.98)$$

其中, $G(\omega) = \mathcal{F}^1(g(t))$ 。当 m 为偶数时, $H_m(t)$ 为偶函数; 当 m 为奇数时, $H_m(t)$ 为奇函数。由此可得如下结论:

(1) 当 m 为偶数时, $\exp(-t^2/2)H_m(t)$ 是余弦变换的特征函数;

(2) 当 m 为奇数时, $\exp(-t^2/2)H_m(t)$ 是正弦变换的特征函数。

它们相应的特征值记作 $\lambda_C(m)$ 和 $\lambda_S(m)$ 。当 m 为偶数时, $\lambda_C(m) = (-j)^m$, $\lambda_S(m) = 0$; 当 m 为奇数时, $\lambda_C(m) = 0$, $\lambda_S(m) = (-j)^{m-1}$ 。类似于分数阶傅里叶变换, 可由如下过程导出分数阶余弦变换和分数阶正弦变换。

$$(1) \quad g(t) \rightarrow \{a_m \mid m=0, 1, 2, 3, \dots\} \quad (3.99)$$

其中, $a_m = C_m^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) H_m(t) e^{-t^2/2} dt$,

$$C_m = \int_{-\infty}^{+\infty} H_m^2(t) e^{-t^2} dt \quad (3.100)$$

$$(2) \quad d_m = \lambda_{C,S}^{\alpha}(m) a_m \quad (3.101)$$

$$(3) \quad G_{C,S}^{\alpha}(s) = \sum_{m=0}^{+\infty} d_m e^{-s^2/2} H_m(s) \quad (3.102)$$

其中, $\lambda_{C,S}^{\alpha}(m)$ 分别是余弦变换和正弦变换分数幂的特征值。当 m 为偶数时, $\lambda_C^{\alpha}(m) = \exp(-j m \alpha \pi / 2)$, $\lambda_S^{\alpha}(m) = 0$; 当 m 为奇数时, $\lambda_C^{\alpha}(m) = 0$, $\lambda_S^{\alpha}(m) = \exp(-j(m-1)\alpha\pi/2)$ 。

由式(3.101)和式(3.102)可得分数阶余弦变换

$$G_C^{\alpha}(s) = \sum_{m=0}^{+\infty} e^{-j m \alpha \pi} a_{2m} e^{-s^2/2} H_{2m}(s) \quad (3.103)$$

以及分数阶正弦变换

$$G_S^{\alpha}(s) = \sum_{m=0}^{+\infty} e^{-j m \alpha \pi} a_{2m+1} e^{-s^2/2} H_{2m+1}(s) \quad (3.104)$$

由于

$$\frac{(G_{\alpha}(s) + G_{\alpha}(-s))}{2} = \sum_{m=0}^{+\infty} e^{-j m \alpha \pi / 2} a_m e^{-s^2/2} \frac{(H_m(s) + H_m(-s))}{2} \quad (3.105)$$

$$\frac{(G_{\alpha}(s) - G_{\alpha}(-s))}{2} = \sum_{m=0}^{+\infty} e^{-j m \alpha \pi / 2} a_m e^{-s^2/2} \frac{(H_m(s) - H_m(-s))}{2} \quad (3.106)$$

而且当 m 是偶数时, $H_m(t)$ 是偶函数; 当 m 是奇数时, $H_m(t)$ 是奇函数。因此, 分数阶余弦变换、分数阶正弦变换与分数阶傅里叶变换有如下关系

$$\begin{cases} G_C^{\alpha}(s) = \frac{(G_{\alpha}(s) + G_{\alpha}(-s))}{2} \\ G_S^{\alpha}(s) = e^{j \alpha \pi / 2} \frac{(G_{\alpha}(s) - G_{\alpha}(-s))}{2} \end{cases} \quad (3.107)$$

因此,我们得到分数阶余弦变换的定义式为

$$G_C^\alpha(s) = O_C^\alpha(g(t)) = \sqrt{\frac{1 - j\cot\phi}{2\pi}} e^{j(s^2/2)\cot\phi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(st \csc\phi) e^{j(t^2/2)\cot\phi} g(t) dt \quad (3.108)$$

分数阶正弦变换的定义式为

$$G_S^\alpha(s) = O_S^\alpha(g(t)) = \sqrt{\frac{1 - j\cot\phi}{2\pi}} e^{j(\phi - (\pi/2))} e^{j(s^2/2)\cot\phi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(st \csc\phi) e^{j(t^2/2)\cot\phi} g(t) dt \quad (3.109)$$

值得注意的是,分数阶余弦变换和分数阶正弦变换的周期为 2,不同于分数阶傅里叶变换以 4 为周期。

$$\begin{cases} O_C^\alpha(g(t)) = O_C^{\alpha+2}(g(t)) \\ O_S^\alpha(g(t)) = O_S^{\alpha+2}(g(t)) \end{cases} \quad (3.110)$$

由于这些分数阶变换具有可加性,因而都是可逆的,它们的逆变换为

$$\begin{cases} O_C^{-\alpha}(G_C^\alpha(s)) = g(t), & g(t) \text{ 为偶函数} \\ O_S^{-\alpha}(G_S^\alpha(s)) = g(t), & g(t) \text{ 为奇函数} \end{cases} \quad (3.111)$$

需要注意的是,分数阶余弦变换没有奇特征函数,分数阶正弦变换没有偶特征函数。对于原始的余弦变换和正弦变换,经过分数阶余弦变换,输入函数的奇部将丢失;经过分数阶正弦变换,输入函数的偶部将丢失。因此,最好应用分数阶余弦变换处理偶函数,应用分数阶正弦变换处理奇函数。由此,我们限制分数阶余弦变换的输入函数为偶函数并定义单边分数阶余弦变换为

$$G_C^\alpha(s) = O_C^\alpha(g(t)) = \sqrt{\frac{2 - j2\cot\phi}{\pi}} e^{j(s^2/2)\cot\phi} \cdot \int_0^{+\infty} e^{j(t^2/2)\cot\phi} \cos(st \csc\phi) g(t) dt \quad (3.112)$$

限制分数阶正弦变换的输入函数为奇函数并定义单边分数阶正弦变换为

$$G_S^\alpha(s) = O_S^\alpha(g(t)) = \sqrt{\frac{2 - j2\cot\phi}{\pi}} e^{j(\phi - (\pi/2))} e^{j(s^2/2)\cot\phi} \cdot \int_0^{+\infty} e^{j(t^2/2)\cot\phi} \sin(st \csc\phi) g(t) dt \quad (3.113)$$

我们注意到单边分数阶余弦变换和单边分数阶正弦变换对偶函数和奇函数的变换结果与分数阶傅里叶变换的相同,即

$$\begin{cases} G_C^\alpha(s) = G_F^\alpha(s), & g(t) \text{ 为偶函数} \\ G_S^\alpha(s) = e^{j\phi} G_F^\alpha(s), & g(t) \text{ 为奇函数} \end{cases} \quad (3.114)$$

当应用单边分数阶余弦变换和单边分数阶正弦变换处理偶函数和奇函数时,运算复杂度是应用分数阶傅里叶变换时的一半(因为单边分数阶余弦变换和单边分数阶正弦变换的积分限是 $[0, +\infty)$)。因此,应用单边分数阶余弦变换和单边分数阶正弦变换处理偶函数和奇函数,比应用分数阶傅里叶变换更有效。

3.2.2.2 性质

这里我们将引出正则余弦变换和正则正弦变换,它们是分数阶余弦变换和分数阶正弦变换的进一步推广。为了引出正则余弦变换和正则正弦变换,首先给出线性正则变换(Linear Canonical Transform, LCT)的基本定义(有关线性正则变换的详细内容请参阅第13章)。类似地,线性正则变换又是分数阶傅里叶变换的广义形式,它的定义为当 $b \neq 0$ 时,

$$G_F^{(a,b,c,d)}(s) = O_F^{(a,b,c,d)}(g(t)) = \sqrt{\frac{1}{j2\pi b}} e^{(j/2)(d/b)s^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j(s/b)t} e^{(j/2)(a/b)t^2} g(t) dt \quad (3.115)$$

当 $b=0$ 时,

$$G_F^{(a,b,c,d)}(s) = O_F^{(a,b,c,d)}(g(t)) = \sqrt{d} e^{(j/2)cds^2} g(ds) \quad (3.116)$$

分数阶傅里叶变换是线性正则变换当 $\{a, b, c, d\} = \{\cos\phi, \sin\phi, -\sin\phi, \cos\phi\}$ 时的特例:

$$O_F^\alpha(g(t)) = \sqrt{e^{j\phi}} O_F^{(\cos\phi, \sin\phi, -\sin\phi, \cos\phi)}(g(t)), \quad \phi = \alpha\pi/2 \quad (3.117)$$

那么,正则余弦变换(Canonical Cosine Transform, CCT)定义为

当 $b \neq 0$ 时,

$$G_C^{(a,b,c,d)}(s) = O_C^{(a,b,c,d)}(g(t)) = \sqrt{\frac{1}{j2\pi b}} e^{(j/2)(d/b)s^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(s/b) e^{(j/2)(a/b)t^2} g(t) dt \quad (3.118)$$

当 $b=0$ 时,

$$G_C^{(a,b,c,d)}(s) = O_C^{(a,b,c,d)}(g(t)) = \sqrt{d} e^{(j/2)cds^2} g(ds) \quad (3.119)$$

正则正弦变换(Canonical Sine Transform, CST)定义为

当 $b \neq 0$ 时,

$$G_S^{(a,b,c,d)}(s) = O_S^{(a,b,c,d)}(g(t)) = \sqrt{\frac{1}{j2\pi b}} e^{(j/2)(d/b)s^2} \int_{-\infty}^{+\infty} -j\sin(st/b) e^{(j/2)(a/b)t^2} g(t) dt \quad (3.120)$$

当 $b=0$ 时,

$$G_S^{(a,b,c,d)}(s) = O_S^{(a,b,c,d)}(g(t)) = \sqrt{d} e^{(j/2)cds^2} g(ds) \quad (3.121)$$

分数阶余弦变换和分数阶正弦变换是正则余弦变换和正则正弦变换当 $\{a, b, c, d\} = \{\cos\phi, \sin\phi, -\sin\phi, \cos\phi\}$ 时的特例,并且仅相差一个常数。

$$G_C^\alpha(s) = \sqrt{e^{j\phi}} G_C^{(\cos\phi, \sin\phi, -\sin\phi, \cos\phi)}(s), \quad \phi = \alpha\pi/2 \quad (3.122)$$

$$G_S^\alpha(s) = \sqrt{e^{j\phi}} e^{j\phi} G_S^{(\cos\phi, \sin\phi, -\sin\phi, \cos\phi)}(s), \quad \phi = \alpha\pi/2 \quad (3.123)$$

下面给出正则余弦变换的性质,分数阶余弦变换的性质可由正则余弦变换的性质取 $\{a, b, c, d\} = \{\cot\phi, 1, -1, 0\}$ 得到,其中 $\phi = \alpha\pi/2$ 。分数阶正弦变换和正则正弦变换的性质与分数阶余弦变换和正则余弦变换类似。

(1) 共轭:

$$\overline{O_C^{(a,b,c,d)}(g(t))} = O_C^{(a,-b,-c,d)}(\overline{g(t)})$$

(2) 时移 $g(t-\eta) + g(t+\eta)$:

$$O_C^{(a,b,c,d)}(g(t-\tau)+g(t+\tau)) \\ = e^{-j\text{ac}\tau^2/2} [G_C^{(a,b,c,d)}(s-a\tau)e^{-j\text{c}\tau s} + G_C^{(a,b,c,d)}(s+a\tau)e^{-j\text{c}\tau s}]$$

(3) $\cos(\eta t)$ 调制:

$$O_C^{(a,b,c,d)}(\cos(\eta t)g(t)) \\ = e^{-jbd\eta^2/2} [G_C^{(a,b,c,d)}(s-b\eta)e^{jd\eta s} + G_C^{(a,b,c,d)}(s+b\eta)e^{-jd\eta s}]/2$$

(4) $\sin(\eta t)$ 调制:

$$O_C^{(a,b,c,d)}(\sin(\eta t)g(t)) \\ = -j e^{-jbd\eta^2/2} [G_S^{(a,b,c,d)}(s-b\eta)e^{jd\eta s} + G_S^{(a,b,c,d)}(s+b\eta)e^{-jd\eta s}]/2$$

(5) 导数:

$$O_C^{(a,b,c,d)}(g'(t)) = aG_S'^{(a,b,c,d)}(s) - cjsG_S^{(a,b,c,d)}(s)$$

(5a) n 阶导数(n 为奇数):

$$O_C^{(a,b,c,d)}(g^{(n)}(t)) = \left[a^2 \frac{d^2}{ds^2} - 2acjs \frac{d}{ds} - ac - c^2 s^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \cdot \\ (aG_S'^{(a,b,c,d)}(s) - cjsG_S^{(a,b,c,d)}(s))$$

(5b) n 阶导数(n 为偶数):

$$O_C^{(a,b,c,d)}(g^{(n)}(t)) = \left[a^2 \frac{d^2}{ds^2} - 2acjs \frac{d}{ds} - jac - c^2 s^2 \right]^{\frac{n}{2}} G_C^{(a,b,c,d)}(s)$$

(6) 乘 t :

$$O_C^{(a,b,c,d)}(tg(t)) = dsG_S^{(a,b,c,d)}(s) + j b G_S'^{(a,b,c,d)}(s)$$

(6a) 乘 t^n (n 为奇数):

$$O_C^{(a,b,c,d)}(t^n g(t)) = \left[-b^2 \frac{d^2}{ds^2} + 2bdjs \frac{d}{ds} + jbd + d^2 s^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \cdot \\ (j b G_S'^{(a,b,c,d)}(s) + dsG_S^{(a,b,c,d)}(s))$$

(6b) 乘 t^n (n 为偶数):

$$O_C^{(a,b,c,d)}(t^n g(t)) = \left[-b^2 \frac{d^2}{ds^2} + 2bdjs \frac{d}{ds} + jbd + d^2 s^2 \right]^{\frac{n}{2}} G_C^{(a,b,c,d)}(s)$$

(7) 时域翻转:

$$O_C^{(a,b,c,d)}(g(-t)) = O_C^{(a,b,c,d)}(g(t)) = G_C^{(a,b,c,d)}(s)$$

(8) Parseval 定理:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |G_C^{(a,b,c,d)}(s)|^2 ds = \int_{-\infty}^{+\infty} |\text{Even}(g(t))|^2 dt$$

(9) 广义 Parseval 定理:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G_C^{(a,b,c,d)}(s) \overline{H_C^{(a,b,c,d)}(s)} ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Even}(g(t)) \text{Even}(h(t)) dt$$

(10) $g(t) = \exp[-j(pt^2 + qt)]$ 时的正则余弦变换结果:

$$G_C^{(a,b,c,d)}(s) = \sqrt{\frac{1}{a-2pb}} e^{\frac{j}{2} \cdot \frac{c-2pd}{a-2pb} s^2} e^{-j \frac{q^2 b}{2(a-2pb)}} \cos\left(\frac{qs}{ab-2pb^2}\right)$$

事实上, $g(t) = \exp(-jpt^2)\cos(qt)$ 和 $g(t) = 2\exp(-jpt^2)\cos(qt)u(t)$ 时的变换结果同样是上式。

(11) $g(t) = 1$ 时的正则余弦变换结果:

$$G_C^{(a,b,c,d)}(s) = \sqrt{\frac{1}{a}} e^{\frac{j}{2} \cdot \frac{c}{a} \cdot s^2}$$

3.2.2.3 离散实现

文献[18]中给出了离散余弦变换(Discrete Cosine Transform, DCT)和离散正弦变换(Discrete Sine Transform, DST)核矩阵。

(1) 四种类型的离散余弦变换核矩阵定义

DCT-I

$$\mathbf{C}_{N+1}^{\text{I}} = \sqrt{\frac{2}{N}} \left[k_m k_n \cos\left(\frac{mn\pi}{N}\right) \right], \quad m, n = 0, 1, \dots, N \quad (3.124)$$

DCT-II

$$\mathbf{C}_N^{\text{II}} = \sqrt{\frac{2}{N}} \left[k_m \cos\left(\frac{m(n+1/2)\pi}{N}\right) \right], \quad m, n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.125)$$

DCT-III

$$\mathbf{C}_N^{\text{III}} = \sqrt{\frac{2}{N}} \left[k_n \cos\left(\frac{(m+1/2)n\pi}{N}\right) \right], \quad m, n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.126)$$

DCT-IV

$$\mathbf{C}_N^{\text{IV}} = \sqrt{\frac{2}{N}} \left[\cos\left(\frac{(m+1/2)(n+1/2)\pi}{N}\right) \right], \quad m, n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.127)$$

式中, k_m 和 k_n 定义为

$$k_m = \begin{cases} 1/\sqrt{2}, & m=0, m=N \\ 1, & m \neq 0, m \neq N \end{cases}, \quad k_n = \begin{cases} 1/\sqrt{2}, & n=0, n=N \\ 1, & n \neq 0, n \neq N \end{cases} \quad (3.128)$$

(2) 四种类型的离散正弦变换核矩阵定义

DST-I

$$\mathbf{S}_{N-1}^{\text{I}} = \sqrt{\frac{2}{N}} \left[\sin\left(\frac{mn\pi}{N}\right) \right], \quad m, n = 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.129)$$

DST-II

$$\mathbf{S}_N^{\text{II}} = \sqrt{\frac{2}{N}} \left[k_m \sin\left(\frac{m(n-1/2)\pi}{N}\right) \right], \quad m, n = 0, 1, \dots, N \quad (3.130)$$

DST-III

$$\mathbf{S}_N^{\text{III}} = \sqrt{\frac{2}{N}} \left[k_n \sin\left(\frac{(m-1/2)n\pi}{N}\right) \right], \quad m, n = 0, 1, \dots, N \quad (3.131)$$

DST-IV

$$\mathbf{S}_N^{\text{IV}} = \sqrt{\frac{2}{N}} \left[\sin\left(\frac{(m-1/2)(n-1/2)\pi}{N}\right) \right], \quad m, n = 0, 1, \dots, N \quad (3.132)$$

式中, k_m 和 k_n 的定义与式(3.128)中相同。核 DCT-I 和 DST-I 有对称的结构并以 2 为

周期。周期性意味着重复应用 DCT- I 和 DST- I 将得到原始的序列。DCT-IV 与 DCT-I 有相同对称性和周期性,但 DCT- II 和 DCT- III 互为逆算子并不具周期性。DCT- I 和 DST- I 将被用于导出离散分数阶余弦变换(Discrete Fractional Cosine Transform,DFRCT)和离散分数阶余弦变换(Discrete Fractional Sine Transform,DFRST):

$$\mathbf{C}_N^I = \sqrt{\frac{2}{N-1}} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos \frac{\pi}{N-1} & \cdots & \cos \frac{(N-2)\pi}{N-1} & \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{(N-1)\pi}{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos \frac{(N-2)\pi}{N-1} & \cdots & \cos \frac{(N-2)^2\pi}{N-1} & \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{(N-2)(N-1)\pi}{N-1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{(N-1)\pi}{N-1} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{(N-2)(N-1)\pi}{N-1} & \frac{1}{2} \cos \frac{(N-1)^2\pi}{N-1} \end{bmatrix} \quad (3.133)$$

$$\mathbf{S}_N^I = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \cdot \begin{bmatrix} \sin \frac{\pi}{N+1} & \sin \frac{2\pi}{N+1} & \cdots & \sin \frac{(N-1)\pi}{N+1} & \sin \frac{N\pi}{N+1} \\ \sin \frac{2\pi}{N+1} & \sin \frac{4\pi}{N+1} & \cdots & \sin \frac{2(N-1)\pi}{N+1} & \sin \frac{2N\pi}{N+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sin \frac{(N-1)\pi}{N+1} & \sin \frac{2(N-1)\pi}{N+1} & \cdots & \sin \frac{(N-1)^2\pi}{N+1} & \sin \frac{N(N-1)\pi}{N+1} \\ \sin \frac{N\pi}{N+1} & \sin \frac{2N\pi}{N+1} & \cdots & \sin \frac{N(N-1)\pi}{N+1} & \sin \frac{N^2\pi}{N+1} \end{bmatrix} \quad (3.134)$$

(3) 离散傅里叶变换(Discrete Fourier Transform, DFT)核矩阵

类似于其连续变换,离散傅里叶变换可看作离散信号的 $\pi/2$ 旋转。离散傅里叶变换核矩阵定义如下

$$\mathbf{F}_N = \sqrt{\frac{1}{N}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & W_N^1 & \cdots & W_N^{N-2} & W_N^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-2} & \cdots & W_N^{(N-2)^2} & W_N^{(N-1)(N-2)} \\ 1 & W_N^{N-1} & \cdots & W_N^{(N-1)(N-2)} & W_N^{(N-1)^2} \end{bmatrix} \quad (3.135)$$

其中, $W_N = e^{-j(2\pi/N)}$ 。

(4) 离散分数阶傅里叶变换核矩阵

根据离散傅里叶变换核矩阵, N 点的离散分数阶傅里叶变换(Discrete Fractional Fourier Transform, DFRFT)核矩阵由下式计算

$$\mathbf{F}_{N,\alpha} = \mathbf{V}_N \mathbf{D}_N^{2\alpha/\pi} \mathbf{V}_N^T = \mathbf{V}_N \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & e^{-j\alpha} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{-j(N-1)\alpha} \end{bmatrix} \mathbf{V}_N^T \quad (3.136)$$

其中, $\mathbf{V}_N = [\mathbf{v}_0 | \mathbf{v}_1 | \cdots | \mathbf{v}_{N-1}]$, $\mathbf{v}_k$ 是 k 阶离散傅里叶变换 Hermite 特征向量, α 表示变换在时频平面上旋转的角度。当 $\alpha=0$ 时, $\mathbf{F}_{N,\alpha}$ 是单位算子。

DCT- I 和 DST- I 的特征向量可由离散傅里叶变换的特征向量得到。

① 如果 $\mathbf{v} = [v_0, v_1, \cdots, v_{N-2}, v_{N-1}, v_{N-2}, \cdots, v_1]^T$ 是 $(2N-2)$ 点离散傅里叶变换核矩阵的偶特征向量, $\mathbf{F}_{2N-2} \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$ ($\lambda=1, -1$), 那么,

$$\hat{\mathbf{v}} = [v_0, \sqrt{2} v_1, \cdots, \sqrt{2} v_{N-2}, \sqrt{2} v_{N-1}]^T \quad (3.137)$$

为 N 点 DCT- I 核矩阵的特征向量, 其中 λ 是相应的特征值。

$$\mathbf{C}_N^I \hat{\mathbf{v}} = \lambda \hat{\mathbf{v}} \quad (3.138)$$

② 如果 $\mathbf{v} = [0, v_1, v_2, \cdots, v_N, 0, -v_N, -v_{N-1}, \cdots, -v_1]^T$ 是 $2(N+1)$ 点离散傅里叶变换核矩阵的奇特征向量, $\mathbf{F}_{2N+2} \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$ ($\lambda=j, -j$), 那么,

$$\bar{\mathbf{v}} = \sqrt{2} [v_0, v_1, \cdots, v_N]^T \quad (3.139)$$

为 N 点 DST- I 核矩阵的特征向量, 其中 $j\lambda$ 是相应的特征值。

$$\mathbf{S}_N^I \bar{\mathbf{v}} = j\lambda \bar{\mathbf{v}} \quad (3.140)$$

所有离散傅里叶变换、离散余弦变换和离散正弦变换变换的核矩阵都具有无限的特征值。通过引入一个新的矩阵 $\mathbf{S}$ 就能非常简便地计算出了一组完整的实数离散傅里叶变换特征向量^[19-21]

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 2\cos(\omega) & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos(2\omega) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos[(N-2)\omega] & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos[(N-1)\omega] \end{bmatrix} \quad (3.141)$$

这组特殊的特征向量组成了连续 Hermite-Gaussian 函数的离散近似, 称为离散傅里叶变换 Hermite 特征向量。对于离散分数阶余弦变换核矩阵, 特征向量 $\hat{\mathbf{v}}_k$ 的特征值为 $e^{-jk\alpha}$ (k 为偶数)。这样的赋值将会使离散余弦变换核中 $\alpha=\pi/2$ 。类似地, 在离散分数阶傅里叶变换中, N 点离散分数阶余弦变换核矩阵可定义为

$$\mathbf{C}_{N,\alpha} = \hat{\mathbf{V}}_N \hat{\mathbf{D}}_N^{2\alpha/\pi} \hat{\mathbf{V}}_N^T \quad (3.142)$$

$$= \hat{\mathbf{V}}_N \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & e^{-2j\alpha} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{-j2(N-1)\alpha} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{V}}_N^T \quad (3.143)$$

当 $\hat{\mathbf{V}}_N = [\hat{\mathbf{v}}_0 \ \hat{\mathbf{v}}_1 \ \cdots \ \hat{\mathbf{v}}_{2N-2}]$, $\hat{\mathbf{v}}_k$ 是从 k 阶离散傅里叶变换 Hermite 特征向量由式(3.137)得到的 DCT-I 特征向量。当 $\alpha=\pi/2$, 离散分数阶余弦变换将成为常规的 DCT-I。

当 $\alpha=0$, $C_{N,\alpha}$ 为单位矩阵。用参数 α 构造 N 点离散分数阶余弦变换核矩阵的步骤可总结如下:

- ① 计算 M_c 点离散傅里叶变换 Hermite 偶特征向量, $M_c=2(N-1)$ 。
- ② 用式(3.137)从 DFT- I Hermite 偶特征向量计算 DCT- I 特征向量。
- ③ 用下式确定离散分数阶余弦变换的核矩阵:

$$C_{N,\alpha} = \hat{\mathbf{V}}_N \hat{\mathbf{D}}_N^{2\alpha/\pi} \hat{\mathbf{V}}_N^T \quad (3.144)$$

其中, $\hat{\mathbf{V}}_N = [\hat{\mathbf{v}}_0 \ \hat{\mathbf{v}}_1 \ \cdots \ \hat{\mathbf{v}}_{M_c-2}]$ 。 $\hat{\mathbf{v}}_k$ 是从 k 阶离散傅里叶变换 Hermite 特征向量由式(3.137)得到的 DCT- I 特征向量。

和离散分数阶余弦变换的情况相似,离散分数阶正弦变换的推导也建立在离散分数阶傅里叶变换上。特征向量 $\mathbf{v}_k$ (k 为奇数)赋值为特征值 $e^{-j(k-1)\alpha}$ 。因此, N 点离散分数阶正弦变换核矩阵定义为

$$\mathbf{S}_{N,\alpha} = \tilde{\mathbf{V}}_N \tilde{\mathbf{D}}_N^{2\alpha/\pi} \tilde{\mathbf{V}}_N^T \quad (3.145)$$

$$= \tilde{\mathbf{V}}_N \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & e^{-2j\alpha} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{-j2(N-1)\alpha} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{V}}_N^T \quad (3.146)$$

其中, $\tilde{\mathbf{V}}_N = [\tilde{\mathbf{v}}_0 \ \tilde{\mathbf{v}}_1 \ \cdots \ \tilde{\mathbf{v}}_{2N-2}]$ 。 $\tilde{\mathbf{v}}_k$ 是从 k 阶离散傅里叶变换 Hermite 特征向量由式(3.139)得到的 DST- I 特征向量。

以上所述离散分数阶正弦变换核矩阵,当 $\alpha=\pi/2$,它将简化为一个 DST- I 核矩阵,对于 $\alpha=0$,它将变为单位矩阵。用参数 α 计算 N 点离散分数阶正弦变换核矩阵的步骤总结如下:

- ① 计算 M_s 点离散傅里叶变换 Hermite 奇特征向量, $M_s=2(N+1)$ 。
- ② 从 DFT Hermite 奇特征向量用式(3.139)计算 DST- I 特征值。
- ③ 用下式确定离散分数阶正弦变换的核矩阵

$$\mathbf{S}_{N,\alpha} = \tilde{\mathbf{V}}_N \tilde{\mathbf{D}}_N^{2\alpha/\pi} \tilde{\mathbf{V}}_N^T \quad (3.147)$$

其中, $\tilde{\mathbf{V}}_N = [\tilde{\mathbf{v}}_0 \ \tilde{\mathbf{v}}_1 \ \cdots \ \tilde{\mathbf{v}}_{M_s-2}]$ 。 $\tilde{\mathbf{v}}_k$ 是从 k 阶 DFT Hermite 特征向量由式(3.139)得到的 DST- I 特征向量。

由于用来精确计算离散分数阶傅里叶变换、离散分数阶余弦变换和离散分数阶正弦变换矩阵的积的快速算法尚未被推导出,它们的计算一般需要 $O(N^2)$ 次常规的矩阵乘法。

3.2.3 分数阶 Hartley 变换

3.2.3.1 定义

Hartley 变换与傅里叶变换有如下关系

$$\begin{aligned} O_{\text{Hartley}}(g(t)) &= O_{\cos}(g(t)) + O_{\sin}(g(t)) \\ &= \frac{1+j}{2} \cdot G(\omega) + \frac{1-j}{2} \cdot G(-\omega) \end{aligned} \quad (3.148)$$

对于 m 取任何非负整数, $\exp(-t^2/2)H_m(t)$ 是 Hartley 变换的特征函数, 其相应的特征值记作 $\lambda_H(m)$ 。当 m 为偶数时, $\lambda_H(m) = (-j)^m$; 当 m 为奇数时, $\lambda_H(m) = (-j)^{m-1}$ 。类似于分数阶傅里叶变换, 可通过如下过程推导出分数阶 Hartley 变换 (Fractional Hartley Transform, FRHT)。

$$(1) \quad g(t) \rightarrow \{a_m | m=0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\text{其中, } a_m = C_m^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) H_m(t) e^{-t^2/2} dt$$

$$C_m = \int_{-\infty}^{+\infty} H_m^2(t) e^{-t^2} dt \quad (3.149)$$

$$(2) \quad d_m = \lambda_H^a(m) a_m \quad (3.150)$$

$$(3) \quad G_H^a(s) = \sum_{m=0}^{+\infty} d_m e^{-s^2/2} H_m(s) \quad (3.151)$$

其中, $\lambda_H^a(m)$ 是 Hartley 变换分数幂的特征值。当 m 为偶数时, $\lambda_H^a(m) = \exp(-j m \alpha \pi / 2)$; 当 m 为奇数时, $\lambda_H^a(m) = \exp(-j(m-1) \alpha \pi / 2)$ 。显然, 存在如下关系

$$O_H^a(f(t)) = O_C^a(f(t)) + O_S^a(f(t)) \quad (3.152)$$

因此, 积分形式的分数阶 Hartley 变换为^[22]

$$G_H^a(s) = O_H^a(g(t)) = \sqrt{\frac{1-j\cot\phi}{2\pi}} e^{j(s^2/2)\cot\phi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(t^2/2)\cot\phi} \cdot \frac{[(1-j e^{j\phi})\text{cas}(st \csc\phi) + (1+j e^{j\phi})\text{cas}(-st \csc\phi)]}{2} g(t) dt \quad (3.153)$$

其中, $\text{cas}(\cdot) = \cos(\cdot) + \sin(\cdot)$ 。分数阶 Hartley 变换与分数阶余弦变换、分数阶正弦变换和分数阶傅里叶变换有如下关系

$$G_H^a(s) = G_C^a(s) + G_S^a(s) = \frac{1+e^{(ja\pi/2)}}{2} G_F^a(s) + \frac{1-e^{(ja\pi/2)}}{2} G_F^a(-s) \quad (3.154)$$

由上式可知, 分数阶 Hartley 变换的周期为 2, 与分数阶傅里叶变换以 4 为周期不同。

$$O_H^a(g(t)) = O_H^{a+2}(g(t)) \quad (3.155)$$

3.2.3.2 性质

分数阶 Hartley 变换的性质与分数阶余弦变换类似, 分数阶余弦变换的性质可由正则余弦变换的性质取 $\{a, b, c, d\} = \{\cot\phi, 1, -1, 0\}$ 时得到。

3.2.3.3 离散实现

离散傅里叶变换矩阵 $\mathbf{F}$ 的元素定义如下

$$\mathbf{F}_{nk} = \frac{1}{\sqrt{N}} \left[\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) - j \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \right], \quad 0 \leq n, k \leq N-1 \quad (3.156)$$

令 $\omega = 2\pi/N$, 并令

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 2\cos(\omega) & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos(2\omega) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos[(N-2)\omega] & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos[(N-1)\omega] \end{bmatrix} \quad (3.157)$$

则 $\mathbf{S}$ 的特征向量构成 $\mathbf{F}$ 的特征向量集, 并有^[21]

$$\mathbf{F}\mathbf{S} = \mathbf{S}\mathbf{F}$$

注意到 $\mathbf{S}$ 是实对称矩阵, 则它的特征向量为实数并且彼此正交。

$N \times N$ DHT 矩阵 $\mathbf{H}$ 的元素定义如下

$$\mathbf{H}_{nk} = \frac{1}{\sqrt{N}} \left[\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) + \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \right], \quad 0 \leq n, k \leq N-1 \quad (3.158)$$

为了进一步讨论方便, 定义

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{r_{nk}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \left[\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \right] \\ \mathbf{F}_{i_{nk}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \left[\sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \right] \end{cases} \quad 0 \leq n, k \leq N-1 \quad (3.159)$$

则矩阵 $\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{F}$ 可重写为

$$\begin{cases} \mathbf{H} = \mathbf{F}_r + \mathbf{F}_i \\ \mathbf{F} = \mathbf{F}_r - \mathrm{j}\mathbf{F}_i \end{cases} \quad (3.160)$$

由于矩阵 $\mathbf{F}_r$ 和 $\mathbf{F}_i$ 彼此正交, 则 $\mathbf{F}_r$ 具有非零特征值的特征向量是 $\mathbf{F}_i$ 特征值为 0 的特征向量; 同样, $\mathbf{F}_i$ 具有非零特征值的特征向量是 $\mathbf{F}_r$ 特征值为 0 的特征向量。基于这一事实, $\mathbf{F}_r$ 、 $\mathbf{F}_i$ 和 $\mathbf{H}$ 的特征分解可表示如下

$$\mathbf{F}_r = [\mathbf{U}_1 \quad \mathbf{U}_2 \quad \mathbf{U}_3 \quad \mathbf{U}_4] \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} [\mathbf{U}_1 \quad \mathbf{U}_2 \quad \mathbf{U}_3 \quad \mathbf{U}_4]^T \quad (3.161)$$

$$\mathbf{F}_i = [\mathbf{U}_1 \quad \mathbf{U}_2 \quad \mathbf{U}_3 \quad \mathbf{U}_4] \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I}_4 \end{bmatrix} [\mathbf{U}_1 \quad \mathbf{U}_2 \quad \mathbf{U}_3 \quad \mathbf{U}_4]^T \quad (3.162)$$

$$\mathbf{H} = [\mathbf{U}_1 \quad \mathbf{U}_2 \quad \mathbf{U}_3 \quad \mathbf{U}_4] \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I}_4 \end{bmatrix} [\mathbf{U}_1 \quad \mathbf{U}_2 \quad \mathbf{U}_3 \quad \mathbf{U}_4]^T \quad (3.163)$$

其中, $\mathbf{I}_i$ 是 $N_i \times N_i$ 的单位矩阵。

$N=4m$ 时, $N_1=m+1, N_2=m, N_3=m, N_4=m-1$;

$N=4m+1$ 时, $N_1=m+1, N_2=m, N_3=m, N_4=m$;

$N=4m+2$ 时, $N_1=m+1, N_2=m+1, N_3=m, N_4=m$;

$N=4m+3$ 时, $N_1=m+1, N_2=m+1, N_3=m+1, N_4=m$ 。

矩阵 $\mathbf{U}_i$ 定义如下:

(1) $\mathbf{U}_1$ 由矩阵 $\mathbf{S}$ 的特征向量 $\mathbf{v}$ 构造, 并满足 $\mathbf{F}_r \mathbf{v} = \mathbf{v}$;

(2) $\mathbf{U}_2$ 由矩阵 $\mathbf{S}$ 的特征向量 $\mathbf{v}$ 构造, 并满足 $\mathbf{F}_r \mathbf{v} = -\mathbf{v}$;

(3) $\mathbf{U}_3$ 由矩阵 $\mathbf{S}$ 的特征向量 $\mathbf{v}$ 构造, 并满足 $\mathbf{F}_i \mathbf{v} = \mathbf{v}$;

(4) U_4 由矩阵 S 的特征向量 v 构造, 并满足 $F_i v = -v$ 。

设数据向量为 x , 则它的分数阶 Hartley 变换 y_τ 定义为

$$y_\tau = H^\tau x \quad (3.164)$$

当幂 τ 为 1 时, 离散分数阶 Hartley 变换变为 Hartley 变换。当 $\tau=0$ 时, 显然 $y_0 = x$ 。

因为方程 $H^{\tau_1 + \tau_2} x = H^{\tau_1} H^{\tau_2} x$ 成立, 所以角度可加性可以满足。现在的问题是如何计算矩阵 H^τ 。矩阵 H^τ 可以由矩阵 H 特征值的 τ 次幂得到

$$H^\tau = [U_1 \ U_2 \ U_3 \ U_4] \begin{bmatrix} I_1^\tau & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-I_2)^\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_3^\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-I_4)^\tau \end{bmatrix} [U_1 \ U_2 \ U_3 \ U_4]^\tau \quad (3.165)$$

在此分解式中有两个变量而使 H^τ 的计算结果不唯一。结果分别如下:

(1) 因为以下两式成立:

$$\begin{aligned} 1^\tau &= e^{-j2k\pi\tau} \\ (-1)^\tau &= e^{-j(2k+1)\pi\tau} \end{aligned} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

矩阵 $I_i^\tau (i=1,3)$ 和 $(-I_i)^\tau (i=2,4)$ 不是唯一的, 需加上限制条件才能去除不定性。

(2) 因为 U_1 是由矩阵 S 的特征向量 v 构造, 满足 $F_r v = v$, U_1 的任意两列向量可交换, 因此存在 $N_1!$ 个矩阵 U_1 。类似地, 矩阵 $U_i (i=2,4)$ 也有同样的问题。为了使 U_i 唯一, 必须设定 U_i 的列向量的顺序。

下面给出一种简单的方法来排除不定性(1)和(2)。为了排除不定性(1), 可选择 I_i^τ 和 $(-I_i)^\tau$ 如下

$$I_i^\tau = \begin{bmatrix} e^{-j0\pi\tau} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & e^{-j2\pi\tau} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-j4\pi\tau} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & e^{-j2(N_i-1)\pi\tau} \end{bmatrix} \quad (3.166)$$

$$(-I_i)^\tau = \begin{bmatrix} e^{-j\pi\tau} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & e^{-j3\pi\tau} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-j5\pi\tau} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & e^{-j(2N_i-1)\pi\tau} \end{bmatrix} \quad (3.167)$$

另外, 我们用以下的方法来安排矩阵 U_i 的列向量以排除不定性(2)。设 u_{im} 和 u_{in} 为矩阵 U_i 的列向量, 则存在 λ_m 和 λ_n 使

$$S u_{im} = \lambda_m u_{im}$$

$$S u_{in} = \lambda_n u_{in}$$

加在 u_{im} 和 u_{in} 列向量上的约束条件为

$$\lambda_m > \lambda_n, \quad m < n \quad (3.168)$$

由于 $\mathbf{S}$ 的特征值不同, 矩阵 $\mathbf{U}_i$ 可由以上限制条件唯一确定。

虽然排除不定性(1)和(2)的方法有很多, 但上述方法是最简便的。最后, 总结一下分数阶 Hartley 变换的计算过程:

- (1) 计算矩阵 $\mathbf{S}$ 的特征值和特征向量;
- (2) 用式(3.168)构建矩阵 $\mathbf{U}_i (i=1, 2, \dots, 4)$;
- (3) 用式(3.166)和式(3.105)计算 $\mathbf{I}_i^\tau (i=1, 3)$ 和 $(-\mathbf{I}_i)^\tau (i=2, 4)$;
- (4) 用式(3.165)计算矩阵 $\mathbf{H}^\tau$;
- (5) 用式(3.164)计算 $\mathbf{y}_\tau = \mathbf{H}^\tau \mathbf{x}$ 。

当数据向量 $\mathbf{x}$ 为实数, 则它的分数阶 Hartley 变换 $\mathbf{y}_\tau$ 是复数, 当 τ 是整数时例外。另外, 考虑到矩阵 $\mathbf{H}$ 的特征值是 1 或 -1, 易得出

$$\mathbf{H}^{2m} \mathbf{x} = \mathbf{x} \quad (3.169)$$

$$\mathbf{H}^{2m+1} \mathbf{x} = \mathbf{H} \mathbf{x} \quad (3.170)$$

3.2.4 分数阶 Gabor 展开

3.2.4.1 Gabor 展开

传统 Gabor 展开用时间和频率的移位函数来表示信号, 已被广泛应用于信号的时频分析。Gabor 表示的基函数可通过对一个简单的窗函数平移和正弦调制得到, 从而得到一个矩形网格状的时频平面结构(图 3.21)。时间连续信号 $x(t)$ 的 Gabor 展开为

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{m,k} g_{m,k}(t) \quad (3.171)$$

这里基函数为

$$g_{m,k}(t) = g(t - mT) e^{j\Omega kt} \quad (3.172)$$

T 表示线性时移参数, Ω 是频率采样间隔。综合窗函数 $g(t)$ 归一化为单位能量。Gabor 展开的存在性、唯一性、收敛性和数字稳定性取决于参数 T 和 Ω 的选择: 临界采样情况是 $\Omega T = 2\pi$; $\Omega T < 2\pi$ 称为过采样, 会导致 Gabor 系数冗余; $\Omega T > 2\pi$ 称为欠采样, 会导致信息丢失。

通常一组时频移位窗函数 $\{h_{m,k}(t)\}$ 可构成 L^2 空间的一组非正交基。此时, 由于不能利用内积映射, Gabor 系数的计算将变得十分复杂。针对这一问题, 有文献提出了一种利用称为双正交窗的辅助函数 $\gamma(t)$ 的计算方法, Gabor 系数 $\{a_{m,k}\}$ 可由此得到

$$a_{m,k} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \gamma_{m,k}^*(t) dt \quad (3.173)$$

这里的分析函数是

$$\gamma_{m,k}(t) = \gamma(t - mT) e^{j\Omega kt} \quad (3.174)$$

把式(3.173)代入式(3.171), 就可得到这组基的完整性条件

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_{m,k}(t) \gamma_{m,k}^*(t') = \delta(t - t') \quad (3.175)$$

在以上的完整性关系中, 利用泊松求和公式可以在分析基和综合基之间产生一种等价却较为简单的双正交条件

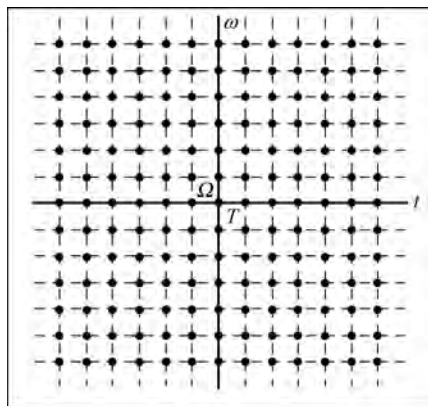


图 3.21 Gabor 展开的正交矩形坐标网格

$$\frac{2\pi}{\Omega} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g(t-mT) \gamma^* \left(t - \left[m + k \frac{2\pi}{\Omega T} \right] T \right) = \delta_k \quad (3.176)$$

其中, $k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$; 因子 $2\pi/\Omega T$ 为过采样的一个测度。

近年来,非矩形时频网格结构中的 Gabor 展开引起了广泛的关注。与传统的 Gabor 展开相比,非矩形时频网格更适于非平稳信号的时频分析。

3.2.4.2 分数阶 Gabor 展开

利用具有线性瞬时频率的基函数代替传统的正弦 Gabor 核,可定义分数阶 Gabor 展开^[23]。信号 $x(t)$ 的 Gabor 展开定义为

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{m,k,\alpha} g_{m,k,\alpha}(t) \quad (3.177)$$

其中,综合基函数 $g_{m,k,\alpha}(t)$ 为

$$g_{m,k,\alpha}(t) = g(t-mT) W_{\alpha,k}(t) \quad (3.178)$$

若定义分数阶核为

$$W_{\alpha,k}(t) = \exp \left\{ j \left[-\frac{1}{2} (t^2 + (k\Omega \sin \alpha)^2) \cot \alpha + k\Omega t \right] \right\} \quad (3.179)$$

其中, Ω 和 T 分别为频率和时间采样间隔,且 $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ 。利用上述的分数阶核生成的基函数 $g_{m,k,\alpha}(t)$ 的瞬时频率是线性变化的,这种分数阶基函数就可产生如图 3.22 所示平行四边形状的时频采样网格。

分数阶 Gabor 系数 $a_{m,k,\alpha}$ 可由下式计算得到

$$a_{m,k,\alpha} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \gamma_{m,k,\alpha}^*(t) dt \quad (3.180)$$

其中,分析函数为

$$\gamma_{m,k,\alpha}(t) = \gamma(t-mT) W_{\alpha,k}(t) \quad (3.181)$$

相对于 $g_{m,k,\alpha}(t)$,它们是双正交的。当 $\alpha = \pi/2$,式(3.177)就成为式(3.171)中的 Gabor 展开。这样传统 Gabor 展开就可看作分数阶 Gabor 展开的特例。接下来我们研究分数阶 Gabor 展开的完整性和双正交条件。

1. 分数阶基的完整性

把式(3.179)代入式(3.177)就可得到分数阶 Gabor 展开的完整性

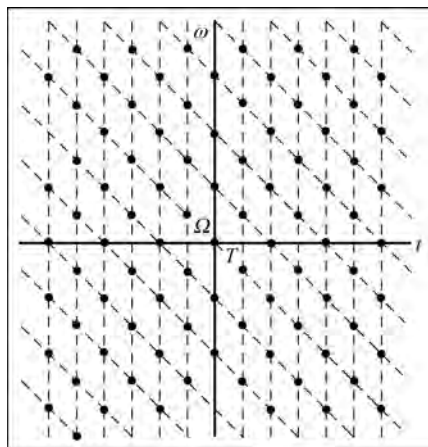


图 3.22 分数阶 Gabor 变换的时频坐标网格

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_{m,k,\alpha}(t) \gamma_{m,k,\alpha}^*(t') = \delta(t - t') \quad (3.182)$$

将式(3.178)和式(3.181)中的分析和综合函数代入上式可得

$$\begin{aligned} & \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(t - mT) \gamma_{m,k,\alpha}^*(t' - mT) \cdot \\ & \exp \left\{ j \left[\frac{1}{2} (t'^2 - t^2) \cot \alpha - k \Omega (t - t') \right] \right\} = \delta(t - t') \end{aligned} \quad (3.183)$$

显然, 当 $\alpha = \pi/2$, 上述的条件简化为经典 Gabor 展开的完整性条件。

2. 分数阶双正交条件

分析分数阶分析与综合函数基必须满足的双正交性条件。式(3.183)表示的完整性条件也可写作

$$\begin{aligned} & \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g(t - mT) \gamma_{m,k,\alpha}^*(t' - mT) \exp \left\{ j \frac{1}{2} (t'^2 - t^2) \cot \alpha \right\} \cdot \\ & \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \exp \{ j [k \Omega (t - t')] \} = \delta(t - t') \end{aligned} \quad (3.184)$$

应用泊松求和公式对式(3.184)中的参数 k 求和可得

$$\sum_k \exp \{ j k \Omega (t - t') \} = \frac{2\pi}{\Omega} \sum_k \delta \left(t - t' - k \frac{2\pi}{\Omega} \right) \quad (3.185)$$

将式(3.185)代入式(3.184)得到

$$\begin{aligned} & \frac{2\pi}{\Omega} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g(t - mT) \gamma_{m,k,\alpha}^* \left(t' - \left(m + \frac{2k\pi}{\Omega T} \right) T \right) \exp \left\{ j \frac{1}{2} \left(\left(t - \frac{2k\pi}{\Omega} \right)^2 - t^2 \right) \cot \alpha \right\} \\ & \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta \left(t - t' - \frac{2k\pi}{\Omega} \right) = \delta(t - t') \end{aligned}$$

从上式可以得到分数阶双正交条件是

$$\frac{2\pi}{\Omega} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g(t - mT) \gamma_{m,k,\alpha}^* \left(t' - \left(m + \frac{2k\pi}{\Omega T} \right) T \right) \exp \left\{ j \frac{2k\pi}{\Omega} \left[\frac{k\pi}{\Omega} - t \right] \cot \alpha \right\} = \delta_k \quad (3.186)$$

其中, $m, k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ 。注意上式的指数项是由角度为 α 的分数阶基产生的, 并且当 $\alpha=\pi/2$ 时, 我们得到的双正交性条件就是式(3.186)表示的 Gabor 展开的双正交性条件。这表明分数阶 Gabor 展开是经典 Gabor 展开在非矩形时频网格中的推广。分析窗 $\gamma(t)$ 函数可通过解由式(3.185)得到的线性方程得到。利用分析函数基 $\{\gamma_{m,k,\alpha}(t)\}$ 和式(3.180)即可计算分数阶 Gabor 系数 $a_{m,k,\alpha}$ 。

3.2.5 短时分数阶傅里叶变换

短时傅里叶变换(Short-Time Fourier Transform, STFT)通过运用一个合适的窗函数 $g(t)$, 能够更好地获得信号 $x(t)$ 频率成分的时间定位。

$$ST_x(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+t_0) g^*(t_0) \exp(-j2\pi t_0 f) dt_0 \quad (3.187)$$

当然, 对于一个纯正弦信号, 我们需要一个较宽的窗, 而对于类似于冲激函数的脉冲信号, 则需要使用较窄的窗。这一规则也同样适用于分析延伸非常广的信号和非常窄的信号。因此, 如果我们已知信号的形状, 就可以对窗宽作相应的调整。假定当前信号的最小信号宽度并不对应于时域和频域, 如图 3.23 所示。那么我们可以看到, 通过对相位平面的坐标旋转, 可以得到信号的最优表示(比如最小信号宽度)。

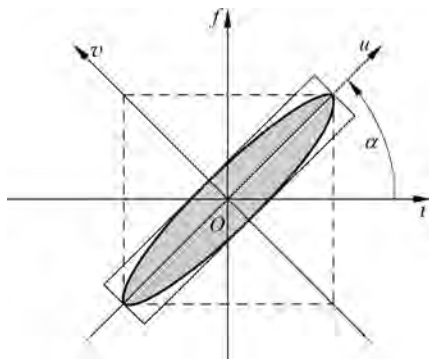


图 3.23 时频面上的基准轴既不是时间轴也不是频率轴的信号示意图

为了在新的坐标系中表示信号, 我们将用到如下性质: 信号的分数阶傅里叶变换相当于时频面的旋转。根据第 2 章内容, 函数 $x(t)$ 的分数阶傅里叶变换定义如下

$$X_\alpha(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_\alpha(t, u) x(t) dt \quad (3.188)$$

其中, 核函数 $K_\alpha(t, u)$ 定义如下

$$K_\alpha(t, u) = \frac{\exp(j\alpha/2)}{\sqrt{j \sin \alpha}} \exp\left(j\pi \frac{(t^2 + u^2) \cos \alpha - 2tu}{\sin \alpha}\right) \quad (3.189)$$

通过旋转关系式

$$\begin{pmatrix} t \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (3.190)$$

可以进一步得出分数阶傅里叶变换核函数的关系式

$$K_\alpha(t_0, u - u_0) = \exp(j2\pi u_0 v) \exp(-j\pi u v)$$



教学视频

$$=[K_{-\alpha}(u_0, t-t_0) \exp(j2\pi t_0 f) \exp(-j\pi t f)]^* \quad (3.191)$$

定义信号 $x(t)$ 的 α 阶短时分数阶傅里叶变换 (Short-Time Fractional Fourier Transform, STFRFT) $ST_x^\alpha(u, v)$ 为其分数阶傅里叶变换 $X_\alpha(u)$ 与窗函数 $g(u)$ 的卷积的傅里叶变换

$$\begin{aligned} ST_x^\alpha(u, v) &= ST_{X_\alpha}(u, v) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} X_\alpha(u+u_0) g^*(u_0) \exp(-j2\pi u_0 v) du_0 \end{aligned} \quad (3.192)$$

由式(3.191)可得

$$\begin{aligned} &\exp(-j\pi uv) \int_{-\infty}^{+\infty} X_\alpha(u+u_0) g^*(u_0) \exp(-j2\pi u_0 v) du_0 \\ &= \exp(-j\pi t f) \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+t_0) G_{-\alpha}^*(t_0) \exp(-j2\pi t_0 f) dt_0 \end{aligned} \quad (3.193)$$

用初始窗函数 $g(t)$ 的分数阶傅里叶变换作为新的窗函数,再结合式(3.190)中的坐标系转换,我们能够像计算普通信号 $x(t)$ 的短时傅里叶变换一样直接计算信号的 α 阶短时傅里叶变换 $ST_x^\alpha(u, v)$

$$ST_x^\alpha(u, v) = \exp(j\pi(uv - tf)) \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+t_0) G_{-\alpha}^*(t_0) \exp(-j2\pi t_0 f) dt_0 \quad (3.194)$$

其中, u, v 和 t, f 的关系如式(3.190)所示。

接下来考虑利用高斯函数 $g(t) = \exp(-\pi ct^2)$ 作为窗函数。它的分数阶傅里叶变换表示是

$$G(u) = \frac{\exp(j\alpha/2)}{\sqrt{\cos\alpha + jc \sin\alpha}} \exp\left(-\pi cu^2 \frac{1 + \tan^2\alpha - j(c - c^{-1}) \tan\alpha}{1 + c^2 \tan^2\alpha}\right) \quad (3.195)$$

当 $c=1$ 时,该高斯函数是分数阶傅里叶变换的特征函数,且利用该函数在分数阶傅里叶域滤波对应于相应短时傅里叶变换表达式的旋转。我们先来看一个简单的线性调频信号

$$x = \exp(j\pi pt^2 + j2\pi qt) \quad (3.196)$$

假定高斯窗 $\exp(-\pi ct^2)$ 是纯谐波信号 $\exp(j2\pi qt)$ 的最优滤波窗,为了找到高斯窗函数针对该线性调频信号的最优滤波参数,我们需要在分数阶傅里叶域上来求解。根据文献[24],有

$$\tilde{X}_\alpha(u) = X_\alpha(u - q \sin\alpha) \exp[j2\pi q \cos\alpha (u - q \sin\alpha/2)]$$

其中, $\tilde{x}(t) = x(t) \exp(j2\pi qt)$ 。那么把上式应用到 chirp 信号 $\exp(j2\pi pt^2)$ 的分数阶傅里叶变换 $\frac{\exp(j\alpha/2)}{\sqrt{\cos\alpha} \sqrt{1+p \tan\alpha}} \exp\left(j\pi u^2 \frac{p - \tan\alpha}{1 + p \tan\alpha}\right)$ 上,可以得到:当分数阶傅里叶变换角度 $\alpha = \arctan p$ 时,线性调频信号的 α 阶分数阶傅里叶变换为一纯谐波信号,而当分数阶傅里叶变换角度 $\alpha = \arctan p + \pi/2$ 时,在 $q \sin\alpha$ 处会出现一个冲激脉冲。重新回到时域,我们可以得到式(3.196)所示线性调频信号所对应的最优高斯窗函数如下

$$[\mathcal{F}^{-\alpha}[g](u)]^* = \mathcal{F}^\alpha[g^*](u) = A \exp\left(-\pi cu^2 \frac{1 + p^2 - j(c - c^{-1})p}{1 + c^2 p^2}\right) \quad (3.197)$$

该式是把 $\alpha = \arctan p$ 代入式(3.195)得到的。

实际上,需要处理的信号往往不会是理想的纯线性调频信号,有时还会存在多个分量。

然而,只要瞬时频率值在时频面上的某一线段(我们将该线段作为基准轴线)方向上变化缓慢,我们就可以找到信号相对较为集中或较为分散的分数阶傅里叶域。

1. 利用分数阶傅里叶矩估计信号宽度

我们知道,信号的时频域宽度可以由它的二阶中心矩来估计。根据第2章介绍的分数阶傅里叶变换矩的相关内容,可以知道,分数阶傅里叶域的信号宽度也同样可以由其二阶分数阶傅里叶变换中心矩 p_α 定义如下

$$p_\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} |R_x^\alpha(t)|^2 (t - m_\alpha)^2 dt = (w_x - m_\alpha)^2 \quad (3.198)$$

其中, $m_\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} |R_x^\alpha(t)|^2 t dt$ 为一阶矩, $w_\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} |R_x^\alpha(t)|^2 t^2 dt$ 是二阶矩。在分数阶傅里叶域中,角度 α 的分数阶傅里叶变换一阶矩 m_α 可由下面的关系式推得

$$m_\alpha = m_0 \cos \alpha + m_{\pi/2} \sin \alpha \quad (3.199)$$

其中, m_0 和 $m_{\pi/2}$ 分别是其时域和频域的一阶矩。同样,角度 α 的分数阶傅里叶变换二阶矩 w_α 可以由其他3个二阶矩 w_β 、 w_γ 和 w_μ 表示。需要注意的是, γ 、 β 和 μ 必须是3个不同的角度,且其中任意两者之差不能为 π 。我们选择3个不同角度的二阶矩 w_0 、 $w_{\pi/2}$ 和 $w_{\pi/4}$, 直接利用文献[25]中的结果,有

$$w_\alpha = w_0 \cos^2 \alpha + w_{\pi/2} \sin^2 \alpha + [w_{\pi/2} - (w_0 + w_{\pi/2})/2] \sin 2\alpha \quad (3.200)$$

综合考虑式(3.198)~式(3.200)可得,只需知道3个分数阶傅里叶变换的功率谱,即可以确定所有角度的二阶中心矩 p_α , 也就得到了相应角度分数阶傅里叶域的信号宽度

$$\begin{aligned} p_\alpha &= (w_0 - m_0) \cos^2 \alpha + (w_{\pi/2} - w_{\pi/2}^2) \sin^2 \alpha + [w_{\pi/4} - m_0 m_{\pi/2} - (w_0 + w_{\pi/2})/2] \sin 2\alpha \\ &= p_0 \cos^2 \alpha + p_{\pi/2} \sin^2 \alpha + [w_{\pi/4} - m_0 m_{\pi/2} - (w_0 + w_{\pi/2})/2] \sin 2\alpha \end{aligned} \quad (3.201)$$

我们可以通过 p_α 的导数来研究信号的极限宽度对应的分数阶傅里叶域。通过式(3.201), 易得 p_α 的一阶导数如下

$$\frac{dp_\alpha}{d\alpha} = (p_{\pi/2} - p_0) \sin 2\alpha + [2(w_{\pi/4} - m_0 m_{\pi/2}) - (w_0 + w_{\pi/2})] \cos 2\alpha$$

令上式等于0,就能求得极限宽度所对应的角度 α_e

$$\tan 2\alpha_e = \frac{2(w_{\pi/4} - m_0 m_{\pi/2}) - (w_0 + w_{\pi/2})}{p_0 - p_{\pi/2}} \quad (3.202)$$

由于分数阶傅里叶变换是以 2π 为周期,且满足 $\mathcal{F}^{\alpha+\pi}[x(t)] = \mathcal{F}^\alpha[x(-t)]$, 因此,信号宽度在 $\alpha \in [0, \pi)$ 内必有一对极大值与极小值。由 p_α 在 $\alpha = \alpha_e$ 时的二阶导数 $\left. \frac{d^2 p_\alpha}{d\alpha^2} \right|_{\alpha=\alpha_e} =$

$\frac{2(p_{\pi/2} - p_0)}{\cos(2\alpha_e)}$ 可得,若 $p_{\pi/2} - p_0$ 与 $\cos(2\alpha_e)$ 同号,此时所得信号的极值宽度为最小宽度,否则为最大宽度。因此,只需要通过3个分数阶傅里叶功率谱值,就可求得使信号有最佳聚焦或最大延伸的最优分数阶傅里叶变换角度。

2. 基于短时分数阶傅里叶变换的时变滤波

时域无重叠的信号分量可以通过选择开关对其进行分离,频域无重叠的信号分量可以通过带通滤波器对其进行分离。对于多分量的非平稳信号,如雷达领域的多分量 LFM

回波信号,其在时域和频域都是严重混叠的,且信号能量分散,难以设计合适的滤波器将其分离。但在时频域内,不同分量的信号由于其时频变化特性不同,其时频谱在大部分范围内并不会重叠,且能量集中,这启发我们可以从时频平面将各个信号分离。我们知道,多分量时变信号在时频分布中表现为多个能量脊,而从多分量信号中分离出各分量信号的问题就可以定义为从信号的时频分布中提取出各个分量信号的时频表征,进而通过其时频表征还原出时域信号^[26]。这种采用时频表征在时频分布上对信号进行处理,然后通过逆变换重建时域信号的操作定义为时变滤波(Time-Varying Filtering, TVF)。

时变滤波要求所用的时频变化具有可逆性质,常用的有短时傅里叶变换、短时分分数傅里叶变换、小波变换谱、同步压缩小波变换谱等。以短时傅里叶变换为例,多分量信号的时变滤波定义为

$$\tilde{z}_i(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_z[n, k] B_i[n, k] \quad (3.203)$$

其中, $F_z[n, k]$ 为信号的短时傅里叶变换分布, $\tilde{z}_i(n)$ 为需要重建的时域信号, $B_i[n, k]$ 表示第 i 个信号分量的时变滤波器。简单有效的时变滤波器定义为: 在存在信号分量的时频域能量聚集处 $B_i[n, k] = 1$, 其他区域 $B_i[n, k] = 0$, 这样的滤波器对于在时频域内不混叠的多分量信号分离非常有效。而对于在时频平面内混叠的信号分量, 就要利用不同信号分量在时频平面内的能量聚焦度来设计滤波器, 如

$$H(n, k) = \begin{cases} 1, & |\text{STFT}_x(n, k)| \geq Th \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (3.204)$$

式中, Th 为依据经验选取的阈值。该时变滤波器要求待分离的多分量信号在时频平面内的能量聚焦度有显著的差异。

众所周知,窗长是短时傅里叶变换和短时分分数阶傅里叶变换中的一个重要参数,不同的窗长可使其呈现出不同的时频聚集特性。宽窗可以提供良好的频率分辨率,但会导致时间分辨率变差;反之,窄的窗函数可以提供好的时间分辨率,但会降低频率分辨率。因此,为了获得更好的能谱集中,频率慢变信号的分析通常需要一个宽窗,而频率快变信号的分析则需要一个窄窗^[27]。由于短时分分数阶傅里叶变换结合了短时傅里叶变换和分数阶傅里叶变换的优点,因此它可以很好地描述时变信号。尤其是针对快变的频率调制信号,短时分分数阶傅里叶变换可以比短时傅里叶变换提供更好的时频分辨能力^[28-29]。与短时傅里叶变换时频平面内的矩形支撑不同,短时分分数阶傅里叶变换对时频平面的划分为平行四边形,而每个平行四边形网格称为一个时间-分数域频率单元,如图 3.24 所示,其两个边长的乘积的倒数为短时分分数阶傅里叶变换的二维分辨率。当且仅当使用高斯窗时,时宽带宽积达到最小,短时分分数阶傅里叶变换的二维分辨率达到最佳。因此,使用高斯窗的短时分分数阶傅里叶变换也称为最优短时分分数阶傅里叶变换或高斯短时分分数阶傅里叶变换。此时的高斯窗函数形式如下^[30]

$$g(t) = \left(\pi \frac{T_x |\sin \alpha|}{B_{x,p}} \right)^{-1/4} \exp \left(-\frac{B_{x,p} t^2}{2 T_x |\sin \alpha|} \right) \quad (3.205)$$

式中, T_x 和 $B_{x,p}$ 分别是信号的时宽和信号 p 阶短时分分数阶傅里叶域的频率域带宽。高斯窗函数的方差为 $\sigma^2 = T_x |\sin \alpha| / B_{x,p}$, 根据这些参数可以确定最佳时间窗长度。

与短时傅里叶变换不同的是,除了所用窗函数的长度,短时分分数阶傅里叶变换的变换阶

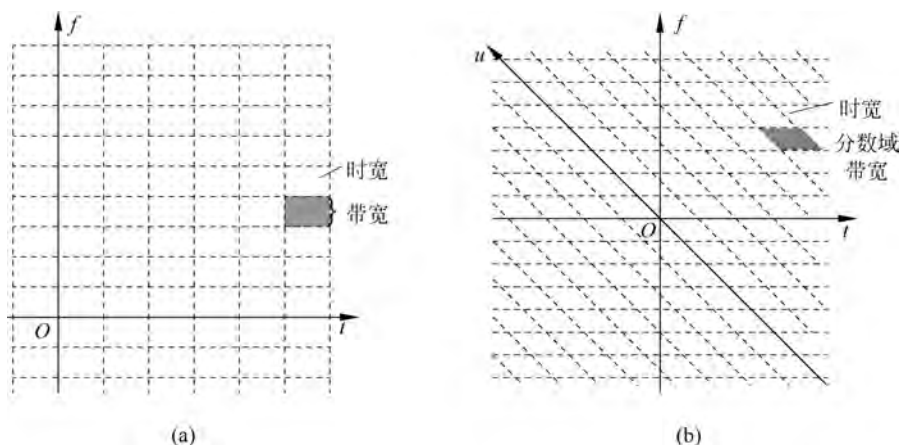


图 3.24 短时傅里叶变换和短时分分数阶傅里叶变换的时频分割表示

(a) 短时傅里叶变换; (b) 短时分分数阶傅里叶变换

次也会影响信号在时频域的能谱集中度。由于分数阶傅里叶变换的时频旋转变换能力,一个信号经过分数阶傅里叶变换后,其频谱宽度可以被展宽或压缩,从而影响其频谱聚焦度。例如,一个调频率为 μ_0 的 LFM 信号,当对其进行 $p_0 = 2\text{arccot}(-\mu_0)/\pi$ 阶次的分数阶傅里叶变换时,该 LFM 信号在分数域变成一个冲激信号,此时它的功率谱高度集中,幅度值达到最大,此时的阶次 p_0 称作匹配阶次。即使待分析的时变信号不是严格的 LFM 信号,可以通过采用短时分分数阶傅里叶变换将其在窗函数里的每一段成分近似为 LFM,其对应的阶次称为准匹配阶次。通过对信号执行准匹配阶次下的短时分分数阶傅里叶变换,可以确保其在短时分分数阶傅里叶域的时频表征具有高的能谱集中。相反,所选的阶次与信号的匹配或准匹配阶次的差距越大,信号的分数阶傅里叶谱就展宽得越严重,从而造成其时频表征内的能量严重弥散。基于以上分析,对于一个含有两个成分的信号,可以通过调整变换阶次来改变不同信号成分在时频平面内的能谱聚焦度,这样有助于提高特定信号成分稀疏表征的可能性,有利于时变滤波器的设计。如选定的阶次接近信号成分 1 的匹配阶次,而远离成分 2 的匹配阶次时,那么成分 1 的能谱聚集度就会大于成分 2 的,这时信号成分 1 相对于成分 2 就更容易被稀疏表征。合适的阶次可以通过对信号做不同阶次的分数阶傅里叶变换遍历搜索得到,当某个阶次下对应的不同信号成分的频谱幅度差异最大,该阶次就是所需要的合适阶次。当合适的阶次得到后,可以通过式(3.205)得到短时分分数阶傅里叶变换最优窗长的参考值。为了更好地说明以上结论,下面给出一个例子来说明基于短时分分数阶傅里叶变换的稀疏表征和时变滤波。

考虑一个含有两个分量的信号,其表达式为

$$x(t) = ax_1(t) + x_2(t) = ae^{j2\pi(8t+2\arctan(t-5)^2)} + e^{j2\pi(5t+10\sin(3.5t))} \quad (3.206)$$

式中,第一个指数项代表频率慢变的时变信号;第二个指数项表示频率快变的信号; a 是两个成分的幅度比,此处设置为 1,即两个成分的幅度相同。以 100Hz 的采样频率对信号进行采样,采样总点数为 1400 点。然后对这个信号进行分数阶傅里叶变换,图 3.25 给出了信号时域和不同阶次下的分数阶傅里叶变换结果,可以看出两个成分在时域严重混叠。图 3.25(b)为信号在阶次为 1 时的分数阶傅里叶变换结果,等同于信号的傅里叶变换,高的峰值是慢变信号的

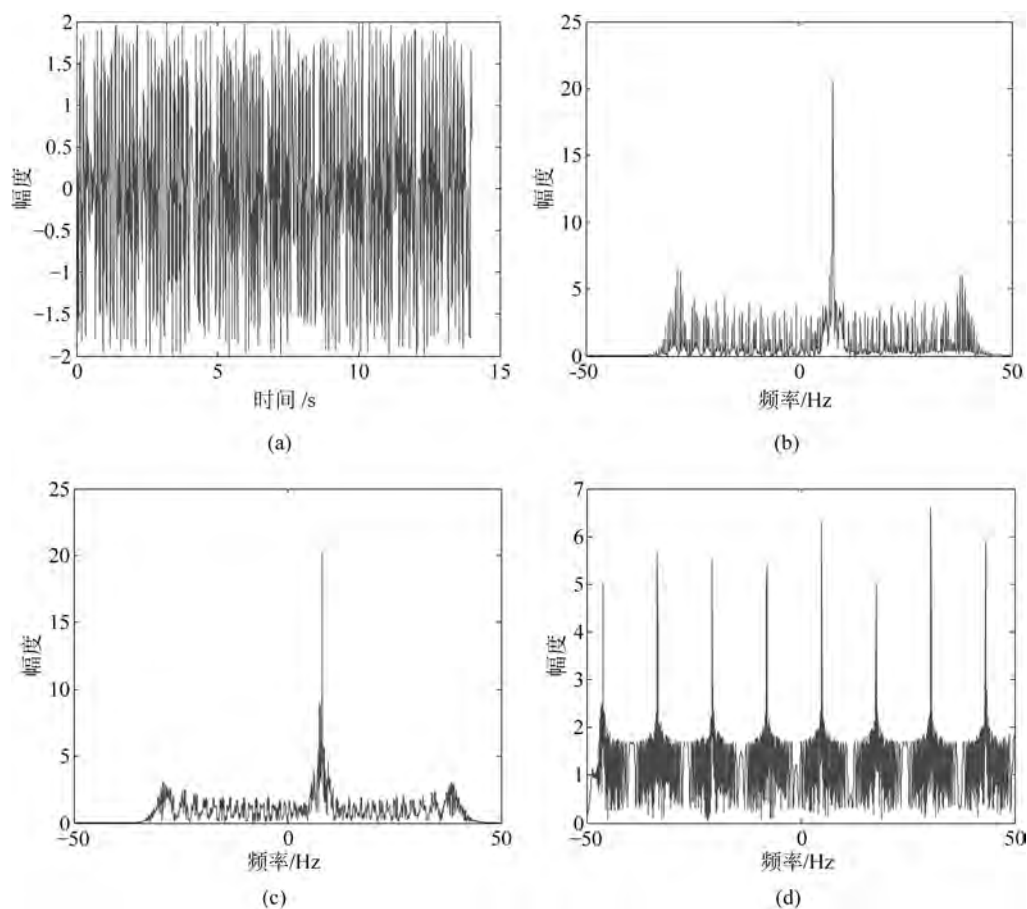


图 3.25 给定信号不同阶次的分数阶傅里叶变换结果

(a) 时域; (b) $p=1$; (c) $p=0.99$; (d) $p=0.1$

频谱,分布在其两侧较低且宽的谱线是快变信号的频谱。观察图 3.25(c)信号 0.99 阶分数阶傅里叶变换的结果,可以看到慢变信号的频谱强度没有明显的变化,而分布在两侧的快变信号的频谱强度有明显的下降,两个成分的频谱强度差异明显增加。从滤波的角度,两个成分的强度差异越大越有利于强的成分的提取。因此,通过调整阶次改变不同成分的频谱差异有助于特定成分的恢复,而此时的阶次 0.99 也就是慢变信号的准匹配阶次。同样,从图 3.25(d)可以发现慢变信号的频谱展宽,幅度严重下降,而快变信号的频谱出现了一定的聚焦,有 8 个明显的峰值出现,这是在频域所没有的。而且从后续信号的时频表征可以看到这 8 个峰值对应快变微多普勒信号的 8 个周期。尽管如此,快变信号的谱和慢变信号的谱还是严重混叠在一起,不能够将二者分离的。

然后,对上述信号分别进行宽窗和窄窗的短时傅里叶变换,以及 0.99 阶的宽窗短时分数阶傅里叶变换和 0.1 阶的窄窗短时分数阶傅里叶变换。其中,短时傅里叶变换中宽窗和窄窗分别为 256 点和 16 点的汉明窗。短时分分数阶傅里叶变换的宽窗和窄窗的长度由前面提到的最佳参考窗长求法计算得到,分别为 237 点和 19 点。将其折算成 2 的 N 次幂便于计算,分别取 256 和 16。图 3.26 展示了变换后的时频图。从图 3.26(a)和图 3.26(c)的结

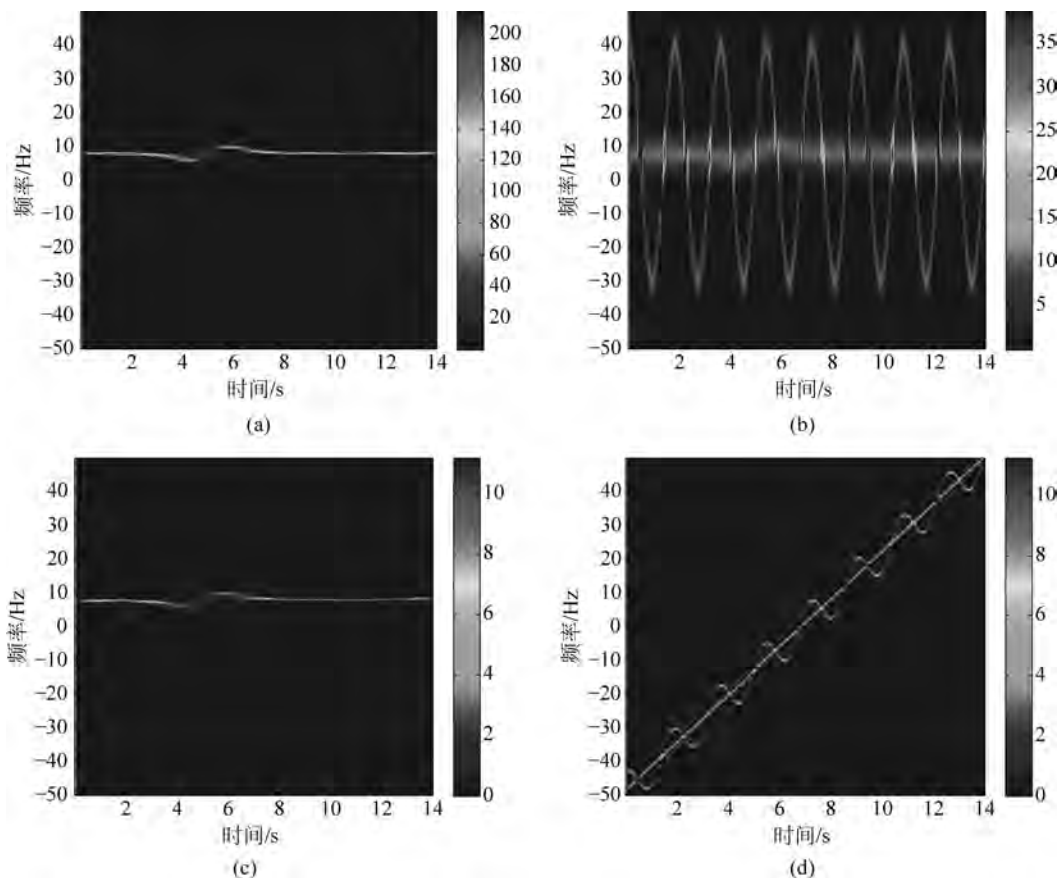


图 3.26 给定信号的短时傅里叶变换和短时分数阶傅里叶变换结果

(a) 宽窗短时傅里叶变换; (b) 窄窗短时傅里叶变换;

(c) 0.99 阶宽窗短时分数阶傅里叶变换; (d) 0.1 阶窄窗短时分数阶傅里叶变换

果可以看出无论是短时傅里叶变换还是短时分数阶傅里叶变换,当使用较宽的窗函数时,慢变信号的能谱集中度非常高,快变信号的谱几乎不可见,这时相对于频率快变成分可以认为频率慢变成分是稀疏的。且由于受到分数阶变换阶次 p 的影响,图 3.26(c) 中信号的稀疏度略高于图 3.26(a) 中的。相反,当短时傅里叶变换和短时分数阶傅里叶变换的窗函数都是窄窗时,快变信号的能谱集中度明显增加,可以清晰地看到其周期性的调制规律。而且使用短时分数阶傅里叶变换后快变信号的能谱集中度和频率分辨率明显都要优于使用短时傅里叶变换的结果,如图 3.26(b) 和图 3.26(d) 所示,这样的结果对快变信号的稀疏表征和分离是有利实际上,在图 3.26(d) 中,尽管快变信号的能谱集中度增强了,但其强度与慢变信号的能谱差异并不大,所以此时的快变信号仍不能被很好地稀疏表征,难以设计合适的时变滤波器将其分离出。因此,为了能够更好地稀疏表征快变信号成分,除了要用到合适阶次的窄窗短时分数阶傅里叶变换外,还要利用 CLEAN 技术,该技术可以消除强的慢变信号对弱的快变信号的影响。用同样的例子说明以上情况,此时的两个信号成分的幅度比值 a 设置为 2。图 3.27 给出了该信号在使用 CLEAN 消除强分量干扰前后的 0.1 阶窄窗短时分数阶傅里叶变换的时频分析结果。从图 3.27(a) 中可以看到受到强分量的影响,即使采用了

合适阶次的窄窗短时分数阶傅里叶变换来增强快变信号的能谱集中度,但其能谱强度还是比强分量的弱很多,这就很难对快变信号进行稀疏表征。反观图 3.27(b),当利用 CLEAN 消除强分量干扰后,慢变信号的谱几乎不可见,此时的快变信号可以被很好地稀疏表征,通过设计简单的阈值滤波器很容易就可将其提取出来。

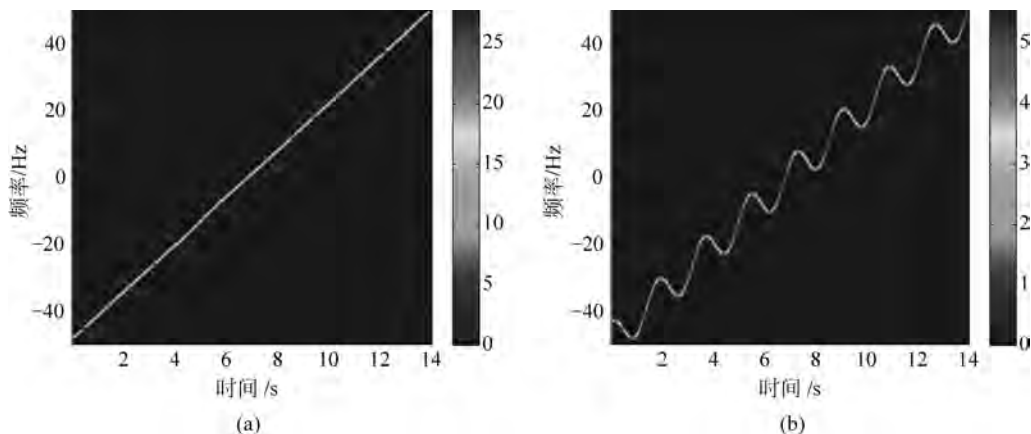


图 3.27 给定信号在幅度比值为 2 时的 0.1 阶窄窗短时分数阶傅里叶变换结果
(a) CLEAN 前; (b) CLEAN 后

3.2.6 分数阶模糊函数、分数阶 Wigner 分布

早期时频分析的许多发展都是由量子力学中使用的数学方法引导的^[31],其中有些方法的出发点是把一个合适的 Hermite 算子和一个诸如时间或频率的抽象物理变量联系起来。例如,对一个时域信号 $s(t)$ 进行运算,那么 Hermite 时间算子 $\mathcal{T}$ 和 Hermite 频率算子 $\mathcal{O}$ 可以分别定义为^[31]

$$\mathcal{T}(s)(t) = ts(t), \quad \mathcal{O}(s)(t) = \frac{-j}{2\pi} \frac{d}{dt} s(t) \quad (3.207)$$

任何一个 Hermite 算子都可以构成信号空间上的一个完备正交基^[31]。因此,信号在这些特征函数上的投影自然地定义了一种信号变换,弄清楚这一点对于我们要考虑的信号来说是最为基础的。例如, Hermite 频率算子 $\mathcal{O}$ 的特征函数是复指数型的, $u_F(t, f) = e^{j2\pi ft}$, 而由它们定义的信号变换就是傅里叶变换。

$$S_F(f) = \langle s, u_F \rangle = \int s(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (3.208)$$

其中, $\langle, \rangle$ 表示内积, 定义为 $\int g(t) h^*(t) dt$ 。对于任意变量的信号变换, 比如 a , 可以类似地通过把信号分解到 Hermite 算子 $\mathcal{A}$ 和变量 a 的特征函数 $u_A(t, a)$ 上来定义

$$S_A(a) = \langle s, u_A \rangle = \int s(t) u_A^*(t, a) dt \quad (3.209)$$

参数化的酉算子也可以一种等价和一致的方式来表示物理变量^[32]。例如, 时移算子 $\mathcal{T}_\tau$ 和频移算子 $\mathcal{O}_v$ 可以分别定义为

$$\mathcal{T}_\tau(s)(t) = s(t - \tau), \quad \mathcal{O}_v(s)(t) = s(t) e^{j2\pi vt} \quad (3.210)$$



教学视频

教学视频

其中,参数 $\tau, v \in \mathbb{R}$ 表示时移和频移值的大小。

接下来,我们回顾前述分数阶位移算子的概念,它的定义为

$$\mathcal{R}_\rho^\phi(s)(t) = s(t - \rho \cos \phi) e^{-j2\pi(\rho^2/2) \cos \phi \sin \phi + j2\pi \rho \sin \phi} \quad (3.211)$$

其中, $\mathcal{R}_\rho^\phi$ 将信号 $s(t)$ 在时频平面上沿着与时间轴成 ϕ 角的方向做大小为 ρ 的移位。因此, $\mathcal{R}_\rho^\phi$ 将单位时移算子 $\mathcal{T}_\tau$ ($\phi=0$) 和单位频率算子 $\mathcal{O}_v$ ($\phi=\pi/2$) 的概念推广到了时频平面的任意方向。也就是说, $\mathcal{R}_\rho^0(s)(t) = \mathcal{T}_\rho(s)(t)$, $\mathcal{R}_\rho^{\pi/2}(s)(t) = \mathcal{O}_\rho(s)(t)$ 。此外,分数阶位移算子 $\mathcal{R}_\rho^\phi$ 也可以通过时移算子 $\mathcal{T}_\tau$ 和频移算子 $\mathcal{O}_v$ 来表示:

$$\mathcal{R}_\rho^\phi(s)(t) = e^{-j\pi\rho^2 \cos \phi \sin \phi} [\mathcal{O}_{\rho \sin \phi} \mathcal{T}_{\rho \cos \phi}(s)(t)] \quad (3.212)$$

因此,分数阶位移算子也可理解为一种特殊的联合时频移位。时移和频移算子是时间变量 t 和频率变量 f 的一种表示,类似地,分数阶位移算子可以认为是时间轴和频率轴之间的某条坐标轴相关的“分数阶”变量的表示,该变量可以用 r 来表示(图 3.28)。

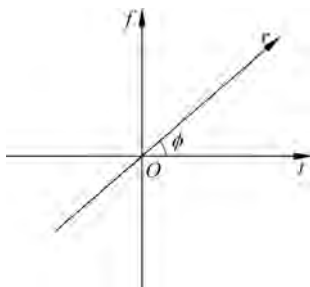


图 3.28 时频图上分数阶变量(r)的表示

根据文献[33]中提出的理论,我们可以导出分数阶变量 r 的 Hermite 算子表示为

$$\mathcal{R}^\phi = \cos \phi \mathcal{T} + \sin \phi \mathcal{O} \quad (3.213)$$

注意到 $\mathcal{R}^\phi$ 也可以简化为 Hermite 时间算子 $\mathcal{T}$ 和频率算子 $\mathcal{O}$ 的表示,它们分别对应式(3.207)中 $\phi=0$ 和 $\phi=\pi/2$ 的情况。利用 Stone 定理,酉算子和 Hermite 算子之间的关系可以表示为^[7]

$$\mathcal{R}_\rho^\phi = e^{-j2\pi\rho\mathcal{R}^{\phi+\pi/2}} \quad \text{和} \quad \mathcal{R}_\beta^{\phi-\pi/2} = e^{-j2\pi\beta\mathcal{R}^\phi} \quad (3.214)$$

傅里叶变换是信号的频域表示,与之类似,图 3.28 所示的分数阶傅里叶域 r 上的变换可以看作信号在式(3.209)所表示的 Hermite 算子 $\mathcal{R}^\phi$ 的特征函数上的分解。实际上我们可以看到, $\mathcal{R}^\phi$ 的特征函数 $u_{\mathcal{R}^\phi}(t, r)$ 形成了分数阶傅里叶变换的基函数^[7]。因此,我们可以得到由 Hermite 分数阶算子 $\tilde{\mathcal{R}}^\phi$ 定义的信号变换如下所示

$$S_{\tilde{\mathcal{R}}^\phi}(r) = \langle s, u_{\mathcal{R}^\phi} \rangle = C_\phi e^{j\pi r^2 \cot \phi} \int s(t) e^{j\pi t^2 \cot \phi - j2\pi t r \csc \phi} dt \quad (3.215)$$

其中, $C_\phi = \sqrt{1 - j \cot \phi}$ 。当分数阶傅里叶变换旋转角度 $\phi \neq n\pi$ (n 为整数)时,式(3.215)与之是完全等价的。

利用上述酉算子和 Hermite 算子的知识,我们可采用特征函数法推导分数阶模糊函数和分数阶 Wigner 分布。

假定有我们感兴趣的两个变量 a 和 b , 它们的 Hermite 算子分别表示为 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$, 那么我们就可以利用特征函数法来推导它们的联合信号表示。例如, Cohen 类时频分布就可以利用式(3.207)中的 Hermite 时间算子 $\mathcal{T}$ 和频率算子 $\mathcal{O}$ 通过特征函数算子的方法推导出来^[31]。最后, Cohen 类的双线性、尺度变化时频表示的通用公式可以表示为

$$(P_\Psi s)(t, f) = \iiint \Psi(\tau, v) s\left(u + \frac{\tau}{2}\right) s^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j2\pi(v(t-u) + \tau f)} du d\tau dv \quad (3.216)$$

现在我们考虑对应旋转角度为 ϕ (图 3.28) 的时间变量 t 和分数阶域变量 r 的联合表示。我们在特征函数法中使用的第一个算子是 Hermite 时间算子 $\mathcal{T} = \mathcal{R}^0$, 第二个算子是

Hermite 分数阶算子 $\mathcal{R}^\phi$, 其中 $0 < |\phi| \leq \pi/2$ 。如果 $\phi = \pi/2$, 那么 $\mathcal{R}^{\pi/2} = \mathcal{O}$, 这种时频表征是式(3.216)中 Cohen 类时频分布的简化。

步骤 I: 构造一个与函数 $e^{j2\pi(\sigma t + \tau r)}$ 对应的特征函数算子。由于算子 $\mathcal{T}$ 和 $\mathcal{R}^\phi$ 的不可交换性 ($\mathcal{T}\mathcal{R}^\phi \neq \mathcal{R}^\phi\mathcal{T}$), 函数 $e^{j2\pi(\sigma t + \tau r)}$ 与特征函数算子之间有多种不确定的关系。其中一种著名的特征函数算子称为 Wely 分类, 它可以通过将表达式 $e^{j2\pi(\sigma t + \tau r)}$ 中的变量 t 和 r 替换为 Hermite 算子 $\mathcal{T}$ 和 $\mathcal{R}^\phi$ 而得到, 如下所示

$$\mathcal{M}^\phi(\tau, \sigma) = e^{j2\pi\sigma\mathcal{T} + j2\pi\tau\mathcal{R}^\phi} \quad (3.217)$$

为了不用研究所有可能的分类情况, Cohen 提出了一种简化的方法, 称作核函数法。这种方法选定了一种单一的分类, 例如式(3.217)所示的 Wely 分类, 将它与一个核函数 $\Psi(\tau, \sigma)$ 相乘来得到所有可能的特征函数算子。因此, 这个“归一化”的特征函数算子可以表示为

$$\mathcal{M}_\Psi^\phi(\tau, \sigma) = \Psi(\tau, \sigma) \mathcal{M}^\phi(\tau, \sigma) = \Psi(\tau, \sigma) e^{j2\pi\sigma\mathcal{T} + j2\pi\tau\mathcal{R}^\phi} \quad (3.218)$$

步骤 II: 将特征函数作为特征函数算子的均值进行积分。与式(3.218)中归一化特征函数算子对应的归一化特征函数可以由下式计算而得^[1]

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\Psi^\phi(s)(\tau, \sigma) &= \int s^*(t) [\mathcal{M}_\Psi^\phi(\tau, \sigma) s](t) dt \\ &= \int s^*(t) \Psi(\tau, \sigma) e^{j2\pi\sigma\mathcal{T} + j2\pi\tau\mathcal{R}^\phi} [s](t) dt \end{aligned} \quad (3.219)$$

我们称这种与单位核函数 $\Psi(\tau, \sigma) = 1$ 相关的特征函数为“分数阶模糊函数”(Fractional Ambiguity Function, FAF), 并用 $\mathcal{Y}^\phi[s](\tau, \sigma)$ 来表示

$$\mathcal{Y}^\phi[s](\tau, \sigma) = \langle e^{j2\pi\sigma\mathcal{O} + j2\pi\tau\mathcal{R}^\phi} \rangle \quad (3.220)$$

式(3.220)中的分数阶模糊函数可以使用算子积分得到

$$\mathcal{Y}^\phi[s](\tau, \sigma) = \int s\left(u + \frac{\tau}{2} \sin\phi\right) s^*\left(u - \frac{\tau}{2} \sin\phi\right) e^{j2\pi(\sigma + \tau \cos\phi)u} du \quad (3.221)$$

令上式的 $\phi = \pi/2$, 则得到经典模糊函数(Ambiguity Function, AF)如下

$$\mathcal{Y}^{\pi/2}[s](\tau, v) = \int s\left(t + \frac{\tau}{2}\right) s^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{j2\pi vt} dt \quad (3.222)$$

模糊函数是与 Cohen 类时频分布核函数相关的特征函数, 式(3.218)表示的传统模糊函数与式(3.221)表示的分数阶模糊函数有如下关系

$$\mathcal{Y}^\phi[s](\tau, \sigma) = \mathcal{Y}^{\pi/2}[s](\tau \sin\phi, \sigma + \tau \cos\phi) \quad (3.223)$$

我们可以从式(3.223)看到分数阶模糊函数将传统模糊函数的自变量“连接”起来, 自变量使用三角函数进行了加权。

步骤 III: 最后, 通过计算式(3.219)中归一化特征函数的二维傅里叶变换, 我们可以得出广义的联合分数阶表示。这种通用的联合分数阶表示可以用式(3.221)中的分数阶模糊函数表示为

$$(P_\Psi^\phi s)(t, r) = \iint \Psi(\tau, \sigma) \mathcal{Y}^\phi[s](\tau, \sigma) e^{-j2\pi(\sigma t + \tau r)} d\sigma d\tau \quad (3.224)$$

通过令 $\Psi(\tau, \sigma)$ 与 Cohen 类时频表示任一成员的核函数相等, 我们可以找到一个对应的分数阶联合分数阶表示。例如, 仍然用单位核函数这个特例, 令式(3.224)中的 $\Psi(\tau, \sigma) = 1$, 并进行化简, 可以得到“分数阶 Wigner 分布”

$$\begin{aligned}
 S_{\phi, \text{WD}}(\tau, r) &= \iint \mathcal{Y}^{\phi}[s](\tau, \sigma) e^{-j2\pi(\sigma\tau + \tau r)} d\sigma d\tau \\
 &= \frac{1}{|\sin\phi|} \int s\left(t + \frac{\tau}{2}\right) s^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j2\pi(\tau/\sin\phi)(r - t\cos\phi)} d\tau
 \end{aligned} \quad (3.225)$$

对于 $\phi = \pi/2$, $\mathcal{R}^{\phi} = \mathcal{O}$ 的情况, 分数阶 Wigner 分布退化为 Wigner 分布。和分数阶模糊函数相似, 分数阶 Wigner 分布与 Wigner 分布之间具有如下关系

$$S_{\phi, \text{WD}}(t, r) = \frac{1}{|\sin\phi|} S_{\pi/2, \text{WD}}\left(t, \frac{r}{\sin\phi} - t\cot\phi\right) \quad (3.226)$$

3.2.7 分数阶小波包变换

将分数阶傅里叶变换和小波包变换的概念相结合, 可定义分数阶小波包变换。信号 $f(t) \in L^2(LR)$ 的短时傅里叶变换定义为 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} g(t - \tau) f(t) dt$, 这里 $g(t)$ 是窗函数, 小波变换中有类似的描述。相对于分解子波 ψ , 连续小波变换 (Continuous Wavelet Transform, CWT) 就变为 $\frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) f(t) dt$, 这里 $a > 0$ 并且 ψ 是完整化的, 即 L^2 模 $\|\psi\| = 1$ 。

小波包变换 (Wavelet Packet Transform, WPT) 可以看作短时傅里叶变换与连续小波变换的“混合”, 即 $\frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) f(t) dt$ 。换句话说, 小波包变换就是一个加窗信号的傅里叶变换, 并且加窗函数是经 a 展宽和 b 平移的小波。

如前所述, 分数阶傅里叶变换是传统傅里叶变换的推广。如果考虑一个信号在时间轴的表示及其傅里叶变换在频率轴的表示, 可以将傅里叶变换看作信号逆时针旋转 $\pi/2$ 角度。那么分数阶傅里叶变换就成为旋转角度非 $\pi/2$ 整数倍的变换。

一个给定信号 $f(t)$ 的分数阶小波包变换 (Fractional Wavelet Packet Transform, FRWPT) $\text{WPT}^{\alpha}[f](u, a, b)$ 为^[31]

$$\text{WPT}^{\alpha}[f](u, a, b) = \sqrt{\frac{1 - j\cot\alpha}{2\pi}} e^{j\frac{u^2}{2}\cot\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) f(t) e^{j\frac{t^2}{2}\cot\alpha} e^{j\omega t \csc\alpha} dt \quad (3.227)$$

注意 WPT^{α} 是时间频率比例函数, 而且当 $\alpha = \pi/2$ 时, 分数阶小波包变换与小波变换一致。分数阶小波包变换的计算步骤如下:

- (1) 与小波作乘积;
- (2) 与 chirp 信号作乘积;
- (3) 傅里叶变换;
- (4) 再与 chirp 信号作乘积;
- (5) 与复相位因子相乘。

如果定义 $\psi_a(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t}{a}\right)$, 那么 $\|\psi_a\| = \|\psi\| = 1$ 。回顾小波包变换的定义, 可以把

小波包变换看作短时傅里叶变换加窗函数 ψ_a 。因而我们可以得到分数阶小波包变换恒等式的分解形式为



教学视频

教学视频

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} du db \text{WPT}^{\alpha}[f](u, a, b) \text{WPT}^{\alpha}[g]^*(u, a, b) \\
&= \iint du db \int K_{\alpha}(u, t) \psi_{\alpha}(t-b) f(t) dt \int K_{\alpha}(u, t') \psi_{\alpha}(t'-b) g(t') dt' \\
&= \iint db dt |\psi_{\alpha}(t-b)|^2 f(t) g^*(t) \\
&= \|\psi_{\alpha}\| \langle f, g \rangle = \langle f, g \rangle
\end{aligned} \tag{3.228}$$

显然, 分数阶小波包变换是一种新的时频分析工具, 它与其他时频变换, 如 Wigner 分布、模糊函数以及谱图等的联系及其在信号处理中的应用有待进一步研究。

3.3 基于分数阶傅里叶变换的对偶转换

周期函数的傅里叶变换是离散的, 离散函数的傅里叶变换是周期的, 因此, 周期和离散可以看作傅里叶对偶算子 (傅里叶共轭)。一个周期函数 $f_{\text{per}}(u)$ 可以定义为任意函数 $f(u)$ 周期延拓后的结果

$$f_{\text{per}}(u) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(u - k\Delta u) \tag{3.229}$$

其中, Δu 是周期, $\Delta u > 0$ 。一个离散函数 $f_{\text{dis}}(u)$ 可以定义为任意函数 $f(u)$ 的均匀采样:

$$f_{\text{dis}}(u) = \delta u \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k\delta u) \delta(u - k\delta u) \tag{3.230}$$

其中, δu 是采样间隔, $\delta u > 0$ 。

按照上述理解思路, 不少常用运算对都是傅里叶对偶算子, 如坐标乘法与微分、时移和相移、chirp 乘法和 chirp 卷积, 这些都是众所周知的例子。尺度算子以参数互为倒数而自对偶。分数阶傅里叶变换算子 $\mathcal{F}^p$ 是傅里叶变换算子 $\mathcal{F}$ 的推广形式。在连续形式上, 分数阶傅里叶变换算子介于恒等算子 $\mathcal{F}^0 = \mathcal{I}$ 和傅里叶算子 $\mathcal{F}^1 = \mathcal{F}$ 之间。通过分数阶傅里叶变换可以对上述对偶算子进行转换。当变换阶次从 0 变到 1 时, 对偶算子中的一个会逐渐转换到另外一个。

周期函数和有限延拓函数是密切相关的, 周期函数可看作有限延拓函数的冗余表示; 相应地, 有限延拓函数可看作周期函数的紧凑表示。因此, 接下来的内容也是与有限延拓函数有关的。

从严格的数学意义上来说, 一个函数 $f(u)$ 和它的傅里叶变换 $F(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cdot \exp(-j2\pi\mu u) du$ 不可能都是有限延拓的。但在实际中, 当超出延拓范围之外的信号能量可以忽略时, 至少可以假定它们是近似有限延拓的。假定 $f(u)$ 的延拓范围是 Δu , $F(\mu)$ 的延拓范围是 $\Delta\mu$, 并且都是关于原点对称的。那么根据采样理论, 采样间隔 $\delta u = 1/\Delta\mu$ 和 $\delta\mu = 1/\Delta u$ 分别在 u 域和 μ 域都是足够的。换言之, 信号在一个域的延拓范围 (周期) 就对应于另一个域的分辨率。

这意味着任何一个域上的 $\Delta u \Delta\mu$ 个样本就足以完全表征该函数。我们用 N 来表示这个数, 它也称为信号的时宽带宽积或者自由度。在一定意义上, 超出 Δu 和 $\Delta\mu$ 外的信号能量是可以忽略的。离散傅里叶变换将 N 个时间样本映射为 N 个频率样本。两者的精确关

系可以通过泊松公式给出^[34]

$$F_{\text{per}}(m/\Delta u) = \frac{1}{\Delta \mu} \sum_{n=0}^{N-1} f_{\text{per}}(n/\Delta \mu) \exp(-j2\pi mn/N) \quad (3.231)$$

上式可以看成 $f(u)$ 的周期延拓和 $F(\mu)$ 的离散傅里叶变换结果。其中, $0 \leq m \leq N-1, m \in \mathbb{Z}$; Δu 和 $\Delta \mu$ 任意取值, $F_{\text{per}}(\mu) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(\mu - k\Delta \mu)$, $f_{\text{per}}(u) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(u - k\Delta u)$ 。

3.3.1 一般对偶算子及其分数阶版本

$\mathcal{A}$ 的对偶算子用 $\mathcal{A}^D$ 表示, 并且满足

$$\begin{cases} \mathcal{A}^D = \mathcal{F}^{-1} \mathcal{A} \mathcal{F} \\ \mathcal{A} = \mathcal{F} \mathcal{A}^D \mathcal{F}^{-1} \end{cases} \quad (3.232)$$

$\mathcal{A}^D$ 对频域表示 $F(\mu)$ 所起作用与 $\mathcal{A}$ 对时域表示 $f(u)$ 所起作用相同。本节所讨论的分数阶算子在分数阶域中所起作用与其对应的传统算子在时域中所起作用是一样的。准确地说, 就是分数阶算子在 p 阶分数阶域对信号 $F_p(u_p)$ 的作用与原算子在时域对信号 $f(u)$ 的作用是一样的。用数学形式表示出来如下

$$\mathcal{A}_p = \mathcal{F}^{-p} \mathcal{A} \mathcal{F}^p \quad (3.233)$$

上式是式(3.232)的推广。当 $p=1$, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}^D$ 时, 式(3.233)就变成了式(3.232)。注意: $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{A}_p$ 是两个不同的算子, 它们不是同一算子的不同表示, 但是它们分别在时域和第 p 阶分数阶域的表示却是相同的。为了将第 p 阶分数阶域中的分数阶算子和算子 $\mathcal{A}$ 的 p 次幂 ($\mathcal{A}^p$) 区分开来, 我们将前者表示为 $\mathcal{A}_p$ 。可以发现, 当 $p=0$ 时, $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}$, 且 $\mathcal{A}^0 = \mathcal{I}$; 当 $p=1$ 时, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}^D$, 且 $\mathcal{A}^1 = \mathcal{A}$ 。换言之, $\mathcal{A}_p$ 是介于算子 $\mathcal{A}$ 和其对偶算子 $\mathcal{A}^D$ 之间的, 而 $\mathcal{A}^p$ 是介于恒等算子和算子 $\mathcal{A}$ 之间的。式(3.229)对 $\mathcal{A}^D$ 也成立

$$\mathcal{A}_p^D = \mathcal{F}^{-p} \mathcal{A}^D \mathcal{F}^p \quad (3.234)$$

既然从式(3.233)可以很容易地得出 $(\mathcal{A}^D)_p = (\mathcal{A}_p)^D$, 因此, 将其简化表示为 $\mathcal{A}_p^D$ 。

接下来, 将对一些经典对偶算子及其分数阶推广做个总结性的讨论, 有关详细内容可参看文献[35]。

首先, 基于坐标乘法算子 $\mathcal{U}$ 和微分算子 $\mathcal{D}$ 在时域中的作用, 将这两种算子定义如下

$$\{\mathcal{U}f\}(u) = uf(u) \quad (3.235)$$

$$\{\mathcal{D}f\}(u) = (j2\pi)^{-1} f'(u) \quad (3.236)$$

令 $\mathcal{A} = \mathcal{U}$, $\mathcal{A}^D = \mathcal{D}$, 可以很容易地看出这两个算子满足式(3.232), 即两者是对偶的。同样, $\mathcal{D}$ 和 $-\mathcal{U}$ 也是一对对偶算子。可以发现, $\mathcal{D}$ 在频域所起的作用就是坐标乘法, 这与 $\mathcal{U}$ 在时域的作用是一样的。从这个性质可以得到

$$\mathcal{F}[(j2\pi)^{-1} f'(u)](\mu) = \mu F(\mu)$$

这两个算子的分数阶形式定义如下

$$\mathcal{U}_p \{f\}(u_p) = u_p f(u_p) \quad (3.237)$$

$$\mathcal{D}_p \{f\}(u_p) = (j2\pi)^{-1} f'(u_p) \quad (3.238)$$

从这个定义, 可以看出 $\mathcal{U}_p$ 和 $\mathcal{D}_p$ 都满足式(3.233)和式(3.234), 且存在下面的几种特殊情况: $\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}$, $\mathcal{U}_1 = \mathcal{D}$, $\mathcal{U}_{-1} = -\mathcal{D}$, $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}$, $\mathcal{D}_1 = -\mathcal{U}$, $\mathcal{D}_{-1} = \mathcal{U}$ 。

相移算子 $\mathcal{PH}(\eta)$ 和平移算子 $\mathcal{SH}(\xi)$ 定义为

$$\mathcal{PH}(\eta) = \exp(j2\pi\eta \mathcal{U}) \quad (3.239)$$

$$\mathcal{SH}(\xi) = \exp(j2\pi\xi \mathcal{D}) \quad (3.240)$$

这两个算子分别表示时域和频域上信号的平移,即

$$\{\mathcal{PH}(\eta)f\}(u) = \exp(j2\pi\eta u) f(u) \quad (3.241)$$

$$\{\mathcal{SH}(\xi)f\}(u) = f(u + \xi) \quad (3.242)$$

令 $\mathcal{A} = \mathcal{PH}(\xi)$, $\mathcal{A}^D = \mathcal{SH}(\xi)$ 或者 $\mathcal{A} = \mathcal{PH}(\xi)$, $\mathcal{A}^D = \mathcal{SH}(-\xi)$,可以利用式(3.232)将这两个算子联系在一起

$$[\mathcal{SH}(\xi)]^D = \mathcal{F}^{-1} \mathcal{SH}(\xi) \mathcal{F} = \mathcal{F}^{-2} \mathcal{PH}(\xi) \mathcal{F}^2 = \mathcal{PPH}(\xi) \mathcal{P} = \mathcal{PH}(-\xi)$$

这两个算子的分数阶形式定义如下

$$\mathcal{PH}_p(\eta) = \exp(j2\pi\eta \mathcal{U}_p) \quad (3.243)$$

$$\mathcal{SH}_p(\xi) = \exp(j2\pi\xi \mathcal{D}_p) \quad (3.244)$$

可以看出,这两个分数阶算子在 p 阶分数域的作用与它们的一般形式在时域的作用是一样的,且都满足式(3.233)和式(3.234)。

利用坐标乘和微分算子给出尺度算子 $\mathcal{M}(M)$ 的定义如下

$$\mathcal{M}(M) = \exp[-j\pi(\ln M)(\mathcal{U}\mathcal{D} + \mathcal{D}\mathcal{U})] \quad (3.245)$$

其中, $M > 0$ 。它在时域里的作用表示为

$$\{\mathcal{M}(M)f\}(u) = \sqrt{1/M} f(u/M) \quad (3.246)$$

尺度算子是自对偶的,在时域的尺度变换对应于频域的逆尺度变换:

$$\mathcal{F}[\sqrt{1/M} f(u/M)] = \sqrt{M} F(M\mu)$$

令 $\mathcal{A} = \mathcal{M}(M)$ 且 $\mathcal{A}^D = \mathcal{M}(1/M)$ 时,该尺度算子满足式(3.228)。同理,可将分数阶尺度算子定义如下

$$\mathcal{M}_p(M) = \exp[-j\pi(\ln M)(\mathcal{U}_p \mathcal{D}_p + \mathcal{D}_p \mathcal{U}_p)] \quad (3.247)$$

该算子在 p 阶分数域的作用与其一般形式在时域的作用是一样的,且都满足式(3.233)和式(3.234)。

Chirp 乘算子 $\mathcal{Q}(q)$ 和 chirp 卷积算子 $\mathcal{R}(r)$ 定义如下

$$\mathcal{Q}(q) = \exp(-j\pi q \mathcal{U}^2) \quad (3.248)$$

$$\mathcal{R}(r) = \exp(-j\pi r \mathcal{D}^2) \quad (3.249)$$

它们在时域的作用可表示为

$$\{\mathcal{Q}(q)f\}(u) = \exp(-j\pi q u^2) f(u) \quad (3.250)$$

$$\{\mathcal{R}(r)f\}(u) = \exp(-j\pi/4) \sqrt{1/r} \exp(j\pi u^2/r) * f(u) \quad (3.251)$$

令 $\mathcal{A} = \mathcal{Q}(q)$, $\mathcal{A}^D = \mathcal{R}(q)$ 或者 $\mathcal{A} = \mathcal{R}(r)$, $\mathcal{A}^D = \mathcal{Q}(r)$,可以看出这两个算子也是傅里叶对偶算子,且满足式(3.232)。将它们用级数展开为

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(q) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-j\pi q)^k}{k!} \mathcal{U}^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-j\pi q)^k}{k!} (-\mathcal{F}^{-1} \mathcal{D} \mathcal{F})^{2k} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-j\pi q)^k}{k!} \mathcal{F}^{-1} \mathcal{D}^{2k} \mathcal{F} = \mathcal{F}^{-1} \mathcal{R}(q) \mathcal{F} \end{aligned}$$

$$\mathcal{Q}(q) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-j\pi q)^k}{k!} (\mathcal{F}\mathcal{D}\mathcal{F}^{-1})^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-j\pi q)^k}{k!} \mathcal{F}\mathcal{D}^{2k}\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}\mathcal{R}(q)\mathcal{F}^{-1}$$

Chirp 信号的乘法可以看成以线性调频信号作频率调制。既然 $\mathcal{Q}(q)$ 和 $\mathcal{R}(r)$ 是满足式(3.232)的对偶算子,那么 $\mathcal{R}(r)$ 在时域的作用就等价于 $\mathcal{Q}(q)$ 在频域的作用。因此,

$\{\mathcal{R}(r)f\}(u)$ 就等效于对频域函数 $e^{-j\pi r u^2} F(\mu)$ 作逆傅里叶变换。

定义 chirp 乘算子 $\mathcal{Q}(q)$ 和 chirp 卷积算子 $\mathcal{R}(r)$ 的分数阶形式如下

$$\mathcal{Q}_p(q) = \exp(-j\pi q \mathcal{U}_p^2) \quad (3.252)$$

$$\mathcal{R}_p(r) = \exp(-j\pi r \mathcal{D}_p^2) \quad (3.253)$$

3.3.2 离散算子和周期算子以及它们的分数阶形式

根据相移算子和平移算子,可将离散算子 $\mathcal{DI}(\Delta\mu)$ 和周期算子 $\mathcal{P}\epsilon(\Delta u)$ 定义如下

$$\mathcal{DI}(\Delta\mu) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathcal{PH}(k\Delta\mu) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \exp(j2\pi k \Delta\mu \mathcal{U}) \quad (3.254)$$

$$\mathcal{P}\epsilon(\Delta u) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathcal{SH}(k\Delta u) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \exp(j2\pi k \Delta u \mathcal{D}) \quad (3.255)$$

其中, $\Delta u > 0$ 和 $\Delta\mu > 0$ 分别对应于时域和频域的延拓周期。令 $\delta u = 1/\Delta\mu$, $\delta\mu = 1/\Delta u$ 分别表示时域和频域的采样间隔。

根据上面的定义以及相移算子和平移算子的对偶性,可以发现这两个算子也是傅里叶对偶算子

$$\mathcal{P}\epsilon(\Delta u) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathcal{SH}(k\Delta u) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}^{-1} \mathcal{PH}(k\Delta u) \mathcal{F} = \mathcal{F}^{-1} \mathcal{DI}(\Delta\mu) \mathcal{F} \quad (3.256)$$

$$\mathcal{P}\epsilon(\Delta u) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathcal{SH}(-k\Delta u) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F} \mathcal{PH}(k\Delta u) \mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F} \mathcal{DI}(\Delta\mu) \mathcal{F}^{-1}$$

通过式(3.254)和式(3.255),可以得出 $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathcal{SH}(-k\Delta u) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathcal{SH}(k\Delta u)$, 以及对偶关系

$$[\mathcal{PH}(\xi)]^D = \mathcal{SH}(\xi), [\mathcal{SH}(\xi)]^D = \mathcal{PH}(\xi).$$

离散算子和周期算子在时域的作用可表示为

$$\{\mathcal{DI}(\Delta\mu)f\}(u) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \exp(j2\pi k u / \delta u) f(u) = \delta u \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(u - k\delta u) f(k\delta u) \quad (3.257)$$

$$\{\mathcal{P}\epsilon(\Delta u)f\}(u) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(u - k\Delta u) \quad (3.258)$$

其中,我们采用了泊松求和公式的另外一种形式^[34]

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(u - n\delta u) = \frac{1}{\delta u} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(j2\pi n u / \delta u) \quad (3.259)$$

接下来,定义 $\text{comb}(u)$ 函数如下

$$\text{comb}(u) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(u - k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(u + k) \quad (3.260)$$

这样,便能重写式(3.257)和式(3.258)为

$$\{\mathcal{DI}(\Delta\mu)f\}(u) = \text{comb}(u\Delta\mu)f(u) \quad (3.261)$$

$$\{\mathcal{PE}(\Delta u)f\}(u) = \frac{1}{\Delta u} \text{comb}\left(\frac{u}{\Delta u}\right) * f(u) \quad (3.262)$$

从上面的等式,可以看出 $\mathcal{DI}(\Delta\mu)$ 是将一个时域函数乘以一个 δ 序列从而得到一个加权脉冲序列;而 $\mathcal{PE}(\Delta u)$ 是对一个时域函数作周期延拓。

既然 $\Delta u^{-1} \text{comb}(u/\Delta u)$ 的傅里叶变换就是 $\text{comb}(\Delta u\mu)$,那么式(3.261)和式(3.262)右边的傅里叶变换分别为

$$\frac{1}{\Delta\mu} \text{comb}\left(\frac{\mu}{\Delta\mu}\right) * F(\mu) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(\mu - k\Delta\mu) \quad (3.263)$$

$$\text{comb}(\Delta u\mu)F(\mu) = \delta\mu \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\mu - k\delta\mu)F(k\delta\mu) \quad (3.264)$$

从上面的式子可以看到这两个算子的作用在频域是互换的,因为离散算子对应于频域的周期延拓,周期算子对应于一个 δ 序列的相乘。

离散算子和周期算子的分数阶形式定义如下

$$\mathcal{DI}_p(\Delta\mu) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathcal{PH}_p(k\Delta\mu) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \exp(j2\pi k\Delta\mu \mathcal{U}_p) \quad (3.265)$$

$$\mathcal{PE}_p(\Delta u) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathcal{SH}_p(k\Delta u) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \exp(j2\pi k\Delta u \mathcal{D}_p) \quad (3.266)$$

显然上述算子满足式(3.233)

$$\mathcal{DI}_p(\Delta\mu) = \mathcal{F}^{-p} \mathcal{DI}(\Delta\mu) \mathcal{F}^p \quad (3.267)$$

$$\mathcal{PE}_p(\Delta u) = \mathcal{F}^{-p} \mathcal{PE}(\Delta u) \mathcal{F}^p \quad (3.268)$$

基于上面的等式和式(3.256),可以进一步得到

$$\mathcal{PE}_p(\Delta u) = \mathcal{F}^{-1} \mathcal{DI}_p(\Delta u) \mathcal{F} = \mathcal{F} \mathcal{DI}_p(\Delta u) \mathcal{F}^{-1} \quad (3.269)$$

既然 $[\mathcal{PH}(\eta)]^k = \mathcal{PH}(k\eta)$ 和 $[\mathcal{SH}(\xi)]^k = \mathcal{SH}(k\xi)$,那么将式(3.265)和式(3.266)右边展开可以得到

$$\begin{aligned} \mathcal{DI}_p(\Delta\mu) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \exp[j\pi(k\Delta\mu)^2 \sin\alpha \cos\alpha] \mathcal{PH}(k\Delta\mu \cos\alpha) \mathcal{SH}(k\Delta\mu \sin\alpha) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \exp[j\pi(k\Delta\mu)^2 \sin\alpha \cos\alpha] [\mathcal{PH}(\Delta\mu \cos\alpha)]^k [\mathcal{SH}(\Delta\mu \sin\alpha)]^k \end{aligned} \quad (3.270)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{PE}_p(\Delta u) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \exp[j\pi(k\Delta u)^2 \sin\alpha \cos\alpha] \mathcal{SH}(k\Delta u \cos\alpha) \mathcal{PH}(-k\Delta u \sin\alpha) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \exp[j\pi(k\Delta u)^2 \sin\alpha \cos\alpha] [\mathcal{SH}(\Delta u \cos\alpha)]^k [\mathcal{PH}(-\Delta u \sin\alpha)]^k \end{aligned} \quad (3.271)$$

因为

$$\begin{aligned} \mathcal{PH}_p(\eta) &= \exp(j\pi\eta^2 \sin\alpha \cos\alpha) \mathcal{PH}(\eta \cos\alpha) \mathcal{SH}(\eta \sin\alpha) \\ &= \exp(j\pi\eta^2 \sin\alpha \cos\alpha) \exp(j2\pi\eta \cos\alpha \mathcal{U}) \mathcal{SH}(\eta \sin\alpha) \\ &= \exp(-j\pi \cot\alpha \mathcal{U}^2) \exp[j\pi \cot\alpha (\mathcal{U} + \eta \sin\alpha \mathcal{I})^2] \mathcal{SH}(\eta \sin\alpha) \\ &= \exp(-j\pi \cot\alpha \mathcal{U}^2) \mathcal{SH}(\eta \sin\alpha) \exp(j\pi \cot\alpha \mathcal{U}^2) \end{aligned}$$

所以

$$\mathcal{PH}_p(\eta) = \mathcal{Q}(\cot\alpha) \mathcal{SH}(\eta \sin\alpha) \mathcal{Q}(-\cot\alpha) \quad (3.272)$$

类似地,我们可以得到

$$\mathcal{SH}_p(\xi) = \mathcal{Q}(-\tan\alpha) \mathcal{SH}(\xi \cos\alpha) \mathcal{Q}(\tan\alpha) \quad (3.273)$$

那么将式(3.272)代入式(3.265),可以得到

$$\begin{aligned} \mathcal{DI}_p(\Delta\mu) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathcal{Q}(\cot\alpha) \mathcal{SH}(k\Delta\mu \sin\alpha) \mathcal{Q}(-\cot\alpha) \\ &= \mathcal{Q}(\cot\alpha) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathcal{SH}(k\Delta\mu \sin\alpha) \mathcal{Q}(-\cot\alpha) \\ &= \mathcal{Q}(\cot\alpha) \mathcal{P}\epsilon(\Delta\mu \sin\alpha) \mathcal{Q}(-\cot\alpha) \end{aligned} \quad (3.274)$$

同样,将式(3.273)代入式(3.266),可以得到

$$\mathcal{P}\epsilon_p(\Delta u) = \mathcal{Q}(-\tan\alpha) \mathcal{P}\epsilon(\Delta u \cos\alpha) \mathcal{Q}(\tan\alpha) \quad (3.275)$$

既然 $(\mathcal{A}^D)_p = (\mathcal{A}_p)^D$,基于 $\mathcal{Q}$ 和 $\mathcal{R}$, $\mathcal{PH}$ 和 $\mathcal{SH}$ 的对偶关系以及式(3.256),可以得到

$$\begin{cases} \mathcal{DI}_p(\Delta\mu) = \mathcal{Q}(\cot\alpha) \mathcal{F}^{-1} \mathcal{DI}(\Delta\mu \sin\alpha) \mathcal{F} \mathcal{Q}(-\cot\alpha) \\ \mathcal{DI}_p(\Delta\mu) = \mathcal{F}^{-1} \mathcal{R}(\cot\alpha) \mathcal{DI}(\Delta\mu \sin\alpha) \mathcal{R}(-\cot\alpha) \mathcal{F} \\ \mathcal{F} \mathcal{DI}_p(\Delta\mu) \mathcal{F}^{-1} = \mathcal{R}(\cot\alpha) \mathcal{DI}(\Delta\mu \sin\alpha) \mathcal{R}(-\cot\alpha) \\ \mathcal{P}\epsilon_p(\Delta u) = \mathcal{R}(\cot\alpha) \mathcal{DI}(\Delta u \sin\alpha) \mathcal{R}(-\cot\alpha) \end{cases} \quad (3.276)$$

类似地,有

$$\begin{cases} \mathcal{P}\epsilon_p(\Delta u) = \mathcal{Q}(-\tan\alpha) \mathcal{F}^{-1} \mathcal{DI}(\Delta u \cos\alpha) \mathcal{F} \mathcal{Q}(\tan\alpha) \\ \mathcal{P}\epsilon_p(\Delta u) = \mathcal{F}^{-1} \mathcal{R}(-\tan\alpha) \mathcal{DI}(\Delta u \cos\alpha) \mathcal{R}(\tan\alpha) \mathcal{F} \\ \mathcal{F} \mathcal{P}\epsilon_p(\Delta u) \mathcal{F}^{-1} = \mathcal{R}(-\tan\alpha) \mathcal{DI}(\Delta u \cos\alpha) \mathcal{R}(\tan\alpha) \\ \mathcal{DI}_p(\Delta\mu) = \mathcal{R}(-\tan\alpha) \mathcal{DI}(\Delta\mu \cos\alpha) \mathcal{R}(\tan\alpha) \end{cases} \quad (3.277)$$

式(3.274)~式(3.277)通过一般的周期和离散算子以及普通 chirp 信号来表示分数阶周期/离散算子。下面给出分数阶周期算子和分数阶离散算子对函数 $f(u)$ 的作用表达式

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\epsilon_p(\Delta u)[f(u)] &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \exp(-j\pi k^2 \Delta u^2 \sin\alpha \cos\alpha) \cdot \\ &\quad \exp(j2\pi k \Delta u \sin\alpha u) f(u - k \Delta u \cos\alpha) \end{aligned} \quad (3.278)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{DI}_p(\Delta\mu)[f(u)] &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \exp(j\pi k^2 \Delta\mu^2 \sin\alpha \cos\alpha) \cdot \\ &\quad \exp(-j2\pi k \Delta\mu \cos\alpha u) f(u - k \Delta\mu \sin\alpha) \end{aligned} \quad (3.279)$$

表 3.1 给出了本节所列出的分数阶算子及其等效表达式。

表 3.1 分数阶算子及其等效表达式

分数阶算子	符 号	等 效 表 达
分数阶坐标乘	$\mathcal{U}_p$	$\cos\alpha \mathcal{U} + \sin\alpha \mathcal{D}$
分数阶微分	$\mathcal{D}_p$	$-\sin\alpha \mathcal{U} + \cos\alpha \mathcal{D}$

续表

分数阶算子	符 号	等 效 表 达
分数阶相移	$\mathcal{PH}_p(\eta)$	$\exp(-j\pi\eta^2 \sin\alpha \cos\alpha) \mathcal{PH}(\eta \cos\alpha) \mathcal{SH}(\eta \sin\alpha),$ $\exp(-j\pi\eta^2 \sin\alpha \cos\alpha) \mathcal{PH}(\eta \cos\alpha) \mathcal{SH}(\eta \sin\alpha)$
分数阶平移	$\mathcal{SH}_p(\xi)$	$\exp(j\pi\xi^2 \sin\alpha \cos\alpha) \mathcal{SH}(\xi \cos\alpha) \mathcal{PH}(-\xi \sin\alpha),$ $\exp(-j\pi\xi^2 \sin\alpha \cos\alpha) \mathcal{PH}(-\xi \sin\alpha) \mathcal{SH}(\xi \cos\alpha)$
分数阶尺度变换	$\mathcal{M}_p(M)$	$\mathcal{F}^{-p} \mathcal{M}(M) \mathcal{F}^p, \mathcal{M}^{-1-p} \mathcal{M}(1/M) \mathcal{F}^{1+p}$
分数阶 chirp 乘	$\mathcal{Q}_p(q)$	$\mathcal{R}(-\tan\alpha) \mathcal{Q}(q \cos^2\alpha) \mathcal{R}(\tan\alpha),$ $\mathcal{Q}(\cot\alpha) \mathcal{R}(q \sin^2\alpha) \mathcal{Q}(-\cot\alpha)$
分数阶 chirp 卷积	$\mathcal{R}_p(r)$	$\mathcal{R}(\cot\alpha) \mathcal{Q}(r \sin^2\alpha) \mathcal{R}(-\cot\alpha)$ $\mathcal{Q}(-\tan\alpha) \mathcal{R}(r \cos^2\alpha) \mathcal{Q}(\tan\alpha)$
分数阶离散	$\mathcal{DI}_p(\Delta\mu)$	$\mathcal{R}(-\tan\alpha) \mathcal{DI}(\Delta\mu \cos\alpha) \mathcal{R}(\tan\alpha)$ $\mathcal{Q}(\cot\alpha) \mathcal{PE}(\Delta\mu \sin\alpha) \mathcal{Q}(-\cot\alpha)$
分数阶周期	$\mathcal{PE}_p(\Delta u)$	$\mathcal{R}(\cot\alpha) \mathcal{DI}(\Delta u \sin\alpha) \mathcal{R}(-\cot\alpha)$ $\mathcal{Q}(-\tan\alpha) \mathcal{PE}(\Delta u \cos\alpha) \mathcal{Q}(\tan\alpha)$

参考文献

- [1] Almeida L B. The fractional Fourier transform and time-frequency representations[J]. IEEE Trans. Signal Processing, 1994, 42(11): 3084-3091.
- [2] Zayed A I. A convolution and product theorem for the fractional Fourier transform[J]. IEEE Signal Processing Letters, 1998, 5(4): 101-103.
- [3] Ozaktas H M, Barshan B. Convolution, filtering, and multiplexing in fractional Fourier domains and their relation to chirp and wavelet transforms[J]. J. Opt. Soc. Am. A, 11(2): 547-559, 1993.
- [4] Olcay A. Fractional convolution and correlation via operator methods and an application to detection of linear FM signals[J]. IEEE Trans. Signal Processing, 2001, 49(5): 979-993.
- [5] Akay O. Unitary and Hermitian fractional operators and their extension: Fractional Mellin transform, joint fractional representations and fractional correlations[D]. Univ. Rhode Island, Kingston, 2000.
- [6] Wang M, Chan A K, Chui C K. Linear frequency-modulated signal detection using Radon-Ambiguity transform[J]. IEEE Trans. Signal Processing, 1998, 46(3): 571-586.
- [7] Akay O, Boudreaux-Bartels G F. Unitary and hermitian fractional operators and their relation to the fractional Fourier transform[J]. IEEE Signal Processing Letters, 1998, 5(12): 312-314.
- [8] Pei S C, Yeh M H. Discrete fractional Hilbert transform[J]. IEEE Trans. Circuits and Systems-II, 2000, 47(11): 1307-1311.
- [9] Tseng C C, Pei S C. Design and application of discrete-time fractional Hilbert transformer[J]. IEEE Trans. Circuits and Systems-II, 2000, 47(12): 1529-1533.
- [10] Pei S C, Ding J J. Fractional cosine, sine, and Hartley transforms[J]. IEEE Trans. Signal Processing, 2002, 50(7): 1661-1680.
- [11] Gabor D. Theory of communications[J]. Inst. EE, 1946, 93(26): 429-457.

- [12] Lohmann A W, Mendlovic D, Zalevsky Z. Fractional Hilbert transform[J]. Opt. Lett., 1996, 21: 281-283.
- [13] Zayed A I. Hilbert transform associated with the fractional Fourier transform[J]. IEEE Signal Processing Lett., 1998, 5 (8): 206-208.
- [14] Pei S C, Ding J J. Saving the bandwidth in the fractional domain by generalized Hilbert transform pair relations[J]. IEEE Trans. Circuits and Systems- II, 2003, 4: 89-92.
- [15] Zayed A I. On the relationship between the Fourier and fractional Fourier transforms[J]. IEEE Signal Processing Lett., 1996, 3(12): 310-311.
- [16] Havlicek J P, Havlicek J W, et al. Skewed 2D Hilbert transforms and computed AM-FM models[J]. Proc. IEEE, 1998, 59: 602-606.
- [17] Tao R, Li X M, Wang Y. Generalization of the fractional Hilbert transform[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2008, 15: 365-368.
- [18] Wang Z. Fast algorithm for discrete W transform and for the discrete Fourier transform[J]. IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, 1984, 32: 803-816.
- [19] Pei S C, Yeh M H. Improved discrete fractional Fourier transform[J]. Opt. Lett., 1997, 22: 1047-1049.
- [20] Pei S C, Yeh M H, Tseng C C. Discrete fractional Fourier transform based on orthogonal projection[J]. IEEE Trans. Signal Processing, 1999, 47: 1335-1348.
- [21] Dickinson B W, Steiglitz K. Eigenvectors and functions of the discrete Fourier transform[J]. IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, 1982, 30: 25-31.
- [22] Soo-Chang Pei. Discrete fractional Hartley and Fourier Transforms[J]. IEEE Trans. circuit and systems, 1998, 45(6): 665-675.
- [23] Akan A, Shakhmurov V. A fractional Gabor transform[J]. ICASSP01, 2001, 6: 3529-3532.
- [24] Ozaktas H M, Arikan O, et al. Digital computation of the fractional Fourier transform[J]. IEEE Trans. Signal Processing, 1996, 44: 2141-2150.
- [25] Alieva T, Bastiaans M J. On fractional Fourier transform moments[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2000, 7(11): 320-323.
- [26] Qiao X, Shan T, Tao R, et al. Separation of human micro-Doppler signals based on short-time fractional Fourier transform[J]. IEEE Sensors J., 2019, 19(24): 12205-12216.
- [27] 张贤达. 现代信号处理[M]. 北京: 清华大学出版社, 1995.
- [28] Chen X, Guan J, Bao Z, et al. Detection and extraction of target with micromotion in spiky sea clutter via short-time fractional Fourier transform[J]. IEEE Trans. Geosci. Remote Sens., 2014, 52 (2): 1002-1018.
- [29] Pang C, Han Y, Hou H, et al. Micro-doppler signal time-frequency algorithm based on STFRFT[J]. Sensors, 2016, 16(10): 1559.
- [30] Tao R, Li Y L, Wang Y. Short-time fractional Fourier transform and its applications[J]. IEEE Trans. Signal Process., 2010, 58(5): 2568 C-2580.
- [31] Cohen L. Time-frequency analysis[D]. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1995.
- [32] Baraniuk R G. Beyond time-frequency analysis: energy densities in one and many dimensions[J]. IEEE Trans. Signal Process., 1998, 46: 2305-2314.
- [33] Sayeed A M, Jones D L. Integral transforms covariant to unitary operators and their implications for joint signal representations[J]. IEEE Trans. Signal Processing, 1996, 44: 1365-1376.
- [34] Papoulis A. Signal analysis[M]. New York: McGraw-Hill, 1977.
- [35] Sumbl U, Ozaktas H M. Fractional free space, fractional lenses, and fractional imaging systems[J]. J. Opt. Soc. Amer. A, 2003, 20(11): 2033-2040.
- [36] Huang Y. The fractional wave packet transform[J]. Multidimensional system and Signal processing, 1998, 9: 399-402.