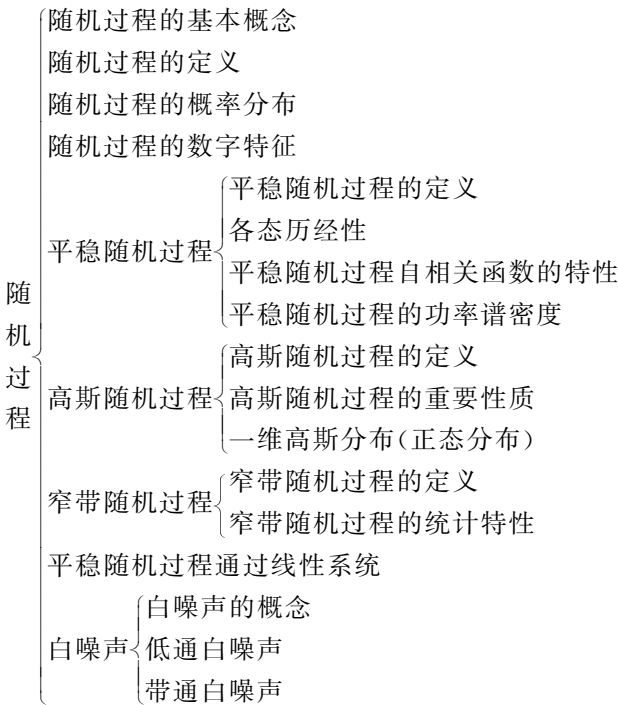


第3章

随机过程



学习导航



学习目标

- 了解随机过程的基本概念。
- 了解随机过程的定义。
- 掌握随机过程的概率分布。
- 了解随机过程的数字特征。
- 了解平稳随机过程,包括定义、各态历经性和功率谱密度等。
- 掌握高斯随机过程,包括定义、重要性质和正态分布。
- 掌握窄带随机过程,包括定义、统计特性。
- 了解平稳随机过程通过线性系统。
- 了解白噪声,包括白噪声的概念、低通白噪声和带通白噪声。

3.1 随机过程的基本概念

1. 随机函数(随机信号)

随机函数是随某些参量变化的随机变量。通常将以时间为参量的随机函数称为随机过程,也称为随机信号。

在数学上,随机信号是指不能用明确的数学关系式来描述,无法预测未来时刻精确值,只能用样本或数据序列的统计性质来描述的信号。

2. 随机信号的研究方法

随机信号的研究方法是用统计的方法。

按随机试验进行观察,将观察中获得的具有随机性的样本或数据序列抽象为随机信号(或称为不确定性信号),用统计的方法研究随机信号在时域、频域、时频域的分布规律以及数字特征。

3. 随机信号主要特点

与确定性信号相比,随机信号有以下三个主要特点:

- (1) 随机信号的任何一个实现,都只是随机信号总体中的一个样本;
- (2) 任一时间点上随机信号的取值都是一个随机变量,只能用概率函数和集合平均这样的数字特征值来描述;
- (3) 平稳随机信号在时间上是无始无终的,其能量是无限的,傅里叶变换并不存在,因此平稳随机信号不能用通常的频谱来表示。

4. 随机变量

随机变量是一个数值函数,它将样本空间中的每个可能结果映射到一个实数值。

设随机事件 e_i 分别用数值 x_i 来表示,则随机变量 $\mathbf{X}$ 可表示为

$$\mathbf{X} = \{e_i\} = \{x_i\} \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (3-1)$$

$\mathbf{X}$ 以一定的概率来取某一个 x_i 值,而 x_i 是用一个确定的数值来表示。

随机变量表示了随机事件的数值特征,它可以描述某个事件的结果或属性。随机变量可以分为两种类型:离散随机变量和连续随机变量。

当随机变量的取值个数为有限或无穷可数时,称为离散随机变量,否则为连续随机变量。

3.2 随机过程的定义

自然界变化的过程可以分为确定过程和随机过程两大类。

确定过程是指每次观测所得结果都相同,都是时间 t 的一个确定的函数,具有确定的变化规律;而随机过程是指每次观测所得结果都不同,都是时间 t 的不同函数,观测前又不能预知观测结果,并没有确定的变化规律。

随机过程就是随机试验中所有结果的“样本函数”的集合总体。

每次试验结果所得的时间函数称为一个“样本函数”。由所有的样本函数可以构成一个“样本空间”。

如某公司通信交换机的输出噪声电压测试结果,用样本函数和样本空间两个过程进行描述。

(1) 样本函数 $x_i(t)$: 每测试一次,就会记录一条随时间变化的波形 $x_i(t)$,都是一个确定的时间函数 $x_i(t)$ 。

(2) 样本空间 $X(t)$: 经过连续 n 次测试,所记录的是 n 条形状各不相同的时间波形,而且在每次观测之前都无法预知将会出现哪一个波形,它可能是 $x_1(t)$,也可能是 $x_2(t)$, $x_3(t), \dots, x_n(t), \dots$,所有这些可能出现的时间波形的全体 $\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), \dots\}$ 就构成一个随机过程,记作 $X(t)$,而其中的任意一个波形 $x_i(t)$ 称为随机过程 $X(t)$ 的一个样本函数或一次实现,随机过程的波形如图 3-1 所示。

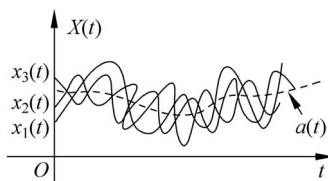


图 3-1 随机过程的波形

同样,通信交换机输出噪声的随机过程实质上是随机变量的延伸,是由所有可能出现的样本函数构成的。在某次观测中,观察到的只是这个随机过程中的一个样本,至于是哪一个样本,在观测之前是无法预见的,这正是随机过程随机性的表现。这种随机性还可表现为,随机过程在任意时刻的取值是一个随机变量。因此,随机过程又可定义为

在时间进程中处于不同时刻的随机变量的集合。

综上所述,随机过程兼有随机变量和时间函数的特点。

3.3 随机过程的概率分布

由于随机过程具有两重性,可以用与描述随机变量相似的方法来描述它的统计特性。

随机过程的概率分布有一维概率分布、二维概率分布和 n 维(联合)分布函数。

一维概率分布是随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 在任一时刻 t 的状态是一维随机变量。

二维概率分布是随机过程 $\{X(t), t \in T\}$,当 t 取任意两个时刻时, $X(t)$ 是二维随机变量。

1. 随机过程 $X(t)$ 的一维概率分布

设 $X(t)$ 表示一个随机过程,在任意时刻 $t_1 (t_1 \in T)$ 时 $X(t_1)$ 为一维随机变量。而随机变量的统计特性可以用概率分布函数来描述,将随机变量 $X(t_1) \leq x_1$ 的概率 $P[X(t_1) \leq x_1]$,记作 $F_1(x_1, t_1)$,为随机过程 $X(t)$ 的一维分布函数,其表达式为

$$F_1(x_1, t_1) = P[X(t_1) \leq x_1] \quad (3-2)$$

若 $F_1(x_1, t_1)$ 对 x_1 的偏导数存在,则有

$$\frac{\partial F_1(x_1, t_1)}{\partial x_1} = f_1(x_1, t_1) \quad (3-3)$$

式中, $f_1(x_1, t_1)$ 为随机过程 $X(t)$ 的一维概率密度函数,由于 t_1 时刻是任意取的,就可以把 t_1 写为 t ,这样 $f_1(x_1, t_1)$ 可记为 $f_1(x_1, t)$ 。

2. 随机过程 $X(t)$ 的二维概率分布

对任意两个时刻 $t_1, t_2 \in T$,如 $X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2$ 两式同时成立,则有

$$F_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2\} \quad (3-4)$$

上式为随机过程 $X(t)$ 的二维分布函数。

若 $F_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$ 对 x_1 及 x_2 的偏导数存在, 则有

$$f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F_2(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\partial x_1 \cdot \partial x_2} \quad (3-5)$$

成立, 则 $f_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$ 为 $X(t)$ 的二维概率密度函数。

3. 随机过程 $X(t)$ 的 n 维(联合)分布函数

一般对任意时刻的 $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$

$$\begin{aligned} & F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) \\ &= P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_n) \leq x_n\} \end{aligned} \quad (3-6)$$

此式称为随机过程 $X(t)$ 的 n 维分布函数, 描述随机过程在任意 n 个时刻状态的统计特性, 它表明 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 事件同时发生的概率。

若

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} \quad (3-7)$$

若式(3-7)成立, 称为 $X(t)$ 的 n 维概率密度函数。当 n 越大, 用 n 维分布函数(或 n 维概率密度函数)去描述随机过程就越充分。但在实践中, 用高维($n > 2$)分布函数或概率密度函数去描述随机过程时往往会遇到困难。

3.4 随机过程的数字特征

数字特征是指随机过程的取值具有的某些特定的统计平均值, 反映了随机过程的基本特性。

常用数学期望、方差和相关函数来描述随机过程的数字特征。

1. 数学期望(均值)

随机过程 $X(t)$ 在任意给定时刻 t_1 的取值 $X(t_1)$ 是一个随机变量, 其概率密度函数为 $f_1(x_1, t_1)$, 则随机过程 $X(t_1)$ 的数学期望为

$$E[X(t_1)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_1(x_1, t_1) dx_1$$

式中, t_1 是任取的, 则用 t 替换 t_1 , x 替换 x_1 , 上式就变为随机过程在任何时刻 t 的数学期望, 其表达式为

$$E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x, t) dx \quad (3-8)$$

式中, $X(t)$ 的数学期望是时间的确定函数, 常记作 $a(t)$, 表示随机过程的 n 个样本函数曲线的摆动中心, 如图 3-1 所示。

2. 方差

随机过程 $X(t)$ 在任意时刻 t 的方差定义为

$$\sigma^2(t) = E\{[X(t) - a(t)]^2\} = E[X^2(t)] - a^2(t) \quad (3-9)$$

式中, $E[X^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_1(x, t) dx$ 称为随机过程 $X(t)$ 的均方值, 方差 $\sigma^2(t)$ 反映了随机

过程在任意时刻 t 对于数学期望 $a(t)$ 的偏离程度。

3. 相关函数

数学期望和方差只是描述了随机过程在某个时刻的数字特征,而衡量随机过程在不同时刻的取值之间的关联程度常用协方差函数 $C(t_1, t_2)$ 和相关函数 $R(t_1, t_2)$ 来表示。

协方差函数定义为

$$\begin{aligned} C(t_1, t_2) &= E\{[X(t_1) - a(t_1)][X(t_2) - a(t_2)]\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - a(t_1)][x_2 - a(t_2)] f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (3-10)$$

式中, $a(t_1)$ 和 $a(t_2)$ 分别是随机过程在 t_1 和 t_2 时刻的数学期望; $f_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$ 是随机过程的二维概率密度函数。

相关函数定义为

$$\begin{aligned} R(t_1, t_2) &= E[X(t_1)X(t_2)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (3-11)$$

式中, $X(t_1)$ 和 $X(t_2)$ 分别是在 t_1 和 t_2 时刻观测得到的随机变量。

协方差函数与相关函数之间的关系为

$$C(t_1, t_2) = R(t_1, t_2) - a(t_1)a(t_2) \quad (3-12)$$

式中,若 $a(t_2)=0$ 或 $a(t_1)=0$, 则有 $C(t_1, t_2)=R(t_1, t_2)$, 因此 $C(t_1, t_2)$ 和 $R(t_1, t_2)$ 是衡量同一随机过程的相关程度, 分别称为自协方差函数和自相关函数。

3.5 平稳随机过程

3.5.1 平稳随机过程的定义

1. 平稳随机过程

随机过程可分为平稳和非平稳两大类,严格地说,所有信号都是非平稳的,但是对平稳信号的分析要容易得多。

随机过程的统计特性不随时间推移而变,也就是说支配随机过程的规律不随时间而变,将这类随机过程称为平稳随机过程;反之,称为非平稳随机过程。

设一个随机过程 $X(t)$ 的任意有限维分布函数与时间无关,对于时间 t 的任意 n 个数值 $t_1, t_2, \dots, t_n$ 和任意实数 m , 随机过程 $X(t)$ 的 n 维分布函数为

$$\begin{aligned} F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) \\ = F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + m, t_2 + m, \dots, t_n + m) \\ n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3-13)$$

概率密度函数为

$$\begin{aligned} f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) \\ = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + m, t_2 + m, \dots, t_n + m) \\ n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3-14)$$

上式的随机过程是在严格定义下的平稳随机过程,简称严平稳过程。

2. 广义平稳随机过程

平稳随机过程的统计特性不随时间的推移而改变。

一维概率密度函数与时间无关,则表达式为

$$f_1(x_1, t_1) = f_1(x_1) \quad (3-15)$$

二维概率密度函数只与时间间隔 $\tau = t_2 - t_1$ 有关,则其表达式为

$$f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_2(x_1, x_2; \tau) \quad (3-16)$$

其均值与 t 无关,为常数 a ,其表达式为

$$E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_1(x_1) dx_1 = a \quad (3-17)$$

其自相关函数只与时间间隔 τ 有关,其表达式为

$$\begin{aligned} R(t_1, t_2) &= E[X(t_1)X(t_1 + \tau)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_2(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2 = R(\tau) \end{aligned} \quad (3-18)$$

因此,从数字特征均值和自相关函数的表达式可知,同时满足均值和自相关函数的过程定义为广义平稳随机过程。显然,严平稳随机过程必定是广义平稳随机过程,反之不一定成立。

在通信系统中所遇到的信号及噪声,大多数可视为平稳随机过程,研究平稳随机过程有着很大的实际意义。

3.5.2 各态历经性

随机过程的均值和相关函数数字特征是对随机过程的所有样本函数的统计平均,但在实际中常常很难测得大量的样本。

各态历经性是指平稳随机过程在满足一定的条件下具有一个有趣而又非常有用的特性。具有各态历经性的过程,其数字特征(均为统计平均)完全可由随机过程中的任一实现的时间平均值来代替。

设 $x(t)$ 是平稳随机过程 $X(t)$ 的任意一次实现(样本),其时间平均值定义为

$$\bar{a} = \overline{x(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \quad (3-19)$$

时间相关函数定义为

$$\overline{R(\tau)} = \overline{x(t)x(t+\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau) dt \quad (3-20)$$

若平稳随机过程 $X(t)$ 的统计平均值等于它的任意一个样本 $x(t)$ 的时间平均值,则有

$$\begin{cases} a = \bar{a} \\ R(\tau) = \overline{R(\tau)} \end{cases} \quad (3-21)$$

满足式(3-21)则称平稳随机过程 $X(t)$ 具有各态历经性。在通信系统中所遇到的随机信号和噪声,一般均能满足各态历经性条件。

3.5.3 平稳随机过程自相关函数的特性

通过求出平稳随机过程的均值、方差和相关函数等数字特征,以及各种功率来了解平稳

随机过程的自相关函数 $R(\tau)$ 的重要性。

平稳随机过程 $X(t)$ 的均值为常数, 自相关函数时间差 $\tau = t_2 - t_1$, 则

$R(\tau) = E[(X(t)X(t+\tau))]$ 具有如下主要性质:

$$(1) R(0) = E[X^2(t)] \quad [X(t) \text{ 的平均功率}] \quad (3-22)$$

$$(2) R(\infty) = E^2[X(t)] = a^2 \quad [X(t) \text{ 的直流功率}] \quad (3-23)$$

$$(3) R(0) - R(\infty) = \sigma^2 \quad [(\text{方差}), X(t) \text{ 的交流功率}] \quad (3-24)$$

当均值为 0 时, 有 $R(0) = \sigma^2$ 。

$$(4) R(\tau) = R(-\tau) \quad [\tau \text{ 的偶函数}] \quad (3-25)$$

$$(5) |R(\tau)| \leq R(0) \quad [\tau=0 \text{ 时有最大值}] \quad (3-26)$$

3.5.4 平稳随机过程的功率谱密度

随机过程的频谱特性用它的功率谱密度来表示。

对于平稳随机过程 $X(t)$, 可以把 $x(t)$ 当作 $X(t)$ 的一个样本。不同的样本函数具有不同的功率谱密度, 某一样本的功率谱密度不能作为过程的功率谱密度, 因此, 平稳随机过程的功率谱密度应看作是对所有样本的功率谱密度的统计平均, 故 $X(t)$ 的功率谱密度可以定义为

$$P_X(\omega) = E[P_x(\omega)] = E \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(\omega)|^2}{T} \right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[|X_T(\omega)|^2]}{T} \quad (3-27)$$

式中, $X_T(\omega)$ 是 $x(t)$ 的截短函数 $x_T(t)$ 所对应的频谱函数。随机过程 $X(t)$ 的平均功率可表示为

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_X(\omega) d\omega \quad (3-28)$$

平稳随机过程的自相关函数和功率谱密度服从维纳-辛钦关系。维纳-辛钦关系是指功率信号的自相关函数与功率谱密度互为傅里叶变换关系, 表达式为

$$P_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = F[R(\tau)] \quad (3-29)$$

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_X(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = F^{-1}[P_X(\omega)] \quad (3-30)$$

记为

$$R(\tau) \leftrightarrow P_X(\omega) \quad (3-31)$$

用频率 f 替代 ω , $\omega = 2\pi f$, 则有

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} P_X(f) e^{2j\pi f\tau} df \quad (3-32)$$

$$P_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-2j\pi f\tau} d\tau \quad (3-33)$$

$$R(\tau) \leftrightarrow P_X(f) \quad (3-34)$$

以上关系称为维纳-辛钦关系, 它建立了频域与时域的关系。

从平稳随机过程表示的维纳-辛钦关系可得到以下两个结论。

(1) 当 $\tau=0$ 时, 可得平稳过程的总功率为

$$R(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_X(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} P_X(f) df \quad (3-35)$$

(2) 功率谱密度 $P_X(f)$ 具有非负性和实偶性, 其关系表达式为

$$P_X(f) \geq 0 \quad \text{和} \quad P_X(-f) = P_X(f) \quad (3-36)$$

3.6 高斯随机过程

高斯随机过程也称正态随机过程。通信系统中的热噪声符合高斯随机过程的统计特性, 称为高斯噪声。

3.6.1 高斯随机过程的定义

高斯随机过程是指随机过程 $X(t)$ 的 n 维 ($n=1, 2, \dots$) 分布都服从正态分布, 其 n 维正态概率密度函数的表达式为

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n |B|^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2|B|} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |B|_{jk} \left(\frac{x_j - a_j}{\sigma_j} \right) \left(\frac{x_k - a_k}{\sigma_k} \right) \right] \quad (3-37)$$

式中, $a_k = E[X(t_k)]$, $\sigma_k^2 = E[X(t_k) - a_k]^2$, $j=1, 2, \dots, k=1, 2, \dots$ 。 $|B|$ 为归一化协方差矩阵的行列式, 其表达式为

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & 1 & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

$|B|_{jk}$ 为行列式 $|B|$ 中元素 b_{jk} 的代数余因子, b_{jk} 为归一化协方差函数, 即

$$b_{jk} = \frac{E\{[X(t_j) - a_j][X(t_k) - a_k]\}}{\sigma_j \sigma_k}$$

3.6.2 高斯随机过程的重要性质

高斯随机过程有以下 4 方面的重要性质。

(1) 高斯过程的 n 维分布只依赖各个随机变量的均值、方差和归一化协方差, 在研究过程中, 只需考虑其数字特征。

(2) 若高斯过程是宽平稳的, 则也是严平稳的。

(3) 若高斯过程在不同时刻的取值是不相关的, 则它们也是统计独立的。

(4) 高斯过程经过线性变换后生成的过程仍是高斯过程。

3.6.3 一维高斯分布(正态分布)

1. 一维高斯分布(正态分布)的概率密度函数表达式

高斯过程在任意时刻上的取值 x 是一个一维高斯随机变量, 它的一维概率密度函数表达式为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3-38)$$

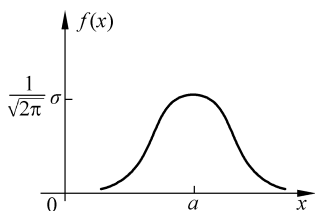


图 3-2 正态分布的概率密度函数

式中, a 和 σ^2 分别为均值和方差, 均为常数。概率密度函数曲线如图 3-2 所示。

2. 一维高斯分布(正态分布)的概率密度函数的特性

由式(3-38)和图 3-2 可知 $f(x)$ 具有如下 4 方面的特性。

(1) $f(x)$ 曲线对称于 $x=a$ 直线, 其表达式为

$$f(a+x) = f(a-x) \quad (3-39)$$

$$(2) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1, \text{ 且 } \int_{-\infty}^a f(x) dx = \int_a^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{2}。$$

(3) a 表示分布中心; σ 为标准偏差, 表示集中程度; $f(x)$ 的图形将随 σ 的减小而变得尖锐, 说明随机变量 x 落在 a 点附近的概率增大。

当 $a=0, \sigma=1$ 时, 则称 $f(x)$ 为标准正态分布。

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad (3-40)$$

(4) $f(x)$ 在区间 $(-\infty, a)$ 内单调上升, 在区间 (a, ∞) 内单调下降, 且在 a 点处有极大值 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$, 当 $x \rightarrow (\pm\infty)$ 时, $f(x) \rightarrow 0$ 。

3. 误差函数和互补误差函数

在分析数字通信系统的抗噪声性能时, 不仅要计算高斯随机变量 X 小于或等于某一取值 x 的概率 $P(X \leq x)$, 而且还要用到正态分布函数, 正态分布函数是概率密度函数的积分, 其表达式为

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}\right] dz \quad (3-41)$$

为方便计算上式积分的结果, 在数学手册上可查函数值的误差函数和互补误差函数。

(1) 误差函数的表达式为

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad x \geq 0 \quad (3-42)$$

误差函数是自变量的递增函数, $\operatorname{erf}(0)=0, \operatorname{erf}(\infty)=1$,

$$\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x)。$$

(2) 互补误差函数的表达式为

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt, \quad x \geq 0 \quad (3-43)$$

互补误差函数是自变量的递减函数, $\operatorname{erfc}(0)=1, \operatorname{erfc}(\infty)=0, \operatorname{erfc}(-x)=2-\operatorname{erfc}(x)$ 。

(3) 误差函数与互补误差函数的关系为

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) \quad (3-44)$$

(4) 互补误差函数近似式的表达式为

$$\operatorname{erfc}(x) \approx \frac{1}{x\sqrt{\pi}} e^{-x^2}, \quad x \gg 1 \quad (3-45)$$

因此, 在分析通信系统的抗噪声性能时, 利用 $\operatorname{erf}(x)$ 函数或 $\operatorname{erfc}(x)$ 函数表示 $F(x)$ 的特性。

3.7 窄带随机过程

3.7.1 窄带随机过程的定义

“窄带”的含义为频谱被限制在载波或中心频率附近的一个较窄的频带上,而这个中心频率离零频率较远。

图 3-3 为窄带随机过程的频谱和波形图,随机过程 $X(t)$ 的功率谱密度集中在中心频率 f_c 附近相对窄的频带范围 Δf 内,满足 $\Delta f \ll f_c$ 的条件,且 $f_c \geq 0$,则称该 $X(t)$ 为窄带随机过程。

窄带随机过程 $X(t)$ 的表达式为

$$X(t) = a_X(t) \cos[2\pi f_c t + \varphi_X(t)], \quad a_X(t) \geq 0 \quad (3-46)$$

式中, f_c 是中心频率; $a_X(t)$ 和 $\varphi_X(t)$ 分别是窄带随机过程 $X(t)$ 的包络函数和随机相位函数, $a_X(t)$ 和 $\varphi_X(t)$ 的变化相对于载波 $\cos(2\pi f_c t)$ 的变化要缓慢得多。

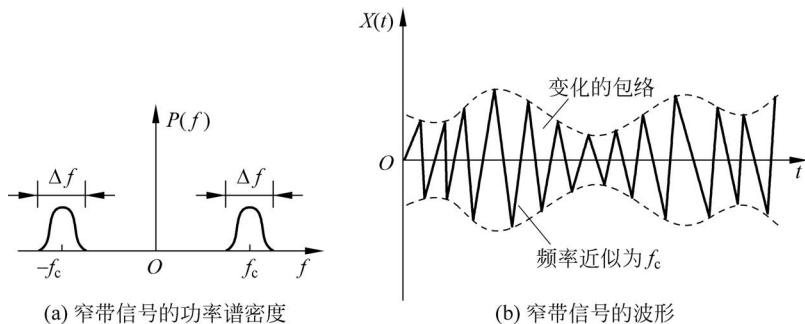


图 3-3 窄带随机过程的频谱(功率谱)和波形示意图

3.7.2 窄带随机过程的统计特性

对 $X(t) = a_X(t) \cos[2\pi f_c t + \varphi_X(t)]$ 进行三角函数展开,则有

$$X(t) = a_X(t) \cos(\varphi_X(t)) \cos(2\pi f_c t) - a_X(t) \sin(\varphi_X(t)) \sin(2\pi f_c t) \quad (3-47)$$

设 $X_c(t) = a_X(t) \cos(\varphi_X(t))$, $X_s(t) = a_X(t) \sin(\varphi_X(t))$, 则有

$$X(t) = X_c(t) \cos(2\pi f_c t) - X_s(t) \sin(2\pi f_c t)$$

式中, $X_c(t)$ 及 $X_s(t)$ 分别称为 $X(t)$ 的同相分量和正交分量。

窄带随机过程 $X(t)$ 的统计特性可由 $a_X(t)$ 、 $\varphi_X(t)$ 或 $X_c(t)$ 、 $X_s(t)$ 的统计特性确定; 反过来, 若已知窄带过程 $X(t)$ 的统计特性, 则可确定 $a_X(t)$ 、 $\varphi_X(t)$ 或 $X_c(t)$ 、 $X_s(t)$ 的统计特性。

3.8 平稳随机过程通过线性系统

平稳随机过程通过线性系统是建立在确定信号通过线性系统原理的基础上。

当线性系统任意输入一个确定信号 $x_1(t)$, 其输出 $y_1(t)$ 等于输入信号与系统单位冲激

响应 $h(t)$ 的卷积,表达式为

$$y_1(t) = x_1(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (3-48)$$

若 $X(t)$ 表示输入样本的函数集合 $\{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots\}$, $Y(t)$ 表示输出样本的函数集合 $\{y_1, y_2, \dots, y_i, \dots\}$, 则有

$$Y(t) = X(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (3-49)$$

或

$$Y(t) = h(t) * X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) X(t - \tau) d\tau \quad (3-50)$$

1. 输出随机过程的数学期望

根据数学期望的定义,输出随机过程 $Y(t)$ 的数学期望表达式为

$$E[Y(t)] = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) X(t - \tau) d\tau\right] = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) E[X(t - \tau)] d\tau \quad (3-51)$$

式中, $X(t)$ 利用了平稳性假设,有 $E[X(t - \tau)] = a$, a 为常数,则有

$$E[Y(t)] = a \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) d\tau = a \cdot H(0) \quad (3-52)$$

输出随机过程 $Y(t)$ 的数学期望等于输入随机过程 $X(t)$ 的数学期望与 $H(0)$ 的乘积,与时间 t 无关。

2. 输出随机过程的自相关函数

根据自相关函数的定义,输出随机过程 $Y(t)$ 的自相关函数表达式为

$$\begin{aligned} R_Y(t, t + \tau) &= E[Y(t)Y(t + \tau)] \\ &= E\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) \xi_i(t - \alpha) d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} h(\beta) X(t + \tau - \beta) d\beta\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) h(\beta) E[X(t - \alpha)X(t + \tau - \beta)] d\alpha d\beta \end{aligned} \quad (3-53)$$

由于输入随机过程是平稳的,则有 $E[X(t - \alpha)X(t + \tau - \beta)] = R_X(\tau + \alpha - \beta)$, 于是有

$$R_Y(t, t + \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) h(\beta) R_X(\tau + \alpha - \beta) d\alpha d\beta = R_Y(\tau) \quad (3-54)$$

式中,输出随机过程的自相关函数仅是时间间隔 τ 的函数。

由此可知,若线性系统的输入是平稳的,则输出也是平稳的。

3. 输出随机过程的功率谱密度

对式(3-54)进行傅里叶变换,则有

$$\begin{aligned} P_Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_Y(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [h(\alpha) h(\beta) R_X(\tau + \alpha - \beta)] d\alpha d\beta e^{-j\omega\tau} d\tau \end{aligned}$$

令 $\tau' = \tau + \alpha - \beta$, 则有

$$\begin{aligned} P_Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) e^{j\omega\alpha} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} h(\beta) e^{-j\omega\beta} d\beta \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau') e^{-j\omega\tau'} d\tau' \\ P_Y(\omega) &= H^*(\omega) \cdot H(\omega) \cdot P_X(\omega) = |H(\omega)|^2 P_X(\omega) \end{aligned} \quad (3-55)$$

由上式可知,输出随机过程 $Y(t)$ 的输出功率谱密度 $P_Y(\omega)$ 是输入功率谱密度 $P_X(\omega)$

与系统频率响应函数 $|H(\omega)|^2$ 的乘积。

4. 输出随机过程的概率分布

若线性系统的输入随机过程是高斯型的,则输出随机过程也是高斯型的。

已知输入随机过程概率,则输出随机过程的表达式为 $Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)X(t-\tau)d\tau$,若从积分原理来分析,此表达式可用一个和式的极限来表示,表达式为

$$Y(t) = \lim_{\Delta\tau_k \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{\infty} X(t-\tau_k)h(\tau_k)\Delta\tau_k \quad (3-56)$$

式中, $X(t)$ 是高斯型的,则系统任何时刻 $(t-\tau_k)$ 的输出 $h(\tau_k)X(t-\tau_k)\Delta\tau_k$ 仍是高斯型的。

3.9 白噪声

在通信系统中,噪声是指有用信号以外的干扰信号,是典型随机过程。它能使模拟信号失真,使数字信号发生错码,影响通信效果。最常见的噪声就是电子设备中的电阻性器件所产生的热噪声,它是零均值的高斯白噪声。

3.9.1 白噪声的概念

白噪声的功率谱密度在整个频域内是常数,它类似光学中包括全部可见光频率在内的白光。

1. 白噪声的功率谱密度函数

白噪声是一种带宽无限的平稳过程,且具有恒定的功率谱密度,白噪声的功率谱密度函数的表达式为

$$P_n(f) = \begin{cases} \frac{n_0}{2}, & (-\infty < f < \infty) \\ n_0, & (0 < f < \infty) \end{cases} \quad (3-57)$$

式中, n_0 为常数,单位是W/Hz,当 $-\infty < f < \infty$ 时, $P_n(f)$ 为双边谱,如图3-4(a)所示;当 $0 < f < \infty$ 时, $P_n(f)$ 为单边谱。

2. 白噪声的自相关函数

白噪声的自相关函数是对双边谱的功率谱密度取傅里叶反变换,得到的表达式为

$$R_n(\tau) = F^{-1}[P_n(f)] = \frac{n_0}{2}\delta(\tau) \quad (3-58)$$

式中,取 $\tau \neq 0$ 所有值,都有 $R_n(\tau) = 0$,说明白噪声仅在 $\tau = 0$ 时的取值才相关,其他任意两个不同时刻上的取值都是独立的,如图3-4(b)所示,表示功率谱密度。

3. 白噪声的平均功率

白噪声的带宽无限,其平均功率为无穷大,白噪声平均功率的表达式为

$$R(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n_0}{2} df = \infty$$

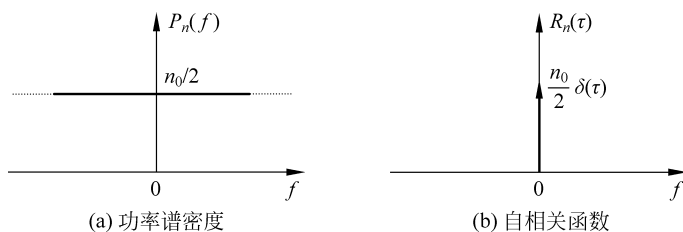


图 3-4 白噪声的功率谱密度和自相关函数

或

$$R(0) = \frac{n_0}{2} \delta(0) = \infty \quad (3-59)$$

由此可知,真正“白”的噪声是不存在的,它只是构造的一种理想化的噪声形式。实际中,噪声的功率谱均匀分布的频率范围远远大于通信系统的工作频带。

若白噪声的取值服从高斯分布,则称为**高斯白噪声**。白噪声分为通过带宽有限的信道或滤波器的情形,常见形式有低通白噪声和带通白噪声。

3.9.2 低通白噪声

1. 低通白噪声的定义

低通白噪声是指白噪声通过理想矩形低通滤波器或理想低通信道后输出的噪声。

2. 低通白噪声的功率谱密度

理想低通滤波器的传输特性为

$$H(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq B \\ 0, & |f| > B \end{cases} \quad (3-60)$$

则低通白噪声的功率谱密度表达式为

$$P_Y(f) = P_n(f) |H(f)|^2 = \frac{n_0}{2} |H(f)|^2$$

$$P_Y(f) = \begin{cases} \frac{n_0}{2}, & |f| \leq B \\ 0, & |f| > B \end{cases} \quad (3-61)$$

3. 低通白噪声的自相关函数

对低通白噪声的功率谱密度求傅里叶反变换,即得低通白噪声的自相关函数的表达式为

$$R_Y(\tau) = F^{-1}[P_Y(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} P_Y(f) e^{2\pi f \tau} df$$

$$= \int_{-B}^B \frac{n_0}{2} e^{2\pi f \tau} df = n_0 B \text{Sa}(2\pi B \tau) \quad (3-62)$$

式中, $\text{Sa}(2\pi B \tau)$ 为抽样函数,在等间隔点 $\tau = \pm k/2B$ ($k=1,2,3,\dots$) 时,有 $R_Y(\tau) = 0$,因此两个瞬时值之间是不相关的。

4. 低通白噪声的方差

低通白噪声方差的表达式为

$$\sigma_Y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} P_Y(f) df = \int_{-B}^B \frac{n_0}{2} df = n_0 B \quad (3-63)$$

3.9.3 带通白噪声

1. 带通白噪声的定义

带通白噪声是指白噪声通过理想矩形带通滤波器或理想带通信道后输出的噪声。

2. 带通白噪声的功率谱密度

设 f_c 为中心频率, B 为带宽, 理想带通滤波器的传输特性为

$$H(f) = \begin{cases} 1, & f_c - \frac{B}{2} \leq |f| \leq f_c + \frac{B}{2} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

则带通白噪声的功率谱密度为

$$P_Y(f) = \begin{cases} \frac{n_0}{2}, & f_c - \frac{B}{2} \leq |f| \leq f_c + \frac{B}{2} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (3-64)$$

3. 带通白噪声的自相关函数

带通白噪声的自相关函数表达式为

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} P_Y(f) e^{j2\pi f\tau} df \\ &= \int_{-f_c - \frac{B}{2}}^{-f_c + \frac{B}{2}} \frac{n_0}{2} e^{j2\pi f\tau} df + \int_{f_c - \frac{B}{2}}^{f_c + \frac{B}{2}} \frac{n_0}{2} e^{j2\pi f\tau} df \\ &= n_0 B \frac{\sin \pi B \tau}{\pi B \tau} \cos 2\pi f_c \tau \end{aligned} \quad (3-65)$$

4. 带通白噪声的方差

带通白噪声方差的表达式为

$$\sigma_Y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} P_Y(f) df = 2 \int_{-B/2}^{B/2} \frac{n_0}{2} df = n_0 B \quad (3-66)$$

思考与练习

3-1 随机函数: 随某些参量变化的随机变量。通常将以时间为参量的随机函数称为(), 也称为()。

3-2 随机信号的研究方法: 按随机试验进行观察, 将观察中获得的具有随机性的样本或数据序列抽象为()或称为(), 用统计的方法研究随机信号在时域、频域和时频域的分布规律以及数字特征。

3-3 平稳随机信号在时间上是(), 其能量(), 傅里叶变换并不存在, 因此平稳随机信号不能用通常的频谱来表示。

3-4 自然界变化的过程可以分为()和()两大类。

3-5 数字特征就能反映随机过程的基本特性。数字特征是随机过程的取值的某些特

定的统计平均值。常用的数字特征是()、()和相关函数。

3-6 随机过程 $\xi(t)$ 在任意时刻的取值的统计平均值,即为(),或称()。

3-7 随机过程的统计特性不随时间推移而变,也就是说支配随机过程的规律不随时间而变,将这类随机过程称为();反之,称为()。

3-8 随机过程通常是(),其频谱特性通常用功率谱密度来表述。可以证明,平稳过程的功率谱密度与自相关函数是一对()关系。

3-9 高斯随机过程,也称(),是一种最常见、最易处理的随机过程。如通信系统中的热噪声等都是高斯型的,常称为()。

3-10 若平稳过程 $X(t)$ 的数学期望和自相关函数均具有(),则称此平稳过程是(),或称遍历过程。

3-11 画图并写出正态分布的函数表达式,并说明它具有哪些性质。

3-12 画图说明随机过程的定义。

3-13 本章所涉及的白噪声有哪几种形式,并说明各自的特点。

3-14 随机信号有哪些主要特点。

3-15 举学习和生活中的实例说明正态分布的特点。