

谓词演算基础

在命题演算中,把不可剖开或分解为更简单的命题的原子命题作为基本单元,把语句分解为原子命题,而不对原子命题的内部结构加以分析。本章将对原子命题进一步剖析,分解为个体和谓词。一般地讲,原子命题是由若干谓词和项组成的,本章的目标是把日常永真的知识表达成谓词演算的形式语言,再加上一些永真的规则,推出一些新的知识,研究它们的形式结构和逻辑关系。谓词演算中语句的符号化是人工智能中知识表示的基础。

 3.1 个体和谓词

视频 3.1

3.1.1 个体

首先介绍与个体有关的几个重要概念。

(1) 个体:具有独立意义、独立存在的东西。

常个体:具有确定含义的个体,也称为实体。例如,“南京理工大学”“人工智能”“计算机科学”等均为常个体。常个体常用 a 、 b 、 c 等表示。

(2) 个体域:由个体组成的集合。例如, $\{\text{微信, 微博, 支付宝}\}$, $\{x \mid x \text{ 为南京理工大学学生}\}$ 等就是个体域。个体域常用 I 、 J 、 K 等表示。

(3) 全总个体域:所有个体,不管是何种类型的个体,组合在一起组成的个体域,用 U 表示。

(4) 个体变元:以个体域 I 中的变元为变目的变元称为个体域 I 上的个体变元,常用 x 、 y 、 z 等表示。

(5) 项:构成原子公式的一部分。常量符号是最简单的项,是用来表示论域中的个体或实体。一般地讲,个体和实体可以是物体、人、概念或有名称的任何事物。

项包括实体、变量符号和函数符号等。

3.1.2 谓词

1. 有关概念

1) 谓词的定义

谓词是指个体所具有的性质或若干个体之间的关系。

例如,“5 为质数”“7 小于 8”中的“为质数”和“小于”均为谓词。前者是个体

“5”所具有的性质,为一元谓词;后者是指个体“7”和“8”所具有的关系,为二元谓词。

约定用大写字母 A 、 B 、 C 等表示谓词。

例如:

(1) 5 为质数。令 A 表示“为质数”,实体 a 表示“5”,则该语句可表示为 $A(a)$ 。

(2) 7 小于 8。令 B 表示“小于”,实体 a 表示“7”,实体 b 表示“8”,则该语句可表示为 $B(a, b)$ 。

2) 谓词填式

单个谓词不构成完整的意思,只有在谓词后填以个体才能构成完整的意思,这种在谓词后填以个体构成的式子称为谓词填式。

例如,“为质数”是谓词,但不构成完整的意思,而谓词填式“5 为质数”“7 为质数”等就能表达完整的意思。

3) 谓词命名式

谓词后填以命名变元 e 构成的式子称为谓词命名式。命名变元仅代表谓词的元数,不代表其他意思。

例如, $A(e)$ 表示 A 为一元谓词, $B(e_1, e_2)$ 表示 B 为二元谓词,以此类推。

4) 谓词变元

以谓词组成的集合为变域的变元称为谓词变元。

上面已经描述过,大写字母 A 、 B 、 C 等表示特定的谓词,小写字母 a 、 b 、 c 等表示特定的个体或实体。现在约定用大写字母 X 、 Y 、 Z 等表示谓词变元,小写字母 x 、 y 、 z 等表示个体变元。

2. 谓词语句的符号化

一阶谓词演算是一种形式语言,用它可以表示各种各样的语句。这种形式语言的表达式可以作为产生式数据库的组成部分。现在讨论谓词语句是如何符号化的。一般地讲,动词、系动词、形容词和集合名词均可以表达成谓词。

例 3.1 他送我这台笔记本电脑。

解: 令

$A(e_1, e_2, e_3)$ 表示“ e_1 送 e_2 e_3 ”。

$B(e)$ 表示“ e 为笔记本电脑”。

a 表示“他”。

b 表示“我”。

c 表示“这台”。

则原句译为

$$A(a, b, c) \wedge B(c)$$

例 3.2 Tom 送 Alice 这只大的红气球。

解: 令

$A(e_1, e_2, e_3)$ 表示“ e_1 送 e_2 e_3 ”。

$B(e)$ 表示“ e 为大的”。

$C(e)$ 表示“ e 为红的”。

$D(e)$ 表示“ e 为气球”。

a 表示“Tom”。

b 表示“Alice”。

c 表示“这只”。

则原句译为

$$A(a,b,c) \wedge B(c) \wedge C(c) \wedge D(c)$$

例 3.3 美国位于加拿大和拉丁美洲之间。

解：令

$A(e_1, e_2, e_3)$ 表示 e_1 位于 e_2 和 e_3 之间。

a 表示美国。

b 表示加拿大。

c 表示拉丁美洲。

则原句译为

$$A(a,b,c)$$

上面分别介绍了谓词和个体的有关知识,事实上这仅仅是基于实体(或称特定个体)的谓词,而在谓词演算中,知识的表示往往采用变量,即个体变元,表达一类相同的事实或概念。

例如,Shakespeare wrote “Othello”,可以符号化为 $\text{Write}(\text{Shakespeare}, \text{Othello})$ 。此表达式表示常谓词 Write 、实体 Shakespeare 和 Othello 之间的关系。

下面讨论另外两种情况:

(1) $\text{Write}(x, y)$, 即个体为变量符号项。

此表达式表示 x 和 y 的关系是 Write , 即作者 x 写 y 。此时 x 可在个体域 I (表示作者的集合)上变化; y 可在个体域 J (表示书名的集合)上变化。

因而表达式 $\text{Write}(x, y)$ 表达一类关系。

(2) $X(x, y)$, 即个体为变量符号项,谓词为谓词变元。

此表达式表示 x 和 y 有关系 X , 此时 x, y 和 X 分别在 3 个个体域上变化。

综上所述,谓词和个体是息息相关的,基于个体的谓词才是一个完整的谓词,且个体、谓词、个体域三者是可以变化的。

以个体域 I 为定义域、以真假为值域的谓词称作个体域 I 上的谓词。

以个体域 I 上的谓词为变域的变元称作个体域 I 上的谓词变元。

下面讨论 h 个个体组成的个体域 I 上的 m 元谓词。

先讨论个体域 $\{a, b\}$ 上的谓词。

一元谓词 $X(e)$ 如表 3.1 所示。

表 3.1 两个个体的一元谓词

e	X_1	X_2	X_3	X_4
a	T	T	F	F
b	T	F	T	F

从表 3.1 可知一元谓词共有 4 个,确切地说共有 4 类。

二元谓词 $X(e_1, e_2)$ 共有 16 个, 如表 3.2 所示。

表 3.2 两个个体的二元谓词

e_1	e_2	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	X_{15}	X_{16}
a	a	T	F	T	T	T	F	F	F	T	T	T	T	F	F	F	F
a	b	T	T	F	T	T	F	T	T	F	F	T	F	T	F	F	F
b	a	T	T	T	F	T	T	F	T	F	T	F	F	F	T	F	F
b	b	T	T	T	T	F	T	T	F	T	F	F	F	F	F	T	F

不难验证, h 个个体组成的个体域 I 上的一元谓词有 2^h 个, 二元谓词有 2^{h^2} 个, m 元谓词有 2^{h^m} 个。



视频 3.2



3.2 函数项和量词

3.1 节讨论了基于实体和变量符号项的谓词, 下面讨论函数项和量词。

3.2.1 函数项

函数项是以个体为定义域、以个体为值域的函数。约定用 f, g, h 等表示抽象的函数项。

例 3.4 将语句 Mark's mother is married to his father 符号化。

解: 令

$M(e_1, e_2)$ 表示“ e_1 is married to e_2 ”。

$m(e)$ 表示“ e 的 mother”。

$f(e)$ 表示“ e 的 father”。

则语句表示为

$$M(m(\text{Mark}), f(\text{Mark}))$$

3.2.2 量词

在引入量词以前, 先看一个例子。

设 $P(x)$ 表示 x 为教授, 若 x 的个体域表示人工智能学院的教师, 则 $P(x)$ 表示人工智能学院的教师均为教授, 而事实并非如此, 确切的表达应该是人工智能学院有些教师是教授。如果仍用 $P(x)$ 表示 x 为教授, 显然会引起概念上的混乱, 为此必须引入量词表示“所有的”“有一些”等不同的概念。

从以上简单的例子可以看出, 要确切、完整地表达一个语句, 必须约定个体的取值范围。如上例规定 x 的取值范围为人工智能学院的教师的集合, 也可约定 x 为人文学院的教师的集合, 如此约定很显然不利于计算机的识别和处理。采用如下方法可解决上面的不利因素。

- (1) 约定变量符号即个体变元 x 取值于全总个体域 U 。
- (2) 用谓词来限定 x 的取值范围。
- (3) 引进全称量词 $\forall x$ 表示“所有的 x ”“一切 x ”等, 存在量词 $\exists x$ 表示“存在一些 x ”

“有一些 x ”等概念。

(4) 规定一般情况下紧跟在全称量词 $\forall x$ 之后的主联结词为 $\rightarrow$, 紧跟在存在量词 $\exists x$ 之后的主联结词为 $\wedge$ 。

至此, 再来看上面的例子“人工智能学院有些教师是教授”。

设 $A(e)$ 表示“ e 为人工智能学院的教师”, $P(e)$ 表示“ e 为教授”, 则原句译为

$$\exists x(A(x) \wedge P(x))$$

此例中 x 取值于全总个体域 U , 谓词 $A(e)$ 限定 x 的取值范围。

有了量词的概念, 知识的符号化问题就很容易得到解决。下面举一些例子说明把知识表达成符号公式的方法。

例 3.5 有些人没写过任何小说。

解: 令

$P(e)$ 表示“ e 为人”。

$N(e)$ 表示“ e 为小说”。

$W(e_1, e_2)$ 表示“ e_1 写过 e_2 ”。

则原句译为

$$\exists x(P(x) \wedge \forall y(N(y) \rightarrow \neg W(x, y)))$$

例 3.6 尽管有人能干, 但未必所有人能干。

解: 令

$P(e)$ 表示“ e 为人”。

$A(e)$ 表示“ e 能干”。

则原句译为

$$\exists x(P(x) \wedge A(x)) \wedge \neg \forall x(P(x) \rightarrow A(x))$$

例 3.7 If a program can not be told a fact, then it can not learn that fact.

解: 令

$P(e)$ 表示“ e 为 program”。

$F(e)$ 表示“ e 为 fact”。

$T(e_1, e_2)$ 表示“ e_1 can be told e_2 ”。

$L(e_1, e_2)$ 表示“ e_1 can learn e_2 ”。

则原句译为

$$\forall x \forall y((P(x) \wedge F(y) \wedge \neg T(x, y)) \rightarrow \neg L(x, y))$$

例 3.8 我敬人人, 人人敬我。

解: 令

$P(e)$ 表示“ e 为人”。

$A(e_1, e_2)$ 表示“ e_1 敬 e_2 ”。

a 表示“我”。

则原句译为

$$\forall x((P(x) \wedge A(a, x)) \rightarrow A(x, a))$$

例 3.9 鱼我所欲, 熊掌亦我所欲。

解: 令

$F(e)$ 表示“ e 为鱼”。

$B(e)$ 表示“ e 为熊掌”。

$W(e_1, e_2)$ 表示“ e_1 为 e_2 所欲”。

a 表示“我”。

则原句译为

$$\forall x(F(x) \rightarrow A(x, a)) \wedge \forall x(B(x) \rightarrow A(x, a))$$

例 3.10 有些人喜欢所有的网络游戏,但并非所有人均喜欢网络游戏。

解: 令

$P(e)$ 表示“ e 为人”。

$G(e)$ 表示“ e 为网络游戏”。

$L(e_1, e_2)$ 表示“ e_1 喜欢 e_2 ”。

则原句译为

$$\exists x(P(x) \wedge \forall y(G(y) \rightarrow L(x, y))) \wedge \neg \forall x(P(x) \rightarrow \exists y(G(y) \wedge L(x, y)))$$

例 3.11 任何一个集合 x , 总存在一个集合 y , y 的基数比 x 的基数大。

解: 令

$S(e)$ 表示“ e 为集合”。

$f(e)$ 表示“ e 的基数”。

$G(e_1, e_2)$ 表示“ e_1 比 e_2 大”。

则原句译为

$$\forall x(S(x) \rightarrow \exists y(S(y) \wedge G(f(y), f(x))))$$



视频 3.3



3.3 自由变元和约束变元

3.3.1 自由出现和约束出现

在第 1 章中给出了命题演算公式的形式定义。对于谓词演算来说,也存在合式公式的形式定义的问题。首先约定 $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为谓词演算公式的原子公式,其中 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是项(实体、变量符号、函数)。

定义 3.1: 谓词演算的合式公式(简称公式)是由原子命题、谓词填式或由它们利用联结词和量词构成的式子。

合式公式的形式定义如下:

- (1) 原子命题 P 是合式公式。
- (2) 谓词填式 $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是合式公式。
- (3) 若 A 是公式,则 $\neg A$ 是合式公式。
- (4) 若 A 和 B 是合式公式,则 $(A \wedge B)$ 、 $(A \vee B)$ 、 $(A \rightarrow B)$ 、 $(A \leftrightarrow B)$ 为公式。
- (5) 若 A 是合式公式, x 是 A 中出现的任何个体变元,则 $\forall xA(x)$ 、 $\exists xA(x)$ 为合式公式。
- (6) 只有有限次使用(1)、(2)、(3)、(4)、(5)所得到的式子才是合式公式。

定义 3.2: 设 α 为任何一个谓词演算公式, $\forall xA(x)$ 、 $\exists xA(x)$ 为公式 α 的子公式,此

时紧跟在 $\forall$ 、 $\exists$ 之后的 x 称为量词的指导变元或作用变元, $A(x)$ 称为量词的作用域,在作用域中 x 的一切出现均称为约束出现,在 α 中除了约束出现外的一切出现均称为自由出现。

例 3.12 指出合式公式 $\forall x(X(x,y) \rightarrow \exists y(Y(x,y) \wedge Z(z)))$ 的作用域、约束出现和自由出现。

解: $\forall x$ 的作用域为 $X(x,y) \rightarrow \exists y(Y(x,y) \wedge Z(z))$ 。

$\exists y$ 的作用域为 $Y(x,y) \wedge Z(z)$ 。

公式中的 x 为约束出现,第一个 y 和 z 是自由出现, $Y(x,y) \wedge Z(z)$ 中的 y 为约束出现。

定义 3.3: 一个变元 x 若在公式中有自由出现,则称此变元为自由变元;若有约束出现,则称为约束变元。

注意,自由出现的变元可以在量词的作用域中出现,但不受相应量词的约束,所以有时把它看作公式中的参数。有一个特例,若公式中无自由变元,公式即为命题。

3.3.2 改名和代入

1. 改名

从上面的例子可以看出,同一个变元,如在公式 $\forall x(X(x,y) \rightarrow \exists y(Y(x,y) \wedge Z(z)))$ 中的 y ,既有约束出现又有自由出现。为了避免变元的约束出现和自由出现在某一公式中同时出现,引起概念上的混乱,可以对约束变元进行改名,使得同一个变元或者为约束出现,或者为自由出现,同时使不同的量词所约束的变元不同名,便于计算机对知识的处理。之所以可以这样做,是因为一个公式的约束变元所用的符号与公式的真假是无关的。例如,公式 $\forall xX(x)$ 和公式 $\forall yX(y)$ 具有相同的意义。

下面给出改名的规则:

(1) 改名是对约束变元而言的,自由变元不能改名。改名时应对量词的指导变元及其作用域中所出现的约束变元处处进行。

(2) 改名前后不能改变变元的约束关系。

(3) 改名用的新名应是该作用域中没有使用过的变元名称。

例 3.13 对公式 $\forall x(X(x,y) \rightarrow \exists y(Y(x,y) \wedge Z(z)))$ 实施改名。

解: 可把公式改名为

$$\forall x(X(x,y) \rightarrow \exists u(Y(x,u) \wedge Z(z)))$$

但不能改名为

$$\forall x(X(x,y) \rightarrow \exists z(Y(x,z) \wedge Z(z)))$$

因为这样将改变变量的约束关系。

2. 代入

谓词演算公式中的自由变元可以更改,称为代入。代入是对自由变元而言的,约束变元不能代入,代入后的式子是原式的特例。代入必须遵循下列规则:

(1) 代入必须处处进行,即代入时必须对公式中出现的所有同名的自由变元进行。

(2) 代入后不能改变原式和代入式的约束关系。

(3) 代入也可以对谓词填式进行,但也要遵循上面两条规则;

(4) 命题变元也可以实施代入。

例 3.14 已知公式 $\forall x(X(x,y) \rightarrow \exists y(Y(x,y) \wedge Z(z)))$ 。

(1) 把公式中的自由变元 y 代以式子 x^2+2 。

(2) 把公式中的谓词变元 $X(e_1, e_2)$ 代以 $\exists yD(e_1, e_2, y, x)$ 。

解:

(1) 先把式子 x^2+2 直接代入原式, 观察结果。

代入后得

$$\forall x(X(x, x^2+2) \rightarrow \exists y(Y(x, y) \wedge Z(z)))$$

显然代入式中的 x^2 中的 x 本应为自由变元, 而现在受全称量词 $\forall x$ 约束, 改变了它的约束关系, 因此是一种非法代入。为此必须采用下面的方法:

先对原式改名, 将 $\forall x$ 改为 $\forall u$, 将 $\exists y$ 改为 $\exists v$, 改名后得式子

$$\forall u(X(u, y) \rightarrow \exists v(Y(u, v) \wedge Z(z)))$$

最后代入, 得

$$\forall u(X(u, x^2+2) \rightarrow \exists v(Y(u, v) \wedge Z(z)))$$

验证公式可知, 没有改变变元的约束关系, 所以这种代入符合代入规则。

(2) 采用直接代入, 查看结果。

代入后得式子

$$\forall x(\exists yD(x, y, y, x) \rightarrow \exists y(Y(x, y) \wedge Z(z)))$$

显然, 代入式中的 x 本应为自由变元, 代入后受 $\forall x$ 约束, 改变了约束关系。原式中的 y 本是自由变元, 代入后受 $\exists y$ 约束, 改变了约束关系。因此, 这是一种非法代入。

先对原式改名, 将 $\forall x$ 改为 $\forall u$, 将 $\exists y$ 改为 $\exists v$:

$$\forall u(X(u, y) \rightarrow \exists v(Y(u, v) \wedge Z(z)))$$

再对代入式改名, 将 $\exists y$ 改为 $\exists t$, 得

$$\exists tD(e_1, e_2, t, x)$$

最后代入, 得

$$\forall u(\exists tD(u, y, t, x) \rightarrow \exists v(Y(u, v) \wedge Z(z)))$$



视频 3.4



3.4 永真性和可满足性

3.4.1 真假性

由前面的讨论可知, 谓词演算公式的真假性与 4 个因素有关。下面简单讨论相关的理由, 以便读者对知识的真假性有一个全面了解。

(1) 个体域: 设 $A(e)$ 表示“ e 为偶数”, 公式 $\forall xA(x)$ 的值随个体域的不同而不同。例如, 个体域 I 为 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 时, 公式的值为假; 个体域 I 为 $\{2, 4, 6, 8\}$ 时, 公式的值为真。

(2) 自由变元: 取值于个体域 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 。对于公式 $A(x)$, 当 x 取 4 时, 其值为真; 当 x 取 5 时, 其值为假。所以, 公式的真假性随变元取值情况不同而不同。

(3) 谓词变元: 对于个体域 $I = \{2, 4, 6, 8\}$, 分以下两种情况。

当 $A(e)$ 表示“ e 为偶数”时, $\forall xA(x) = T$ 。

当 $A(e)$ 表示“ e 为奇数”时, $\forall x A(x) = F$ 。

(4) 命题变元: 对于个体域 $I = \{2, 4, 6, 8\}$, $A(e)$ 表示“ e 为偶数”。

考虑公式 $\forall x A(x) \wedge P$, 当 $P = T$ 时, 公式的值为真; 当 $P = F$ 时, 公式的值为假。

设 α 为任何一个谓词演算公式, 其中自由变元为 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 谓词变元为 $X_1, X_2, \dots, X_m$, 命题变元为 $P_1, P_2, \dots, P_k$ 。此时 α 可表示为

$$\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n; X_1, X_2, \dots, X_m; P_1, P_2, \dots, P_k)$$

有了上面的讨论, 就可对谓词演算公式给予解释。

设个体域 I 解释为常个体域 I^0 。

自由变元 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 解释为 I^0 中的个体 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 。

谓词变元 $X_1, X_2, \dots, X_m$ 解释为 I^0 上的谓词 $A_1, A_2, \dots, A_m$ 。

命题变元 $P_1, P_2, \dots, P_k$ 解释为 $P_1^0, P_2^0, \dots, P_k^0$, 其中 $P_i^0 = T$ 或 $F, i = \{1, 2, \dots, k\}$ 。

则说给了公式 α 一个解释。记为

$$(I^0; a_1, a_2, \dots, a_n; A_1, A_2, \dots, A_m; P_1^0, P_2^0, \dots, P_k^0)$$

公式 α 在该解释下的值记为

$$\alpha(a_1, a_2, \dots, a_n; A_1, A_2, \dots, A_m; P_1^0, P_2^0, \dots, P_k^0)$$

简记为 $\alpha(a; A; P^0)$ 。

如果该值取为 T , 则称该解释为成真解释;

如果该值取为 F , 则称该解释为成假解释。

下面讨论含有量词的谓词演算公式的真假性。首先讨论公式 $\forall x \alpha(x)$ 和 $\exists x \alpha(x)$ 的真假性。

$\forall x \alpha(x)$ 为真 $\Leftrightarrow$ 个体域 I 中的每一个个体均使得 α 取为真。

$\exists x \alpha(x)$ 为真 $\Leftrightarrow$ 个体域 I 中有一个个体使得 α 取为真。

下面举例说明给定一个解释后求公式真假性的方法。

例 3.15 已知公式 $\forall x \forall y ((X(x, y) \wedge Y(z) \wedge P) \rightarrow Z(x, y))$, 求公式在解释 $(I; z; X(e_1, e_2), Y(e), Z(e_1, e_2); P) = (\{1, 2, 3, 4\}; 2; e_1 \geq e_2, e \text{ 为偶数}, e_1 \leq e_2; T)$ 之下的值。

解: 将解释代入公式, 得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \forall x \forall y ((x \geq y \wedge 2 \text{ 为偶数} \wedge T) \rightarrow x \leq y) \\ &= \forall x \forall y (x \geq y \rightarrow x \leq y) \end{aligned}$$

(1) 当 $x=1$ 时, 原式的作用域 $= \forall y (1 \geq y \rightarrow 1 \leq y)$ 。

① 当 $y=1$ 时, $\forall y$ 的作用域 $= 1 \geq 1 \rightarrow 1 \leq 1 = T$ 。

② 当 $y \geq 2$ 时, $\forall y$ 的作用域 $= 1 \geq y \rightarrow 1 \leq y = F \rightarrow T = T$ 。

(2) 当 $x=2$ 时, 原式的作用域 $= \forall y (2 \geq y \rightarrow 2 \leq y)$ 。

① 当 $y=1$ 时, $\forall y$ 的作用域 $= 2 \geq 1 \rightarrow 2 \leq 1 = T \rightarrow F = F$ 。

② 当 $y=2$ 时, $\forall y$ 的作用域 $= 2 \geq 2 \rightarrow 2 \leq 2 = T \rightarrow T = T$ 。

③ 当 $y \geq 3$ 时, $\forall y$ 的作用域 $= 2 \geq y \rightarrow 2 \leq y = F \rightarrow T = T$ 。

(3) 当 $x=3$ 时, 原式的作用域 $= \forall y (3 \geq y \rightarrow 3 \leq y)$ 。

① 当 $y=1, 2$ 时, $\forall y$ 的作用域 $= 3 \geq y \rightarrow 3 \leq y = T \rightarrow F = F$ 。

② 当 $y=3$ 时, $\forall y$ 的作用域 $= 3 \geq 3 \rightarrow 3 \leq 3 = T \rightarrow T = T$ 。

③ 当 $y=4$ 时, $\forall y$ 的作用域 $= 3 \geq 4 \rightarrow 3 \leq 4 = F \rightarrow T = T$ 。

(4) 当 $x=4$ 时, 原式的作用域 $= \forall y(4 \geq y \rightarrow 4 \leq y)$ 。

① 当 $y=1, 2, 3$ 时, $\forall y$ 的作用域 $= 4 \geq y \rightarrow 4 \leq y = T \rightarrow F = F$ 。

② 当 $y=4$ 时, $\forall y$ 的作用域 $= 4 \geq 4 \rightarrow 4 \leq 4 = T \rightarrow T = T$ 。

综上所述, 当 $x=2$ 且 $y=1, x=3$ 且 $y=1, 2, x=4$ 且 $y=1, 2, 3$ 时, 有

$$\forall y(x \geq y \rightarrow x \leq y) = F$$

所以, 根据含有全称量词公式真假的定义知:

$$\forall x \forall y((X(x, y) \wedge Y(z) \wedge P) \rightarrow Z(x, y)) = F$$

故原式在已知解释下的值为 F 。

3.4.2 同真假性、永真性和可满足性

有了解释的概念, 就可讨论公式的同真假性、永真性和可满足性。

定义 3.4: 设有两个公式 α 和 β , 如果对于个体域 I 上的任何解释, 公式 α 和 β 均取得相同的真假值, 则称 α 和 β 在 I 上同真假。

如果 α 和 β 在每一个非空域上均同真假, 则称 α 和 β 同真假。

下面给出两组等价公式。

(1) 关于否定的等价公式。

$$\neg \forall x \alpha(x) = \exists x \neg \alpha(x)$$

$$\neg \exists x \alpha(x) = \forall x \neg \alpha(x)$$

对于上面两个公式可在有限域 $I = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 上加以说明, 当然在无限域上等价公式仍成立。

$$\begin{aligned} \neg \forall x \alpha(x) &= \neg (\alpha(a_1) \wedge \alpha(a_2) \wedge \dots \wedge \alpha(a_n)) \\ &= \neg \alpha(a_1) \vee \neg \alpha(a_2) \vee \dots \vee \neg \alpha(a_n) \\ &= \exists x \neg \alpha(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg \exists x \alpha(x) &= \neg (\alpha(a_1) \vee \alpha(a_2) \vee \dots \vee \alpha(a_n)) \\ &= \neg \alpha(a_1) \wedge \neg \alpha(a_2) \wedge \dots \wedge \neg \alpha(a_n) \\ &= \forall x \neg \alpha(x) \end{aligned}$$

(2) 量词作用域的收缩与扩张。

设公式 γ 中不含有自由的 x , 则下面的公式成立。

$$\exists x(\alpha(x) \vee \gamma) = \exists x \alpha(x) \vee \gamma$$

$$\exists x(\alpha(x) \wedge \gamma) = \exists x \alpha(x) \wedge \gamma$$

$$\forall x(\alpha(x) \vee \gamma) = \forall x \alpha(x) \vee \gamma$$

$$\forall x(\alpha(x) \wedge \gamma) = \forall x \alpha(x) \wedge \gamma$$

例 3.16 用上面的等价公式判断公式 $\forall x \alpha(x) \rightarrow \gamma$ 和 $\forall x(\alpha(x) \rightarrow \gamma)$ 是否等价。

解:

$$\begin{aligned} \forall x \alpha(x) \rightarrow \gamma &= \neg \forall x \alpha(x) \vee \gamma \\ &= \exists x \neg \alpha(x) \vee \gamma \\ &= \exists x(\neg \alpha(x) \vee \gamma) \\ &= \exists x(\alpha(x) \rightarrow \gamma) \\ &\neq \forall x(\alpha(x) \rightarrow \gamma) \end{aligned}$$

所以两公式不等价。

定义 3.5: 给定一个谓词演算公式 α , 其个体域为 I 。对于 I 中的任意一个解释, 若 α 均取为真, 则称公式 α 在 I 上为永真的; 若 α 均取为假, 则称公式 α 在 I 上为永假的, 也称为公式 α 在 I 上不可满足。

定义 3.6: 给定一个谓词演算公式 α , 其个体域为 I 。如果在个体域 I 上存在一个解释使得 α 取为真, 则称公式 α 在 I 上为可满足公式; 如果在个体域 I 上存在一个解释使得 α 取为假, 则称公式 α 在 I 上为非永真公式。

定理 3.1: 如果 I, J 是两个具有相同个数的个体的个体域 (个体本身可不相同), 则任意一个公式 α 在 I 中永真当且仅当其在 J 中永真, 在 I 中可满足当且仅当其在 J 中可满足。

证明: 要证明该问题, 首先要在两个个体域 I 和 J 上建立个体、谓词、解释等元素间的一一对应关系。构造如下:

(1) 因为 I 和 J 具有相同个数的个体的个体域, 所以可在两者之间建立一一对应关系, 即在 I 中有一个个体 a , 总能在 J 中找到一个个体与之对应, 反之亦然。

(2) 建立个体域 I 和 J 中谓词的一一对应关系。

设 $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是 I 中的 n 元谓词, 令满足下列性质的 J 中的 n 元谓词 $X'(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ 与 $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 相对应: $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为真当且仅当 $X'(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ 为真, 其中 x 在 I 中取值, x' 在 J 中取值。

(3) 为 I 中的解释与 J 中的解释建立一一对应关系:

设有 I 中的一个解释

$$\begin{aligned} & (x_1, x_2, \dots, x_n; X_1, X_2, \dots, X_m; P_1, P_2, \dots, P_k) \\ & = (a_1, a_2, \dots, a_n; A_1, A_2, \dots, A_m; P_1^0, P_2^0, \dots, P_k^0) \end{aligned}$$

简记为 $(x; X; P) = (a; A; P^0)$ 。

则令 J 中的下列解释为其对应的解释:

$$\begin{aligned} & (x_1, x_2, \dots, x_n; X_1, X_2, \dots, X_m; P_1, P_2, \dots, P_k) \\ & = (a'_1, a'_2, \dots, a'_n; A'_1, A'_2, \dots, A'_m; P_1^0, P_2^0, \dots, P_k^0) \end{aligned}$$

简记为 $(a'; A'; P^0)$ 。

利用归纳法, 可证明 $\alpha(a; A; P^0) = \alpha(a'; A'; P^0)$ 。 (3.1)

如果 α 为命题变元, 命题显然成立。

如果 α 为谓词填式 $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 则有

$$\begin{aligned} \alpha(a; A; P^0) &= A(a_1, a_2, \dots, a_n) \\ &= A'(a'_1, a'_2, \dots, a'_n) \\ &= \alpha(a'; A'; P^0) \end{aligned}$$

故命题成立。

如果 α 为下列 5 种情形之一:

$$\neg \beta_1, \beta_1 \vee \beta_2, \beta_1 \wedge \beta_2, \beta_1 \rightarrow \beta_2, \beta_1 \leftrightarrow \beta_2$$

由归纳假设知, β_1 和 β_2 满足式 (3.1), 即

$$\begin{aligned} \beta_1(a; A; P^0) &= \beta_1(a'; A'; P^0) \\ \beta_2(a; A; P^0) &= \beta_2(a'; A'; P^0) \end{aligned}$$

当 $\alpha = \neg\beta_1$ 时,

$$\begin{aligned}\alpha(a; A; P^0) &= \neg\beta_1(a; A; P^0) \\ &= \neg\beta_1(a'; A'; P^0) \\ &= \alpha(a'; A'; P^0)\end{aligned}$$

故式(3.1)成立。

当 $\alpha = \beta_1 \vee \beta_2$ 时,

$$\begin{aligned}\alpha(a; A; P^0) &= (\beta_1 \vee \beta_2)(a; A; P^0) \\ &= \beta_1(a; A; P^0) \vee \beta_2(a; A; P^0) \\ &= \beta_1(a'; A'; P^0) \vee \beta_2(a'; A'; P^0) \\ &= (\beta_1 \vee \beta_2)(a'; A'; P^0)\end{aligned}$$

故式(3.1)成立。

同理可证其他 3 种情形。

如果 α 形如 $\exists y\beta_1(x; X; P; y)$, 由归纳假设知

$$\beta_1(a; A; P^0; y) = \beta_1(a'; A'; P^0; y') \quad (3.2)$$

$\exists y\beta_1(x; X; P; y)$ 为真, 即在个体域 I 中有一个个体 b 使得 $\beta_1(a; A; P^0; b)$ 为真, 根据式(3.2)知: $\beta_1(a'; A'; P^0; b')$ 为真, 即 $\exists y\beta_1(x; X; P; y)$ 在 J 上取为真。

故式(3.1)成立。

如果 α 形如 $\forall y\beta_1(x; X; P; y)$, 同理可证。

设 α 在 I 中可满足, 即在 I 中存在一个解释 $(a; A; P^0)$ 使得 α 取真值, 由解释的一一对应关系和式(3.1)知, 在 J 中也存在一个解释 $(a'; A'; P^0)$ 使得 α 取为真, 故 α 在 J 中可满足。反之亦然。

同理可证, α 在 I 中永真当且仅当 α 在 J 中永真。

讨论公式的永真性和可满足性的目的是简化讨论任一谓词演算公式在某一个个体域上的真假性。由上可知, 有限域上一个公式的永真性和可满足性依赖于个体域中个体的数目, 与个体的内容无关, 因此要讨论公式 α 在任何 k 个个体域上的永真性和可满足性, 只要讨论公式 α 在个体域 $I = \{1, 2, \dots, k\}$ 上的永真性和可满足性即可。我们把个体域 $\{1, 2, \dots, k\}$ 称为 k 域, 即由 k 个个体组成的个体域。当 $k=1$ 时, 称为 1 域, 以此类推。

显然有下面的定理。

定理 3.2: 如果一个公式在 k 域上永真, 则其在 $h (< k)$ 域上永真。

定理 3.3: 如果一个公式在 h 域上可满足, 则其在 $k (k > h)$ 域上可满足。

例 3.17 试讨论公式 $\forall x(X(x) \rightarrow (\exists y(Y(y) \wedge Z(z)) \rightarrow \forall xY(x)))$ 的永真性和可满足性。

解:

(1) 讨论 1 域即个体域 $I = \{1\}$ 的情形。

$$\begin{aligned}\text{公式} &= X(1) \rightarrow ((Y(1) \wedge Z(1)) \rightarrow Y(1)) \\ &= X(1) \rightarrow T \\ &= T\end{aligned}$$

所以公式在 1 域上永真。

(2) 讨论 2 域上的情形,此时个体域 $I = \{1, 2\}$ 。

由于公式在 1 域上永真,所以公式在 1 域上可满足。由定理 3.3 知公式在 2 域上可满足。由前面讨论可知,2 域上的一元谓词有 4 个,如表 3.3 所示。

表 3.3 2 域上的一元谓词

e	X_1	X_2	X_3	X_4
1	T	F	T	F
2	T	T	F	F

在解释 $(I; z; X, Y, Z) = (\{1, 2\}; 2; X_1, X_2, X_2)$ 下,

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \forall x (X_1(x) \rightarrow (\exists y (X_2(y) \wedge X_2(2)) \rightarrow \forall x X_2(x))) \\
 &= \forall x (X_1(x) \rightarrow (\exists y (X_2(y) \wedge T) \rightarrow \forall x X_2(x))) \\
 &= \forall x (X_1(x) \rightarrow (\exists y X_2(y) \rightarrow \forall x X_2(x))) \\
 &= \forall x (X_1(x) \rightarrow (T \rightarrow \forall x X_2(x))) \\
 &= \forall x (X_1(x) \rightarrow \forall x X_2(x)) \\
 &= \forall x (X_1(x) \rightarrow F) \\
 &= \forall x \neg X_1(x) \\
 &= F
 \end{aligned}$$

故公式在 2 域上可满足但非永真。

(3) 讨论 $k (k > 2)$ 域上的情形。

因为公式在 2 域上可满足,根据定理 3.3 知,公式在 k 域上可满足。

设公式在 k 域上永真,根据定理 3.2 知,公式在 2 域上永真,与公式在 2 域上非永真矛盾。

故公式在 k 域上可满足但非永真。

3.4.3 范式

在命题演算中,任一命题演算公式均有一个范式与之等价。对于谓词演算公式也有相应的范式,其中任一谓词演算公式均有一个前束范式与之等价。前束范式对于计算机处理和识别谓词演算公式有着重要的作用。

1. 前束范式

定义 3.7: 如果谓词演算公式 α 中的一切量词均在公式的最前面(量词前不含否定词)且其作用域一直延伸到公式的末端,则称公式 α 为前束形公式。前束形公式的一般形式为

$$Q_1 x_1 Q_2 x_2 \cdots Q_n x_n M(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

其中, Q_i 为 $\forall$ 或 $\exists$, $M(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为公式 α 的母式且其中不含有量词。

定理 3.4: 任意一个谓词演算公式均有一个前束范式与之等价。

下面用具体的例子来说明该定理。

例 3.18 把公式 $\exists x \forall y \forall z (X(x, y, z) \wedge (\exists u Y(u, x) \rightarrow \exists x W(y, x)))$ 化为前束范式。

解:

(1) 利用等值公式消去 $\rightarrow$ 和 $\leftrightarrow$:

$$\text{原式} = \exists x \forall y \forall z (X(x, y, z) \wedge (\neg \exists u Y(u, x) \vee \exists x W(y, x)))$$

(2) 否定深入:

$$\text{原式} = \exists x \forall y \forall z (X(x, y, z) \wedge (\forall u \neg Y(u, x) \vee \exists x W(y, x)))$$

(3) 改名:

$$\text{原式} = \exists x \forall y \forall z (X(x, y, z) \wedge (\forall u \neg Y(u, x) \vee \exists v W(y, v)))$$

(4) 前移量词:

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \exists x \forall y \forall z \forall u \exists v (X(x, y, z) \wedge (\neg Y(u, x) \vee W(y, v))) \\ &= \exists x \forall y \forall z \forall u \exists v M(x, y, z, u, v) \end{aligned}$$

2. Skolem 标准形

定义 3.8: 仅含有全称量词的前束范式称为 Skolem 标准形。

定理 3.5: 任一谓词演算公式 α 均可以化成相应的 Skolem 标准形且 α 为不可满足的当且仅当其 Skolem 标准形是不可满足的。

Skolem 标准形的求解算法如下:

(1) 求谓词演算公式的前束范式。

(2) 按如下方法消去存在量词。

① 若存在量词 $\exists x$ 前无全称量词, 则引入 Skolem 常量 a , 代替公式中受 $\exists x$ 约束的变元, 消去存在量词。

② 若存在量词 $\exists x$ 前有 n 个全称量词, 则引入 n 元 Skolem 函数 f , 代替公式中受 $\exists x$ 约束的变元, 消去存在量词。

(3) 从左至右重复上述过程, 直至公式中不含有存在量词。

例 3.19 求公式 $\exists x (\neg (\forall y X(x, y) \rightarrow (\exists z Y(z) \wedge \forall x Z(x))))$ 的 Skolem 标准形。

解:

(1) 先把公式化为前束范式:

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \exists x (\neg (\neg \forall y X(x, y) \vee (\exists z Y(z) \wedge \forall x Z(x)))) \\ &= \exists x (\forall y X(x, y) \wedge (\forall z \neg Y(z) \vee \exists x \neg Z(x))) \\ &= \exists x (\forall y X(x, y) \wedge (\forall z \neg Y(z) \vee \exists u \neg Z(u))) \\ &= \exists x \forall y \forall z \exists u (X(x, y) \wedge (\neg Y(z) \vee \neg Z(u))) \end{aligned}$$

(2) 化为 Skolem 标准形:

$$\begin{aligned} \text{原式} &\Leftrightarrow \forall y \forall z \exists u (X(a, y) \wedge (\neg Y(z) \vee \neg Z(u))) \\ &\Leftrightarrow \forall y \forall z (X(a, y) \wedge (\neg Y(z) \vee \neg Z(f(y, z)))) \end{aligned}$$



3.5 唯一性量词和摹状词

3.5.1 唯一性量词

日常语句中常常出现“只有一个……”“恰好有一个……”等语句, 对于这些语句可以引进唯一性量词 $\exists! x$ 来表示它们。

$\exists! x \alpha(x)$ 表示恰好有一个 x 使得 $\alpha(x)$ 为真。 $\exists!$ 称为唯一性量词。

可以利用等价公式消去唯一性量词。等价公式如下：

$$\exists! x \alpha(x) = \exists x (\alpha(x) \wedge \forall y (x \neq y \rightarrow \neg \alpha(y)))$$

下面通过例子说明利用唯一性量词符号化语句的方法。

例 3.20 他是唯一没有去过美国的人。

解：令

$P(e)$ 表示“ e 为人”。

$B(e_1, e_2)$ 表示“ e_1 去过 e_2 ”。

a 表示“他”。

b 表示“美国”。

则原句译为

$$\exists! x (P(x) \wedge \neg B(x, b) \wedge x = a)$$

例 3.21 地球是唯一有人的星球。

解：令

$S(e)$ 表示“ e 为星球”。

$P(e)$ 表示“ e 为人”。

$C(e_1, e_2)$ 表示“ e_1 上有 e_2 ”。

a 表示“地球”。

则原句译为

$$\exists! x \exists y (S(x) \wedge P(y) \wedge C(x, y) \wedge x = a)$$

3.5.2 摹状词

日常语句中经常使用“纸的发明者”“上帝的创造者”等利用个体的特征性质描述特定的个体,这种描述特定个体的短语称为摹状词。它跟谓词正好相反,谓词 $P(x)$ 是指 x 所具有的性质,而摹状词是指具有性质 P 的那个个体 x 。

$\gamma_x \alpha(x)$ 是指使得 $\alpha(x)$ 成立的那个唯一的个体,其中 γ 称为摹状词, x 称为摹状词的指导变元, $\alpha(x)$ 称为摹状词的作用域。

注意,摹状词的作用域与量词的作用域均为谓词演算公式,但摹状词的值为个体,而量词的值为真或假,且要使用摹状词必须满足存在性和唯一性。对于不满足存在性和唯一性的语句,如“地球的创造者”不满足存在性,“计算机的发明者”不满足唯一性,引入下面的表示方法:

$$\gamma_x^y \alpha(x) = \begin{cases} x & \exists! x \alpha(x) \text{ 成立时,指使 } \alpha(x) \text{ 成立时的那个唯一的个体 } x \\ y & \text{否则} \end{cases}$$

由摹状词的定义可知,下列等式成立。

$$\beta(\gamma_x^y \alpha(x)) = (\exists! x \alpha(x) \wedge \exists t (\beta(t) \wedge \alpha(t))) \vee (\neg \exists! x \alpha(x) \wedge \beta(y))$$

下面利用摹状词来符号化公式。

例 3.22 并非读书最多的人最有知识。

解：设

$P(e)$ 表示“ e 为人”。

$B(e_1, e_2)$ 表示“ e_1 比 e_2 读书多”。

$C(e_1, e_2)$ 表示“ e_1 比 e_2 有知识”。

则“读书最多的人”译为

$$\gamma_x^y (P(x) \wedge \forall y ((P(y) \wedge y \neq x) \rightarrow B(x, y)))$$

把它记为 u ,故原句译为

$$\neg \forall t ((P(t) \wedge t \neq u) \rightarrow C(u, t))$$



3.6 典型例题

例 3.23 把下列语句翻译为谓词演算公式。

(1) 微信是一种智能手机应用程序,但并非所有人均喜欢微信。

(2) 有些人喜欢所有的网络服务。

解:

(1) 设

$S(e)$ 表示“ e 为一种智能手机应用程序”。

$P(e)$ 表示“ e 为人”。

$L(e_1, e_2)$ 表示“ e_1 喜欢 e_2 ”。

则原句译为

$$S(\text{微信}) \wedge \neg \forall x (P(x) \rightarrow L(x, \text{微信}))$$

(2) 设

$N(e)$ 表示“ e 为网络服务”。

$P(e)$ 表示“ e 为人”。

$L(e_1, e_2)$ 表示“ e_1 喜欢 e_2 ”。

则原句译为

$$\exists x (P(x) \wedge \forall y (N(y) \rightarrow L(x, y)))$$

例 3.24 讨论公式 $\forall x(X(x) \vee Y(x)) \leftrightarrow (\forall x X(x) \vee \forall x Y(x))$ 的永真性和可满足性。

解:

(1) 讨论1域即个体域 $\{1\}$ 的情形。

$$\text{公式} = (X(1) \vee Y(1)) \leftrightarrow (X(1) \vee Y(1)) = T$$

所以公式在1域上永真。

(2) 讨论2域上的情形,此时个体域 $I = \{1, 2\}$ 。

由于公式在1域上永真,由定理3.3知公式在2域上可满足。

由前面的讨论可知,2域上的一元谓词有4个,如表3.4所示。

表 3.4 2域上的一元谓词

e	X_1	X_2	X_3	X_4
1	T	F	T	F
2	T	T	F	F

在解释 $(I; X; Y) = (\{1, 2\}; X_2, X_3)$ 下,

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \forall x (X_2(x) \vee X_3(x)) \leftrightarrow (\forall x X_2(x) \vee \forall x X_3(x)) \\ &= T \leftrightarrow (F \vee F) \\ &= F\end{aligned}$$

故公式在 2 域上可满足但非永真。

(3) 讨论 $k (k > 2)$ 域上的情形。

因为公式在 2 域上可满足, 根据定理 3.3 知, 公式在 k 域上可满足。

设公式在 k 域上永真, 根据定理 3.2 知, 公式在 2 域上永真, 与公式在 2 域上非永真矛盾。

故公式在 k 域上可满足但非永真。

例 3.25 求公式 $\forall x \forall y X(x, y) \rightarrow (\forall x \exists y Y(x, y) \wedge \forall x \exists y Z(x, y))$ 的 Skolem 标准形。

解:

(1) 利用等值公式消去 $\rightarrow$ 和 $\leftrightarrow$:

$$\text{原式} = \neg \forall x \forall y X(x, y) \vee (\forall x \exists y Y(x, y) \wedge \forall x \exists y Z(x, y))$$

(2) 否定深入:

$$\text{原式} = \exists x \exists y \neg X(x, y) \vee (\forall x \exists y Y(x, y) \wedge \forall x \exists y Z(x, y))$$

(3) 改名:

$$\text{原式} = \exists x \exists y \neg X(x, y) \vee (\forall u \exists v Y(u, v) \wedge \forall s \exists t Z(s, t))$$

(4) 前移量词:

$$\text{原式} = \exists x \exists y \forall u \exists v \forall s \exists t (\neg X(x, y) \vee (Y(u, v) \wedge Z(s, t)))$$

(5) 消去存在量词:

$$\begin{aligned}\text{原式} &\Leftrightarrow \exists y \forall u \exists v \forall s \exists t (\neg X(a, y) \vee (Y(u, v) \wedge Z(s, t))) \\ &\Leftrightarrow \forall u \exists v \forall s \exists t (\neg X(a, b) \vee (Y(u, v) \wedge Z(s, t))) \\ &\Leftrightarrow \forall u \forall s \exists t (\neg X(a, b) \vee (Y(u, f(u)) \wedge Z(s, t))) \\ &\Leftrightarrow \forall u \forall s (\neg X(a, b) \vee (Y(u, f(u)) \wedge Z(s, g(u, s))))\end{aligned}$$



习

题

3.1 将下列语句符号化。

- (1) 如果知道你不在家, 我就不去找你了。
- (2) 这只大红书柜摆满了那些古书。
- (3) 苏州位于南京与上海之间。
- (4) 他既熟悉 C++ 语言又熟悉 Java 语言。
- (5) Alice 喜欢人工智能或机器学习。
- (6) 区块链是一种分布式账本技术。

3.2 将下列语句符号化为含有量词的谓词演算公式。

- (1) 没有不犯错误的人。
- (2) 有不是奇数的质数。

- (3) 金子闪光,但闪光的并非全是金子。
- (4) 并非“人不为己,天诛地灭”。
- (5) 人不犯我,我不犯人;人若犯我,我必犯人。
- (6) 有一种液体可溶解任何金属。
- (7) 并非“人为财死,鸟为食亡”。
- (8) 若要人不知,除非己莫为。
- (9) 任何一数均有一数比它大。
- (10) 每个作家均写过作品。
- (11) 某些人对某些食物过敏。
- (12) 天下乌鸦一般黑。
- (13) 己所不欲,勿施于人。
- (14) 有些人喜欢所有的明星,但并非所有人均喜欢所有的明星。
- (15) 所有人均喜欢微信或微博。
- (16) 我爱人人,人人爱我。
- (17) 有些学生不喜欢离散数学。
- (18) 群山中珠穆朗玛峰最高。
- (19) 并非一切劳动均能用机器代替。
- (20) 并非所有大学生都能成为科学家。
- (21) 有些人喜欢机器学习课程,但并非所有人均喜欢机器学习课程。

3.3 令

$P(e)$ 表示“ e 为质数”。

$E(e)$ 表示“ e 为偶数”。

$O(e)$ 表示“ e 为奇数”。

$D(e_1, e_2)$ 表示“ e_1 除尽 e_2 ”。

将下列公式翻译为日常语句。

- (1) $E(2) \wedge P(2)$
- (2) $\forall x(D(2, x) \rightarrow E(x))$
- (3) $\forall x(\neg E(x) \rightarrow \neg D(2, x))$
- (4) $\forall x(E(x) \rightarrow \forall y(D(x, y) \rightarrow E(y)))$
- (5) $\exists x(E(x) \wedge P(x))$

3.4 指出下列公式的约束关系、自由变元和约束变元。

- (1) $\forall x(X(x, y) \rightarrow \forall y(Y(x, y) \rightarrow Z(z)))$
- (2) $\forall x(X(x) \rightarrow Y(y, t)) \rightarrow \exists y(X(y) \wedge Y(x, y))$

3.5 已知公式 $\forall x X(x) \rightarrow \exists y(Y(x, y) \wedge Z(y))$ 。

- (1) 将公式中的自由变元 x 代以 $y^2 + 2$ 。
- (2) 将公式中的谓词变元 $Y(e_1, e_2)$ 代以式子 $\forall x A(e_1, e_2, x, y)$ 。

3.6 讨论公式 $\exists x \forall y X(x, y)$ 在个体域 $\{1, 2\}$ 上的成真解释和成假解释。

3.7 求公式 $\forall x \exists y(X(x, y) \rightarrow (P \wedge Y(x, y, z)))$ 在解释 $(I; z; X(e_1, e_2), Y(e_1, e_2, e_3); P) = (\{1, 3, 5\}; 1; e_1 \geq e_2, e_1 - e_2 = e_3; T)$ 下的值。

3.8 利用量词的等价公式判断下列每一组公式中的两个公式是否等价,其中 γ 中不含自由的 x 。

- (1) $\gamma \rightarrow \forall x \alpha(x)$ 和 $\forall x (\gamma \rightarrow \alpha(x))$
- (2) $\neg \forall x \neg \alpha(x) \rightarrow \gamma$ 和 $\exists x (\alpha(x) \rightarrow \gamma)$

3.9 讨论公式 $\exists x X(x) \rightarrow \forall x X(x)$ 的永真性和可满足性。

3.10 讨论公式 $\forall x (X(x) \wedge Y(x)) \leftrightarrow (\forall x X(x) \wedge \forall x Y(x))$ 的永真性和可满足性。

3.11 求下列公式的前束范式和 Skolem 标准形。

- (1) $\exists x (X(x) \wedge (\exists y Y(x, y) \rightarrow \exists x Z(x)))$
- (2) $\forall x X(x) \leftrightarrow \forall x Y(x)$
- (3) $\exists x F(x) \vee (\neg (\forall x F(x) \rightarrow \forall y G(y)) \wedge \exists y G(y))$
- (4) $\forall x \forall y (X(x) \rightarrow Y(y)) \rightarrow \forall x (X(x) \wedge \exists y Y(y))$
- (5) $\neg \forall x (\exists y X(x, y) \rightarrow \exists x \forall y (Y(x, y) \wedge \forall y (X(y, x) \rightarrow Y(x, y))))$ 。

3.12 用唯一性量词或摹状词符号化下列语句。

- (1) 只有一个人去过南极。
- (2) 最后一个离开办公室的人关门窗和电源。
- (3) 并非年龄最大的人最有知识。
- (4) 每个数均有唯一的一个数是它的后继。
- (5) 反对这个提案的人只有一个。