

基于模型的 PID 和

谐振控制器设计



3.1 引言

用于 PID 控制器设计的模型仅限于两种特定类型——一阶模型和二阶模型。如果控制对象的动态模型是高阶模型,通常需要近似得到一阶或二阶模型,以使 PID 控制器可由基于模型的方法进行设计。

使用基于模型的设计方法时,首先需要有一个期望的闭环性能指标。期望性能根据期望闭环极点的位置来选择。期望闭环极点反映闭环系统对给定输入变化和扰动抑制的响应时间;对于频域则是闭环控制系统的期望带宽。在设计人员设计出合适的闭环性能之前,通常要通过闭环仿真和实验验证对期望闭环性能进行多次调整。

3.2 PI 控制器设计

采用一阶模型设计 PI 控制器。虽然一阶动力学(the first order dynamics)是形成一个系统的基本单元,它也可以用来描述一些常见的物理系统,如运动控制问题中电动机转矩和角速度之间的动态关系、流体容器内的流速和液位控制问题。

3.2.1 期望闭环性能指标

在基于模型的设计中,需要给定一个期望的闭环性能。对于 PI 控制器,采用二阶传递函数:

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3.1)$$

这里 ω_n 和 ξ 是二阶传递函数的自然频率和阻尼系数。作为理想的性能指标,这些是设计人员需要选择的自由参数。

通常取参数 ξ 为 1 或 0.707。当 $\xi=1$ 时,期望闭环传递函数式(3.1)的极点是多项式方程式(3.2)的解:

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (3.2)$$

此时 $s_1 = s_2 = -\omega_n$ 。也就是说,当 $\xi=1$ 时,有两个相同的极点。当 $\xi=0.707$ 时,极点是由下式确定的一对共轭复数:

$$s_{1,2} = \frac{-2\xi\omega_n \pm \sqrt{4\xi^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2} = -0.707\omega_n \pm j0.707\omega_n \quad (3.3)$$

参数 ξ 确定后(1 或 0.707), 自然频率 ω_n 成为用户根据期望闭环响应需求指定的闭环性能参数。一般来说, ω_n 越大, 期望闭环响应速度越快。参数 ω_n 与闭环响应时间以及闭环系统的频带限制直接相关, 这为它的选择提供了指导, 对这两方面都要进行考察。

从式(3.1)的阶跃响应仿真(见图 3.1)可以看出, 响应时间与参数 ω_n 成反比。图 3.1(a)表明当阻尼系数 $\xi=0.707$ 时, 阶跃响应时间约为 $\frac{3}{\omega_n}$; 图 3.1(b)表明当 $\xi=1$ 时, 阶跃响应时间约为 $\frac{5}{\omega_n}$ 。 ω_n 还有另一个估算值, 可作为设计者的指导, 因为参数 ω_n 与期望闭环控制系统的带宽有关。对于式(3.1)给出的期望闭环传递函数, 当 $\xi=0.707$ 时, 可以证明在频率 $\omega=\omega_n$ 时, $|T(\omega)|=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 。因此, 当阻尼系数 $\xi=0.707$ 时, 自然频率 ω_n 即为闭环系统的带宽, 这可以直接作为闭环性能指标。当取 $\xi=1$ 时, 闭环系统的带宽比 ω_n 稍小。

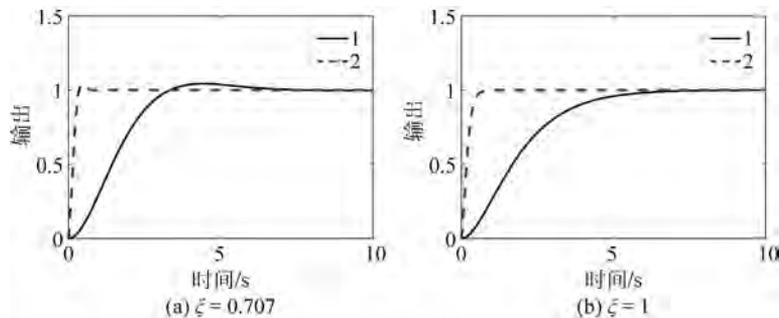


图 3.1 闭环传递函数期望的阶跃响应

其中, 1 线表示 $\omega_n=1$; 2 线表示 $\omega_n=10$

3.2.2 模型和控制器结构

对于一阶模型, 假设一阶时间常数 τ 和稳态增益 K 已知, 传递函数为:

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \quad (3.4)$$

也可以用零极点形式表示为:

$$G(s) = \frac{b}{s + a} \quad (3.5)$$

其中, $a=1/\tau$, 且 $b=K/\tau$ 。

PI 控制器传递函数由下式给出, 为:

$$C(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_I s} \right) \quad (3.6)$$

写成传递函数形式为:

$$C(s) = \frac{c_1 s + c_0}{s} \quad (3.7)$$

式中, $K_c = c_1, \tau_I = c_1/c_0$ 。首先根据模型[见式(3.5)]求出系数 c_1 和 c_0 , 然后将这些系数转换成标准 PI 控制器参数 K_c 和 τ_I 。

求解 PI 控制器参数的关键是使期望闭环极点与实际闭环极点相等。闭环极点的位置决定了闭环系统是否稳定、闭环响应时间、闭环系统的带宽限制。

最后, 利用设计模型[见式(3.5)]和控制器模型[见式(3.7)]计算实际闭环系统传递函数:

$$T_{cl} = \frac{G(s)C(s)}{1+G(s)C(s)} = \frac{\frac{b}{s+a} \frac{c_1s+c_0}{s}}{1+\frac{b}{s+a} \frac{c_1s+c_0}{s}} = \frac{b(c_1s+c_0)}{s(s+a)+b(c_1s+c_0)} \quad (3.8)$$

实际系统的闭环极点是关于 s 的多项式方程的解:

$$s(s+a)+b(c_1s+c_0)=0 \quad (3.9)$$

式(3.9)称为闭环特性方程。由于模型参数 a 和 b 已知, 式(3.9)中自由参数是控制器参数 c_1 和 c_0 。为了求解控制器参数 c_1 和 c_0 , 使以下多项式相等:

$$s(s+a)+b(c_1s+c_0)=s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2 \quad (3.10)$$

由方程[见式(3.10)]的左侧多项式确定实际闭环极点, 右侧多项式确定期望闭环极点。使两边多项式相等, 则将实际闭环极点配置给期望闭环极点。这种控制器设计技术称为极点配置控制器设计。

现在, 比较多项式方程[见式(3.10)]两边的系数:

$$s^2: 1=1 \quad (3.11)$$

$$s: a+bc_1=2\xi\omega_n \quad (3.12)$$

$$s^0: bc_0=\omega_n^2 \quad (3.13)$$

解式(3.12)得:

$$c_1 = \frac{2\xi\omega_n - a}{b} \quad (3.14)$$

解式(3.13)得:

$$c_0 = \frac{\omega_n^2}{b} \quad (3.15)$$

由 c_1, c_0 与 K_c, τ_I 之间的关系[见式(3.7)], 求出 PI 控制器参数为:

$$K_c = c_1 = \frac{2\xi\omega_n - a}{b} \quad (3.16)$$

$$\tau_I = \frac{c_1}{c_0} = \frac{2\xi\omega_n - a}{\omega_n^2} \quad (3.17)$$

【例 3.1】 用一阶系统描述直流电动机电压变化与速度之间的动态关系。假设某电机拉普拉斯传递函数模型为:

$$G(s) = \frac{0.1}{10s+1} \quad (3.18)$$

求速度控制的 PI 控制器参数。期望闭环性能指定为两种不同情况: ①快速响应 $\omega_n = 5$, ②慢速响应 $\omega_n = 0.5$ 。这两种情况下, 均取 $\xi = 0.707$; 比例控制仅作用于输出端。对闭环

阶跃响应进行仿真,并比较仿真结果。

解 PI 控制器设计所需的模型参数为 $a=1/10=0$ 和 $b=0.1/10=0.01$ 。利用这些参数和闭环性能指标,基于方程[见式(3.16)和式(3.17)],对 $\omega_n=5$ 和 $\xi=0.707$,求出控制器参数为:

$$K_c = 697; \quad \tau_I = 0.2788$$

对于 $\omega_n=0.5$ 且 $\xi=0.707$,有:

$$K_c = 60.7; \quad \tau_I = 2.43$$

可以看出,当 ω_n 较大时,比例增益 K_c 较大,而积分时间常数 τ_I 较小。

用图 3.2 所示的结果对闭环单位阶跃响应进行仿真。与 $\omega_n=0.5$ 的情况相比,当 $\omega_n=5$ 时,闭环响应速度更快,控制信号的幅值也更大。

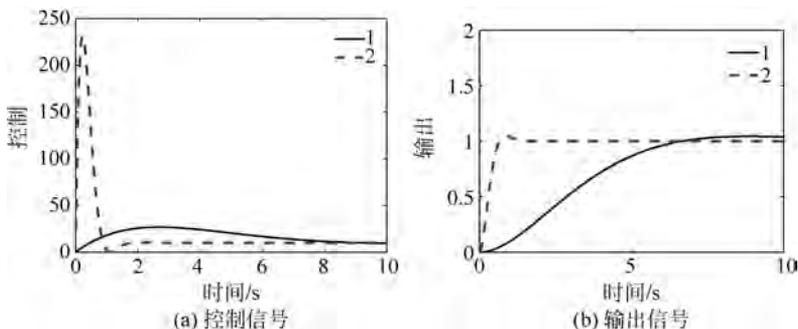


图 3.2 闭环响应(例 3.1)

其中,1 线表示 $\omega_n=0.5$; 2 线表示 $\omega_n=5$

3.2.3 不同结构的闭环传递函数

已经设计了 PI 控制器,现在研究传统 PI 控制器结构和 IP 控制器结构的闭环传递函数。

对于传统的 PI 控制器结构(见图 1.5),控制信号的拉氏变换 $U(s)$ 与反馈误差信号 $E(s)$ 的关系为:

$$U(s) = C(s)E(s) = \frac{c_1 s + c_0}{s} E(s) \quad (3.19)$$

式中, $E(s) = R(s) - Y(s)$, 且 $C(s) = (c_1 s + c_0)/s$ 。给定输入信号 $R(s)$ 和输出信号 $Y(s)$ 之间的闭环传递函数为:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)C(s)}{1 + G(s)C(s)} \quad (3.20)$$

其中, $G(s)$ 是一阶传递函数 $b/(s+a)$ 。将控制器传递函数 $C(s)$ 和控制对象传递函数 $G(s)$ 代入式(3.20),得到传统实现时 PI 控制系统的闭环传递函数:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b(c_1 s + c_0)}{s(s+a) + b(c_1 s + c_0)} \quad (3.21)$$

注意到式(3.21)的分母用于 PI 控制器的设计[见式(3.10)],它等于期望闭环特征多项式 $s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$ 。将控制器参数[见式(3.14)和式(3.15)]和期望闭环特性多项式代入

式(3.21),得闭环传递函数:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{(2\xi\omega_n - a)s + \omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3.22)$$

使用传统PI控制器结构,给定输入信号和输出之间的实际闭环传递函数和设计中指定的期望闭环传递函数[见式(3.8)中 $T(s)$]并不相同;此时闭环传递函数有一个零点,位置由多项式方程确定:

$$(2\xi\omega_n - a)s + \omega_n^2 = 0 \quad (3.23)$$

即,零点位于 $s = -\frac{\omega_n^2}{2\xi\omega_n - a}$ 处。该零点的存在可能引起阶跃响应的超调。取 $\xi = 0.707$ 时,可以验证闭环传递函数式(3.22)的带宽大于 ω_n 。

对于IP控制器结构(见图1.7),控制信号为:

$$\begin{aligned} U(s) &= -K_c Y(s) + \frac{K_c}{\tau_1 s} E(s) \\ &= -c_1 Y(s) + \frac{c_0}{s} (R(s) - Y(s)) \end{aligned} \quad (3.24)$$

输出信号 $Y(s)$ 为:

$$Y(s) = \frac{b}{s+a} U(s) \quad (3.25)$$

将式(3.24)代入式(3.25),得到这种替代结构的闭环传递函数为:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{bc_0}{s(s+a) + b(c_1 s + c_0)} \quad (3.26)$$

由设计流程,传递函数的分母为 $s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$,分子为 $bc_0 = \omega_n^2$,因此闭环传递函数为:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3.27)$$

这就是在性能指标中指定的期望闭环传递函数[见式(3.1)]。

在扰动抑制和测量噪声衰减方面,两种PI控制系统结构具有相同的闭环传递函数,因为两种配置中的结构变化只与给定输入信号引入反馈环的方式有关。这里通过计算输入扰动与控制对象输出之间的闭环传递函数来说明这一点。

假设一个输入扰动的拉氏变换为 $D_i(s)$,它在控制对象输入的位置进入系统。在这种情况下,控制对象的输出为:

$$Y(s) = \frac{b}{s+a} (U(s) + D_i(s)) \quad (3.28)$$

为了得到输入扰动与被控对象输出之间的闭环传递函数,设给定信号 $R(s) = 0$,以集中精力抑制扰动。当给定信号 $R(s) = 0$ 时,两种结构[见式(3.19)和式(3.24)]的控制信号有相同的拉氏变换:

$$U(s) = -c_1 Y(s) - \frac{c_0}{s} Y(s) \quad (3.29)$$

将式(3.29)代入式(3.28),得到输入扰动 $D_i(s)$ 与输出 $Y(s)$ 之间的闭环传递函数为:

$$\frac{Y(s)}{D_1(s)} = \frac{bs}{s(s+a) + b(c_1s + c_0)} = \frac{bs}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3.30)$$

这里使用了设计方程式(3.10)。

注意到闭环传递函数的分子中有一个因子 s 。该因子保证了闭环控制系统能够无稳态误差抑制阶跃输入扰动。这一点将通过以下例子阐明。

【例 3.2】 一个连续时间系统由以下微分方程描述：

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} + B\omega(t) = kv(t) + T_L(t) \quad (3.31)$$

式中, $v(t)$ 和 $\omega(t)$ 为控制和输出信号, $T_L(t)$ 为未知扰动, $J=0.02$, $B=0.001$, $k=0.5$ 为物理参数。控制目标是保持系统的期望输出, 同时抑制扰动。期望闭环带限的值由 $\omega_n = 5(\text{rad} \cdot \text{s}^{-1})$ 指定, 阻尼系数为 $\xi=0.707$ 。设计 PI 控制器来实现控制目标, 并对这两种 PI 控制系统结构的闭环响应进行仿真。

解 为了得到输入 v 与输出 $\omega(t)$ 之间的传递函数模型, 对动态模型[见式(3.31)]进行拉氏变换:

$$Js\Omega(s) + B\Omega(s) = kV(s) + T_L(s) \quad (3.32)$$

其中 $\Omega(s)$ 、 $V(s)$ 和 $T_L(s)$ 是连续时间变量的拉氏变换。

式(3.32)也可以表示为:

$$\Omega(s) = \frac{k}{Js+B}V(s) + \frac{T_L(s)}{Js+B} = \frac{K/J}{s + \frac{B}{J}}V(s) + \frac{T_L(s)/J}{s + \frac{B}{J}} \quad (3.33)$$

计算 PI 控制器参数如下:

$$K_c = \frac{2\xi\omega_n - a}{b} = 0.2808; \quad \tau_1 = \frac{2\xi\omega_n - a}{\omega_n^2} = 0.2808$$

其中, $a=B/J=0.05$, $b=k/J=25$, $\omega_n=5$, $\xi=0.707$ 。

利用 Simulink 对系统的闭环响应进行仿真。在闭环仿真中, 给定输入为单位阶跃输入信号, 在 $t=0$ 时刻加入; 输入扰动是幅值为 1.5 的阶跃输入信号, 在 $t=10$ 时刻加入。图 3.3(a)和(b)比较了原始 PI 控制器结构与 IP 控制器结构的闭环输出和控制信号。可以看出, IP 控制器结构避免了原结构中的超调, 两个控制器结构在扰动抑制方面有相同的响应。

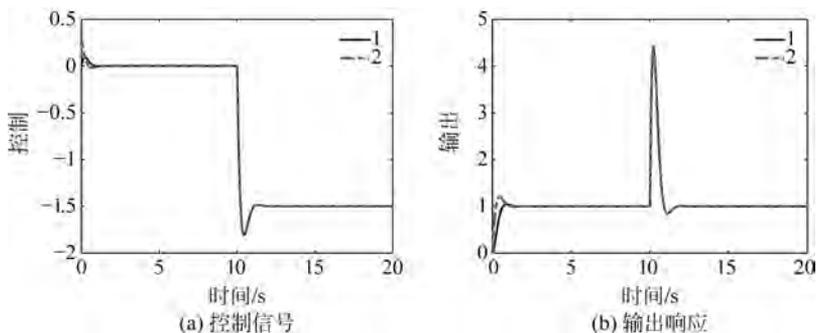


图 3.3 PI 控制系统的闭环响应(例 3.2)

其中, 1 线表示 IP 控制系统; 2 线表示 PI 控制系统

3.2.4 进一步思考

- (1) 你会采用二阶模型来设计 PI 控制器吗?
- (2) 如果发现闭环响应速度太慢,是否可以减小参数 ω_n ?
- (3) “当闭环系统传递函数为 $\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$, 阻尼系数 $\xi = 0.707$ 时, 闭环带宽 $\omega_b = \omega_n$ ”, 这种说法是否正确?
- (4) 请列出 3 个可以用一阶模型描述的物理系统。
- (5) 与原来的 PI 控制器相比, IP 控制器结构是否改变了扰动抑制性能?

3.3 PID 控制器的经典整定规则

二阶模型直接用于 PD 或 PID 控制器的设计。另外, 一阶延迟模型使用二阶传递函数模型近似, 其中无理传递函数 e^{-ds} 用有理传递函数 $\frac{-ds+2}{ds+2}$ 近似 (这称为一阶 Padé 近似)。如果数学模型是高阶的, 则通过近似得到二阶模型, 以便进行 PID 控制器的设计。

3.3.1 PD 控制器设计

比例控制和微分控制的结合 (PD) 对于不稳定系统或系统严重振荡的情况有用。

由于微分作用会放大测量噪声 (见第 2 章), 所以 PD 控制器的实现需要微分滤波器。因此, PD 控制器的一般形式如下:

$$C(s) = K_c + \frac{K_d s}{\tau_f s + 1} \quad (3.34)$$

其中 K_c 、 K_d 、 τ_f 分别为比例增益、微分控制增益、滤波器时间常数。

对这类的控制器设计, 假设连续时间系统为二阶系统, 传递函数为:

$$G(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \quad (3.35)$$

根据二阶模型式 (3.35) 选择参数 K_c 、 K_d 、 τ_f 并非一项简单的任务。然而, PD 控制器可转换为经典的超前-滞后补偿器, 形如:

$$C(s) = \frac{p_1 s + p_0}{s + l_0} \quad (3.36)$$

其中, 参数 K_c 、 K_d 、 τ_f 与 p_1 、 p_0 、 τ_f 相关, 关系如下:

$$\tau_f = \frac{1}{l_0} \quad (3.37)$$

$$K_c = \frac{p_0}{l_0} \quad (3.38)$$

$$K_d = \frac{p_1}{l_0} - \frac{p_0}{l_0^2} \quad (3.39)$$

式 (3.36) 中超前-滞后补偿器可以通过将期望闭环极点配置在复平面的左半部分来设计。

对于超前-滞后补偿器,实际闭环特征多项式为三阶:

$$A_{cl}(s) = (s + l_0)(s^2 + a_1s + a_0) + (p_1s + p_0)(b_1s + b_0) \\ = s^3 + (a_1 + l_0 + p_1b_1)s^2 + (a_0 + l_0a_1 + p_0b_1 + b_0p_1)s + (l_0a_0 + b_0p_0)$$

通过选择具有以下形式的三阶期望闭环特征多项式:

$$A_{cl}^d(s) = s^3 + a_2^{cl}s^2 + a_1^{cl}s + a_0^{cl}$$

并且使 $A_{cl}(s) = A_{cl}^d(s)$, 得到以下线性方程:

$$a_1 + l_0 + p_1b_1 = a_2^{cl} \\ a_0 + l_0a_1 + p_0b_1 + b_0p_1 = a_1^{cl} \\ l_0a_0 + b_0p_0 = a_0^{cl}$$

参数可以通过求解线性方程组得到:

$$\begin{bmatrix} l_0 \\ p_1 \\ p_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b_1 & 0 \\ a_1 & b_0 & b_1 \\ a_0 & 0 & b_0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_2^{cl} - a_1 \\ a_1^{cl} - a_0 \\ a_0^{cl} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

多项式方程 $A_{cl}(s) = A_{cl}^d(s)$ 称为丢番图方程,它是极点配置控制器设计中求控制器参数的关键步骤。式(3.40)中维数为 3×3 的矩阵称为 Sylvester 矩阵,在极点配置控制器设计中要求该矩阵可逆。

下面的教程总结了求解带滤波器的 PD 控制器参数的计算过程。后文将使用此程序。

教程 3.1 本教程编写一个简单的 MATLAB 程序来计算 PD 控制器参数。期望的闭环特性多项式为:

$$A_{cl} = s^3 + a_2^{cl}s^2 + a_1^{cl}s + a_0^{cl}$$

模型是一个二阶系统,传递函数为:

$$G(s) = \frac{b_1s + b_0}{s^2 + a_1s + a_0}$$

步骤

(1) 为 MATLAB 函数创建一个名为 PDplace.m 的新文件。

(2) 定义 MATLAB 函数的输入和输出变量,其中 a_1 、 a_0 、 b_1 和 b_0 是模型参数, A_{cl} 是期望闭环特性多项式。在文件中输入以下程序:

```
function [Kc, Kd, tauf] = PDplace(a1, a0, b1, b0, Acl);
```

(3) 求出闭环性能参数。继续在文件中输入以下程序:

```
ac_2 = Acl(2);
ac_1 = Acl(3);
ac_0 = Acl(4);
```

(4) 构建以下矩阵和向量求解 PD 控制器参数,并求解线性方程。继续在文件中输入以下程序:

```
S_matrix = [1 b1 0; a1 b0 b1; a0 0 b0];
```

```
Vec = [ac_2 - a1; ac_1 - a0; ac_0];
contr_p = inv(S_matrix) * Vec;
```

(5) 将参数转换为带微分滤波器的 PD 控制器。继续在文件中输入以下程序:

```
L0 = contr_p(1);
p1 = contr_p(2);
p0 = contr_p(3);
tauf = 1/L0;
Kc = p0/L0;
Kd = p1/L0 - p0/L0 ^ 2;
```

(6) 用例 3.3 中的双积分系统测试该程序,使用以下代码:

```
a1 = 0;
a0 = 0;
b1 = 0;
b0 = 0.1;
Ac = conv([1 1],[1 1]);
Ac1 = conv(Ac,[1 1]);
[Kc,Kd,tauf] = PDplace(a1,a0,b1,b0,Ac1)
```

对于许多应用,二阶模型简化为:

$$G(s) = \frac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \quad (3.41)$$

PD 控制器参数的解如下:

$$l_0 = a_2^{\text{cl}} - a_1 \quad (3.42)$$

$$p_1 = \frac{a_1^{\text{cl}} - a_0 - l_0 a_1}{b_0} \quad (3.43)$$

$$p_0 = \frac{a_0^{\text{cl}} - l_0 a_0}{b_0} \quad (3.44)$$

【例 3.3】 双积分系统的拉普拉斯传递函数为:

$$G(s) = \frac{0.1}{s^2}$$

设计带滤波器的 PD 控制器,使系统稳定,且所有的期望闭环极点均位于-1。

解 由双积分模型,有 $a_1 = a_0 = 0, b_1 = 0, b_0 = 0.1$ 。期望的闭环多项式为:

$$(s + 1)^3 = s^3 + 3s^2 + 3s + 1$$

因此, $a_2^{\text{cl}} = 3, a_1^{\text{cl}} = 3, a_0^{\text{cl}} = 1$ 。控制器参数由以下方程求解:

$$\begin{bmatrix} l_0 \\ p_1 \\ p_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

求得 $l_0 = 3, p_1 = 30, p_0 = 10$ 。这样,系统的超前-滞后补偿器为:

$$C(s) = \frac{30s + 10}{s + 3}$$

对PD控制器的实现,可由式(3.37)~式(3.39)求出相应的比例、微分增益和滤波器时间常数为:

$$\tau_f = \frac{1}{3}; K_c = \frac{10}{3}; K_d = \frac{80}{9}; \tau_D = \frac{K_d}{K_c} = \frac{8}{3}$$

3.3.2 存在零极点对消的理想PID分析实例

在设计PID控制器时,零极点对消技术广泛应用于各种领域。主要原因是,采用零极点对消技术使控制器参数计算变得非常简单,仅用一支笔就可以进行计算。然而,零极点对消技术有两个重要的规则。首先,不对消系统中不稳定的极点或零点,因为对消会导致系统内部不稳定,原因是对消的极点或零点仍然是期望闭环极点的一部分(见2.5节)。其次,不对消系统中靠近虚轴的稳定极点(对应于大时间常数的慢极点),因为在扰动输入作用下,闭环响应中慢极点将重新成为主导极点,从而产生慢的扰动抑制(见第2章中的灵敏度分析)。一般情况下,如果稳定极点或零点位于复平面上期望闭环极点的左侧,则可以被对消。也可以说,在控制对象模型中,被对消的是一定是更快的稳定极点。

假设在一个二阶模型中有两个极点,它们都是实极点、稳定极点。基于这些假设,传递函数表示为:

$$G(s) = \frac{b_0}{(s + \alpha_1)(s + \alpha_2)} \quad (3.46)$$

式中, $\alpha_2 > 0$ 为正,且 $\alpha_2 \geq \alpha_1$ 。

假设PID控制器具有理想结构,为:

$$C(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_1 s} + \tau_D s \right) \quad (3.47)$$

在实施阶段增加一个实现滤波器,由设计者选择一个较小的 β (见1.2节),这意味着设计阶段不需要考虑参数 β 。在PID控制器的设计中采用一种称为零极点对消的技术,将使控制器参数的求解变得非常简单。

将式(3.47)给出的PID控制器重新写为传递函数形式:

$$C(s) = \frac{c_2 s^2 + c_1 s + c_0}{s} \quad (3.48)$$

比较式(3.48)和式(3.47),得到以下关系:

$$K_c = c_1; \tau_1 = \frac{c_1}{c_0}; \tau_D = \frac{c_2}{c_1} \quad (3.49)$$

因此,首先求出式(3.48)中的参数,然后将其转换成实现阶段所需的PID控制器参数。

当使用零极点对消技术时,假设对控制器 $C(s)$ 的分子进行因式分解,形为:

$$C(s) = \frac{c_2 s^2 + c_1 s + c_0}{s} = \frac{c_2 (s + \gamma_1)(s + \gamma_2)}{s} \quad (3.50)$$

取控制器的零点 $-\gamma_2$ 等于模型的极点 $-\alpha_2$ (即 $\gamma_2 = \alpha_2$),模型中的极点与控制器中的零点对消。这样, $G(s)C(s)$ 的关系简化为:

$$G(s)C(s) = \frac{b_0 c_2 (s + \gamma_1)}{(s + \alpha_1)s} \quad (3.51)$$