

第 4 章中根据 ZF1~ZF5 得出了函数、等价、序这些基本的数学概念。但是,我们还没有接触到“无限”这个重要概念。当年康托建立集合论的主要目的就是处理无限,使得对无限的理解彻底清楚。从这一章开始,我们所介绍的内容将涉及无限。首先,本章将在 ZF 体系内建立我们一直以来所使用的“数”的概念。

5.1 皮亚诺公设

或许有些读者会好奇,为何前面章节中只要是涉及具体集合的例子,都是由 $\emptyset$ 组成的集合,怎么没有出现关于“数”的集合,比如集合 $\{0,1,2\}$ 。这是因为,我们现在还没有在 ZF 体系内构建出数的定义。现在我们开始这个工作。首先需要建立的数集是自然数集。对于自然数集这种新的对象,有两种引入的方式:一种是将其视为原始对象(primitive object),采用一组称为公理或公设的命题去描述它;另一种是通过其他已知的对象去定义它,此时它不再是原始对象。本节采用第一种方式。

关于自然数的使用,我们太熟悉了。然而,熟悉自然数的使用,与知道自然数如何定义是两码事。我们希望建立自然数的定义,使得自然数的所有性质完全由这个定义所确定。也正是由于我们“自我感觉”对自然数太熟悉了,反而会对抽象出自然数的本质这件事造成一定的困难。1889 年,意大利数学家、逻辑学家皮亚诺(G. Peano)给出了自然数集的定义,该定义是以公理化的方法给出的,称为皮亚诺公设(Peano's postulates)。通过皮亚诺公设,可以清晰地看出自然数的本质。

【定义 5.1.1】 设 N 是一个集合, s 是一个 N 到 N 的映射, e 是集合 N 中的一个元素。如果它们满足:

(1) $e \notin \text{ran}(s)$ 。

(2) s 是 N 到 N 的单射。

(3) 对于 N 的任意子集 A ,如果 $e \in A$,而且对于任意的 $x \in A$,都有 $s(x) \in A$,则 $A = N$ 。则称有序三元组 $\langle N, s, e \rangle$ 为皮亚诺系统(Peano system),集合 N 为自然数集。

对于 $\langle N, s, e \rangle$,由于 $e \in N$, s 是 N 到 N 的映射,所以有 $s(e) \in N$, $s(s(e)) \in N$, $s(s(s(e))) \in N$,等等。根据定义 5.1.1 中的条件(1),不存在 $x \in N$,使得 $s(x) = e$,也就是说, $s(e), s(s(e)), s(s(s(e))), \dots$ 之中任意一个都不会等于 e ,因此将 e 作为起始元素,从 e 出发,排成序列 $e, s(e), s(s(e)), s(s(s(e))), \dots$ 的样子。再根据定义 5.1.1 中的条件(2),

这个序列中的任意两个元素都不会相等,所以这个序列会形成一个“链”的形象,不会是“环”的形象。再根据定义 5.1.1 中的条件(3),这个链中所有元素构成的集合就是集合 N ,换句话说,可以把集合 N 中的元素一个不剩地排成一条链的形状。如果用一个带有箭头的线段表示从 x 到 $s(x)$,那么,皮亚诺系统不会是图 5.1.1(a)和(b),而只可能是图 5.1.1(c)那样。

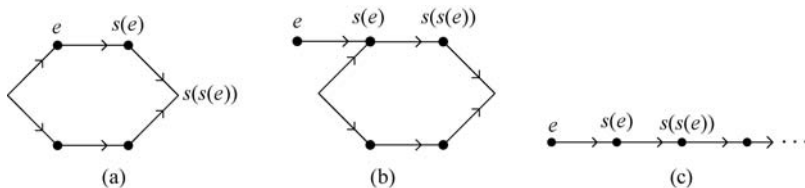


图 5.1.1 皮亚诺系统示意图

直观上,我们所熟悉的自然数集 N 中的所有元素也是可以这样排列的,即 $N = \{0, 1, 2, \dots\}$ 。可以看出,皮亚诺系统 $\langle N, s, e \rangle$ 中的 e 是作为起始元素的,相当于自然数中的 0; 映射 s 是用来将集合 N 中的每一个元素映射为该元素的后继(successor)。有了上述的理解,将 e 用符号“0”表示,将 $s(x)$ 表示成 x^+ ,那么定义 5.1.1 可以更清楚地以如下方式进行表述。

【定义 5.1.2】 称满足如下条件的集合 N 为自然数集:

- (1) $0 \in N$ 。
- (2) 对任意的 $x \in N$, 有其后继 $x^+ \in N$ 。
- (3) 对任意的 $x \in N$, 有 $x^+ \neq 0$ 。
- (4) 对任意的 $x, y \in N$, 如果 $x \neq y$, 则有 $x^+ \neq y^+$ 。
- (5) 对于任意的 $A \subset N$, 如果 A 满足如下两个条件: ① $0 \in A$; ② 对于任意的 $x \in A$, 有 $x^+ \in A$; 则有 $A = N$ 。

可以看出,定义 5.1.2 中的表述方式是将定义 5.1.1 中 $\langle N, s, e \rangle$ 的 s 和 e 直接以公设的形式列出。当然,定义 5.1.1 和定义 5.1.2 是完全等价的,只是表述方式不同而已。不管哪种定义,我们发现,只有定义中的最后一条是不平凡的,这一条称为皮亚诺归纳公设(Peano induction postulate),也称为数学归纳法原理(principle of mathematical induction)。有了这一条,就可以使用中学所学到数学归纳法了,因为数学归纳法作为“归纳证明”的方法,是以这一条为基础的。让我们回顾一下数学归纳法。设 $F(x)$ 表示“自然数 x 具有性质 F ”,如果想要证明 $F(x)$ 对于所有的自然数都成立,只需证明如下两点即可: ① $F(0)$ 成立; ② 对任意的自然数 x , $F(x)$ 成立蕴含了 $F(x^+)$ 也成立。之所以可以这样做的理由是,令集合 $A = \{x \in N \mid F(x)\}$, 显然 $A \subset N$; 当条件①和条件②都满足时,有 $0 \in A$, 且由 $x \in A$ 可以得到 $x^+ \in A$, 而这正是符合皮亚诺归纳公设条件的,因而有 $A = N$ 。

在皮亚诺公设中,自然数集是以一组公设的方式进行定义的,因而,我们不知道什么对象是自然数,而只是知道自然数应该满足的性质;也就是说,自然数集完全由公设中所列出的性质决定,只要对象具备这些性质,那么它就是自然数,所以从这个角度看,皮亚诺公设所定义出的自然数集是抽象的。

皮亚诺公设所定义的自然数集 N 是唯一的。假设 N 和 M 均为满足皮亚诺公设的自

然数集。那么,根据公设首先 $0 \in N$ 且 $0 \in M$ 。令 $F(x)$ 表示“ x 是集合 M 的元素”,则可以令集合 $A = \{x \in N \mid F(x)\}$ 。那么,当 $x \in A$ 时,有 $x \in N$ 且 $x \in M$ 。根据公设就有 $x^+ \in N$ 且 $x^+ \in M$,因而 $x^+ \in A$ 。再根据归纳原理可知 $A = N$,因而 $N \subset M$ 。类似可证 $M \subset N$,综上可得 $M = N$ 。

或许有些读者会说,根据皮亚诺公设得到 $\langle N, s, e \rangle$,然后将 N 记为 $\{0, 1, 2, \dots\}$,再令 $M = \{0, 2, 4, \dots\}$,将 $\tilde{s}$ 理解为 $s \circ s$,由于 $\langle M, \tilde{s}, e \rangle$ 满足皮亚诺公设,所以 M 也是自然数集。需要注意,皮亚诺公设只是一组性质,并没有给出集合 N 、映射 s 、起始元 e 分别是哪些具体对象。因而,从抽象的角度, $\langle M, \tilde{s}, e \rangle$ 就是 $\langle N, s, e \rangle$,用符号“1”表示 e 的后继,还是用符号“2”表示 e 的后继,没有什么实质上的区别。

如果读者学习过微积分的有关知识,就会知道微积分是以极限为基础进行展开的,而极限的定义中又涉及实数。在本章中,我们将会从自然数集出发构造整数,从整数构造有理数,从有理数构造实数。所以,自然数集是微积分的基础,因而,作为自然数定义的皮亚诺公设可以说是微积分的基础。在微积分的发展完善过程中,仅从几条公设出发重建整个微积分是其中的一项重大成果。

5.2 无限公理

将皮亚诺公设作为定义自然数集的一种方法确实是很好的选择。然而,我们有更好的选择。集合论作为几乎整个数学的基础,必须也必然可以把自然数集在其内部定义出来,换句话说,皮亚诺公设是可以从 ZF 体系得出的。由于自然数是无限多的,所以在定义自然数集时,需要引入关于无限的公理。在引入无限公理之前,我们先分析一下自然数的集合表示,同时,对自然数的深入理解将促进我们对无限的理解。

现在要用集合来表示自然数 $0, 1, 2, \dots$,我们借助于直观的感觉来尝试着构造。直观上,对于自然数集 N 而言,它已经是一个集合的形态了, N 是一个无限的集合,它包含了所有的自然数,每个自然数都是有限的。现在假设我们已经用集合表示出了自然数 $0, 1, 2, \dots$,也就是说,自然数 $0, 1, 2, \dots$ 已具有集合的形态了,因而此时“数”与“集”统一在一起,数就是集,集就是数。既然“数就是集,集就是数”,那么自然数集 N 作为一个集合,就可以看作一个数,这个带有“无限”含义的数包含了所有比它小的“有限”含义的自然数。因而我们就想,对于任意一个自然数 x ,它也应该表示为所有比其小的自然数所构成的集合。具体地,0 是最小的自然数,没有比它再小的自然数了,所有其表示为空集 $\emptyset$;对于自然数 1,只有 0 比它小,所以它应该表示为 $1 = \{0\} = \{\emptyset\}$;对于自然数 2,自然数 0、1 都比它小,所以它应该表示为 $2 = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$;等等。为了更加清晰,我们把前几个自然数的集合表示一起列出:

$$\begin{aligned} 0 &= \emptyset \\ 1 &= \{0\} = \{\emptyset\} \\ 2 &= \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\ 3 &= \{0, 1, 2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \end{aligned}$$

上述这种自然数的集合表示方法是由冯·诺依曼(John von Neumann)提出的。有工科背景知识的读者对冯·诺依曼在计算机领域中的贡献会很熟悉,却很少知道他在纯数学

领域所做出的杰出工作。

上述自然数的集合表示方法还具有以下性质:

$$0 \in 1 \in 2 \in 3 \in \cdots \quad (5.2.1)$$

$$0 \subsetneq 1 \subsetneq 2 \subsetneq 3 \subsetneq \cdots \quad (5.2.2)$$

或许有些读者会将自然数定义为 $0 = \emptyset, 1 = \{\emptyset\}, 2 = \{\{\emptyset\}\}, 3 = \{\{\{\emptyset\}\}\}, \dots$, 因为这样看起来更简单。确实, 当年策梅洛也是这样定义自然数的。然而, 这种定义方法只能保证前一个自然数属于后一个自然数, 却不能保证这种属于关系 $\in$ 一直传递下去, 也就是说, $0 \in 1, 1 \in 2$, 但是 $0 \notin 2$ 。类似地, 这种定义方法也不会使得包含关系 $\subsetneq$ 传递下去。而传递性是自然数用来计数的一个重要特性, 因为每次计数时, 会“包含”前面的已经数的结果, 并将数的结果一直“传递”下去。所以, 现在集合理论都是以冯·诺依曼提出的自然数构造方法作为标准方法。

下面需要把利用直观感觉所得出的关于自然数 $0, 1, 2, 3$ 的集合表示方法, 推广到所有的自然数上。我们不能根据已有的 $0, 1, 2, 3$ 的集合表示方式, 然后采用诸如“后面的自然数与前面的自然数一样”这种非具体的“归纳表述方式”去试图给出所有自然数的集合表示。我们需要从自然数 $0, 1, 2, 3$ 的集合表示方法中抽象出本质的、可以用 ZF 语言描述的一般规律。注意到上述表示中, $1 = 0 \cup \{0\}, 2 = 1 \cup \{1\}, 3 = 2 \cup \{2\}$, 我们有如下定义:

【定义 5.2.1】 对于集合 x , 称集合 $x \cup \{x\}$ 为 x 的后继。

我们将集合 x 的后继集记为 x^+ 。可以看出, 后继集 x^+ 通过并运算, 除了将 x 中元素保留外, 还将集合 x 本身作为元素并入其中, 因而会同时有 $x \in x^+$ 和 $x \subset x^+$ 。我们可以将后继集 x^+ 理解为对集合 x 取后继运算 $(\cdot)^+$, 那么, 之前我们所得到的自然数的集合表示就可以写作: $0 = \emptyset, 1 = 0^+, 2 = 1^+ = (0^+)^+ = 0^{++}, 3 = 2^+ = (0^{++})^+ = 0^{+++}$, 等等。

在给出后继集概念的基础上, 现在就可以采用集合的方式去描述上述自然数的全体构成的集合。对于这个“归纳出的”自然数的全体, 根据前面自然数的集合表示。首先, $\emptyset$ 作为这个集合的起始元素, 是属于这个集合; 其次, 每当有 x 属于这个集合时, 其后继集 x^+ 也会属于这个集合, 这样就会使得 $\emptyset$ 之后的每个自然数属于这个集合。我们引入如下的概念:

【定义 5.2.2】 对于集合 a , 如果其满足: $\emptyset \in a$, 并且对于任意的 $x \in a$, 有 $x^+ \in a$, 则称集合 a 是归纳的(inductive)。

用谓词公式描述集合 a 的归纳性, 就是 $\emptyset \in a \wedge \forall x (x \in a \rightarrow x^+ \in a)$ 。集合 a 具有归纳性, 也称集合 a 是归纳集。从直观上看, 前面我们所构造出的集合形式表示的自然数的全体是一个归纳集, 而且它含有无限多个元素。现在的问题是: 归纳集存在么? 或许有些读者会说, 我们都已经把每个自然数用集合的方式构造出来了, 它们的全体是自然数集, 就是一个归纳集, 所以归纳集是存在的。注意, 我们不能“先入为主”地认为自然数集 N 是存在的。直到目前为止, 在 ZF 体系内, 我们只有 ZF1~ZF5 这 5 条公理, 根据已有的这 5 条公理, 还无法确认含有无限多个元素的集合的存在性, 虽然可以根据这 5 条公理构造出无限多个集合。下面这条公理确定了归纳集的存在性。

ZF6 无限公理(axiom of infinity): $\exists y (\emptyset \in y \wedge \forall z (z \in y \rightarrow z^+ \in y))$

无限公理的意思是: 归纳集是存在的。根据前面所给出的自然数的集合表示可以看出, 自然数集具有这样的“直观”表示: $\{\emptyset, \emptyset^+, \emptyset^{++}, \emptyset^{+++}, \dots\}$ 。注意, 自然数集的这种

直观表示只是用在现在正在使用的自然语言表述中,其中省略号“…”表达的是诸如“等等”“类似一直这样”的含义,省略号“…”不是 ZF 语言中的符号,所以 ZF 语言中不会出现这种自然数集的表示,这种直观表示也就是当我们用自然语言表述时,为了形象直观便于理解才这样使用。根据自然数集的直观表示可以看出,自然数集是“最小的”归纳集。因而,定义自然数集(set of natural numbers)为

$$\omega = \{x \mid \forall y(\emptyset \in y \wedge \forall z(z \in y \rightarrow z^+ \in y) \rightarrow x \in y)\} \quad (5.2.3)$$

式中, ω 是一个集合。因为根据 ZF6,存在 y_1 使得 $\emptyset \in y_1 \wedge \forall z(z \in y_1 \rightarrow z^+ \in y_1)$ 为真,再根据式(5.2.3),可得 $\emptyset \in y_1 \wedge \forall z(z \in y_1 \rightarrow z^+ \in y_1) \rightarrow x \in y_1$ 为真,再利用假言推理规则可得 $x \in y_1$ 为真。所以,式(5.2.3)可以写作

$$\omega = \{x \in y_1 \mid \forall y(\emptyset \in y \wedge \forall z(z \in y \rightarrow z^+ \in y) \rightarrow x \in y)\} \quad (5.2.4)$$

因而,利用 ZF2 分离公理可得 ω 是一个集合,并且再根据 ZF1 外延公理可知 ω 是唯一的。如果用自然语言描述上述自然数集的定义过程,就是 $x \in \omega$ 当且仅当 x 属于每一个归纳集。至此,我们在 ZF 体系内将自然数集 ω 严格地定义出来。

对于集合 ω 中的每一个元素,我们称为自然数(natural number),采用符号“ ω ”表示自然数集而非以往所采用的 N ,是为了突出现在的自然数集是在 ZF 内根据公理所严格定义出来的自然数集。

前面我们只是直观地感觉出自然数集是“最小的”归纳集,下面就对所定义出的 ω 是最小的归纳集这个命题做出证明。

【命题 5.2.1】 集合 ω 是归纳集,且如果 a 也为归纳集,则 $\omega \subset a$ 。

证明: 根据集合 ω 的定义, ω 的元素是那些属于所有归纳集的元素。而空集 $\emptyset$ 是属于所有归纳集的,所以 $\emptyset \in \omega$ 。另外,如果 $x \in \omega$,根据 ω 的定义, x 属于所有的归纳集,结合归纳集的定义可知 x^+ 就会属于所有的归纳集,因而 $x^+ \in \omega$ 。综上可知, ω 是归纳集。根据 ω 的定义,它的元素就是那些属于所有归纳集的元素,所以对于任意的归纳集 a ,均有 $\omega \subset a$ 。

命题 5.2.1 显示了自然数集 ω 是最小的归纳集,正是由于 ω 作为归纳集中最小的一个,因而可以得到如下命题。

【命题 5.2.2】 集合 ω 的任何子集 u 如果是归纳集,则 $u = \omega$ 。

该命题可以用谓词公式表示为: $u \subset \omega \wedge \emptyset \in u \wedge \forall z(z \in u \rightarrow z^+ \in u) \rightarrow u = \omega$ 。在命题 5.2.2 的基础上,再进一步,我们有如下命题。

【命题 5.2.3】 设 $F(x)$ 表示自然数 x 具有性质 F ,如果: ① $F(0)$ 成立; ② 对任意的自然数 x , $F(x)$ 成立蕴含了 $F(x^+)$ 也成立; 则对于所有的 $x \in \omega$, $F(x)$ 皆成立。

证明: 构造集合 $u = \{x \in \omega \mid F(x)\}$,显然 $u \subset \omega$ 。根据假设, $\emptyset \in \omega$; 并且对于任意的 $x \in \omega$,有 $x^+ \in \omega$,所以,集合 u 是归纳集。由于 $u \subset \omega$,根据命题 5.2.2 可得 $u = \omega$,命题得证。

命题 5.2.3 可以用谓词公式表示为

$$F(0) \wedge \forall x(x \in \omega \wedge F(x) \rightarrow F(x^+)) \rightarrow \forall x(x \in \omega \rightarrow F(x))$$

可以看出,通过将自然数集 ω 定义为最小归纳集,得到了命题 5.2.3——数学归纳法。如果对比命题 5.2.2 和上一节中的皮亚诺公设可以看出,命题 5.2.2 就是皮亚诺公设中的数学归纳法原理,只是在这里,数学归纳法原理被证明了出来。我们可以用图 5.2.1 形象地

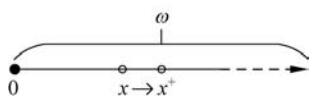


图 5.2.1 数学归纳法原理示意图

表示数学归纳法原理。

除了从自然数集 ω 可以导出数学归纳法原理,我们还可以得到如下结论: ① $\emptyset \in \omega$; ② 对于任意的 $x \in \omega$, 有 $x^+ \in \omega$; ③ $x^+ \neq \emptyset$ 。其中前两条是根据 ω 是归纳集直接得出的,第3条是根据后继集的定义 $x^+ = x \cup \{x\}$,对于任意的 x^+ ,都有 $x \in x^+$,所以 x^+ 一定不是空集。如果我们还可以得出如下结论: ④ 对于 $x, y \in \omega$,如果 $x \neq y$,有 $x^+ \neq y^+$ 。那么,我们就在 ZF 的体系内,把皮亚诺公设全部证明出来了,因而集 ω 就是满足皮亚诺公设的自然数集 N 。

通过引入后继集的概念,我们把式(5.2.1)和式(5.2.2)中的 $x \in x^+$ 和 $x \subset x^+$ 表达出来了;通过引入归纳集的概念,我们把式(5.2.1)和式(5.2.2)中全体对象构成的集 $\{0, 1, 2, \dots\}$ 表达出来了;然而,式(5.2.1)中对于属于关系 $\in$ 的传递性却没有表达出来。现在我们给出传递性的集合描述。

【定义 5.2.3】 对于集合 a ,如果由 $x \in u$ 和 $u \in a$ 可以得出 $x \in a$,则称集合 a 是传递的(transitive)。

用谓词公式描述集合 a 的传递性,就是 $(x \in u \wedge u \in a) \rightarrow x \in a$ 。集合 a 具有传递性,也称集合 a 是传递集。通俗地讲,集合的传递性是指,集合的元素的元素还是集合的元素。显然,当集合 a 是传递集时,其任意的元素 $u \in a$ 也一定是其子集,即 $u \subset a$;反之,如果集合 a 任意的元素 $u \in a$ 还是其子集,即 $u \subset a$,则 a 一定为传递集。比如, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ 就是一个传递集,而 $\{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}$ 就不是传递集。

在式(5.2.1)中,根据前几个自然数是传递集,我们推断,任意的自然数都是传递集。下面证明这个结论。

【命题 5.2.4】 对于任意的 $x \in \omega$, x 是传递集。

证明: 这是一个关于自然数集 ω 的一个命题,我们可以用数学归纳法。令 $F(x)$ 表示“ x 是传递集”,构造集合 $u = \{x \in \omega \mid F(x)\} \subset \omega$ 。显然, $\emptyset$ 为传递集,且 $\emptyset \in \omega$,因而 $\emptyset \in u$ 。当 $z \in u$ 时,即 $z \in \omega$ 且 z 是传递集,那么: ① $z^+ \in \omega$,这是由 ω 是归纳集得出的; ② z^+ 还是一个传递集,这是因为,对于任意的 $y \in t \in z^+$,由于 $z^+ = z \cup \{z\}$,所以要么 $t = z$,要么 $t \in z$,当 $t = z$ 时,根据 $y \in z$ 和 $z \subset z^+$,可得 $y \in z^+$,当 $t \in z$ 时,根据假设 z 是传递集,可得 $y \in z$,再次利用 $z \subset z^+$,可得 $y \in z^+$ 。综合①和②,可得 $z^+ \in u$ 。也就是说,当 $z \in u$ 时,有 $z^+ \in u$,进而可知, ω 的子集 u 为归纳集,所以 $u = \omega$ 。命题得证。

在命题 5.2.4 的证明中,根据 z 是传递集,得出了 z^+ 也是一个传递集,事实上,这个结论是显然的。因为 z^+ 的元素比 z 的元素仅多了一个 z ,而 z 作为 z^+ 的元素,其元素已经并入到 z^+ 中,所以,当 z 是传递集时, z^+ 一定也是传递集。

除了 ω 的元素是传递集之外, ω 本身也是传递的,有如下命题。

【命题 5.2.5】 ω 是传递集。

证明: 该命题等价于,对于任意的 $x \in \omega$,有 $x \subset \omega$ 。我们还是采用数学归纳法。令 $F(x)$ 表示“ $x \subset \omega$ ”,构造集合 $u = \{x \in \omega \mid F(x)\} \subset \omega$ 。显然, $\emptyset \in u$ 。假设 $z \in u$,即 $z \in \omega$ 且 $z \subset \omega$,由于 $\{z\} \subset \omega$,所以对于 $z^+ = z \cup \{z\}$, $z^+ \subset \omega$;另外,根据 ω 是归纳集,可得 $z^+ \in \omega$;所以 $z^+ \in u$ 。由上可见, u 为归纳集,由于 $u \subset \omega$,所以 $u = \omega$ 。命题得证。

根据命题 5.2.5 中 ω 的传递性可知, ω 的元素的元素还是 ω 的元素, 而 ω 的元素是自然数, 因而可以得出, 自然数的元素还是自然数, 即每一个自然数都是由自然数构成的集合。根据本节一开始的自然数的集合表示方法, 从前几个自然数的集合表示, 直观上感觉应该是每一个自然数都是由自然数构成的集合, 即 $x = \{0, 1, 2, \dots, x-1\}$ 。现在命题 5.2.5 严格地证明了出来。

在传递集概念介绍的基础上, 现在我们证明前面所提到的: ④ 对于 $x, y \in \omega$, 如果 $x \neq y$, 有 $x^+ \neq y^+$ 。

【命题 5.2.6】 对于 $x, y \in \omega$, 如果 $x \neq y$, 有 $x^+ \neq y^+$ 。

证明: 当 $x \neq y$ 时, 假设 $x^+ = y^+$ 。因为 $x \in x^+$, 因而 $x \in y^+ = y \cup \{y\}$ 。由于 $x \neq y$, 所以 $x \in y$ 。注意到集合 y 是传递集, 所以 $x \subset y$ 。同理可证 $y \subset x$, 进而可得 $x = y$, 矛盾。

至此, 我们在 ZF 的体系内, 把皮亚诺公设全部证明出来了。如果把后继运算 $(\cdot)^+$ 看作一个映射, 并将其限制在 ω 上, 即令 $\sigma = (\cdot)^+ \upharpoonright \omega = \{\langle x, x^+ \rangle \mid x \in \omega\}$, 则 $\langle \omega, \sigma, \emptyset \rangle$ 为一个皮亚诺系统。可以看出, 利用 ZF 的公理, 我们“构造”出了具体的自然数集 ω , 皮亚诺系统中的映射 s 和起始元素 e 也都在 ZF 内具体化为 σ 和 $\emptyset$, 并且, 自然数的性质也均可以由集合的性质导出。所以, 在 ZF 体系内, 自然数集 ω 是具体的对象, 从这个“具体的”角度上, 它与任意其他的集合 x 相比, 比如 $\emptyset$, 没什么区别, 都是实实在在的集合。

5.3 算术

通过无限公理 ZF6, 我们在 ZF 体系内将自然数集定义出来了, 当然, 自然数也就同时定义出来了。这样定义出的自然数集 ω 上, 仅仅是有一个后继运算 $(\cdot)^+$ 。本节我们将在 ω 上定义复杂的运算, 比如加法和乘法。这样使得 ω 更加贴合我们一直以来所使用的自然数集。在定义加法和乘法之前, 首先介绍递归定理(recursion theorem)。归纳法证明所采用的数学归纳法是我们所熟悉的, 而归纳法定义却不是那么熟悉。递归定理是归纳法定义可以实施的保证。

假定现在有一个从 ω 到 a 的映射 f , 如果对于每个 $x \in \omega$, 我们都知道 f 在任意 x 下的值 $f(x) \in a$, 则该映射 f 也就确定了, 即为 $f = \{\langle x, f(x) \rangle \mid x \in \omega\} \subset \omega \times a$ 。假定现在我们不知道 f 在任意 $x \in \omega$ 下的值, 但是却知道 $f(0)$, 并且还知道一个从 a 到 a 的映射 g , 其满足对于所有的 $x \in \omega$, 有 $f(x^+) = g(f(x))$ 。这样, 就可以依次得到 $f(1) = f(0^+) = g(f(0))$, $f(2) = f(1^+) = g(f(1))$, 一直这样下去, 就可以得到 f 在任意 x 下的值 $f(x)$ 了。如果映射 f 事先是存在的, 我们可以通过这种方式确定出 f 。现在的问题是, 这样的 f 存在么? 也就是说, 我们需要证明, 如果给定一个集合 a , 集合 a 中一个元素 b , 以及一个从 a 到 a 的映射 g , 那么存在唯一的一个从 ω 到 a 的映射 f , 满足 $f(0) = b$, 且 $f(x^+) = g(f(x))$ 。

【命题 5.3.1】 给定集合 a 以及其中一个元素 $b \in a$, g 是一个从 a 到 a 的映射, 那么存在唯一的一个从 ω 到 a 的映射 f , 满足 $f(0) = b$, 且对于任意的 $x \in \omega$, 有 $f(x^+) = g(f(x))$ 。

证明: 首先证明满足条件的映射 f 的存在性。为此, 只需要构造出来它即可。由于映

射是一种关系,而且关系约束条件比映射要少,容易构造,所以可以先构造一种关系,当然这种关系需要与映射 f 要满足的条件有一定的联系,然后通过这种关系再进一步构造出映射 f 。具体地,令关系 $r \subset \omega \times a$ 为满足如下条件的集合:

(1) $\langle 0, b \rangle \in r$;

(2) 对于任意的 $x \in \omega$, 如果 $\langle x, y \rangle \in r$, 则有 $\langle x^+, g(y) \rangle \in r$ 。

我们将“集合 r 满足上述条件(1)和(2)”记为符号“ $F(r)$ ”。显然, $\omega \times a$ 就是满足上述条件的集合。当然, $\omega \times a$ 作为满足条件的关系,它不是映射,为了构造出满足条件的映射,需要构造出满足该条件的“最小关系”。注意,如果映射满足条件(1)和(2),也就是该映射满足命题中的条件。可以这样构造映射:把所有满足条件的关系放在一起构成一个集合,然后做这个集合的交。具体地,令

$$s = \{r \mid (r \subset \omega \times a) \wedge F(r)\}$$

显然,对象 s 是集合,且 $s \neq \emptyset$ 。令 $f = \bigcap s$, 则集合 f 表示所有满足条件(1)和(2)的 $\omega \times a$ 的子集的交。所以,对于任意的 $r \in s$, 有 $f \subset r$, 因而, $f \subset \omega \times a$ 。此外,由于对于任意的 $r \in s$, 均有 $F(r)$ 为真,所以 $F(f)$ 也为真,即集合 f 也满足条件(1)和(2)。所以, f 是满足条件(1)和(2)的最小的集合。接下来,证明集合 f 是 ω 到 a 的映射,这相当于证明:对于任意的 $x \in \omega$, 存在唯一的 $y \in a$, 使得 $\langle x, y \rangle \in f$ 。考虑应用数学归纳法。

当 $x=0$ 时,由于 f 满足条件(1),所以 $\langle 0, b \rangle \in f$, 存在性满足。再看唯一性,如果除了 $\langle 0, b \rangle \in f$, 还有 $\langle 0, c \rangle \in f$, 则从集合 f 中把 $\langle 0, b \rangle$ 去除,即 $\tilde{f} = f - \{\langle 0, b \rangle\}$ 。由于 $\tilde{f}$ 与 f 就差了一个元素 $\langle 0, b \rangle$, 所以 $\tilde{f}$ 也是满足条件(1)和(2)的,所以 $\tilde{f} \in s$, 而 $\tilde{f} \subset f$, 这是与 f 的最小性矛盾,所以,当 $x=0$ 时,存在唯一的 $b \in a$, 使得 $\langle 0, b \rangle \in f$ 。

假设对于 $x \in \omega$, 存在唯一的 $y \in a$, 使得 $\langle x, y \rangle \in f$ 。考虑 $x^+ \in \omega$ 时的情况。根据假设, $\langle x, y \rangle \in f$, 由于集合 f 满足条件(2), 因而 $\langle x^+, g(y) \rangle \in f$, 存在性满足。再看唯一性,如果除了 $\langle x^+, g(y) \rangle \in f$, 还有 $\langle x^+, z \rangle \in f$, 其中 $z \neq g(y)$, 还是采用类似的方法,令 $\bar{f} = f - \{\langle x^+, z \rangle\}$, 由于 $\bar{f}$ 与 f 就差了一个元素 $\langle x^+, z \rangle$ 。所以 $\bar{f}$ 也是满足条件(1)和(2)的,所以 $\bar{f} \in s$, 而 $\bar{f} \subset f$, 这是与 f 的最小性矛盾。所以,当 $x^+ \in \omega$ 时,也存在唯一的 $y \in a$, 使得 $\langle x, y \rangle \in f$ 。

综上所述,根据数学归纳法可知,对于任意的 $x \in \omega$, 存在唯一的 $y \in a$, 使得 $\langle x, y \rangle \in f$ 。至此,满足条件的映射 f 的存在性得到证明。

我们还需要证明满足条件的映射 f 的唯一性,因为尽管 $f = \bigcap s$ 表明 f 是满足条件(1)和(2)的最小的集合,并不代表比 f 稍微大一些的集合就不是满足条件(1)和(2)的映射。假设映射 h 也是满足条件(1)和(2)的从 ω 到 a 的映射,因而, $\langle 0, b \rangle \in h$ 。可见,当 $x=0$ 时,如果 $\langle x, y \rangle \in f$, 则 $\langle x, y \rangle \in h$; 假设对于 $x \in \omega$, 根据 $\langle x, y \rangle \in f$ 可得 $\langle x, y \rangle \in h$, 则对于 $x^+ \in \omega$ 时,由于映射 f 和映射 h 都满足条件(2), 所以 $\langle x^+, g(y) \rangle \in f$, 且 $\langle x^+, g(y) \rangle \in g$ 。根据数学归纳法可知,对于任意的 $x \in \omega$, 均有如果 $\langle x, y \rangle \in f$, 则 $\langle x, y \rangle \in h$ 。因而可得 $f = g$ 。命题得证。

有了递归定理——命题 5.3.1, 我们可以开始定义自然数集 ω 上的运算了。首先看加法的定义。对于 $x+y=z$ 的定义, 如果将 x 固定或者看作一个参数, 那么, $x+y=z$ 就可

以理解为 $f_x(y)=z$ 。有了这种观点,现在给出 ω 上加法的定义。

【定义 5.3.1】 对于任意的 $x, y \in \omega$, 定义 ω 上加法 $+$ 是具有如下性质的运算:

$$\begin{cases} x+0=x \\ x+y^+=(x+y)^+ \end{cases}$$

从定义 5.3.1 可以看出, ω 上加法 $+$ 是以一种递归的方式进行定义的。根据定义 5.3.1, 如果我们要计算 $5+3$, 其等于 $5+2^+=(5+2)^+$, 由于后继运算 $(\cdot)^+$ 已经定义过了, 所以只需要计算出 $5+2$ 即可; 根据定义 5.3.1, 有 $5+2=5+1^+=(5+1)^+$, 这又只需要计算出 $5+1$ 即可; 根据定义 5.3.1, 有 $5+1=5+0^+=(5+0)^+$, 所以只需计算出 $5+0$ 即可, 根据定义 5.3.1, $5+0=5$, 因而 $5+3=5^{+++}=8$ 。可以看出, 整个计算过程是以一种递归的方式进行的, 所以, 需要递归定理来保证上述计算过程所依据的“递归定义”方式是合理的。从命题 5.3.1 的角度去看定义 5.3.1, 实际上就是对于任意的 $x \in \omega$, 都定义了对应的映射 $f_x: \omega \rightarrow \omega$, 其满足 $f_x(0)=x$, $f_x(y^+)=f_x(y)^+$, 然后再把 $f_x(y)$ 用 $x+y$ 进行表示。在命题 5.3.1 中, 把其中的集合 a 和其中一个元素 $b \in a$, 看作这里的 ω 和 $x \in \omega$; 把其中的 a 到 a 的映射 g , 看作这里的 ω 到 ω 的映射 $(\cdot)^+$; 把其中的 ω 到 a 的映射 f , 看作这里的 ω 到 ω 的映射 f_x , 那么命题 5.3.1 保证了映射 f_x 的唯一存在性。

类似地, 在 ω 上加法 $+$ 已经定义的基础上, 也可以递归地定义 ω 上的乘法。

【定义 5.3.2】 对于任意的 $x, y \in \omega$, 定义 ω 上乘法 $\cdot$ 是具有如下性质的运算:

$$\begin{cases} x \cdot 0 = x \\ x \cdot y^+ = x + x \cdot y \end{cases}$$

从定义 5.3.2 可以看出, ω 上乘法 $\cdot$ 也是以一种递归的方式进行定义的。根据定义 5.3.2, 如果要计算 $5 \cdot 3$, 其等于 $5 \cdot 2^+ = 5 + 5 \cdot 2$, 由于加法运算 $+$ 已经定义过了, 所以只需要计算出 $5 \cdot 2$ 即可; 根据定义 5.3.2, 有 $5 \cdot 2 = 5 \cdot 1^+ = 5 + 5 \cdot 1$, 这又只需要计算出 $5 \cdot 1$ 即可; 根据定义 5.3.2, 有 $5 \cdot 1 = 5 \cdot 0^+ = 5 + 5 \cdot 0$, 所以只需计算出 $5 \cdot 0$ 即可, 根据定义 5.3.2, $5 \cdot 0 = 0$, 因而 $5 \cdot 3 = 5 + 5 + 5 = 15$ 。从命题 5.3.1 的角度去看定义 5.3.2, 就是对于任意的 $x \in \omega$, 都定义了对应的映射 $\tilde{f}_x: \omega \rightarrow \omega$, 其满足 $\tilde{f}_x(0)=0$, $\tilde{f}_x(y^+)=f_x(\tilde{f}_x(y))$, 其中 f_x 就是加法运算 $+$ 所对应的映射。注意, 乘法定义中采用 $x \cdot y^+ = x + x \cdot y$ 而不是采用 $x \cdot y^+ = x \cdot y + x$, 是因为加法运算 $+$ 所对应的映射表示为 $f_x(y) = x + y$ 而非 $f_x(y) = y + x$ 。在命题 5.3.1 中, 把其中的集合 a 和其中一个元素 $b \in a$, 看作这里的 ω 和 $0 \in \omega$; 把其中的 a 到 a 的映射 g , 看作这里的 ω 到 ω 的映射 f_x ; 把其中的 ω 到 a 的映射 f , 看作这里的 ω 到 ω 的映射 $\tilde{f}_x$, 那么命题 5.3.1 保证了映射 $\tilde{f}_x$ 的唯一存在性。

【命题 5.3.2】 对于任意的 $x, y \in \omega$, 有:

- (1) $0+x=x$ 。
- (2) $x^++y=(x+y)^+$ 。

证明: (1) 对 x 采用数学归纳法。当 $x=0$ 时, 根据定义 5.3.1, $x+0=x$ 对于任意的 $x \in \omega$ 都成立, 所以 $0+0=0$ 。现在假设 $0+x=x$, 如果能够证明出 $0+x^+=x^+$, 那么, 应用数学归纳法, 即可得出 $0+x=x$ 对于任意的 $x \in \omega$ 都成立。根据定义 5.3.1, $0+x^+=(0+x)^+$, 根据假设 $0+x=x$, 可得 $0+x^+=x^+$ 。

(2) 对 y 采用数学归纳法。当 $y=0$ 时, 根据定义 5.3.1, $x^++0=x^+=(x+0)^+$ 。假

设 $x^+ + y = (x + y)^+$, 现在需要证明 $x^+ + y^+ = (x + y^+)^+$ 。根据定义 5.3.1, $x^+ + y^+ = (x^+ + y)^+$, 再根据假设, 可得 $x^+ + y^+ = ((x + y)^+)^+$ 。而根据定义 5.3.1, $(x + y)^+ = x + y^+$, 所以可得 $x^+ + y^+ = (x + y^+)^+$ 。

【命题 5.3.3】 对于任意的 $x, y, z \in \omega$, 有:

- (1) $x + y = y + x$ 。
- (2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ 。

证明: (1) 对 y 采用数学归纳法。当 $y = 0$ 时, 根据自然数的加法定义, $x + 0 = x$; 而根据命题 5.3.2, $0 + x = x$; 因而 $x + 0 = 0 + x$ 。假设 $x + y = y + x$, 需要证明 $x + y^+ = y^+ + x$ 。根据自然数的加法定义, $x + y^+ = (x + y)^+$; 根据命题 5.3.2, $y^+ + x = (y + x)^+$, 再根据假设 $x + y = y + x$, 可得 $x + y^+ = y^+ + x$ 。

(2) 对 z 采用数学归纳法。当 $z = 0$ 时, 根据自然数的加法定义, $(x + y) + 0 = x + y$, $x + (y + 0) = x + y$, 因而 $(x + y) + 0 = x + (y + 0)$ 。假设 $(x + y) + z = x + (y + z)$, 需要证明 $(x + y) + z^+ = x + (y + z^+)$ 。根据自然数的加法定义, $(x + y) + z^+ = ((x + y) + z)^+$, $x + (y + z^+) = x + (y + z)^+ = (x + (y + z))^+$, 再根据假设 $(x + y) + z = x + (y + z)$, 可得 $(x + y) + z^+ = x + (y + z^+)$ 。

【命题 5.3.4】 对于任意的 $x, y \in \omega$, 有:

- (1) $0 \cdot x = 0$ 。
- (2) $x^+ \cdot y = y + x \cdot y$ 。

证明: (1) 对 x 采用数学归纳法。当 $x = 0$ 时, 根据自然数的乘法定义, $0 \cdot 0 = 0$ 。假设 $0 \cdot x = 0$, 现在需要证明 $0 \cdot x^+ = 0$ 。根据乘法的定义, $0 \cdot x^+ = 0 + 0 \cdot x$, 根据假设 $0 \cdot x = 0$, 可得 $0 \cdot x^+ = 0 + 0$, 再根据加法的定义, 可得 $0 \cdot x^+ = 0$ 。

(2) 对 y 采用数学归纳法。当 $y = 0$ 时, 根据乘法的定义, $x^+ \cdot 0 = 0$, 根据乘法和加法的定义, $0 + x \cdot 0 = 0 + 0 = 0$, 所以, $x^+ \cdot 0 = 0 + x \cdot 0$ 。现在假设 $x^+ \cdot y = y + x \cdot y$, 需要证明 $x^+ \cdot y^+ = y^+ + x \cdot y^+$ 。根据乘法的定义, $x^+ \cdot y^+ = x^+ + x^+ \cdot y$, 根据假设和命题 5.3.3 的(2), 有 $x^+ \cdot y^+ = x^+ + (y + x \cdot y) = (x^+ + y) + x \cdot y$; 根据乘法的定义和命题 5.3.3 的(2), 有 $y^+ + x \cdot y^+ = y^+ + (x + x \cdot y) = (y^+ + x) + x \cdot y$ 。根据命题 5.3.2 的(2)和命题 5.3.3 的(1), $x^+ + y = (x + y)^+$, $y^+ + x = (y + x)^+ = (x + y)^+$ 。综上所述可得, $x^+ \cdot y^+ = y^+ + x \cdot y^+$ 。

【命题 5.3.5】 对于任意的 $x, y, z \in \omega$, 有:

- (1) $x \cdot y = y \cdot x$ 。
- (2) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ 。
- (3) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ 。

证明: (1) 对 y 采用数学归纳法。当 $y = 0$ 时, $x \cdot 0 = 0$, 根据命题 5.3.4 的(1), $0 \cdot x = 0$, 所以 $x \cdot 0 = 0 \cdot x$ 。假设 $x \cdot y = y \cdot x$, 现在证明 $x \cdot y^+ = y^+ \cdot x$ 。根据乘法定义 $x \cdot y^+ = x + x \cdot y$, 根据命题 5.3.4 的(2), $y^+ \cdot x = x + y \cdot x$ 。再根据假设, 可得 $x \cdot y^+ = y^+ \cdot x$ 。

(2) 对 z 采用数学归纳法。当 $z = 0$ 时, $x \cdot (y + 0) = x \cdot y$, $x \cdot y + x \cdot 0 = x \cdot y$, 所以

$x \cdot (y+0) = x \cdot y + x \cdot 0$ 。假设 $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$, 现在证明 $x \cdot (y+z^+) = x \cdot y + x \cdot z^+$ 。 $x \cdot (y+z^+) = x \cdot (y+z)^+ = x + x \cdot (y+z)$, 利用假设有, $x \cdot (y+z^+) = x + (x \cdot y + x \cdot z)$; 而 $x \cdot y + x \cdot z^+ = x \cdot y + (x + x \cdot z)$ 。再利用命题 5.3.3, 可得 $x \cdot (y+z^+) = x \cdot y + x \cdot z^+$ 。

(3) 对 z 采用数学归纳法。当 $z=0$ 时, $(x \cdot y) \cdot 0 = 0, x \cdot (y \cdot 0) = x \cdot 0 = 0$, 所以, $(x \cdot y) \cdot 0 = x \cdot (y \cdot 0)$ 。假设 $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, 现在证明 $(x \cdot y) \cdot z^+ = x \cdot (y \cdot z^+)$ 。 $(x \cdot y) \cdot z^+ = (x \cdot y) + (x \cdot y) \cdot z, x \cdot (y \cdot z^+) = x \cdot (y + y \cdot z)$, 根据才证明出的(2)可得, $x \cdot (y \cdot z^+) = x \cdot y + x \cdot (y \cdot z)$ 。再利用假设, 可得 $(x \cdot y) \cdot z^+ = x \cdot (y \cdot z^+)$ 。

上面的这些命题给出了关于自然数的算术定律, 总结如下:

- | | |
|---------------|---|
| (1) 加法交换律 | $x+y=y+x$ |
| (2) 加法结合律 | $(x+y)+z=x+(y+z)$ |
| (3) 乘法对加法的分配率 | $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$ |
| (4) 乘法交换律 | $x \cdot y = y \cdot x$ |
| (5) 乘法结合律 | $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ |

可以看出, 通过在 ZF 体系内定义自然数集 ω 上的加法和乘法运算, 我们在 ZF 体系内证明出了这些我们所熟知的算术定律。

此外, 还有关于自然数的加法和乘法消去律, 这里简要证明一下。对于加法消去律, 也就是如果 $x+z=y+z$, 则 $x=y$, 这只需要对 z 采用数学归纳法即可。当 $z=0$ 时, 显然 $x=y$, 假设 $x+z=y+z$, 有 $x=y$; 那么, 根据 $x+z^+=y+z^+, x+z^+=(x+z)^+, y+z^+=(y+z)^+$, 并利用假设可得 $x=y$ 。对于乘法消去律, 也就是如果 $x \cdot z = y \cdot z$, 且 $z \neq 0$, 则 $x=y$ 。还是采用数学归纳法, 令集合 $A = \{0\} \cup \{z \in \omega \mid z \neq 0 \wedge F(z)\}$, 其中 $F(z)$ 表示“对于任意的 $x, y \in \omega$, 如果 $x \cdot z = y \cdot z$, 则 $x=y$ ”。首先, $0 \in A$; 其次, 如果 $z \in A$, 则有 $z=0$ 或者 $z \neq 0$, 当 $z=0$ 时, 如果 $x \cdot 0^+ = y \cdot 0^+$, 也即 $x+x \cdot 0 = y+y \cdot 0$, 因而可得 $x=y$, 也就是说 $z^+ \in A$, 如果 $z \neq 0$, 则有 $x \cdot z = y \cdot z$, 那么, 如果 $x \cdot z^+ = y \cdot z^+$, 即 $x+x \cdot z = y+y \cdot z$, 则应用加法消去律, 同样可得 $x=y$, 即 $z^+ \in A$ 。综上可得, $A = \omega$ 。

除了可以在 ω 上定义加法和乘法运算, 还可以定义 ω 上序关系, 这只需要根据加法运算就可完成。

【定义 5.3.3】 对于任意的 $x, y \in \omega$, 如果存在 $u \in \omega$, 使得 $x+u=y$, 则称 $x \leq y$; 如果 $x \leq y$ 且 $x \neq y$, 则称 $x < y$ 。

为了方便后面关于序的性质的推导, 先引入两个命题。

【命题 5.3.6】 对于任意的 $x \in \omega$, 且 $x \neq 0$, 则存在唯一的 $y \in \omega$, 满足 $y^+ = x$ 。

证明: 令集合 $A = \{0\} \cup \{x \in \omega \mid F(x)\}$, 其中 $F(x)$ 表示“存在唯一的 $y \in \omega$, 满足 $y^+ = x$ ”。显然 $A \subset \omega$ 。由于 $0 \in A$, 且当 $u \in A$ 时, 由于 $u \in \omega$, 所以 $u^+ \in \omega$ 且 $F(u^+)$ 为真, 进而可得 $u^+ \in A$, 根据命题 5.2.2 可得 $A = \omega$, 所以 $F(x)$ 对于除了 0 之外的所有自然数均为真。至于唯一性, 可由命题 5.2.6 直接得到。

【命题 5.3.7】 对于任意的 $x, y \in \omega$, 有 $x+y^+ \neq x$ 。

证明: 对 x 采用数学归纳法。当 $x=0$ 时, $0+y^+ = y^+ \neq 0$ 。假设 $x+y^+ \neq x$, 现在需

要证明 $x^+ + y^+ \neq x^+$ 。根据命题 5.3.3 的(2), $x^+ + y^+ = (x + y^+)^+$, 利用假设并根据命题 5.2.6, 可得 $x^+ + y^+ \neq x^+$ 。

现在我们看自然数集上序的性质。

【命题 5.3.8】 对于任意的 $x, y, z \in \omega$, 有:

- (1) $x \not< x$;
- (2) $x < y$ 且 $y < z$, 则 $x < z$;
- (3) $x < y, x = y, y < x$, 这三种情况有且仅有其中之一出现。

证明: (1) 由于 $x = x$, 不满足 $x < y$ 定义中的 $x \neq y$, 所以 $x \not< x$ 。

(2) 根据 $x < y$ 可得, 存在 $u \in \omega$, 使得 $x + u = y$, 且 $x \neq y$, 进而可得 $u \neq 0$ 。类似地, 根据 $y < z$ 可得, 存在 $v \in \omega$, 使得 $y + v = z$, 且 $y \neq z$, 进而可得 $v \neq 0$ 。进而可得

$$y + v = (x + u) + v = x + (u + v) = z$$

可见 $x \leq z$ 。又由于 $u \in \omega$ 且 $u \neq 0$, 根据命题 5.3.6, 存在唯一的 $t \in \omega$, 满足 $t^+ = u$ 。那么,

$$u + v = t^+ + v = (t + v)^+$$

因而就有

$$y + v = x + (t + v)^+ = z$$

根据命题 5.3.7, $x \neq z$ 。综上可得, $x < z$ 。

(3) 首先证明, 命题中所列出的三种情况至多出现其中一种。如果出现 $x < y$ 且 $x = y$, 则可得 $x < x$, 与本命题中的(1)矛盾; 如果 $y < x$ 且 $x = y$, 同样可得 $x < x$, 与本命题中的(1)矛盾; 如果出现 $x < y$ 且 $y < x$, 根据本命题中的(2)可得 $x < x$, 又与本命题中的(1)矛盾; 所以三种情况至多出现一种。下面证明, 命题中所列出的三种情况至少出现其中一种。对 x 采用数学归纳法。当 $x = 0$ 时, 如果 $y = 0$, 则 $x = y$; 如果 $y \neq 0$, 根据命题 5.3.6, 则存在唯一的 $u \in \omega$, 满足 $u^+ = y$, 由于 $u^+ = 0 + u^+$, 所以 $y = 0 + u^+$, 进而可得 $0 \leq y$, 而 $y \neq 0$, 所以 $0 < y$, 即 $x < y$; 也就是说, 无论 $y = 0$ 还是 $y \neq 0$, 总会有 $x = y$ 或者 $x < y$, 即当 $x = 0$ 时, 命题中所列出的三种情况至少会出现其中一种。假设对于 $x, y \in \omega, x < y, x = y, y < x$, 这三种情况至少出现其中之一, 现在需要证明的是, $x^+ < y, x^+ = y, y < x^+$, 这三种情况至少出现其中之一。现在对假设中的三种情况分别进行证明。当 $x = y$ 时, 由于 $x^+ = x + 0^+$, 根据命题 5.3.7 可得 $x < x^+$, 即 $y < x^+$ 。当 $y < x$ 时, 根据 $x^+ = x + 0^+$ 可得 $x < x^+$, 再根据本命题中的(2), 可得 $y < x^+$ 。当 $x < y$ 时, 则存在 $v \neq 0, x + v = y$ 。由于 $v \neq 0$, 根据命题 5.3.6, 令 $t^+ = v$, 则 $x + t^+ = y$ 。由于 $x + t^+ = (x + t)^+ = x^+ + t$, 所以 $x^+ + t = y$, 因而可得 $x^+ \leq y$, 这又相当于 $x^+ < y$ 或者 $x^+ = y$ 。综上可见, $x^+ < y, x^+ = y, y < x^+$, 这三种情况至少出现其中之一。根据归纳法可得, 对于任意的 $x, y \in \omega, x < y, x = y, y < x$, 这三种情况至少出现其中之一。结合前面已经得出的这三种情况至多出现一种, 所以这三种情况有且仅有其中之一出现。

根据命题 5.3.8, 我们这里所定义的序 $<$ 满足反自反性、传递性、三分性, 因而是 ω 上的全序关系, 即 $\langle \omega, < \rangle$ 为全序集。由于所定义的序 $<$ 是根据 ω 上的运算定义出来的, 所以序 $<$ 也与 ω 上的运算有一定的联系。

【命题 5.3.9】 对于任意的 $x, y, z \in \omega$:

(1) 如果 $x < y$, 则 $x + z < y + z$;

(2) 如果 $x < y$ 且 $z \neq 0$, 则 $x \cdot z < y \cdot z$ 。

证明: (1) 根据 $x < y$ 可得, 存在 $u \in \omega$, 且 $u \neq 0$, 使得 $x + u = y$ 。进而, $x + u + z = y + z$ 。根据加法的交换律和结合律, 可得 $x + z + u = y + z$, 由于 $u \neq 0$, 所以, $x + z < y + z$ 。

(2) 根据 $x < y$ 可得, 存在 $u \in \omega$, 且 $u \neq 0$, 使得 $x + u = y$ 。进而, $(x + u) \cdot z = y \cdot z$ 。根据乘法对加法的分配率, 可得 $x \cdot z + u \cdot z = y \cdot z$ 。由于 $u \neq 0$, 且 $z \neq 0$, 容易得出 $u \cdot z \neq 0$, 所以可得 $x \cdot z < y \cdot z$ 。

■

此外, 如果 $x \cdot y = 0$, 则可以得出: 要么 $x = 0$, 要么 $y = 0$ 。因为, 如果 $x, y \neq 0$, 则令 $x = u^+, y = v^+$, 其中, $u, v \in \omega$ 。则根据乘法定义和命题 5.3.2 的 (2), 可以得到

$$0 = x \cdot y = u^+ \cdot v^+ = u^+ + u^+ \cdot v = (u + u^+ \cdot v)^+$$

这说明 0 是自然数 $u + u^+ \cdot v$ 的后继元素, 矛盾。

后面, 我们会将自然数的乘法 $x \cdot y$ 按照通常习惯简写为 xy 。

5.4 整数

前面几节中, 我们在 ZF 体系内得到了自然数集 ω , 并在 ω 上定义了加法和乘法运算以及序。本节我们利用自然数集 ω , 以及 ω 上的运算和序, 在 ZF 体系内利用集合知识, 构造整数集 Z 以及 Z 上的运算和序。

对于整数集 Z , 根据以前对整数的一些了解, 我们知道整数集比自然数集多出了负整数。由于负整数可以由两个自然数通过减法运算得到, 而减法运算又不满足交换律, 因而, 我们就想到用有顺序的两个自然数来表示一个整数, 即采用自然数的有序对来表示整数。比如, 我们可以采用 $\langle 3, 5 \rangle$ 来表示 -2 。当然, 正整数——也就是自然数——同样可以用这种方法来表示, 比如采用 $\langle 5, 3 \rangle$ 来表示 2。按照这个思路, 那么有序对 $\langle 2, 4 \rangle$ 也可以表示 -2 , 所以应该将 $\langle 3, 5 \rangle$ 和 $\langle 2, 4 \rangle$ 看成同一个整数。我们采用等价类的概念, 将 $\langle 3, 5 \rangle$ 和 $\langle 2, 4 \rangle$ 放入同一个等价类中, 这样, 它们就可以被看成是同一个对象 -2 了。由于 $3 - 5 = 2 - 4$ 可以用 ω 上已经定义的加法等价地表示为 $3 + 4 = 2 + 5$, 所以基于上述分析, 有如下定义。

【定义 5.4.1】 在积集 $\omega \times \omega$ 上定义等价关系 $\sim$ 如下:

$$\langle x, y \rangle \sim \langle u, v \rangle, \quad \text{如果 } x + v = u + y \quad (5.4.1)$$

如果以集合的形式表示作为 $(\omega \times \omega) \times (\omega \times \omega)$ 子集的等价关系 $\sim$, 即为

$$\sim = \{ \langle \langle x, y \rangle, \langle u, v \rangle \rangle \mid x + v = u + y, \quad x, y, u, v \in \omega \}$$

可以验证 $\sim$ 确实是 $\omega \times \omega$ 上的等价关系: 根据定义, 自反性 $\langle x, y \rangle \sim \langle x, y \rangle$ 是显然的; 对于对称性, 如果 $\langle x, y \rangle \sim \langle u, v \rangle$, 即 $x + v = u + y$, 这也就是 $u + y = x + v$, 因而 $\langle u, v \rangle \sim \langle x, y \rangle$; 对于传递性, 如果 $\langle x, y \rangle \sim \langle u, v \rangle$ 且 $\langle u, v \rangle \sim \langle s, t \rangle$, 根据等价关系的定义, $x + v = u + y, u + t = s + v$, 则有 $x + v + u + t = u + y + s + v$, 根据加法消去律可得 $x + t = y + s = s + y$, 因而可得 $\langle x, y \rangle \sim \langle s, t \rangle$ 。

【定义 5.4.2】 称积集 $\omega \times \omega$ 关于等价关系 $\sim$ 的商集 $(\omega \times \omega) / \sim$ 为整数集 (set of integers), 商集 $(\omega \times \omega) / \sim$ 的元素称为整数 (integer)。

按照以往的习惯, 将整数集用符号 Z 来表示。对于商集 $(\omega \times \omega) / \sim$ 来说, 其元素为等价

类 $[\langle x, y \rangle] = \{\langle u, v \rangle \in \omega \times \omega \mid \langle u, v \rangle \sim \langle x, y \rangle\}$, 用来表示之前我们所了解的“通常的”整数 $x - y$ 。比如, -2 表示为等价类

$$[\langle 1, 3 \rangle] = \{\langle u, v \rangle \in \omega \times \omega \mid \langle u, v \rangle \sim \langle 1, 3 \rangle\} = [\langle 0, 2 \rangle] = [\langle 2, 4 \rangle] = [\langle 3, 5 \rangle] = \dots$$

2 表示为等价类

$$[\langle 5, 3 \rangle] = \{\langle u, v \rangle \in \omega \times \omega \mid \langle u, v \rangle \sim \langle 5, 3 \rangle\} = [\langle 2, 0 \rangle] = [\langle 6, 4 \rangle] = [\langle 4, 2 \rangle] = \dots$$

在定义 Z 的基础上, 就可以定义 Z 上的运算和序了, 首先定义加法运算。

【定义 5.4.3】 整数的加法定义为: $[\langle x, y \rangle] + [\langle u, v \rangle] = [\langle x + u, y + v \rangle]$ 。

注意, 我们还是采用惯用符号“+”来表示整数的加法。在 4.3 节中曾提到过“良定义”的概念: 由于等价类是一个集合, 其中的每一个元素都可以作为代表元, 所以, 当对等价类进行操作时, 如果该操作是以等价类的代表元进行的, 那么就需要说明这种操作与代表元的选取无关。具体到这里, 我们要说明, 如果 $\langle x_1, y_1 \rangle \sim \langle x, y \rangle$, $\langle u_1, v_1 \rangle \sim \langle u, v \rangle$, 则有 $\langle x_1 + u_1, y_1 + v_1 \rangle \sim \langle x + u, y + v \rangle$ 。事实上, 根据定义 5.4.1, 有 $x_1 + y = x + y_1$, $u_1 + v = u + v_1$, 进而 $x_1 + y + u_1 + v = x + y_1 + u + v_1$, 也即 $x_1 + u_1 + y + v = x + u + y_1 + v_1$ 。因而, 我们所定义的整数的加法确实是良定义的。比如, 由于 $[\langle 1, 3 \rangle] = [\langle 2, 4 \rangle]$, $[\langle 2, 1 \rangle] = [\langle 3, 2 \rangle]$, 所以, $[\langle 1, 3 \rangle] + [\langle 2, 1 \rangle]$ 应该与 $[\langle 2, 4 \rangle] + [\langle 3, 2 \rangle]$ 是相等的, 而这两个加法的计算结果 $[\langle 3, 4 \rangle]$ 与 $[\langle 5, 6 \rangle]$ 确实是相等的。

下面命题说明了所定义的整数加法满足交换律和结合律。

【命题 5.4.1】 (1) $[\langle x, y \rangle] + [\langle u, v \rangle] = [\langle u, v \rangle] + [\langle x, y \rangle]$

(2) $([\langle x, y \rangle] + [\langle u, v \rangle]) + [\langle s, t \rangle] = [\langle x, y \rangle] + ([\langle u, v \rangle] + [\langle s, t \rangle])$

证明: (1) 根据整数的加法定义, 有

$$[\langle x, y \rangle] + [\langle u, v \rangle] = [\langle x + u, y + v \rangle]$$

$$[\langle u, v \rangle] + [\langle x, y \rangle] = [\langle u + x, v + y \rangle]$$

由于自然数的加法满足交换律, 所以,

$$[\langle x, y \rangle] + [\langle u, v \rangle] = [\langle u, v \rangle] + [\langle x, y \rangle]$$

(2) 根据整数的加法定义, 有

$$\begin{aligned} ([\langle x, y \rangle] + [\langle u, v \rangle]) + [\langle s, t \rangle] &= [\langle x + u, y + v \rangle] + [\langle s, t \rangle] \\ &= [\langle (x + u) + s, (y + v) + t \rangle] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\langle x, y \rangle] + ([\langle u, v \rangle] + [\langle s, t \rangle]) &= [\langle x, y \rangle] + [\langle u + s, v + t \rangle] \\ &= [\langle x + (u + s), y + (v + t) \rangle] \end{aligned}$$

由于自然数的加法满足结合律, 所以,

$$([\langle x, y \rangle] + [\langle u, v \rangle]) + [\langle s, t \rangle] = [\langle x, y \rangle] + ([\langle u, v \rangle] + [\langle s, t \rangle])$$

考虑 Z 中元素 $[\langle 0, 0 \rangle] = \{\langle x, x \rangle \mid x \in \omega\}$, 有如下命题。

【命题 5.4.2】 (1) 对于任意的 $[\langle x, y \rangle] \in Z$, 有 $[\langle x, y \rangle] + [\langle 0, 0 \rangle] = [\langle x, y \rangle]$ 。

(2) 对于任意的 $[\langle x, y \rangle] \in Z$, 存在 $[\langle u, v \rangle] \in Z$, 有 $[\langle x, y \rangle] + [\langle u, v \rangle] = [\langle 0, 0 \rangle]$ 。

证明: (1) 根据整数的加法定义, 有

$$[\langle x, y \rangle] + [\langle 0, 0 \rangle] = [\langle x + 0, y + 0 \rangle] = [\langle x, y \rangle]$$

(2) 取 $[\langle u, v \rangle] = [\langle y, x \rangle]$, 则根据整数的加法定义, 有

$$[\langle x, y \rangle] + [\langle y, x \rangle] = [\langle x + y, y + x \rangle] = [\langle x + y, x + y \rangle] = [\langle 0, 0 \rangle]$$

命题 5.4.2 说明了整数加法具有单位元(identity element)和逆元(inverse element)。具体地,我们将 $[\langle 0, 0 \rangle]$ 称为整数加法的单位元,将 $[\langle y, x \rangle]$ 称为 $[\langle x, y \rangle]$ 的加法逆元,记为 $[\langle y, x \rangle] = -[\langle x, y \rangle]$ 。事实上,对于任意的 $[\langle x, y \rangle] \in Z$,其逆元是唯一的。因为,如果存在 $[\langle u, v \rangle], [\langle s, t \rangle] \in Z$,满足 $[\langle x, y \rangle] + [\langle u, v \rangle] = [\langle 0, 0 \rangle]$ 和 $[\langle x, y \rangle] + [\langle s, t \rangle] = [\langle 0, 0 \rangle]$,则可以得到

$$\begin{aligned} [\langle u, v \rangle] &= [\langle u, v \rangle] + [\langle 0, 0 \rangle] = [\langle u, v \rangle] + ([\langle x, y \rangle] + [\langle s, t \rangle]) \\ &= ([\langle u, v \rangle] + [\langle x, y \rangle]) + [\langle s, t \rangle] = ([\langle x, y \rangle] + [\langle u, v \rangle]) + [\langle s, t \rangle] \\ &= [\langle 0, 0 \rangle] + [\langle s, t \rangle] = [\langle s, t \rangle] \end{aligned}$$

有了加法逆元的概念,就可以引入整数的减法:

$$[\langle x, y \rangle] - [\langle u, v \rangle] = [\langle x, y \rangle] + (-[\langle u, v \rangle])$$

利用整数减法的概念,很容易证明加法消去律,即根据 $[\langle x, y \rangle] + [\langle s, t \rangle] = [\langle u, v \rangle] + [\langle s, t \rangle]$,等式两边同时减去 $[\langle s, t \rangle]$,即得 $[\langle x, y \rangle] = [\langle u, v \rangle]$ 。

根据先前对整数的了解, $(x-y) + (u-v) = (x+u) - (y+v)$ 启示我们定义整数的加法,类似地, $(x-y) \cdot (u-v) = (xu+yv) - (xv+yu)$ 启示我们定义整数的乘法。

【定义 5.4.4】 整数的乘法定义为: $[\langle x, y \rangle] \cdot [\langle u, v \rangle] = [\langle xu+yv, xv+yu \rangle]$ 。

整数的乘法定义也是良定义的。因为,如果 $\langle x_1, y_1 \rangle \sim \langle x, y \rangle, \langle u_1, v_1 \rangle \sim \langle u, v \rangle$,则有 $\langle x_1 u_1 + y_1 v_1, x_1 v_1 + y_1 u_1 \rangle \sim \langle xu+yv, xv+yu \rangle$ 。事实上,根据 $x_1 + y = x + y_1, u_1 + v = u + v_1$,可以得到如下式子:

$$\begin{aligned} (x_1 + y)u_1 &= (x + y_1)u_1, & \text{即 } x_1 u_1 + y u_1 &= x u_1 + y_1 u_1 \\ (x + y_1)v_1 &= (x_1 + y)v_1, & \text{即 } x v_1 + y_1 v_1 &= x_1 v_1 + y v_1 \\ (u_1 + v)x &= (u + v_1)x, & \text{即 } u_1 x + v x &= u x + v_1 x \\ (u + v_1)y &= (u_1 + v)y, & \text{即 } u y + v_1 y &= u_1 y + v y \end{aligned}$$

然后将它们都加在一起,化简后可以得到

$$x_1 u_1 + y_1 v_1 + x v + y u = x u + y v + x_1 v_1 + y_1 u_1$$

下面命题说明了所定义的整数乘法满足交换律、结合律、对加法的分配律。

【命题 5.4.3】 (1) $[\langle x, y \rangle] \cdot [\langle u, v \rangle] = [\langle u, v \rangle] \cdot [\langle x, y \rangle]$ 。

(2) $([\langle x, y \rangle] \cdot [\langle u, v \rangle]) \cdot [\langle s, t \rangle] = [\langle x, y \rangle] \cdot ([\langle u, v \rangle] \cdot [\langle s, t \rangle])$ 。

(3) $[\langle x, y \rangle] \cdot ([\langle u, v \rangle] + [\langle s, t \rangle]) = [\langle x, y \rangle] \cdot [\langle u, v \rangle] + [\langle x, y \rangle] \cdot [\langle s, t \rangle]$ 。

证明: (1) $[\langle x, y \rangle] \cdot [\langle u, v \rangle] = [\langle xu+yv, xv+yu \rangle]$

$$[\langle u, v \rangle] \cdot [\langle x, y \rangle] = [\langle ux+vy, uy+vx \rangle]$$

再根据自然数的加法交换律和乘法交换律即得。

(2) 根据整数的乘法定义和自然数的乘法对加法的分配律,有

$$\begin{aligned} ([\langle x, y \rangle] \cdot [\langle u, v \rangle]) \cdot [\langle s, t \rangle] &= [\langle xu+yv, xv+yu \rangle] \cdot [\langle s, t \rangle] \\ &= [\langle xus+yvs+xvt+yut, xut+yvt+xvs+yus \rangle] \\ [\langle x, y \rangle] \cdot ([\langle u, v \rangle] \cdot [\langle s, t \rangle]) &= [\langle x, y \rangle] \cdot [\langle us+vt, ut+vs \rangle] \\ &= [\langle xus+xvt+yut+yvs, xut+xvs+yus+yvt \rangle] \end{aligned}$$

再根据自然数的加法结合律即得。

$$\begin{aligned} (3) [\langle x, y \rangle] \cdot ([\langle u, v \rangle] + [\langle s, t \rangle]) &= [\langle x, y \rangle] \cdot [\langle u+s, v+t \rangle] \\ &= [\langle x(u+s)+y(v+t), x(v+t)+y(u+s) \rangle] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [\langle x, y \rangle] \cdot [\langle u, v \rangle] + [\langle x, y \rangle] \cdot [\langle s, t \rangle] \\
&= [\langle xu + yv, xv + yu \rangle] + [\langle xs + yt, xt + ys \rangle] \\
&= [\langle xu + yv + xs + yt, xv + yu + xt + ys \rangle]
\end{aligned}$$

根据自然数的乘法对加法的分配律即得。

考虑 Z 中元素 $[\langle 1, 0 \rangle] = \{\langle x+1, x \rangle \mid x \in \omega\}$, 根据整数乘法的定义, 我们很容易得到如下命题。

【命题 5.4.4】 对于任意的 $[\langle x, y \rangle] \in Z$, 有 $[\langle x, y \rangle] \cdot [\langle 1, 0 \rangle] = [\langle x, y \rangle]$ 。

可以看出, $[\langle 1, 0 \rangle]$ 是整数乘法的单位元。

根据 $x - y < u - v$ 等价于 $x + v < u + y$, 这启示我们按照如下方式定义整数的序:

【定义 5.4.5】 如果 $x + v < u + y$, 我们称 $[\langle x, y \rangle] < [\langle u, v \rangle]$ 。

整数的序的定义也是良定义的。因为, 如果 $\langle x_1, y_1 \rangle \sim \langle x, y \rangle, \langle u_1, v_1 \rangle \sim \langle u, v \rangle$, 则有 $[\langle x_1, y_1 \rangle] < [\langle u_1, v_1 \rangle]$ 。这是因为, 对于 $x + v < u + y$, 根据命题 5.3.9, 有

$$x + v + (y_1 + v_1) < u + y + (y_1 + v_1)$$

也即

$$(x + y_1) + v + v_1 < (u + v_1) + y + y_1$$

根据 $x_1 + y = x + y_1, u_1 + v = u + v_1$, 可以得到

$$(x_1 + y) + v + v_1 < (u_1 + v) + y + y_1$$

也即

$$(x_1 + v_1) + v + y < (u_1 + y_1) + v + y$$

再根据自然数加法的消去律可得 $x_1 + v_1 < u_1 + y_1$, 此即为 $\langle x_1, y_1 \rangle < \langle u_1, v_1 \rangle$ 。

下面的命题显示出了整数的序是一种全序关系, 即 $\langle Z, < \rangle$ 为全序集。

【命题 5.4.5】 对于任意的 $[\langle x, y \rangle], [\langle u, v \rangle], [\langle s, t \rangle] \in Z$, 有:

- (1) $[\langle x, y \rangle] \not< [\langle x, y \rangle]$;
- (2) $[\langle x, y \rangle] < [\langle u, v \rangle]$ 且 $[\langle u, v \rangle] < [\langle s, t \rangle]$, 则 $[\langle x, y \rangle] < [\langle s, t \rangle]$;
- (3) $[\langle x, y \rangle] < [\langle u, v \rangle], [\langle x, y \rangle] = [\langle u, v \rangle], [\langle u, v \rangle] < [\langle x, y \rangle]$, 这三种情况有且仅有其中之一出现。

证明: (1) 根据自然数集的序的性质, $x + y \not< x + y$, 所以 $[\langle x, y \rangle] \not< [\langle x, y \rangle]$ 。

(2) 根据题设有 $x + v < u + y, u + t < s + v$ 。因而存在 $a, b \in \omega$, 且 $a, b \neq 0$, 满足 $(x + v) + a = (u + y), (u + t) + b = (s + v)$, 因此,

$$(x + v) + a + (u + t) + b = (u + y) + (s + v)$$

根据自然数的加法消去律可得, $x + a + t + b = y + s$ 。注意到 $a + b \neq 0$, 所以可得 $x + t < y + s$, 这说明了 $[\langle x, y \rangle] < [\langle s, t \rangle]$ 。

(3) 根据整数上序的定义, 题设中的三种情况相当于 $x + v < u + y, x + v = u + y, u + y < x + v$ 。根据自然数集的序的三分性可得, 上述这三种情况只能是有且仅有其中之一会出现。

如果 $[\langle 0, 0 \rangle] < [\langle x, y \rangle]$, 则我们称整数 $[\langle x, y \rangle]$ 是正的 (positive), 或是正整数 (positive integer); 如果 $[\langle x, y \rangle] < [\langle 0, 0 \rangle]$, 则称整数 $[\langle x, y \rangle]$ 是负的 (negative), 或是负整

数(negative integer)。如果 $x < y$, 则 $[\langle x, y \rangle] < [\langle 0, 0 \rangle]$, 且 $[\langle 0, 0 \rangle] < [\langle y, x \rangle] = -[\langle x, y \rangle]$; 也就是说, $[\langle x, y \rangle] < [\langle 0, 0 \rangle]$ 当且仅当 $[\langle 0, 0 \rangle] < [\langle y, x \rangle] = -[\langle x, y \rangle]$ 。根据命题 5.4.5, 任意整数 $[\langle x, y \rangle]$ 与加法单位元 $[\langle 0, 0 \rangle]$ 的关系为下列情况中的一种: $[\langle x, y \rangle] < [\langle 0, 0 \rangle]$, $[\langle x, y \rangle] = [\langle 0, 0 \rangle]$, $[\langle 0, 0 \rangle] < [\langle x, y \rangle]$, 也就是说整数 $[\langle x, y \rangle]$ 为负整数、等于 0 或者是正整数。

在整数集上, 根据 $[\langle x, y \rangle] \cdot [\langle u, v \rangle] = [\langle 0, 0 \rangle]$, 则可以得出: 要么 $[\langle x, y \rangle] = [\langle 0, 0 \rangle]$, 要么 $[\langle u, v \rangle] = [\langle 0, 0 \rangle]$ 。因为 $[\langle x, y \rangle] \cdot [\langle u, v \rangle] = [\langle 0, 0 \rangle]$, 也就是 $[\langle xu + yv, xv + yu \rangle] = [\langle 0, 0 \rangle]$, 即 $xu + yv = xv + yu$ 。如果 $[\langle x, y \rangle] \neq [\langle 0, 0 \rangle]$, $[\langle u, v \rangle] \neq [\langle 0, 0 \rangle]$, 即 $x \neq y$, $u \neq v$, 那么根据自然数的三分性可得 $x < y$ 或者 $y < x$, $u < v$ 或者 $v < u$ 。不失一般性, 假设 $x < y, u < v$, 则有 $x + s = y$ 和 $u + t = v$, 其中 $s, t \neq 0$ 。因而有

$$xu + (x + s)(u + t) = x(u + t) + (x + s)u$$

即

$$xu + xu + xt + su + st = xu + xt + xu + su$$

根据自然数的加法消去律, 可得 $st = 0$, 因而可得 $s = 0$ 或者 $t = 0$, 而这与 $s, t \neq 0$ 矛盾。利用此结论, 很容易得出整数的乘法满足消去律, 即如果 $[\langle x, y \rangle] \cdot [\langle s, t \rangle] = [\langle u, v \rangle] \cdot [\langle s, t \rangle]$, 且 $[\langle s, t \rangle] \neq [\langle 0, 0 \rangle]$, 则一定有 $[\langle x, y \rangle] = [\langle u, v \rangle]$ 。这是因为, 对于整数 $[\langle u, v \rangle] \cdot [\langle s, t \rangle]$ 的加法逆元 $-([\langle u, v \rangle] \cdot [\langle s, t \rangle])$, 有

$$\begin{aligned} & [\langle x, y \rangle] \cdot [\langle s, t \rangle] + (-([\langle u, v \rangle] \cdot [\langle s, t \rangle])) \\ &= [\langle u, v \rangle] \cdot [\langle s, t \rangle] + (-([\langle u, v \rangle] \cdot [\langle s, t \rangle])) \\ &= [\langle 0, 0 \rangle] \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} -([\langle u, v \rangle] \cdot [\langle s, t \rangle]) &= -[\langle us + vt, ut + vs \rangle] = [\langle ut + vs, us + vt \rangle] \\ &= [\langle vs + ut, vt + us \rangle] = [\langle v, u \rangle] \cdot [\langle s, t \rangle] \\ &= (-[\langle u, v \rangle]) \cdot [\langle s, t \rangle] \end{aligned}$$

因而有

$$\begin{aligned} & [\langle x, y \rangle] \cdot [\langle s, t \rangle] + (-([\langle u, v \rangle] \cdot [\langle s, t \rangle])) \\ &= [\langle x, y \rangle] \cdot [\langle s, t \rangle] + (-[\langle u, v \rangle]) \cdot [\langle s, t \rangle] \\ &= ([\langle x, y \rangle] + (-[\langle u, v \rangle])) \cdot [\langle s, t \rangle] \\ &= [\langle 0, 0 \rangle] \end{aligned}$$

由于 $[\langle s, t \rangle] \neq [\langle 0, 0 \rangle]$, 所以可得 $[\langle x, y \rangle] + (-[\langle u, v \rangle]) = [\langle 0, 0 \rangle]$, 进而可得

$$[\langle x, y \rangle] = -(-[\langle u, v \rangle]) = -[\langle v, u \rangle] = [\langle u, v \rangle]$$

【命题 5.4.6】 对于任意的 $[\langle x, y \rangle], [\langle u, v \rangle], [\langle s, t \rangle] \in \mathbb{Z}$, 有:

- (1) 如果 $[\langle x, y \rangle] < [\langle u, v \rangle]$, 则 $[\langle x, y \rangle] + [\langle s, t \rangle] < [\langle u, v \rangle] + [\langle s, t \rangle]$;
- (2) 如果 $[\langle x, y \rangle] < [\langle u, v \rangle]$ 且 $[\langle 0, 0 \rangle] < [\langle s, t \rangle]$, 则 $[\langle x, y \rangle] \cdot [\langle s, t \rangle] < [\langle u, v \rangle] \cdot [\langle s, t \rangle]$ 。

证明: (1) 根据 $[\langle x, y \rangle] < [\langle u, v \rangle]$ 可得, $x + v < u + y$ 。再根据命题 5.3.9 的(1)可得 $x + v + s + t < u + y + s + t$, 也即 $(x + s) + (v + t) < (u + s) + (y + t)$, 这说明了 $[\langle x + s, y + t \rangle] < [\langle u + s, v + t \rangle]$, 因而 $[\langle x, y \rangle] + [\langle s, t \rangle] < [\langle u, v \rangle] + [\langle s, t \rangle]$ 。

(2) 根据题设可得, $x + v < u + y, t < s$, 则存在 $k \in \omega$ 且 $k \neq 0$, 使得 $t + k = s$ 。根据命题

5.3.9 的(2), 可得 $(x+v)k < (u+y)k$, 再根据命题 5.3.9 的(1), 两边同时加上 $(x+v)t + (y+u)t$, 得到 $(x+v)(t+k) + (u+y)t < (u+y)(k+t) + (x+v)t$, 即 $(x+v)s + (u+y)t < (u+y)s + (x+v)t$, 进一步 $xs + yt + ut + vs < us + vt + xt + ys$, 这说明了 $[\langle xs + yt, xt + ys \rangle] < [\langle us + vt, ut + vs \rangle]$, 此即 $[\langle x, y \rangle] \cdot [\langle s, t \rangle] < [\langle u, v \rangle] \cdot [\langle s, t \rangle]$ 。

可以看出, 所构造出的整数集以及关于整数的运算和序, 我们所认识的整数集以及整数的运算和序具有完全一样的性质。

根据以前对整数的了解, 自然数集是整数集的子集。现在, 自然数集 ω 显然不是整数集 Z 的子集。然而, 自然数集 ω 却可以同构嵌入(isomorphic embedding)到整数集 Z 当中。具体地, 定义 ω 到 Z 的映射 $f: \omega \rightarrow Z$, 其中,

$$x \mapsto [\langle x, 0 \rangle] \quad (5.4.2)$$

对于这个映射 f , 有如下命题。

【命题 5.4.7】 映射 f 是 ω 到 Z 的单射, 且满足对于任意的 $x, y \in \omega$, 有:

- (1) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 。
- (2) $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ 。
- (3) $x <_y$ 当且仅当 $f(x) < f(y)$ 。

证明: 假设 $x \neq y$, 那么, 我们说一定有 $f(x) \neq f(y)$, 否则, $[\langle x, 0 \rangle] = [\langle y, 0 \rangle]$, 也就是说 $\langle x, 0 \rangle \sim \langle y, 0 \rangle$, 因而可得 $x = y$, 与假设矛盾。所以 f 为单射。

$$(1) f(x+y) = [\langle x+y, 0 \rangle] = [\langle x, 0 \rangle] + [\langle y, 0 \rangle] = f(x) + f(y)。$$

$$(2) f(x \cdot y) = [\langle x \cdot y, 0 \rangle] = [\langle x, 0 \rangle] \cdot [\langle y, 0 \rangle] = f(x) \cdot f(y)。$$

(3) 由于 ω 和 Z 均为全序集, 根据 4.5 节中全序集的保序映射的性质可知, 只需要证明 $x <_y$ 蕴含 $f(x) < f(y)$ 即可。假设 $x <_y$, 则 $x+0 <_y y+0$, 这也就是 $[\langle x, 0 \rangle] < [\langle y, 0 \rangle]$, 即 $f(x) < f(y)$ 。

从命题 5.4.7 可以看出, 对任意的 $x, y \in \omega$, 当对其作加法运算、乘法运算、序的比较时, 其在映射 f 下所对应的对象 $f(x), f(y) \in Z$ 均会保持不变, 因而, 从实质上来说, 可以将 $f(x), f(y)$ 看作 x, y 。由于 $\text{img}(f) \subset Z$, 我们说 ω 同构嵌入到 Z 之中。

5.5 有理数

本节我们将利用整数构造有理数, 所采用的方法和 5.4 节中的方法非常类似。根据以往我们对有理数的了解, 有理数可以表示为两个整数相除, 由于除法不满足交换律, 所以可以用整数的有序对来表示有理数。比如, $2/7$ 可以用 $\langle 2, 7 \rangle$ 来表示。与 5.4 节类似, 这种表示同样会面临同一个有理数可以用多个有序对表示的情况, 比如 $2/7$ 还可以用 $\langle 4, 14 \rangle$ 来表示。对于此情况的处理, 还是采用等价类的概念, 将 $\langle 2, 7 \rangle$ 和 $\langle 4, 14 \rangle$ 放入同一个等价类之中, 以将它们看作同一个对象。由于 $2/7 = 4/14$ 可以用整数集上的乘法表示为 $2 \cdot 14 = 4 \cdot 7$, 并注意有序对的第二个元素不能为 0, 有如下定义。

【定义 5.5.1】 令 $Z^* = Z - \{0\}$, 在积集 $Z \times Z^*$ 上定义等价关系 $\sim$ 如下:

$$\langle m, n \rangle \sim \langle k, l \rangle, \quad \text{如果 } m \cdot l = k \cdot n \quad (5.5.1)$$

如果以集合的形式表示作为 $(\omega \times \omega) \times (\omega \times \omega)$ 子集的等价关系 $\sim$,即为

$$\sim = \{ \langle \langle m, n \rangle, \langle k, l \rangle \rangle \mid m \cdot l = k \cdot n, m, n, k, l \in \mathbb{Z} \}$$

可以验证 $\sim$ 确实是 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ 上的等价关系: 根据定义, 自反性 $\langle m, n \rangle \sim \langle m, n \rangle$ 是显然的; 对于对称性, 如果 $\langle m, n \rangle \sim \langle k, l \rangle$, 即 $m \cdot l = k \cdot n$, 这也就是 $k \cdot n = m \cdot l$, 因而 $\langle k, l \rangle \sim \langle m, n \rangle$; 对于传递性, 如果 $\langle m, n \rangle \sim \langle k, l \rangle$ 且 $\langle k, l \rangle \sim \langle p, q \rangle$, 根据等价关系的定义, $m \cdot l = k \cdot n$, $k \cdot q = p \cdot l$, 则有 $m \cdot l \cdot k \cdot q = k \cdot n \cdot p \cdot l$, 根据整数的乘法消去律可得 $m \cdot q = p \cdot n$, 因而可得 $\langle m, n \rangle \sim \langle p, q \rangle$ 。

【定义 5.5.2】 称积集 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ 关于等价关系 $\sim$ 的商集 $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/\sim$ 为有理数集(set of rational numbers), 商集 $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/\sim$ 的元素称为有理数(rational number)。

按照以往的习惯, 我们将有理数集用符号 $\mathbb{Q}$ 来表示。对于商集 $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/\sim$, 其元素为等价类 $[\langle m, n \rangle] = \{ \langle p, q \rangle \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid \langle p, q \rangle \sim \langle m, n \rangle \}$, 比如, $1/2$ 表示为等价类

$$\begin{aligned} [\langle 1, 2 \rangle] &= \{ \langle p, q \rangle \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid \langle p, q \rangle \sim \langle 1, 2 \rangle \} \\ &= [\langle 2, 4 \rangle] = [\langle 3, 6 \rangle] = [\langle 5, 10 \rangle] = \dots \end{aligned}$$

$6/3$ 表示为等价类

$$\begin{aligned} [\langle 6, 3 \rangle] &= \{ \langle p, q \rangle \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid \langle p, q \rangle \sim \langle 6, 3 \rangle \} \\ &= [\langle 4, 2 \rangle] = [\langle 8, 4 \rangle] = [\langle 2, 1 \rangle] = \dots \end{aligned}$$

定义有理数的加法运算如下。

【定义 5.5.3】 有理数的加法定义为: $[\langle m, n \rangle] + [\langle k, l \rangle] = [\langle ml + kn, nl \rangle]$ 。

首先, 由于 $n \neq 0$ 且 $l \neq 0$, 所以 $nl \neq 0$ 。其次, 我们所定义的关于有理数的加法是良定义的: 如果 $\langle m_1, n_1 \rangle \sim \langle m, n \rangle$, $\langle k_1, l_1 \rangle \sim \langle k, l \rangle$, 则有 $\langle m_1 l_1 + k_1 n_1, n_1 l_1 \rangle \sim \langle ml + kn, nl \rangle$ 。因为根据等价的定义, $m_1 n = mn_1$, $k_1 l = kl_1$, 进而 $(m_1 n) l_1 l + (k_1 l) n_1 n = (mn_1) l_1 l + (kl_1) n_1 n$, 这相当于 $m_1 l_1 nl + k_1 n_1 nl = ml n_1 l_1 + kn n_1 l_1$, 因而 $(m_1 l_1 + k_1 n_1) nl = (ml + kn) n_1 l_1$, 这说明 $\langle m_1 l_1 + k_1 n_1, n_1 l_1 \rangle \sim \langle ml + kn, nl \rangle$ 。比如, 由于 $[\langle 1, 3 \rangle] = [\langle 2, 6 \rangle]$, $[\langle 1, 2 \rangle] = [\langle 2, 4 \rangle]$, 所以, $[\langle 1, 3 \rangle] + [\langle 1, 2 \rangle]$ 应该与 $[\langle 2, 6 \rangle] + [\langle 2, 4 \rangle]$ 是相等的, 而这两个加法的计算结果 $[\langle 5, 6 \rangle]$ 与 $[\langle 20, 24 \rangle]$ 确实是相等的。

我们有如下关于有理数加法的结果。这些结果与整数集上的对应结果很类似。

【命题 5.5.1】 (1) $[\langle m, n \rangle] + [\langle k, l \rangle] = [\langle k, l \rangle] + [\langle m, n \rangle]$ 。

(2) $([\langle m, n \rangle] + [\langle k, l \rangle]) + [\langle p, q \rangle] = [\langle m, n \rangle] + ([\langle k, l \rangle] + [\langle p, q \rangle])$ 。

(3) 对于任意的 $[\langle m, n \rangle] \in \mathbb{Q}$, 有 $[\langle m, n \rangle] + [\langle 0, 1 \rangle] = [\langle m, n \rangle]$ 。

(4) 对于任意的 $[\langle m, n \rangle] \in \mathbb{Q}$, 存在 $[\langle k, l \rangle] \in \mathbb{Q}$, 有 $[\langle m, n \rangle] + [\langle k, l \rangle] = [\langle 0, 1 \rangle]$ 。

证明: (1) 根据有理数的加法定义, 有

$$\begin{aligned} [\langle m, n \rangle] + [\langle k, l \rangle] &= [\langle ml + kn, nl \rangle] \\ [\langle k, l \rangle] + [\langle m, n \rangle] &= [\langle kn + ml, ln \rangle] \end{aligned}$$

(2) 根据有理数的加法定义, 有

$$\begin{aligned} ([\langle m, n \rangle] + [\langle k, l \rangle]) + [\langle p, q \rangle] &= [\langle ml + kn, nl \rangle] + [\langle p, q \rangle] \\ &= [\langle mlq + knq + pnl, nlq \rangle] \\ [\langle m, n \rangle] + ([\langle k, l \rangle] + [\langle p, q \rangle]) &= [\langle m, n \rangle] + [\langle kq + pl, lq \rangle] \\ &= [\langle mlq + nkq + npl, lqn \rangle] \end{aligned}$$

(3) 根据有理数的加法定义, 有

$$[\langle m, n \rangle] + [\langle 0, 1 \rangle] = [\langle m \cdot 1 + 0 \cdot n, n \cdot 1 \rangle] = [\langle m, n \rangle]$$

(4) 取 $[\langle k, l \rangle] = [\langle -m, n \rangle]$, 则根据有理数的加法定义, 有

$$[\langle m, n \rangle] + [\langle -m, n \rangle] = [\langle mn + (-m)n, n \cdot n \rangle] = [\langle 0, n \cdot n \rangle] = [\langle 0, 1 \rangle]$$

命题 5.5.1 说明了有理数加法也具有单位元和逆元。我们将 $[\langle 0, 1 \rangle] = \{\langle 0, m \rangle \mid m \in \mathbb{Z}^*\}$ 称为有理数加法的单位元, 将 $[\langle -m, n \rangle]$ 称为 $[\langle m, n \rangle]$ 的加法逆元, 记为 $[\langle -m, n \rangle] = -[\langle m, n \rangle]$ 。此外, 容易证明加法逆元还是唯一的。有了加法逆元的概念, 就可以引入有理数的减法:

$$[\langle m, n \rangle] - [\langle k, l \rangle] = [\langle m, n \rangle] + (-[\langle k, l \rangle])$$

利用减法的概念, 很容易证明加法消去律, 即根据 $[\langle x, y \rangle] + [\langle s, t \rangle] = [\langle u, v \rangle] + [\langle s, t \rangle]$, 等式两边同时减去 $[\langle s, t \rangle]$, 即得 $[\langle x, y \rangle] = [\langle u, v \rangle]$ 。

根据之前对有理数的了解, $(m/n) \cdot (k/l) = (mk)/(nl)$, 这启示我们定义如下有理数的乘法。

【定义 5.5.4】 有理数的乘法定义为: $[\langle m, n \rangle] \cdot [\langle k, l \rangle] = [\langle mk, nl \rangle]$ 。

有理数的乘法定义也是良定义的。因为, 如果 $\langle m_1, n_1 \rangle \sim \langle m, n \rangle$, $\langle k_1, l_1 \rangle \sim \langle k, l \rangle$, 则有 $\langle m_1 k_1, n_1 l_1 \rangle \sim \langle mk, nl \rangle$ 。事实上, 根据 $m_1 n = mn_1$, $k_1 l = kl_1$, 可以得到

$$m_1 k_1 n l = (m_1 n) (k_1 l) = (mn_1) (kl_1) = mk n_1 l_1$$

因而有 $\langle m_1 k_1, n_1 l_1 \rangle \sim \langle mk, nl \rangle$ 。比如, 由于 $[\langle 1, 3 \rangle] = [\langle 2, 6 \rangle]$, $[\langle 1, 2 \rangle] = [\langle 2, 4 \rangle]$, 所以, $[\langle 1, 3 \rangle] \cdot [\langle 1, 2 \rangle]$ 应该与 $[\langle 2, 6 \rangle] \cdot [\langle 2, 4 \rangle]$ 是相等的, 而这两个乘法的计算结果 $[\langle 1, 6 \rangle]$ 与 $[\langle 4, 24 \rangle]$ 确实是相等的。

下面命题说明了所定义有理数乘法满足交换律、结合律、对加法的分配律。

【命题 5.5.2】 (1) $[\langle m, n \rangle] \cdot [\langle k, l \rangle] = [\langle k, l \rangle] \cdot [\langle m, n \rangle]$ 。

(2) $([\langle m, n \rangle] \cdot [\langle k, l \rangle]) \cdot [\langle p, q \rangle] = [\langle m, n \rangle] \cdot ([\langle k, l \rangle] \cdot [\langle p, q \rangle])$ 。

(3) $[\langle m, n \rangle] \cdot ([\langle k, l \rangle] + [\langle p, q \rangle]) = [\langle m, n \rangle] \cdot [\langle k, l \rangle] + [\langle m, n \rangle] \cdot [\langle p, q \rangle]$ 。

证明: (1) $[\langle m, n \rangle] \cdot [\langle k, l \rangle] = [\langle mk, nl \rangle]$

$$[\langle k, l \rangle] \cdot [\langle m, n \rangle] = [\langle km, ln \rangle]$$

(2) $([\langle m, n \rangle] \cdot [\langle k, l \rangle]) \cdot [\langle p, q \rangle] = [\langle mk, nl \rangle] \cdot [\langle p, q \rangle] = [\langle (mk)p, (nl)q \rangle]$

$$[\langle m, n \rangle] \cdot ([\langle k, l \rangle] \cdot [\langle p, q \rangle]) = [\langle m, n \rangle] \cdot [\langle kp, lq \rangle] = [\langle m(kp), n(lq) \rangle]$$

(3) $[\langle m, n \rangle] \cdot ([\langle k, l \rangle] + [\langle p, q \rangle]) = [\langle m, n \rangle] \cdot [\langle kq + pl, lq \rangle] = [\langle m(kq + pl), nlq \rangle]$

$$\begin{aligned} [\langle m, n \rangle] \cdot [\langle k, l \rangle] + [\langle m, n \rangle] \cdot [\langle p, q \rangle] &= [\langle mk, nl \rangle] + [\langle mp, nq \rangle] \\ &= [\langle mk \cdot nq + mp \cdot nl, nl \cdot nq \rangle] \\ &= [\langle n(mkq + mpl), n^2 lq \rangle] \end{aligned}$$

由于 $\langle na, nb \rangle \sim \langle a, b \rangle$, 所以有

$$[\langle m, n \rangle] \cdot [\langle k, l \rangle] + [\langle m, n \rangle] \cdot [\langle p, q \rangle] = [\langle mkq + mpl, nlq \rangle]$$

对于 $\mathbb{Q}$ 中元素 $[\langle 1, 1 \rangle] = \{\langle m, m \rangle \mid m \in \mathbb{Z}^*\}$, 根据有理数乘法的定义, 有

$$[\langle m, n \rangle] \cdot [\langle 1, 1 \rangle] = [\langle m, n \rangle] \quad (5.5.2)$$

对于任意的 $[\langle m, n \rangle] \in \mathbb{Q}$, 且 $[\langle m, n \rangle] \neq [\langle 0, 1 \rangle]$, 则有

$$[\langle m, n \rangle] \cdot [\langle n, m \rangle] = [\langle mn, nm \rangle] = [\langle 1, 1 \rangle] \quad (5.5.3)$$

可以看出, $[\langle 1, 1 \rangle]$ 是有理数乘法的单位元, 而且只要 $[\langle m, n \rangle] \neq [\langle 0, 1 \rangle]$, $[\langle m, n \rangle] \in \mathbb{Q}$ 就

有乘法逆元 $[\langle n, m \rangle]$ 。此外,我们还可以看出, $[\langle m, n \rangle] \in Q$ 的乘法逆元 $[\langle n, m \rangle]$ 一定不会等于 $[\langle 0, 1 \rangle]$ 。为了与加法逆元符号上有所区分,将乘法逆元记为 $[\langle n, m \rangle] = [\langle m, n \rangle]^{-1}$ 。因此,对于任意的 $[\langle m, n \rangle] \in Q$,且 $[\langle m, n \rangle] \neq [\langle 0, 1 \rangle]$,我们可以定义乘法的逆运算——除法:

$$[\langle k, l \rangle] \div [\langle m, n \rangle] = [\langle k, l \rangle] \cdot [\langle m, n \rangle]^{-1} \quad (5.5.4)$$

进而,根据乘法的定义,就有

$$[\langle k, l \rangle] \div [\langle m, n \rangle] = [\langle k, l \rangle] \cdot [\langle n, m \rangle] = [\langle kn, lm \rangle] \quad (5.5.5)$$

利用除法的概念,很容易证明乘法消去律,即根据 $[\langle k, l \rangle] \cdot [\langle m, n \rangle] = [\langle p, q \rangle] \cdot [\langle m, n \rangle]$,如果 $[\langle m, n \rangle] \neq [\langle 0, 1 \rangle]$,等式两边同时除以 $[\langle m, n \rangle]$,即得 $[\langle k, l \rangle] = [\langle p, q \rangle]$ 。

至此,我们可以看出,从运算的角度,整数集相对于自然数集引入了减法,有理数集相对于整数集又引入了除法,因此,在有理数集内,四则运算都已经完成了。

根据 $m/n < k/l$ 等价于 $ml < kn$,当 $0 < n$ 且 $0 < l$ 时。注意到,对于任意的 $[\langle m, n \rangle] \in Q$, $[\langle m, n \rangle] = [\langle -m, -n \rangle]$,而且,由于 $n \neq 0$,根据整数的序的三分性可知,要么 $0 < n$,要么 $n < 0$,也就是说,对于任意的等价类 $[\langle m, n \rangle] \in Q$,总会找到合适的代表元满足 $0 < n$ 。因而,按照如下方式定义有理数的序。

【定义 5.5.5】 对于任意的 $[\langle m, n \rangle], [\langle k, l \rangle] \in Q$,且 $0 < n$ 和 $0 < l$,如果 $ml < kn$,我们称 $[\langle m, n \rangle] < [\langle k, l \rangle]$ 。

有理数的序的定义也是良定义的,即如果 $\langle m_1, n_1 \rangle \sim \langle m, n \rangle, \langle k_1, l_1 \rangle \sim \langle k, l \rangle$,则有 $[\langle m_1, n_1 \rangle] < [\langle k_1, l_1 \rangle]$,其中 $0 < n_1$ 和 $0 < l_1$ 。证明方法和上一节中所采用的方法非常类似。具体地,对于 $ml < kn$,由于 $0 < n_1$,且 $0 < l_1$,根据命题 5.4.6,有

$$ml \cdot n_1 \cdot l_1 < kn \cdot n_1 \cdot l_1$$

也即

$$(mn_1)l_1 < (kl_1)nn_1$$

根据 $m_1n = mn_1, k_1l = kl_1$,可以得到

$$(m_1n)l_1 < (k_1l)nn_1$$

也即

$$(m_1l_1)nl < (k_1n_1)nl$$

由于 $0 < n$ 和 $0 < l$,根据整数乘法的消去律可得 $m_1l_1 < k_1n_1$,此即为

$$[\langle m_1, n_1 \rangle] < [\langle k_1, l_1 \rangle]$$

下面的命题显示出了有理数的序也是一种全序关系,即 $\langle Q, < \rangle$ 为全序集。

【命题 5.5.3】 对于任意的 $[\langle m, n \rangle], [\langle k, l \rangle], [\langle p, q \rangle] \in Q$,其中, $0 < n, 0 < l, 0 < q$,有:

- (1) $[\langle m, n \rangle] \not< [\langle m, n \rangle]$;
- (2) $[\langle m, n \rangle] < [\langle k, l \rangle]$ 且 $[\langle k, l \rangle] < [\langle p, q \rangle]$,则 $[\langle m, n \rangle] < [\langle p, q \rangle]$;
- (3) $[\langle m, n \rangle] < [\langle k, l \rangle], [\langle m, n \rangle] = [\langle k, l \rangle], [\langle k, l \rangle] < [\langle m, n \rangle]$,这三种情况有且仅有一种出现。

证明: (1) 由于 $mn \not< mn$,所以 $[\langle m, n \rangle] \not< [\langle m, n \rangle]$ 。

(2) 根据题设,有 $ml < kn, kq < pl$ 。由于 $0 < q$,因而有 $ml \cdot q < kn \cdot q$; $0 < n$,因而 $kq \cdot n < pl \cdot n$ 。根据整数上序的传递性,可知 $mlq < pln$ 。由于 $0 < l$,因而根据整数关于

乘法的消去律可得 $mq < pn$, 这说明了 $[\langle m, n \rangle] < [\langle p, q \rangle]$ 。

(3) 根据有理数上序的定义, 题设中的三种情况相当于 $ml < kn$ 、 $ml = kn$ 、 $kn < ml$ 。根据整数集的序的三分性可得, 上述这三种情况只能是有且仅有其中之一会出现。

不失一般性, 考虑 $0 < n$ 的情况。如果 $[\langle 0, 1 \rangle] < [\langle m, n \rangle]$, 则称有理数 $[\langle m, n \rangle]$ 是正的, 或是正有理数; 如果 $[\langle m, n \rangle] < [\langle 0, 1 \rangle]$, 则称有理数 $[\langle m, n \rangle]$ 是负的, 或是负有理数。如果 $m < 0$, 则 $[\langle m, n \rangle] < [\langle 0, 1 \rangle]$, 且 $[\langle 0, 1 \rangle] < [\langle -m, n \rangle]$; 也就是说, $[\langle m, n \rangle] < [\langle 0, 1 \rangle]$ 当且仅当 $[\langle 0, 1 \rangle] < [\langle -m, n \rangle] = -[\langle m, n \rangle]$ 。根据命题 5.4.5, 任意有理数 $[\langle m, n \rangle]$ 与 $[\langle 0, 1 \rangle]$ 的关系为下列情况中的一种: $[\langle m, n \rangle] < [\langle 0, 1 \rangle]$ 、 $[\langle m, n \rangle] = [\langle 0, 1 \rangle]$ 、 $[\langle 0, 1 \rangle] < [\langle m, n \rangle]$, 也就是说有理数 $[\langle m, n \rangle]$ 为负有理数、等于 0 或者是正有理数。

【命题 5.5.4】 对于任意的 $[\langle m, n \rangle], [\langle k, l \rangle], [\langle p, q \rangle] \in Q$, 其中, $0 < n, 0 < l, 0 < q$, 有:

(1) 如果 $[\langle m, n \rangle] < [\langle k, l \rangle]$, 则 $[\langle m, n \rangle] + [\langle p, q \rangle] < [\langle k, l \rangle] + [\langle p, q \rangle]$;

(2) 如果 $[\langle m, n \rangle] < [\langle k, l \rangle]$ 且 $[\langle 0, 1 \rangle] < [\langle p, q \rangle]$, 则 $[\langle m, n \rangle] \cdot [\langle p, q \rangle] < [\langle k, l \rangle] \cdot [\langle p, q \rangle]$ 。

证明: (1) 根据有理数加法的定义, 有 $[\langle m, n \rangle] + [\langle p, q \rangle] = [\langle mq + pn, nq \rangle]$, $[\langle k, l \rangle] + [\langle p, q \rangle] = [\langle kq + pl, lq \rangle]$ 。根据 $[\langle m, n \rangle] < [\langle k, l \rangle]$, 可得 $ml < kn$, 进而有 $mlq < knq$, 两边同时加上 pnl , 有 $mlq + pnl < knq + pnl$, 也即 $(mq + pn)l < (kq + pl)n$ 。由于 $0 < q$, 所以, 两边同时乘以 q , 可得 $(mq + pn)(lq) < (kq + pl)(nq)$, 这说明了 $[\langle mq + pn, nq \rangle] < [\langle kq + pl, lq \rangle]$, 因而 $[\langle m, n \rangle] + [\langle p, q \rangle] < [\langle k, l \rangle] + [\langle p, q \rangle]$ 。

(2) 根据题设可得, $ml < kn, 0 < p$ 。所以, $mlp < knp$, 由于 $0 < q$, 进而 $mlpq < knpq$, 即 $(mp) \cdot (lq) < (kp) \cdot (nq)$ 。这说明了 $[\langle mp, nq \rangle] < [\langle kp, lq \rangle]$, 因而 $[\langle m, n \rangle] \cdot [\langle p, q \rangle] < [\langle k, l \rangle] \cdot [\langle p, q \rangle]$ 。

为了后面的需要, 我们引入有理数的绝对值 (absolute value) 运算。

【定义 5.5.6】 对于 $[\langle m, n \rangle] \in Q$, 其绝对值 $|[\langle m, n \rangle]|$ 定义为: 当 $[\langle m, n \rangle]$ 是正有理数, 则 $|[\langle m, n \rangle]| = [\langle m, n \rangle]$; 当 $[\langle m, n \rangle]$ 是负有理数, 则 $|[\langle m, n \rangle]| = -[\langle m, n \rangle]$; 当 $[\langle m, n \rangle] = [\langle 0, 1 \rangle]$, 则 $|[\langle m, n \rangle]| = [\langle 0, 1 \rangle]$ 。

由绝对值的定义可以看出, 对于任意的 $[\langle m, n \rangle] \in Q$, 其绝对值 $|[\langle m, n \rangle]|$ 肯定是非负的有理数, 而且我们也很容易得出 $|[\langle m, n \rangle]| = | -[\langle m, n \rangle] |$ 。此外, 绝对值还有诸如 $|[\langle m, n \rangle] + [\langle k, l \rangle]| \leq |[\langle m, n \rangle]| + |[\langle k, l \rangle]|$, $|[\langle m, n \rangle] \cdot [\langle k, l \rangle]| = |[\langle m, n \rangle]| \cdot |[\langle k, l \rangle]|$ 此类性质, 这些性质的证明只需要按照绝对值的定义分情况讨论即可, 这里不再赘述。

虽然这里整数集 Z 不是有理数集 Q 的子集。然而, 整数集 Z 却可以同构嵌入到有理数集 Q 中。具体地, 定义 Z 到 Q 的映射 $f: Z \rightarrow Q$, 其中,

$$m \mapsto [\langle m, 1 \rangle] \quad (5.5.6)$$

对于映射 f , 有如下命题。

【命题 5.5.5】 映射 f 是 Z 到 Q 的单射, 且满足对于任意的 $m, k \in Z$, 有:

(1) $f(m+k) = f(m) + f(k)$;

(2) $f(m \cdot k) = f(m) \cdot f(k)$;

$$(3) f(0)=[\langle 0,1\rangle], f(1)=[\langle 1,1\rangle];$$

$$(4) m < k \text{ 当且仅当 } f(m) < f(k).$$

证明: 假设 $m \neq k$, 那么, 我们说一定有 $f(m) \neq f(k)$, 否则, $[\langle m,1\rangle] = [\langle k,1\rangle]$, 也就是说 $\langle m,1\rangle \sim \langle k,1\rangle$, 因而可得 $m=k$, 与假设矛盾, 所以 f 为单射。

$$(1) f(m+k)=[\langle m+k,1\rangle]=[\langle m,1\rangle]+[\langle k,1\rangle]=f(m)+f(k);$$

$$(2) f(m \cdot k)=[\langle m \cdot k,1\rangle]=[\langle m,1\rangle] \cdot [\langle k,1\rangle]=f(m) \cdot f(k);$$

(3) 根据映射 f 的定义即得;

(4) 由于 Z 和 Q 均为全序集, 因而只需要证明 $m < k$ 蕴含 $f(m) < f(k)$ 即可。假设 $m < k$, 则 $m \cdot 1 < k \cdot 1$, 这也就是 $[\langle m,1\rangle] < [\langle k,1\rangle]$, 即 $f(m) < f(k)$ 。

从命题 5.5.5 可以看出, 对任意的 $m, k \in Z$, 当对其作加法运算、乘法运算、序的比较时, 其在映射 f 下所对应的对象 $f(m), f(k) \in Q$ 均会保持不变, 而且, Z 中的加法单位元和乘法单位元也对应了 Q 中的加法单位元和乘法单位元。因而, 从实质上来说, 可以将 $f(m), f(k)$ 看作 m, k 。由于 $\text{img}(f) \subset Q$, 我们说 Z 同构嵌入到 Q 中。

5.6 实数

前面几节中, 我们依次在 ZF 体系内得到了自然数集、整数集、有理数集, 其中自然数集是由 ZF6 无限公理得以保证的, 整数集是通过将整数视为自然数对完成构造的, 有理数集是通过将有理数视为整数对完成构造的。现在我们还需要对有理数集进行扩展, 因为在一些领域中, 有理数不够用。比如, 我们中学学过的初等几何中, 两边直角边的长度都为 1 的三角形, 其斜边长度为 $\sqrt{2}$, 这是一个无理数。因而, 我们需要引入实数集。实数集相对于前面三个数集而言, 是“非常不同的”数集。下一章我们会看到, 自然数集、整数集、有理数集这三个数集所含有的元素数是“一样多的”, 而实数集的元素数要比它们“多出很多”, 因而, 就不能还按照先前的方法试图将实数表示为有理数对, 因为实数的数目比有理数对的数目多出很多, 换句话说, 所有的有理数对在表示所有的实数这件事上是不够用的。为了从有理数集扩展到实数集, 必须引入新的构造方法。当然, 这个方法不像前面的构造方法那么简单明了, 历史上, 真正地认识实数是 19 世纪末才完成的事情。事实上, 即使是现在, 很多人也不清楚什么是实数, 尽管他们会使用实数。本节将采用康托和另一位德国数学家魏尔斯特拉斯 (K. T. W. Weierstrass) 所使用的方法——柯西序列 (Cauchy sequence) 方法来构造实数。

【定义 5.6.1】 设 b 为一个集合, 对于 $m \in \omega$, 称集合 $a = \{n \in \omega \mid m \leq n\}$ 到集合 b 的映射 x 为一个序列 (sequence)。

对于映射 $x: a \rightarrow b$, 由于集合 $a \subset \omega$, 所以集合 a 是 ω 的全序子集, 因而可以根据 a 上的次序, 将映射 x “直观地”理解为 $x = \{\langle m, x(m) \rangle, \langle m^+, x(m^+) \rangle, \dots\}$, 进而可以将 x 表示为 $x_m, x_{m^+}, x_{m^{++}}, \dots$ 的形式, 或者按照习惯用法更简单地表示为 $\{x_n\}_{m \leq n}$ 或者 $\{x_n\}_{n \in a}$ 。当然, 自然数 m 可以取 0、1 或者其他自然数。默认情况下, 取 $m=0$, 即 $a=\omega$, 此时将 $\{x_n\}_{m \leq n}$ 进一步简写为 $\{x_n\}$ 。

现在考虑 $b=Q$ 的情形, 即 $x: \omega \rightarrow Q$, 也就是对于序列 $\{x_n\}$ 而言, $x_n \in Q$, 我们称这样的序列 $\{x_n\}$ 为有理数序列。下面引入柯西有理数序列的概念。

【定义 5.6.2】 设 $\{x_n\}$ 是有理数序列, 若对于任意的正有理数 ϵ , 存在某个自然数 $k \in \omega$, 对于任意的 $p, q \in \omega$, 满足当 $k < p, q$ 时, $|x_p - x_q| < \epsilon$, 则称有理数序列 $\{x_n\}$ 为柯西有理数序列。

利用之前我们对实数的了解, 并假设读者学过一些极限知识, 就知道有理数序列可以收敛于某个实数, 包括有理数和无理数。比如, 无理数 $\sqrt{2}$ 在直观上是下述数列的极限:

$$1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, \dots$$

由于 $\sqrt{2}$ 在直观上也是下述数列的极限:

$$1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, \dots$$

所以, 我们还是采用等价类的概念。

【定义 5.6.3】 令集合 C 表示所有柯西有理数序列构造的集合, 定义集合 C 上的等价关系 $\sim$ 如下: 设 $\{x_n\}, \{y_n\} \in C$, 如果对于任意的正有理数 ϵ , 存在某个自然数 $k \in \omega$, 对于任意的 $n \in \omega$ 且 $k < n$, 有

$$|x_n - y_n| < \epsilon \quad (5.6.1)$$

则称 $\{x_n\} \sim \{y_n\}$ 。

下面我们验证 $\sim$ 确实是 C 上的等价关系: 根据定义, 自反性 $\{x_n\} \sim \{x_n\}$ 是显然的; 对于对称性, 如果 $\{x_n\} \sim \{y_n\}$, 即对于任意的正有理数 ϵ , 存在某个自然数 $k \in \omega$, 对于任意的 $n \in \omega$ 且 $k < n$, 有 $|x_n - y_n| < \epsilon$, 由于 $|y_n - x_n| = |x_n - y_n| < \epsilon$, 所以 $\{y_n\} \sim \{x_n\}$; 关于传递性, 如果 $\{x_n\} \sim \{y_n\}$, 且 $\{y_n\} \sim \{z_n\}$, 因而就有, 对于任意的正有理数 ϵ , 存在 $k_1 \in \omega$, 对于任意的 $n \in \omega$ 且 $k_1 < n$, 有 $|x_n - y_n| < \epsilon/2$, 存在 $k_2 \in \omega$, 对于任意的 $n \in \omega$ 且 $k_2 < n$, 有 $|y_n - z_n| < \epsilon/2$, 那么取 k 为 k_1, k_2 中最大的那个, 则对于任意的 $n \in \omega$ 且 $k < n$, 就会有 $|x_n - y_n| < \epsilon/2$, $|y_n - z_n| < \epsilon/2$, 进而可得

$$|x_n - z_n| = |(x_n - y_n) + (y_n - z_n)| \leq |x_n - y_n| + |y_n - z_n| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

所以, $\{x_n\} \sim \{z_n\}$ 。

或许有些读者会对所定义的 C 是否一定是集合怀有疑问。我们说集合 C 一定是集合。我们引入符号 b^a 表示所有集合 a 到集合 b 的映射构成的对象, 即

$$b^a = \{f \mid f: a \rightarrow b\} \quad (5.6.2)$$

首先, 对象 b^a 是一个类; 其次, 如果 $f \in b^a$, 则作为关系的映射 f , 满足 $f \subset a \times b$, 进而 $f \in P(a \times b)$, 所以 $b^a \subset P(a \times b)$, 因而根据 ZF2 分离公理, 可知类 b^a 为集合。注意到, 对象 C 中元素由于都是柯西有理数序列, 因而也都是 ω 到 Q 的映射, 所以 $C \subset \omega \times Q$, 因而对象 C 也是集合。

【定义 5.6.4】 称集合 C 关于等价关系 $\sim$ 的商集 $C/\sim$ 为实数集 (Set of real numbers), 商集 $C/\sim$ 的元素称为实数 (Real number)。

按照以往的习惯, 我们将实数集用符号 R 来表示。根据定义, 其元素为等价类 $[\{x_n\}] = \{\{u_n\} \in C \mid \{u_n\} \sim \{x_n\}\}$, 比如, 实数 0 可以表示为等价类

$$[\{0\}] = \left[\left\{ \frac{1}{n+1} \right\} \right] = \left[\left\{ \frac{1}{n+2} \right\} \right] = \left[\left\{ \frac{3}{n+2} \right\} \right] = \left[\left\{ \frac{5}{n^2+6} \right\} \right] = \dots$$

这是因为根据对极限的先前了解, 下述序列的极限都是 0:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$$

$$\begin{array}{cccccc} \frac{1}{2}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{5}, & \frac{1}{6}, & \frac{1}{7}, & \cdots \\ \frac{3}{2}, & \frac{3}{3}, & \frac{3}{4}, & \frac{3}{5}, & \frac{3}{6}, & \frac{3}{7}, & \cdots \\ \frac{5}{6}, & \frac{5}{7}, & \frac{5}{10}, & \frac{5}{15}, & \frac{5}{22}, & \frac{5}{31}, & \cdots \end{array}$$

由于有序对 $\langle x, y \rangle$ 中 x, y 是有次序的,所以可以将 $\langle x, y \rangle$ 看作 $\{0, 1\}$ 到 $\{x, y\}$ 的映射 f ,满足 $f(0)=x, f(1)=y$ 。在这样的理解下,有理数列 $\{x_n\}$ 可以直观地看作“无限多元”的有序组,尽管我们现在还没有定义无限。

【命题 5.6.1】 如果 $[\{x_n\}], [\{y_n\}] \in R$, 则 $[\{x_n + y_n\}] \in R, [\{x_n \cdot y_n\}] \in R$ 。

证明: 对于 $[\{x_n + y_n\}] \in R$, 也就是证明有理数序列 $\{x_n + y_n\}$ 是柯西有理数序列。根据题设, 对于任意的正有理数 ϵ , 存在 $k_1 \in \omega$, 对于任意的 $p, q \in \omega$ 且 $k_1 < p, q$, 有 $|x_p - x_q| < \epsilon/2$, 存在 $k_2 \in \omega$, 对于任意的 $p, q \in \omega$ 且 $k_2 < p, q$, 有 $|y_p - y_q| < \epsilon/2$, 那么取 k 为 k_1, k_2 中最大的那个, 则对于任意的 $p, q \in \omega$ 且 $k < p, q$, 会有 $|x_p - x_q| < \epsilon/2, |y_p - y_q| < \epsilon/2$, 进而可得

$$\begin{aligned} |(x_p + y_p) - (x_q + y_q)| &= |(x_p - x_q) + (y_p - y_q)| \\ &\leq |x_p - x_q| + |y_p - y_q| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon \end{aligned}$$

因而可得 $\{x_n + y_n\} \in C$, 也就是 $[\{x_n + y_n\}] \in R$ 。

为了证明 $[\{x_n \cdot y_n\}] \in R$, 我们需要利用对于任意的 $[\{x_n\}] \in R, [\{x_n\}]$ 一定是有界的结论, 即存在 $u \in \mathbb{Q}$, 满足对于任意的 $n \in \omega, |x_n| \leq u$ 。事实上, 可以取 $\epsilon = 1$, 则存在 $k \in \omega$, 对于任意的 $p, q \in \omega$ 且 $k < p, q$, 有 $|x_p - x_q| < 1$, 取 $q = k + 1$, 则 $|x_p - x_{k+1}| < 1$, 进而可知, 当 $k < p$ 时,

$$|x_p| = |x_p - x_{k+1} + x_{k+1}| \leq |x_p - x_{k+1}| + |x_{k+1}| < 1 + |x_{k+1}|$$

所以, 如果取 u 为集合 $\{x_0, x_1, \dots, x_k, 1 + |x_{k+1}|\}$ 的最大值时, 则对于任意的 $n \in \omega, |x_n| \leq u$ 。有了这个结果, 下面证明有理数序列 $\{x_n \cdot y_n\}$ 是柯西有理数序列。具体地,

$$\begin{aligned} |x_p \cdot y_p - x_q \cdot y_q| &= |(x_p \cdot y_p - x_p \cdot y_q) + (x_p \cdot y_q - x_q \cdot y_q)| \\ &\leq |x_p| \cdot |y_p - y_q| + |y_q| \cdot |x_p - x_q| \end{aligned}$$

根据柯西有理数序列的有界性, 对于任意的 $n \in \omega$, 存在 $u_1, u_2 \in \mathbb{Q}$, 有 $|x_n| \leq u_1, |y_n| \leq u_2$ 。根据题设, 对于任意的正有理数 ϵ , 存在 $k_1 \in \omega$, 对于任意的 $p, q \in \omega$ 且 $k_1 < p, q$, 有 $|x_p - x_q| < \epsilon/(2u_2)$, 存在 $k_2 \in \omega$, 对于任意的 $p, q \in \omega$ 且 $k_2 < p, q$, 有 $|y_p - y_q| < \epsilon/(2u_1)$, 那么, 当取 k 为 k_1, k_2 中最大的那个时, 则对于任意的 $p, q \in \omega$ 且 $k < p, q$, 有

$$\begin{aligned} |x_p| \cdot |y_p - y_q| + |y_q| \cdot |x_p - x_q| &\leq u_1 \cdot |y_p - y_q| + u_1 \cdot |x_p - x_q| \\ &< u_1 \cdot \epsilon/(2u_1) + u_2 \cdot \epsilon/(2u_2) = \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon \end{aligned}$$

因而可得 $\{x_n \cdot y_n\} \in C$, 也就是 $[\{x_n \cdot y_n\}] \in R$ 。

下面可以给出实数的加法运算定义。

【定义 5.6.5】 实数的加法定义为: $[\{x_n\}] + [\{y_n\}] = [\{x_n + y_n\}]$ 。

命题 5.6.1 说明了实数加法所得到的结果确实还是实数, 此外, 加法定义还是良定义的。即如果 $\{x_n\} \sim \{\tilde{x}_n\}, \{y_n\} \sim \{\tilde{y}_n\}$, 那么, $\{x_n + y_n\} \sim \{\tilde{x}_n + \tilde{y}_n\}$ 。这是由于根据柯西有

理数序列等价的定义,对于任意的正有理数 ε ,存在 $k_1 \in \omega$,对于任意的 $n \in \omega$ 且 $k_1 < n$,有 $|x_n - \tilde{x}_n| < \varepsilon/2$; 存在 $k_2 \in \omega$,对于任意的 $n \in \omega$ 且 $k_2 < n$,有 $|y_n - \tilde{y}_n| < \varepsilon/2$,那么取 k 为 k_1, k_2 中最大的那个,则对于任意的 $n \in \omega$ 且 $k < n$,就会有

$$\begin{aligned} |(x_n + y_n) - (\tilde{x}_n + \tilde{y}_n)| &= |(x_n - \tilde{x}_n) + (y_n - \tilde{y}_n)| \\ &\leq |x_n - \tilde{x}_n| + |y_n - \tilde{y}_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

所以 $\{x_n + y_n\} \sim \{\tilde{x}_n + \tilde{y}_n\}$ 。

【命题 5.6.2】 (1) $[\{x_n\}] + [\{y_n\}] = [\{y_n\}] + [\{x_n\}]$;

(2) $([\{x_n\}] + [\{y_n\}]) + [\{z_n\}] = [\{x_n\}] + ([\{y_n\}] + [\{z_n\}])$;

(3) 对于任意的 $[\{x_n\}] \in R$,有 $[\{x_n\}] + [\{0\}] = [\{x_n\}]$;

(4) 对于任意的 $[\{x_n\}] \in R$,存在 $[\{y_n\}] \in R$,有 $[\{x_n\}] + [\{y_n\}] = [\{0\}]$ 。

证明: (1) $[\{x_n\}] + [\{y_n\}] = [\{x_n + y_n\}] = [\{y_n + x_n\}] = [\{y_n\}] + [\{x_n\}]$

(2) $([\{x_n\}] + [\{y_n\}]) + [\{z_n\}] = [\{x_n + y_n\}] + [\{z_n\}] = [\{x_n + y_n + z_n\}]$

$[\{x_n\}] + ([\{y_n\}] + [\{z_n\}]) = [\{x_n\}] + [\{y_n + z_n\}] = [\{x_n + y_n + z_n\}]$

(3) $[\{x_n\}] + [\{0\}] = [\{x_n + 0\}] = [\{x_n\}]$

(4) 取 $[\{y_n\}] = [\{-x_n\}]$,则有 $[\{x_n\}] + [\{y_n\}] = [\{x_n\}] + [\{-x_n\}] = [\{0\}]$

命题 5.6.2 说明了实数加法具有单位元和逆元。将 $[\{0\}]$ 称为实数加法的单位元,将 $[\{-x_n\}]$ 称为 $[\{x_n\}]$ 的加法逆元,记为 $-[\{x_n\}]$ 。下面是实数乘法的定义。

【定义 5.6.6】 实数的乘法定义为: $[\{x_n\}] \cdot [\{y_n\}] = [\{x_n \cdot y_n\}]$ 。

命题 5.6.1 说明了实数乘法所得到的结果确实还是实数,此外,实数的乘法定义也是良定义的。因为,如果 $\{x_n\} \sim \{\tilde{x}_n\}$, $\{y_n\} \sim \{\tilde{y}_n\}$,则对于任意的 $n \in \omega$,存在 $u_1, u_2 \in \mathbb{Q}$,有 $|x_n| \leq u_1$, $|\tilde{y}_n| \leq u_2$; 并且对于任意的正有理数 ε ,存在 $k_1 \in \omega$,对于任意的 $n \in \omega$ 且 $k_1 < n$,有 $|x_n - \tilde{x}_n| < \varepsilon/(2u_2)$,存在 $k_2 \in \omega$,对于任意的 $n \in \omega$ 且 $k_2 < n$,有 $|y_n - \tilde{y}_n| < \varepsilon/(2u_1)$ 。进而,

$$\begin{aligned} |x_n \cdot y_n - \tilde{x}_n \cdot \tilde{y}_n| &= |(x_n \cdot y_n - x_n \cdot \tilde{y}_n) + (x_n \cdot \tilde{y}_n - \tilde{x}_n \cdot \tilde{y}_n)| \\ &\leq |x_n| \cdot |y_n - \tilde{y}_n| + |\tilde{y}_n| \cdot |x_n - \tilde{x}_n| \\ &< u_1 \cdot \varepsilon/(2u_1) + u_2 \cdot \varepsilon/(2u_2) = \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

所以, $\{x_n \cdot y_n\} \sim \{\tilde{x}_n \cdot \tilde{y}_n\}$ 。

下面命题说明了所定义的实数乘法满足交换律、结合律、对加法的分配律。

【命题 5.6.3】 (1) $[\{x_n\}] \cdot [\{y_n\}] = [\{y_n\}] \cdot [\{x_n\}]$;

(2) $([\{x_n\}] \cdot [\{y_n\}]) \cdot [\{z_n\}] = [\{x_n\}] \cdot ([\{y_n\}] \cdot [\{z_n\}])$;

(3) $[\{x_n\}] \cdot ([\{y_n\}] + [\{z_n\}]) = [\{x_n\}] \cdot [\{y_n\}] + [\{x_n\}] \cdot [\{z_n\}]$ 。

证明: (1) $[\{x_n\}] \cdot [\{y_n\}] = [\{x_n \cdot y_n\}] = [\{y_n \cdot x_n\}] = [\{y_n\}] \cdot [\{x_n\}]$

(2) $([\{x_n\}] \cdot [\{y_n\}]) \cdot [\{z_n\}] = [\{x_n \cdot y_n\}] \cdot [\{z_n\}] = [\{x_n \cdot y_n \cdot z_n\}]$

$[\{x_n\}] \cdot ([\{y_n\}] \cdot [\{z_n\}]) = [\{x_n\}] \cdot [\{y_n \cdot z_n\}] = [\{x_n \cdot y_n \cdot z_n\}]$

(3) $[\{x_n\}] \cdot ([\{y_n\}] + [\{z_n\}]) = [\{x_n\}] \cdot ([\{y_n + z_n\}]) = [\{x_n \cdot y_n + x_n \cdot z_n\}]$

$[\{x_n\}] \cdot [\{y_n\}] + [\{x_n\}] \cdot [\{z_n\}] = [\{x_n \cdot y_n\}] + [\{x_n \cdot z_n\}]$

$$= [\{x_n \cdot y_n + x_n \cdot z_n\}]$$

对于 R 中元素 $[\{1\}]$, 根据实数乘法的定义, 有

$$[\{x_n\}] \cdot [\{1\}] = [\{x_n\}] \quad (5.6.3)$$

可以看出, $[\{1\}]$ 是实数乘法的单位元。

对于任意的 $[\{x_n\}] \in R$, 如果 $[\{x_n\}] \neq [\{0\}]$, 我们说一定存在乘法逆元 $[\{y_n\}] \in R$, 满足 $[\{x_n\}] \cdot [\{y_n\}] = [\{1\}]$ 。由于 $[\{x_n\}] \neq [\{0\}]$ 不代表对于任意 $n \in \omega$, 有 $x_n \neq 0$, 所以我们不能直接取 $[\{y_n\}] = [\{x_n^{-1}\}]$ 。由于“直观上”, $[\{x_n\}]$ 仅由 n 在无限大时的 x_n 决定, 所以我们采用如下方法构造 $[\{y_n\}]$ 。由于 $\{x_n\} \in C$, 所以对于任意的正有理数 ϵ , 存在 $k \in \omega$, 当 $p, q \in \omega$ 且 $k < p, q$ 时, 有 $|x_p - x_q| < \epsilon$ 。因为 $[\{x_n\}] \neq [\{0\}]$, 根据定义 5.6.3 可以得出, 存在某个正有理数 2ϵ , 使得“存在 $k \in \omega$, 当 $n \in \omega$ 且 $k < n$ 时, 有 $|x_n - 0| < 2\epsilon$ ”不成立, 即对于任意的 $k \in \omega$, 总是可以找到某个 $n_0 \in \omega$ 且 $k < n_0$, 有 $2\epsilon < |x_{n_0} - 0|$ 。对于这个 $n_0 \in \omega$, 由于 $k < n_0$, 所以 $|x_p - x_{n_0}| < \epsilon$, 因而, 根据 $|x_{n_0}| = |x_{n_0} - x_p + x_p| \leq |x_{n_0} - x_p| + |x_p|$, 可得 $|x_{n_0}| - |x_{n_0} - x_p| \leq |x_p|$, 利用前面的 $|x_p - x_{n_0}| < \epsilon$ 和 $2\epsilon < |x_{n_0}|$, 可得 $2\epsilon - \epsilon \leq |x_p|$, 即 $\epsilon \leq |x_p|$ 对任意的 $k < p$ 均成立。因而可以按照如下方式构造有理数序列 $[\{y_n\}]$: 当 $n \leq k$ 时, 取 $y_n = \epsilon$; 当 $k < n$ 时, 取 $y_n = x_n^{-1}$ 。注意, 根据前面已经得出的结论, 当 $k < n$ 时, $\epsilon \leq |x_n|$, 所以从 x_n 得到 x_n^{-1} 是没有问题的。下面我们证明所构造出的 $\{y_n\}$ 也是柯西有理数序列, 即我们希望对于任意的正有理数 $\tilde{\epsilon}$, 找到一个自然数 $\tilde{k}$, 使得当 $\tilde{k} < p, q$ 时, $|y_p - y_q| \leq \tilde{\epsilon}$ 。由于当 $k < n$ 时, 取 $y_n = x_n^{-1}$, 所以当 $k < p, q$ 时,

$$|y_p - y_q| = |x_p^{-1} - x_q^{-1}| = |(x_q - x_p)/(x_p \cdot x_q)| = |(x_p - x_q)| / |(x_p \cdot x_q)|$$

再利用前面已得到的 $\epsilon \leq |x_n|$, 可得: 当 $k < p, q$ 时, $|x_p^{-1} - x_q^{-1}| \leq \frac{1}{\epsilon^2} |x_p - x_q|$ 。再次利用 $\{x_n\}$ 是柯西有理数序列的条件, 可得对于正有理数 $\tilde{\epsilon} \cdot \epsilon^2$, 存在 $k_1 \in \omega$, 当 $p, q \in \omega$ 且 $k_1 < p, q$ 时, 有 $|x_p - x_q| < \tilde{\epsilon} \cdot \epsilon^2$ 。因而, 对于任意的正有理数 $\tilde{\epsilon}$, 取 $\tilde{k}$ 为 k, k_1 中最大的那个, 则有当 $\tilde{k} < p, q$ 时, $|y_p - y_q| = |x_p^{-1} - x_q^{-1}| \leq \frac{1}{\epsilon^2} (\tilde{\epsilon} \cdot \epsilon^2) = \tilde{\epsilon}$ 。可见, $\{y_n\} \in C$ 。由于当 $n \leq k$ 时, $x_n \cdot y_n = x_n \cdot \epsilon$, 当 $k < n$ 时, 取 $x_n \cdot y_n = x_n \cdot x_n^{-1} = 1$, 所以, 当 $k < n$ 时, $|x_n \cdot y_n - 1| = 0$ 。这说明 $\{x_n \cdot y_n\} \sim \{1\}$ 。所以, $[\{x_n\}] \cdot [\{y_n\}] = [\{x_n \cdot y_n\}] = [\{1\}]$ 。为了与加法逆元符号上有区分, 将乘法逆元记为 $[\{x_n\}]^{-1}$ 。

有了加法逆元和乘法逆元, 就可以定义实数集上的减法和除法了:

$$[\{x_n\}] - [\{y_n\}] = [\{x_n\}] + (-[\{y_n\}]) \quad (5.6.4)$$

$$[\{x_n\}] \div [\{y_n\}] = [\{x_n\}] \cdot [\{y_n\}]^{-1}, \quad [\{y_n\}] \neq [\{0\}] \quad (5.6.5)$$

【定义 5.6.7】 设 $[\{x_n\}], [\{y_n\}] \in R$, 如果存在正有理数 ϵ 和自然数 k , 使得当 $n \in \omega$ 且 $k < n$ 时, 有 $\epsilon < y_n - x_n$, 则称 $[\{x_n\}] < [\{y_n\}]$ 。

实数序的定义也是良定义的, 即如果 $\{x_n\} \sim \{\tilde{x}_n\}, \{y_n\} \sim \{\tilde{y}_n\}$, 则有 $[\{\tilde{x}_n\}] < [\{\tilde{y}_n\}]$ 。事实上, 根据 $\{x_n\} \sim \{\tilde{x}_n\}, \{y_n\} \sim \{\tilde{y}_n\}$, 对于正有理数 $\epsilon/4$ 和自然数 k_1, k_2 , 使得当 $n \in \omega$ 且 $k_1 < n$ 时, 有 $|\tilde{x}_n - x_n| < \epsilon/4$, 当 $n \in \omega$ 且 $k_2 < n$ 时, 有 $|\tilde{y}_n - y_n| < \epsilon/4$; 因而, 取 k 为 k_1, k_2 中最大的那个, 则对于任意的 $n \in \omega$ 且 $k < n$, 就会有

$$\epsilon/2 = \epsilon + (-\epsilon/4) + (-\epsilon/4) < (y_n - x_n) + (\tilde{y}_n - y_n) + (x_n - \tilde{x}_n) = \tilde{y}_n - \tilde{x}_n$$

因而有 $[\{\tilde{x}_n\}] < [\{\tilde{y}_n\}]$ 。

下面的命题显示出了实数的序也是一种全序关系, 即 $\langle R, < \rangle$ 为全序集。

【命题 5.6.4】 对于任意的 $[\{x_n\}], [\{y_n\}], [\{z_n\}] \in R$, 有:

- (1) $[\{x_n\}] \not< [\{x_n\}]$;
- (2) $[\{x_n\}] < [\{y_n\}]$ 且 $[\{y_n\}] < [\{z_n\}]$, 则 $[\{x_n\}] < [\{z_n\}]$;
- (3) $[\{x_n\}] < [\{y_n\}]$, $[\{x_n\}] = [\{y_n\}]$, $[\{y_n\}] < [\{x_n\}]$, 这三种情况有且仅有其中之一出现。

证明: (1) 由于 $x_n - x_n = 0$, 所以对于任意的正有理数 ϵ 和自然数 n , 有 $x_n - x_n = 0 < \epsilon$, 所以 $[\{x_n\}] \not< [\{x_n\}]$ 。

(2) 根据题设, 存在正有理数 ϵ_1 和自然数 k_1 , 使得当 $n \in \omega$ 且 $k_1 < n$ 时, 有 $\epsilon_1 < y_n - x_n$; 存在正有理数 ϵ_2 和自然数 k_2 , 使得当 $n \in \omega$ 且 $k_2 < n$ 时, 有 $\epsilon_2 < z_n - y_n$ 。因而, 取 k 为 k_1, k_2 中最大的那个, 则当 $n \in \omega$ 且 $k < n$ 时, 有 $\epsilon_1 + \epsilon_2 < (y_n - x_n) + (z_n - y_n) = z_n - x_n$, 因而 $[\{x_n\}] < [\{z_n\}]$ 。

(3) 如果 $[\{x_n\}] \neq [\{y_n\}]$, 即 $\{x_n\} \sim \{y_n\}$, 也就是说, 存在一个正有理数 ϵ , 对于任意的 $k_1 \in \omega$, 总是存在着 $n \in \omega$, 当 $k_1 < n$ 时, $\epsilon < |x_n - y_n|$ 。由于 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 都是柯西有理数序列, 所以, 对于正有理数 $\epsilon/4$, 分别存在着 $k_2, k_3 \in \omega$, 当 $k_2 < p, q$ 时, $|x_p - x_q| < \epsilon/4$; 当 $k_3 < p, q$ 时, $|y_p - y_q| < \epsilon/4$ 。现在取 k 为 k_1, k_2, k_3 中最大的那个, 且考虑 $x_q = x_{k+1}$, $y_q = y_{k+1}$ 的情况, 当 $k < p, q$ 时, $|x_p - x_{k+1}| < \epsilon/4$, $|y_p - y_{k+1}| < \epsilon/4$, 进而有

$$|(x_p - y_p) - (x_{k+1} - y_{k+1})| = |(x_p - x_{k+1}) - (y_p - y_{k+1})| < \epsilon/4 + \epsilon/4 = \epsilon/2$$

因而,

$$-\epsilon/2 + (x_{k+1} - y_{k+1}) < (x_p - y_p) < \epsilon/2 + (x_{k+1} - y_{k+1})$$

注意, 由于 $k+1 > k > k_1$, 所以, $\epsilon < |x_{k+1} - y_{k+1}|$, 也就是说, 或者 $\epsilon < x_{k+1} - y_{k+1}$, 或者 $x_{k+1} - y_{k+1} < -\epsilon$ 。当 $\epsilon < x_{k+1} - y_{k+1}$ 时, 可得 $\epsilon/2 < (x_p - y_p)$, 这说明 $[\{y_n\}] < [\{x_n\}]$; 当 $x_{k+1} - y_{k+1} < -\epsilon$ 时, $(x_p - y_p) < -\epsilon/2$, 即 $\epsilon/2 < (y_p - x_p)$, 这说明 $[\{x_n\}] < [\{y_n\}]$ 。所以, $[\{x_n\}] < [\{y_n\}]$, $[\{x_n\}] = [\{y_n\}]$, $[\{y_n\}] < [\{x_n\}]$ 这三种情况至少其中之一出现。然而, 这三种情况又至多出现其中一种, 否则就与(1)和(2)矛盾。综上所述, 这三种情况有且仅有其中之一出现。

此外, 如果 $[\{x_n\}] < [\{y_n\}]$, 则 $[\{x_n\}] + [\{z_n\}] < [\{y_n\}] + [\{z_n\}]$; 如果 $[\{0\}] < [\{z_n\}]$, 则 $[\{x_n\}] \cdot [\{z_n\}] < [\{y_n\}] \cdot [\{z_n\}]$ 。这些都很容易证明, 这里不再赘述。

虽然这里的有理数集 Q 不是实数集 R 的子集, 然而, 有理数集 Q 却可以同构嵌入到实数集 R 中。具体地, 定义 Q 到 R 的映射 $f: Q \rightarrow R$, 其中,

$$x \mapsto [\{x\}] \quad (5.6.6)$$

对于映射 f , 有如下命题。

【命题 5.6.5】 映射 f 是 Q 到 R 的单射, 且满足对于任意的 $x, y \in Q$, 有:

- (1) $f(x+y) = f(x) + f(y)$;
- (2) $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$;
- (3) $f(0) = [\{0\}]$, $f(1) = [\{1\}]$;
- (4) $x < y$ 当且仅当 $f(x) < f(y)$ 。

证明: 当 $x \neq y$ 时, 根据命题 5.5.3, 有 $x < y$ 或者 $y < x$. 不失一般性, 假设 $x < y$, 此时, 存在正有理数 δ , 满足 $x + \delta = y$. 我们说一定有 $f(x) \neq f(y)$, 否则, $[\{x\}] = [\{y\}]$, 也就是说 $\{x\} \sim \{y\}$, 而这是不可能的. 因为, 如果取 $\epsilon < \delta$, 则对应任意的 $n \in \omega$, 均有 $\epsilon < \delta = |x - y| = |x_n - y_n|$, 所以 f 为单射.

$$(1) f(x+y) = [\{x+y\}] = [\{x\}] + [\{y\}] = f(x) + f(y);$$

$$(2) f(x \cdot y) = [\{x \cdot y\}] = [\{x\}] \cdot [\{y\}] = f(x) \cdot f(y);$$

(3) 根据映射 f 的定义即得;

(4) 由于 Q 和 R 均为全序集, 因而只需要证明 $x < y$ 蕴含 $f(x) < f(y)$ 即可. 假设 $x < y$, 则存在正有理数 δ , 满足 $x + \delta = y$, 因而, 如果取 $\epsilon = \delta/2$, 则对于任意的 $n \in \omega$, 均有 $\epsilon < \delta = y - x$, 这也就是 $[\{x\}] < [\{y\}]$, 即 $f(x) < f(y)$.

从命题 5.6.5 可以看出, 对任意的 $x, y \in Q$, 当对其作加法运算、乘法运算、序的比较时, 其在映射 f 下所对应的对象 $f(x), f(y) \in R$ 均会保持不变, 而且, Q 中的加法单位元和乘法单位元也对应了 R 中的加法单位元和乘法单位元. 因而, 从实质上来说, 可以将 $f(x), f(y)$ 看作 x, y . 由于 $\text{img}(f) \subset R$, 我们说 Q 同构嵌入到 R 中.

习题

1. 证明: 当集合 a 为传递集时, a^+ 也为传递集.
2. 证明: $1+2=3$.
3. 证明: $2 \neq 3$.
4. 证明: ω 的任意非空子集必有最小元.
5. 证明: 集合 a 为传递集, 当且仅当 $P(a)$ 为传递集.
6. 证明: 对于任意的 $x \in \omega$, 有: $x \notin x$.
7. 证明: 对于任意的 $x, y \in \omega$, 如果 $x \neq y$, 则有 $x \in y$, 或者 $y \in x$.
8. 证明: 整数集中的加法单位元不等于乘法单位元.
9. 证明整数的加法消去律.
10. 证明整数的乘法消去律.
11. 证明: 对于有理数的加法单位元 $[\langle 0, 1 \rangle]$, 有 $[\langle 0, 1 \rangle] \cdot [\langle m, n \rangle] = [\langle m, n \rangle] \cdot [\langle 0, 1 \rangle] = [\langle 0, 1 \rangle]$, 其中, $[\langle m, n \rangle]$ 为任意的有理数.
12. 证明: 对于有理数 $[\langle m, n \rangle], [\langle k, l \rangle]$, 如果 $[\langle m, n \rangle] \cdot [\langle k, l \rangle] = [\langle 0, 1 \rangle]$, 则或者 $[\langle m, n \rangle] = [\langle 0, 1 \rangle]$, 或者 $[\langle k, l \rangle] = [\langle 0, 1 \rangle]$.
13. 证明实数的加法消去律.
14. 证明实数的乘法消去律.
15. 证明实数的加法单位元 $[\{0\}]$ 不等于实数的乘法单位元 $[\{1\}]$.
16. 对于任意的实数 $[\{x_n\}], [\{y_n\}], [\{z_n\}] \in R$, 证明: 如果 $[\{x_n\}] < [\{y_n\}]$, 则 $[\{x_n\}] + [\{z_n\}] < [\{y_n\}] + [\{z_n\}]$; 如果 $[\{0\}] < [\{z_n\}]$, 则 $[\{x_n\}] \cdot [\{z_n\}] < [\{y_n\}] \cdot [\{z_n\}]$.