

一阶和二阶电路的暂态分析

前 4 章讨论的是直流电路,基于直流电路学习了电路的基本概念、分析电路的方法和定理等。但实际上,这些方法和定理是最基本的分析思路,不仅适用于直流电路,也适用于动态电路和交流电路,这样的电路在实际应用中更为常见。本章将介绍动态电路的分析和计算,学习低阶动态电路的零输入响应、零状态响应及全响应的产生原因、过程和计算方法。

5.1 动态电路的概念及其初始条件

5.1.1 动态电路

含有动态元件电容和电感的电路称为动态电路。

首先以电阻电路为例来分析电路状态的变化。如图 5-1-1(a)所示,电阻 R_1 两端并联着一个开关。在 0 时刻之前,开关是打开的,电路由电压源 u_s 为两个电阻提供电流。在 $t=0$ 时,开关闭合,分析电路中电流随时间的变化情况。

以时间为线,在不同的时刻,由于开关状态不同,电路的状态可能并不相同。 $t < 0$ 时,开关打开,电路中的电流为 $i = U_s / (R_1 + R_2)$; $t = 0$ 时,发生开关闭合的动作,电路结构改变; $t > 0$ 时,开关闭合,电路中的电流为 $i = U_s / R_2$ 。在坐标轴中画出电路中电流随时间变化的值,如图 5-1-1(b)所示,可以发现,对于电阻电路,当开关状态变化时,电路中的电流能立刻从一个状态切换到另一个状态,即电阻电路的过渡期为零。

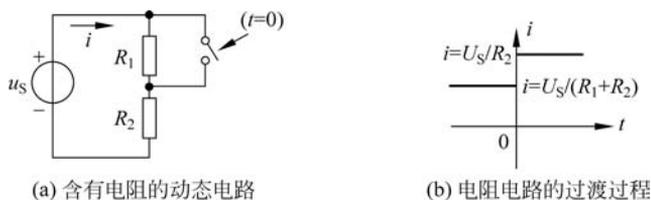


图 5-1-1 电阻的暂态过程

对于如图 5-1-2(a)所示的 RC 电路,开关动作前电路达到稳定状态,电路如图 5-1-2(b)所示,此时电容的电量全部放完,电容电压 $u_c = 0$, 电流 $i = 0$; $t = 0$ 时刻,开关由下方打到上方,接通电源 U_s 给电容充电,经过一段时间后,在 t_1 时刻充电完成,电路再次达到稳定,此时电容两端电压为 $u_c = U_s$, 电流 $i = 0$, 如图 5-1-2(c)所示。那么,电容两端电压从 0 到 U_s 之间存在一段变化的时间,在这段时间中电容两端电压非线性增加,称为电容电路的过渡

期。在此过渡期内,电容电流非线性减小,直至为0。

当动态电路状态发生改变(换路)时,需要经历一个变化过程才能达到新的稳定状态。这个变化过程称为电路的过渡过程。

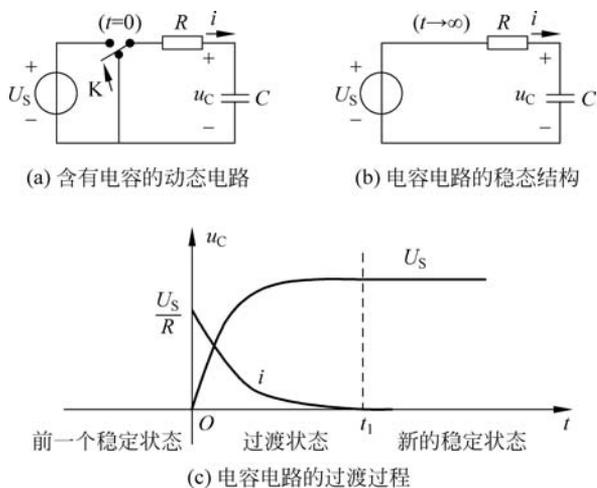


图 5-1-2 电容的暂态过程

同样地,对于如图 5-1-3(a)所示的 RL 电路,开关动作前电路处于稳定状态,如图 5-1-3(b),电感电流为 0; $t=0$ 时刻,开关由下方打到上方,接通电源,电感电流非线性增加,直至 t_1 时刻达到新的稳定状态,如图 5-1-3(c)所示,此时电路中的电流为 $i=U_S/R$ 。 $0\sim t_1$ 时刻为电感电路的过渡过程。

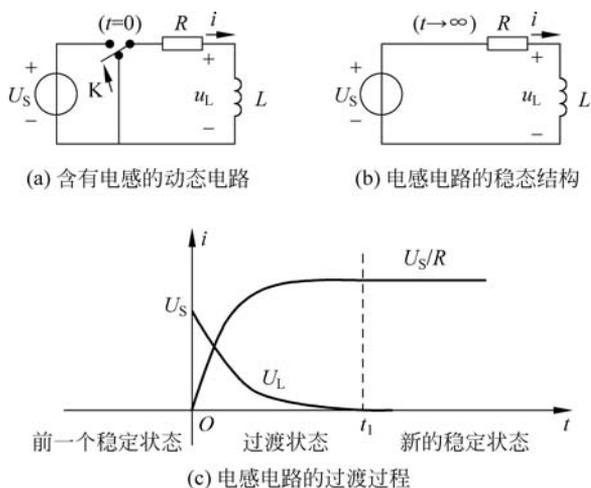


图 5-1-3 电感的暂态过程

5.1.2 换路

1. 换路的概念

换路指电路结构、状态发生变化,电路发生换路可能有两种情况:

(1) 电路中有电路支路接入或断开,如开关的打开或闭合;



(2) 电路中某些参数变化。

通过上面介绍的各电路过渡过程的分析,可以找到过渡过程产生的原因是电路内部含有储能元件 L 、 C ,电路在换路时能量将发生变化,而能量的存储和释放都需要一定的时间来完成。

2. 电路的初始条件

1) $t=0_+$ 与 $t=0_-$ 的概念

假设换路在 $t=0$ 时刻进行,如图 5-1-4 所示, 0_- 表示换路前的一瞬间, 0_+ 表示换路后的一瞬间。显然,在图中 $f_1(0_+)=f_1(0_-)$,而 $f_2(0_+) \neq f_2(0_-)$ 。

2) 电容的初始条件

如图 5-1-5 所示的电容支路,根据电容两端电压与电流的关系,可以列出:

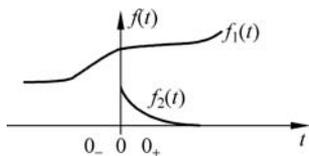


图 5-1-4 0 时刻的概念

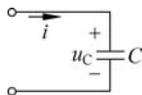


图 5-1-5 电容支路

$$\begin{aligned} u_C(t) &= \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{0_-} i(\xi) d\xi + \frac{1}{C} \int_{0_-}^t i(\xi) d\xi \\ &= u_C(0_-) + \frac{1}{C} \int_{0_-}^t i(\xi) d\xi \end{aligned}$$

上式中,在 $t=0_+$ 时刻,当 $i(\xi)$ 为有限值时,对于 $u_C(0_+) = u_C(0_-) + \frac{1}{C} \int_{0_-}^{0_+} i(\xi) d\xi$,其中的 $\frac{1}{C} \int_{0_-}^{0_+} i(\xi) d\xi \rightarrow 0$,因此, $u_C(0_+) = u_C(0_-)$ 。

根据 $q = Cu_C$ 可得, $q(0_+) = q(0_-)$,即电荷守恒。因此对于电容电路,可以得出如下结论:换路瞬间,若电容电流保持为有限值,则电容电压(电荷)换路前后保持不变。

3) 电感的初始条件

同理,对于如图 5-1-6 所示的电感支路,根据电感电流与电感两端电压的关系,可以列出:

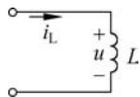


图 5-1-6 电感支路

$$\begin{aligned} i_L(t) &= \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{0_-} u(\xi) d\xi + \frac{1}{L} \int_{0_-}^t u(\xi) d\xi \\ &= i_L(0_-) + \frac{1}{L} \int_{0_-}^t u(\xi) d\xi \end{aligned}$$

在 $t=0_+$ 时刻,当 u 为有限值时,对于 $i_L(0_+) = i_L(0_-) + \frac{1}{L} \int_{0_-}^{0_+} u(\xi) d\xi$,其中的 $\frac{1}{L} \int_{0_-}^{0_+} u(\xi) d\xi \rightarrow 0$,因此, $i_L(0_+) = i_L(0_-)$ 。

根据 $\psi = Li_L$ 可得, $\psi_L(0_+) = \psi_L(0_-)$, 即磁链守恒。因此对于电感电路, 可以得出如下结论: 换路瞬间, 若电感电压保持为有限值, 则电感电流(磁链)换路前后保持不变。

3. 换路定律

根据以上推导过程, 可得动态电路的换路定律:

$$q_C(0_+) = q_C(0_-)$$

$$u_C(0_+) = u_C(0_-)$$

即换路瞬间, 若电容电流保持为有限值, 则电容电压(电荷)换路前后保持不变。

$$\psi_L(0_+) = \psi_L(0_-)$$

$$i_L(0_+) = i_L(0_-)$$

即换路瞬间, 若电感电压保持为有限值, 则电感电流(磁链)换路前后保持不变。

需要注意的是:

- (1) 电容电流和电感电压为有限值是换路定律成立的条件。
- (2) 换路定律反映了能量不能跃变。
- (3) 电路初始值的确定。

5.1.3 初始值的应用

对于动态电路, 求解其初始值, 可按以下步骤进行:

(1) 由换路前电路(稳定状态)求 $u_C(0_-)$ 和 $i_L(0_-)$ 。

(2) 由换路定律得 $u_C(0_+)$ 和 $i_L(0_+)$ 。

(3) 画 0_+ 等效电路。 0_+ 等效电路是:

① 换路后的电路;

② 电容(电感)用电压源(电流源)替代(取 0_+ 时刻值, 方向与原假定的电容电压、电感电流方向相同)。

(4) 由 0_+ 电路求所需各变量的 0_+ 值。

【例题 5-1-1】 如图 5-1-7 所示, $t=0$ 时打开开关 S, 求 $i_C(0_+)$ 。

【解】

按照动态电路初始值的计算步骤进行计算, 计算过程如下:

(1) 由如图 5-1-8 所示的 0_- 等效电路求 $u_C(0_-)$ 。

在 0_- 等效电路中电容开路, 可得

$$u_C(0_-) = 8V$$

(2) 由换路定律, 可得

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 8V$$

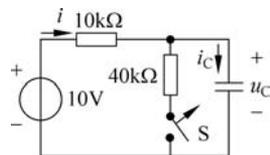


图 5-1-7 例题 5-1-1 电路

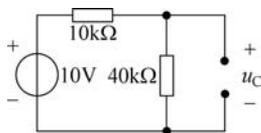


图 5-1-8 0_- 等效电路

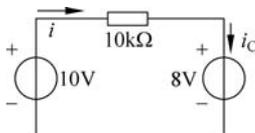


图 5-1-9 0_+ 等效电路

(3) 由如图 5-1-9 所示的 0_+ 等效电路求 $i_C(0_+)$:

$$i_C(0_+) = \frac{10 - 8}{10} = 0.2 \text{ mA}$$

通过以上计算结果可以观察到: 在此电路中 $i_C(0_-) = 0$, 并不等于 $i_C(0_+)$ 。

【例题 5-1-2】 如图 5-1-10 所示, $t=0$ 时闭合开关 S, 求 $u_L(0_+)$ 。

【解】

(1) 由如图 5-1-11 所示的 0_- 等效电路求 $i_L(0_-)$:

在 0_- 等效电路中, 电感相当于短路, 则

$$i_L(0_-) = \frac{10}{1+4} = 2 \text{ (A)}$$

(2) 应用换路定律:

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 2 \text{ A}$$

(3) 由如图 5-1-12 所示的 0_+ 等效电路求 $u_L(0_+)$:

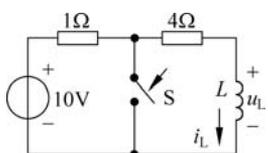


图 5-1-10 例题 5-1-2 电路

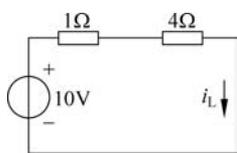


图 5-1-11 0_- 等效电路

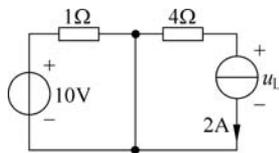


图 5-1-12 0_+ 等效电路

在 0_+ 等效电路中电感用电流源替代, 可以发现:

$$u_L(0_+) = -2 \times 4 = -8 \text{ (V)}$$

$$u_L(0_+) \neq u_L(0_-)$$

【例题 5-1-3】 求如图 5-1-13 所示电路的 $i_C(0_+)$, $u_L(0_+)$ 。

【解】

(1) 由如图 5-1-14 所示的 0_- 等效电路得:

$$i_L(0_-) = i_S$$

$$u_C(0_-) = Ri_S$$

(2) 由换路定律得:

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = i_S$$

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = Ri_S$$

(3) 由如图 5-1-15 所示的 0_+ 等效电路得:

$$i_C(0_+) = i_S - \frac{Ri_S}{R} = 0$$

$$u_L(0_+) = -u_C(0_+) = -Ri_S$$

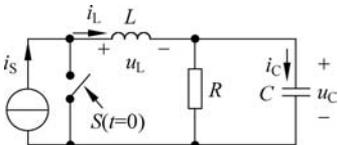


图 5-1-13 例题 5-1-3 图

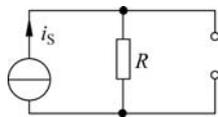


图 5-1-14 0_- 等效电路

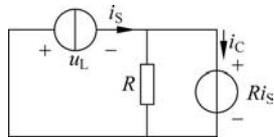


图 5-1-15 0_+ 等效电路

5.2 一阶电路的零输入响应

5.2.1 零输入响应

1. 零输入响应的概念

零输入响应指换路后外加激励为零,仅由动态元件初始储能产生的电压和电流。如图 5-2-1 所示,已知 $u_C(0_-)=U$ 。

根据电路方程: $-u_R+u_C=0$ 。

在图 5-2-1 中,由于电容电压与电流呈非关联参考方向,所以

$$i = -C \frac{du_C}{dt}$$

$$u_R = Ri$$

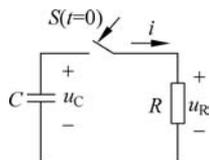


图 5-2-1 RC 一阶电路

代入电路方程,得到

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

$$u_C(0_+) = U_0$$

一阶齐次微分方程的特征方程为 $RCp+1=0$,则 $p=-\frac{1}{RC}$ 。

方程的特征根为:

$$u_C = Ae^{pt} = Ae^{-\frac{1}{RC}t}$$

对于系数 A_0 ,代入初始值 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_0$ 得

$$A = U_0$$

因此,电容两端电压为

$$u_C = U_0 e^{-\frac{1}{RC}t}, \quad t \geq 0$$

那么,电容电流为

$$i_C = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}, \quad t \geq 0$$

以上结果表明:

(1) 电压、电流是随时间按同一指数规律衰减的函数,如图 5-2-2 所示,但电压是对时间的连续函数,而电流函数发生了跃变;

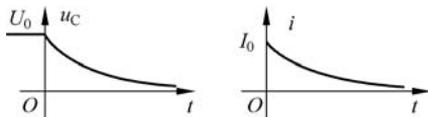


图 5-2-2 RC 一阶电路中电压、电流的变化规律

(2) 响应与初始状态成线性关系,其衰减快慢与 RC 有关;

令 $\tau=RC$,称 τ 为一阶电路的时间常数。时间常数的大小反映了电路过渡过程时间的长短,在如图 5-2-3 所示的电路中, τ_1 比较大,电路的过渡过程时间较长,而 τ_2 较小,电路的

过渡过程时间相对较短。

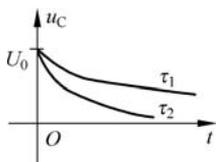


图 5-2-3 RC 一阶电路的时间常数

2. 时间常数的物理意义

根据时间常数的定义： $\tau = RC$ ，当电压初值一定时：

如果 R 一定，而 C 比较大，根据 $W = Cu^2/2$ ，则电容的储能较大，因此放电时间较长；

如果 C 一定，而 R 比较大，根据 $i = u/R$ ，则电容的放电电流较小，因此放电时间也比较长。

在不同时间常数下，电容电压的过渡过程如表 5-2-1 所示。

表 5-2-1 电容电压的衰减

t	0	τ	2τ	3τ	5τ
$u_C = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$	U_0	$U_0 e^{-1}$	$U_0 e^{-2}$	$U_0 e^{-3}$	$U_0 e^{-5}$
	U_0	$0.368U_0$	$0.135U_0$	$0.05U_0$	$0.007U_0$

这里需要注意的是 τ 指电容电压衰减到原来电压 36.8% 所需的时间。工程上认为，一般经过 $3\tau \sim 5\tau$ ，过渡过程便已结束。

【* 2017-15】若一阶电路的时间常数为 3s，则零输入响应换路经过 3s 后衰减为初始值的()

- A. 50% B. 25% C. 13.5% D. 36.8%

【解】 D

零输入响应的一阶电路中电压表达式为 $u_C = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ 。

则经过一个时间常数 τ 后，当 $t = \tau$ 时，电压变为 $u_C(\tau) = 0.368U_0$ 。

5.2.2 零输入响应的应用

【例题 5-2-1】如图 5-2-4 所示电路中的电容原充有 24V 电压，求 S 闭合后，电容电压和各支路电流随时间变化的规律。

【解】

这是一个求一阶 RC 零输入响应的问题， $t > 0$ 时的等效电路如图 5-2-5 所示。

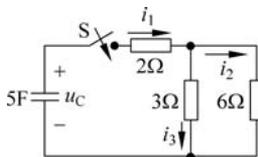


图 5-2-4 例 5-2-1 图

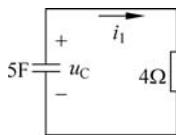


图 5-2-5 0_+ 等效电路

则电容电压:

$$u_C = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}, \quad t \geq 0$$

电容电压的初始值 $U_0 = 24\text{V}$; 时间常数 $\tau = RC = 5 \times 4 = 20\text{s}$ 。

因此,

$$u_C = 24e^{-\frac{t}{20}} \text{V}, \quad t \geq 0$$

$$i_1 = \frac{u_C}{4} = 6e^{-\frac{t}{20}} \text{A}$$

分流得:

$$i_2 = \frac{1}{3}i_1 = 2e^{-\frac{t}{20}} \text{A}$$

$$i_3 = \frac{2}{3}i_1 = 4e^{-\frac{t}{20}} \text{A}$$



微课 18 一阶 RC 电路的零输入响应

5.3 一阶电路的零状态响应

5.3.1 零状态响应

1. 零状态响应的概念

零状态响应指动态元件的初始能量为零,由 $t > 0$ 电路中外加激励作用所产生的响应。

2. 一阶电路的零状态响应

对于如图 5-3-1 所示电路,列出其非齐次线性常微分方程:

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U_S$$

方程解的形式为: $u_C = u'_C + u''_C$ 。其中, u'_C 为非齐次线性方程的特解(强制分量),为电路的稳态解的特解, $u'_C = U_S$ 。
 u''_C 为齐次线性方程 $RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$ 的通解 $u''_C = A e^{-\frac{t}{RC}}$, 称为自由分量或暂态分量。

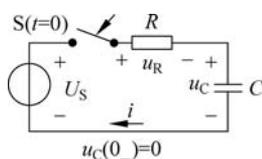


图 5-3-1 外加激励的 RC 一阶电路

因此,方程的全解: $u_C(t) = u'_C + u''_C = U_S + A e^{-\frac{t}{RC}}$ 。

由初始条件 $U_C(0_+) = 0$ 可以计算得到定积分常数 A : 根据 $u_C(0_+) = A + U_S = 0$ 可得 $A = -U_S$ 。

因此,

$$u_C = U_S - U_S e^{-\frac{t}{RC}} = U_S (1 - e^{-\frac{t}{RC}}), \quad t \geq 0$$

从以上式子可以得出电容电流: $i = C \frac{du_C}{dt} = \frac{U_S}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$ 。

电容的电压及电流的波形如图 5-3-2 所示。

以上结果表明:

(1) 电压、电流是随时间按同一指数规律变化的函数,其中电容的电压为连续函数,而

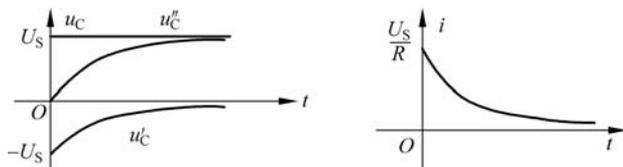


图 5-3-2 RC 一阶电路中电容电压和电流的波形

电容的电流发生了跃变。

(2) 电容电压由两部分构成：一部分是稳态分量(也称为强制分量)；另一部分是暂态分量(也称为自由分量)。

(3) 响应变化的快慢,由时间常数 $\tau=RC$ 决定; τ 越大充电越慢, τ 越小充电越快。

(4) 响应与外加激励成线性关系。

5.3.2 能量关系

对于一阶 RC 电路,电路中各元件的能量关系为:

电源提供能量为:

$$\int_0^{\infty} U_S i dt = U_S q = CU_S^2$$

电阻消耗能量为:

$$\int_0^{\infty} i^2 R dt = \int_0^{\infty} \left(\frac{U_S}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \right)^2 R dt = \frac{1}{2} CU_S^2$$

则电容储存能量为 $\frac{1}{2} CU_S^2$ 。

以上结果表明,电源提供的能量一半消耗在电阻上,一半转换成电场能量存储在电容中。

5.3.3 零状态响应的应用

【例题 5-3-1】 在如图 5-3-3 所示电路中, $t=0$ 时,开关 S 闭合,已知 $u_C(0_-)=0$,求:

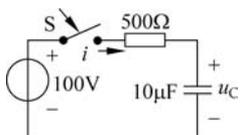


图 5-3-3 例题 5-3-1 题图

(1) 电容电压和电流。

(2) $u_C=80\text{V}$ 时的充电时间 t 。

【解】

(1) 这是一个 RC 电路零状态响应问题,有:

$$\tau = RC = 500 \times 10^{-6} = 5 \times 10^{-4} \text{ s}$$

$$U_C = U_S (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) = 100(1 - e^{-200t}) \text{ V}, \quad t \geq 0$$

$$i = C \frac{dU_C}{dt} = \frac{U_S}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = 0.2 e^{-200t} \text{ A}$$

(2) 设经过 t_1 秒, $u_C=80\text{V}$ 。

由 $80=100(1-e^{-200t})$ 得 $t_1=8.045\text{ms}$ 。



5.4 一阶电路的全响应

5.4.1 全响应

电路的初始状态不为零,同时又有外加激励源作用时电路中产生的响应,称为全响应。

以图 5-4-1 所示的 RC 电路为例,电路微分方程:

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U_S$$

方程的解的形式为

$$u_C(t) = u'_C + u''_C$$

方程的特解为

$$u'_C = U_S$$

方程的通解为

$$u''_C = A e^{-\frac{t}{\tau}}$$

其中, $\tau = RC$ 。系数 A 可由初始值确定:

由 $u_C(0_-) = U_0$, $u_C(0_+) = A + U_S = U_0$, 可得 $A = U_0 - U_S$ 。

因此,微分方程的解,即电容两端电压:

$$u_C = U_S + A e^{-\frac{t}{\tau}} = U_S + (U_0 - U_S) e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t \geq 0$$

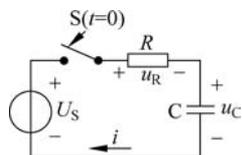


图 5-4-1 一阶 RC 电路的全响应

5.4.2 全响应的两种分解方式

(1) 着眼于电路的两种工作状态:

$$u_C = U_S + A e^{-\frac{t}{\tau}} = U_S + (U_0 - U_S) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

即全响应 = 强制分量(稳态解) + 自由分量(暂态解)。

如图 5-4-2 所示,电容电压的强制分量与外加激励有关,当时间无限长,它不随时间的变化而变化,因此,是电容电压的稳态解。电容电压的暂态解按指数规律变化,而且由电路自身的特性所决定,是电容电压变化的自由分量,若时间无限长,则这一分量将会衰减到 0。

(2) 着眼于因果关系:

$$u_C = U_S(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t \geq 0$$

即全响应 = 零状态响应 + 零输入响应。

如图 5-4-3 所示,一阶电路的全响应等于零状态响应与零输入响应的叠加。在动态电

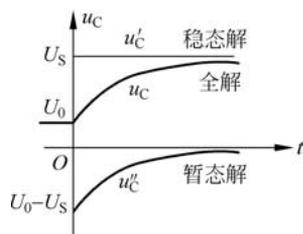


图 5-4-2 全响应的分解

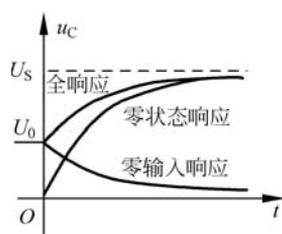


图 5-4-3 全响应的叠加意义

路中,如果把动态元件的初始储能看作电路的内部激励,那么根据叠加定理,如图 5-4-4 所示,电路的全响应可以认为是电路的外部激励和内部激励分别单独作用时,在电路中所产生响应的叠加。外部激励单独作用时所产生的响应是零状态响应,而内部激励单独作用时所产生的响应是零输入响应。

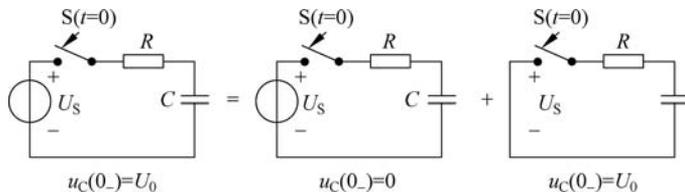


图 5-4-4 全响应的叠加电路

5.4.3 全状态响应的应用

【例题 5-4-1】 在如图 5-4-5 所示电路中, $t=0$ 时,开关 K 闭合,求 $t>0$ 后的 i_C 、 u_C 及电流源两端的电压。 $(u_C(0_-)=1\text{V}, C=1\text{F})$

【解】

这是 RC 电路全响应问题,有:

$$u_C = U_S + A e^{-\frac{t}{\tau}} = U_S + (U_0 - U_S) e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t \geq 0$$

稳态分量:

$$u_C(\infty) = 10 + 1 = 11(\text{V})$$

$$\tau = RC = (1 + 1) \times 1 = 2(\text{s})$$

全响应:

$$u_C = U_S + A e^{-\frac{t}{\tau}} = U_S + (U_0 - U_S) e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t \geq 0$$

$$u_C(t) = 11 + (1 - 11) e^{-0.5t} \text{ V}$$

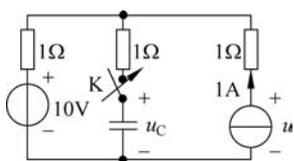


图 5-4-5 例题 5-4-1 图

所以:

$$u_C(t) = 11 - 10e^{-0.5t} (\text{V})$$

$$i_C(t) = \frac{du_C}{dt} = 5e^{-0.5t} (\text{A})$$

$$u(t) = 1 \times 1 + 1 \times i_C + u_C = 12 - 5e^{-0.5t} (\text{V})$$

【* 2013-19】 如图 5-4-6 所示电路的时间常数 τ 应为()。

A. 16ms

B. 4ms

C. 2ms

D. 8ms

【解】 D

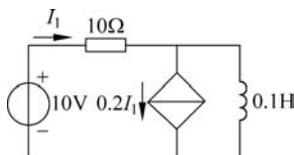


图 5-4-6 * 2013-19 题图

如图 5-4-7 所示,采用加流求压法计算等效电阻。设在等效电阻两端接上电流源 I ,则由 KCL:

$$I + 0.2I_1 = I_1$$

因此, $I = 0.8I_1$ 。

从电感端看进去无源网络的等效电阻 $R_{\text{eq}} = \frac{10I_1}{0.8I_1} = 12.5\Omega$, 则 $\tau = \frac{L}{R_{\text{eq}}} = 8\text{ms}$ 。

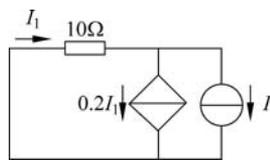


图 5-4-7 加流求压法



微课 20 一阶 RC 电路的全响应

5.5 一阶电路暂态分析的三要素法

5.5.1 三要素的概念

一阶电路的数学模型是一阶线性微分方程:

$$a \frac{df}{dt} + bf = c$$

其解答一般形式为

$$f(t) = f'(t) + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

令 $t = 0_+$,

$$f(0_+) = f'(t) |_{0_+} + A$$

得到系数 A :

$$A = f(0_+) - f'(t) |_{0_+}$$

那么方程的解为

$$f(t) = f'(t) + [f(0_+) - f'(0_+)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

当直流激励作用在电路中时:

$$f'(t) = f'(0_+) = f(\infty)$$

因此电路的响应为

$$f(t) = f(\infty) + [f(0_+) - f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (5-5-1)$$

式(5-5-1)表明,一阶电路的响应由 3 个要素构成。

- (1) $f(\infty)$: 稳态解,指开关动作后稳态电路的响应。
- (2) $f(0_+)$: 初始值,指开关动作后电路的初始响应。
- (3) τ : 时间常数。对于一阶 RC 电路, $\tau = R_{\text{eq}}C$; 对于一阶 RL 电路, $\tau = L/R_{\text{eq}}$ 。 R_{eq} 为换路后从动态元件 C 或者 L 两端看进去的无源网络的等效电阻。

因此,分析一阶电路响应的问题便转为求解电路的 3 个要素的问题。

5.5.2 三要素法的应用

【例题 5-5-1】 如图 5-5-1 所示,已知: $t=0$ 时合开关,求换路后的 $u_C(t)$ 。

【解】

电容电压的初始值: $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 2\text{V}$;

电容电压的稳态值： $u_C(\infty) = (2//1) \times 1 = 0.667(\text{V})$ ；

时间常数： $\tau = R_{\text{eq}} C = \frac{2}{3} \times 3 = 2(\text{s})$ 。

根据三要素法：

$$u_C(t) = u_C(\infty) = [u_C(0_+) - u_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

得电容电压：

$$u_C = 0.667 + (2 - 0.667)e^{-0.5t} = 0.667 + 1.33e^{-0.5t}, \quad t \geq 0$$

画出 $u_C(t)$ 的波形如图 5-5-2 所示。

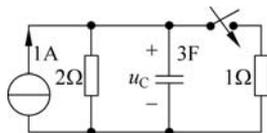


图 5-5-1 例题 5-5-1 图

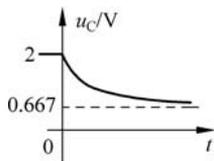


图 5-5-2 $u_C(t)$ 的波形

【例题 5-5-2】 如图 5-5-3 所示, $t=0$ 时, 开关 S 打开, 求 $t>0$ 后的 i_L 、 u_L 。

【解 1】 三要素法。

这是 RL 电路全响应问题, 有：

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 24/4 = 6(\text{A})$$

$$i_L(\infty) = 24/(8+4) = 2(\text{A})$$

$$\tau = L/R = 0.6/12 = 1/20(\text{s})$$

根据三要素法：

$$\begin{aligned} i_L(t) &= i_L(\infty) + [i_L(0_+) - i_L(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= 2 + [6 - 2]e^{-20t} \\ &= 2 + 4e^{-20t}(\text{A}) \end{aligned}$$

根据电感电压与电流的关系, 得到电感两端电压：

$$u_L(t) = -80e^{-20t} \text{ V}$$

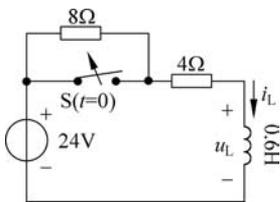


图 5-5-3 例题 5-5-2 图

【解 2】

全响应 = 零输入响应 + 零状态响应, 即

$$i_L = I_S(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t \geq 0$$

其中, 零输入响应：

$$i_L'(t) = 6e^{-20t} \text{ A}$$

零状态响应：

$$i_L''(t) = \frac{24}{12}(1 - e^{-20t}) \text{ A}$$

则全响应：

$$i_L(t) = 6e^{-20t} + 2(1 - e^{-20t}) = 2 + 4e^{-20t}(\text{A})$$

根据电感电压与电流的关系, 得到电感两端电压：

$$u_L(t) = -80e^{-20t} \text{ V}$$

【例题 5-5-3】 在如图 5-5-4 所示电路中, $t=0$ 时, 开关闭合, 求 $t>0$ 后的 i_L 、 i_1 、 i_2 。

【解 1】

利用三要素法求解 i_L , 再根据 i_L 求解 i_1 、 i_2 。

三要素为

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 10/5 = 2(\text{A})$$

$$i_L(\infty) = 10/5 + 20/5 = 6(\text{A})$$

$$\tau = L/R = 0.5/(5//5) = 1/5(\text{s})$$

三要素公式: $i_L(t) = i_L(\infty) + [i_L(0_+) - i_L(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$ 。

电感电流: $i_L(t) = 6 + (2 - 6)e^{-5t} = 6 - 4e^{-5t}$; 电感电压: $u_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = 0.5 \times (-4e^{-5t}) \times (-5) = 10e^{-5t} \text{ V}$ 。

支路电流:

$$i_1(t) = (10 - u_L)/5 = 2 - 2e^{-5t} \text{ A}$$

$$i_2(t) = (20 - u_L)/5 = 4 - 2e^{-5t} \text{ A}$$

【解 2】

分别利用三要素法求解 i_L 、 i_1 、 i_2 。

画出 0_+ 等效电路如图 5-5-5 所示。

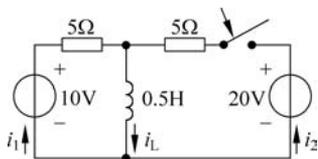


图 5-5-4 例题 5-5-3 图

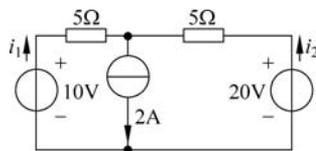


图 5-5-5 0_+ 等效电路

各电流的三要素为

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 10/5 = 2(\text{A}), \quad i_L(\infty) = 10/5 + 20/5 = 6(\text{A})$$

$$i_1(0_+) = \frac{(10 - 20)}{10} + 1 = 0(\text{A}), \quad i_1(\infty) = 10/5 = 2(\text{A})$$

$$i_2(0_+) = \frac{(20 - 10)}{10} + 1 = 2(\text{A}), \quad i_2(\infty) = 20/5 = 4(\text{A})$$

$$\tau = L/R = 0.6/(5//5) = \frac{6}{25}(\text{s})$$

则根据三要素法写出各电流:

$$i_L(t) = 6 + (2 - 6)e^{-5t} = 6 - 4e^{-5t}(\text{A}), \quad t \geq 0$$

$$i_1(t) = 2 + (0 - 2)e^{-5t} = 2 - 2e^{-5t}(\text{A})$$

$$i_2(t) = 4 + (2 - 4)e^{-5t} = 4 - 2e^{-5t}(\text{A})$$

【例题 5-5-4】如图 5-5-6 所示,已知: $t=0$ 时开关闭合,求换路后的 $u_C(t)$ 、 $i_L(t)$ 、 $i(t)$ 。

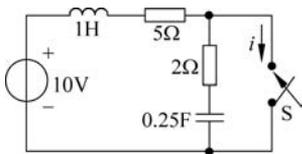


图 5-5-6 例题 5-5-4 图

【解】

电容电压的三要素为

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 10\text{V}$$

$$u_C(\infty) = 0$$

$$\tau_1 = R_{\text{eq}}C = 2 \times 0.25 = 0.5(\text{s})$$

电感电流的三要素为

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0(\text{A})$$

$$i_L(\infty) = 10/5 = 2(\text{A})$$

$$\tau_2 = L/R_{\text{eq}} = 1/5 = 0.2(\text{s})$$

则根据三要素法:

$$u_C(t) = u_C(\infty) + [u_C(0_+) - u_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau_1}} = 10e^{-2t}\text{V}$$

$$i_L(t) = i_L(\infty) + [i_L(0_+) - i_L(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau_2}} = 2(1 - e^{-5t})\text{A}$$

根据 KCL, 开关支路的电流:

$$i(t) = i_L(t) - C \frac{du_C(t)}{dt} = (2(1 - e^{-5t}) + 5e^{-2t})\text{A}$$

【* 2016-20】如图 5-5-7 所示,已知 $U_C(0_-) = 6\text{V}$,在 $t=0$ 时刻将开关 S 闭合, $t \geq 0$ 时电流 $i(t)$ 为()。

A. $-6e^{-4 \times 10^3 t}\text{A}$

B. $-6 \times 10^{-3} e^{-4 \times 10^3 t}\text{A}$

C. $6e^{-4 \times 10^3 t}\text{A}$

D. $6 \times 10^{-3} e^{-4 \times 10^3 t}\text{A}$

【解】 B

由 KVL 方程得:

$$2000i(0_+) - 6000 \times \left[i(0_+) + \frac{6}{2000} \right] = U_C(0_+) = U_C(0_-) = 6\text{V}$$

得电流初始值: $i(0_+) = -6 \times 10^{-3}\text{A}$ 。

开关 S 闭合后的稳态值: $i(\infty) = 0$ 。

左侧含受控源的等效电阻: $R = \left| \frac{U_C(0_+)}{i(0_+)} \right| = \left| \frac{6}{-6 \times 10^{-3}} \right| = 1\text{k}\Omega$ 。

时间常数: $\tau = RC = 1000 \times 0.25 \times 10^{-6} = 0.25 \times 10^{-3}\text{s}$ 。

根据三要素法:

$$i(t) = i(\infty) + [i(0_+) - i(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} = -6 \times 10^{-3} e^{-4 \times 10^3 t}\text{A}$$

【* 2013-20】如图 5-5-8 所示电路在换路前已稳定, $t=0$ 时闭合开关 S 后, $i(t)$ 应为()。

A. $(4 - 3e^{-10t})\text{A}$

B. 0

C. $(4 + 3e^{-t})\text{A}$

D. $(4 - 3e^{-t})\text{A}$

【解】 A

当 $t=0_-$ 时, $i=1\text{A}$, $i(0_+) = i(0_-) = 1\text{A}$ 。

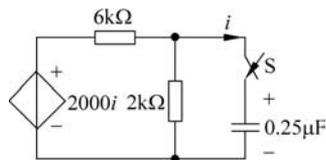


图 5-5-7 * 2016-20 题图

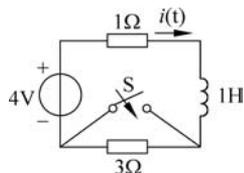


图 5-5-8 * 2013-20 题图



微课 21 三要
素法分析一
阶电路

当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $i = 4\text{A}$ 。

$\tau = 1\text{s}$, 则由三要素法: $i(t) = 4 + (1 - 4)e^{-t} = (4 - 3e^{-t})\text{A}$ 。

5.6 二阶电路的暂态分析

本章前述各节介绍了一阶电路的各暂态响应, 本节将在此基础上进一步分析二阶电路的暂态响应。

用二阶微分方程表示的电路称为二阶电路。二阶电路中包含两个储能元件, 它们可能属于不同的类型或同一种类型(相同类型的元件不能用一个等效元件替代)。对二阶电路的分析类似于二阶电路, 首先建立电路中元件响应与激励关系的二阶微分方程, 然后计算满足初始条件的方程的解。二阶微分方程有两个初始值, 它们由储能元件的初始值和输入共同决定。

5.6.1 二阶电路的零输入响应

以如图 5-6-1 所示的电路为例, 图中含有电容 C 和电感 L 两个动态元件, 该电路为二阶电路。根据 5.3.1 节的介绍, 电路中没有外加激励的作用, 紧靠动态元件的初始储能提供电路的能量, 电路中的响应为零输入响应。本节将分析二阶电路零输入响应的特性。

在 $t = 0$ 时刻, 开关闭合。已知: $u_C(0_+) = U_0, i(0_+) = 0$ 。

对于该电路列写其 KVL 方程:

$$Ri + u_L - u_C = 0 \quad (5-6-1)$$

其中, $i = -C \frac{du_C}{dt}, u_L = L \frac{di}{dt}$ 。

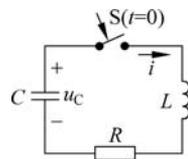


图 5-6-1 RLC 二阶电路

以电容电压为变量, 代入式(5-6-1)得:

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0 \quad (5-6-2)$$

以电感电流为变量, 代入式(5-6-1)得:

$$LC \frac{d^2 i}{dt^2} + RC \frac{di}{dt} + i = 0$$

以电容电压为变量时的初始条件: 由 $u_C(0_+) = U_0, i(0_+) = 0$ 得

$$\left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0_+} = 0$$

以电感电流为变量时的初始条件: 由 $u_C(0_+) = u_L(0_+) = L \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0_+} = U_0$ 得

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0_+} = \frac{U_0}{L}$$

以式(5-6-2)中的电容电压为未知量的二阶微分方程来分析电容电压的响应。方程的特征方程为

$$LCP^2 + RCP + 1 = 0$$

该方程具有两个特征根:

$$P = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (5-6-3)$$

式(5-6-3)中,如果令 $\frac{R}{2L} = \delta$, $\sqrt{\frac{1}{LC}} = \omega$, 那么 $P = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2}$ 。可以发现,方程的特征根取决于该二阶电路的 R 、 L 、 C 参数。

5.6.2 零状态响应的三种情况

下面来分析 5.6.1 节式(5-6-3)中方程的特征根在 $P > 0$ 、 $P = 0$ 以及 $P < 0$ 时的 3 种情况。在如图 5-6-1 所示的 RLC 二阶电路中:

(1) 当 $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时,微分方程有两个不等的负实根,此时电路处于过阻尼工作状态。

电容电压的表达式为

$$u_C = A_1 e^{P_1 t} + A_2 e^{P_2 t}$$

代入初始值 $u_C(0_+) = U_0$, $\left. \frac{du_C}{dt} \right|_{(0_+)} = 0$, 计算方程的系数: $A_1 + A_2 = U_0$, $P_1 A_1 + P_2 A_2 = 0$ 。

因此,

$$\begin{cases} A_1 = \frac{P_2}{P_2 - P_1} U_0 \\ A_2 = \frac{-P_1}{P_2 - P_1} U_0 \end{cases}$$

那么,电容电压为

$$u_C = \frac{U_0}{P_2 - P_1} (P_2 e^{P_1 t} - P_1 e^{P_2 t}) \quad (5-6-4)$$

电容电压的波形图如图 5-6-2 所示。电容电压从初始值 U_0 开始,以指数规律不断衰减至零。

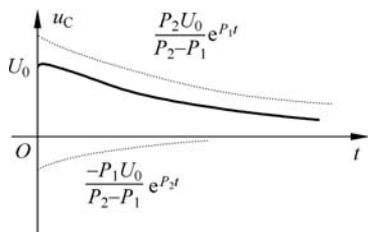


图 5-6-2 电容电压的变化

根据式(5-6-4),可得电容的电流为

$$i_C = -C \frac{du_C}{dt} = \frac{-CU_0}{P_2 - P_1} (P_1 P_2 e^{P_1 t} - P_1 P_2 e^{P_2 t})$$

由于 $P_1 P_2 = \frac{1}{LC}$, 可进一步计算电流为

$$\begin{aligned} i_C &= \frac{-U_0}{L(P_2 - P_1)} (e^{P_1 t} - e^{P_2 t}) \\ &= i \end{aligned}$$

同时,电感两端电压为

$$u_L = L \frac{di}{dt} = \frac{-U_0}{P_2 - P_1} (P_1 e^{P_1 t} - P_2 e^{P_2 t})$$

如图 5-6-3 所示为电容电流和电感电压波形曲线,以观察分析二阶动态电路中电压电流的变化趋势。由图 5-6-3 可以看出,电容电流始终满足 $i_C \geq 0$,且在 $t=0_+$ 时刻, $i_C=0$,开始增加;当 $t=t_m$ 时, i_C 达到最大值,之后开始减小;当 $t=\infty$ 时, $i_C=0$ 。

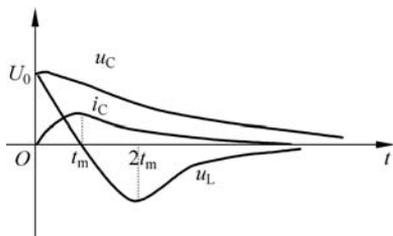


图 5-6-3 电容电流和电感电压的变化

显然,在 $t=t_m$ 时刻,电容电流出现最大值时满足极值的条件: $\frac{di_C}{dt}=0$,此时 $u_L(t_m)=0$,且:

$$P_1 e^{P_1 t} - P_2 e^{P_2 t} = 0$$

那么,电容电流最大值对应的时刻:

$$t_m = \frac{\ln \frac{P_2}{P_1}}{P_1 - P_2}$$

而对于电感电压,当 $t=0$ 时, $u_L=U_0$;当 $0 < t < t_m$ 时,随着电路中电流的增加, u_L 开始减小,但 $u_L > 0$;当 $t > t_m$ 时, i 开始减小, $u_L < 0$,达到负的最小值。根据 du_L/dt 可确定 u_L 为极小时的 t ,由 $P_1^2 e^{P_1 t} - P_2^2 e^{P_2 t} = 0$ 得,在 $t=2t_m$ 时刻, u_L 达到极小值。当 $t=\infty$ 时, u_L 衰减至 0。

在电路中电压电流变化的过程中,电容电压始终满足 $u_C \geq 0$,且处于单调下降的趋势,同时,电容电流 $i_C \geq 0$,说明电容始终处于放电状态(按图 5-6-3 中的参考方向,电容电压与电流呈非关联参考方向),为电路提供能量。 $0 < t < t_m$ 时,电感电压和电流为关联参考方向,表明电感吸收并存储能量,即电容为电感和电阻提供能量。 $t=t_m$ 时,电感储能达到最大。 $t > t_m$ 之后,电感电压 $u_L < 0$,此时电感电压和电流呈非关联参考方向,此时电感向电路中释放能量。此时,电感和电容共同提供电阻所消耗的能量,直至能量释放完。由于电阻 $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$,比较大,使得能量消耗比较快,进而产生非振荡放电过程。这个过程称为过阻尼工作过程。

(2) $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时,微分方程有两个共轭复根,此时电路处于欠阻尼工作状态。

在这种情况下,方程的特征根 $P_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$,是一对共轭复根,令 $P =$

$-\delta \pm j\omega$ 。则

$$P_1 = -\delta + j\omega$$

$$P_2 = -\delta - j\omega$$

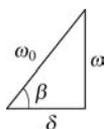


图 5-6-4 ω 、 ω_0 、 δ 及 β 的关系

其中, $j = \sqrt{-1}$, $\delta = \frac{R}{2L}$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $\omega = \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ 。 ω 、 ω_0 、 δ 及 β 的关系如图 5-6-4 所示。

电容电压 u_C 的解答形式:

$$u_C = A_1 e^{P_1 t} + A_2 e^{P_2 t} = e^{-\delta t} (A_1 e^{j\omega t} + A_2 e^{-j\omega t}) \quad (5-6-5)$$

式(5-6-5)经常写为

$$u_C = A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \beta) \quad (5-6-6)$$

将初始条件

$$\begin{cases} u_C(0_+) = U_0 \\ \frac{du_C}{dt}(0_+) = 0 \end{cases}$$

代入表达式:

$$\begin{cases} A \sin\beta = U_0 \\ A(-\delta)\sin\beta + A\omega\cos\beta = 0 \end{cases}$$

得到 u_C 表达式的系数:

$$A = \frac{\omega_0}{\omega} U_0, \quad \beta = \arctan \frac{\omega}{\delta}$$

将系数 A 和 β 代入式(5-6-6)得电容电压

$$u_C = \frac{\omega_0}{\omega} U_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \beta) \quad (5-6-7)$$

进一步计算得到电容电流

$$i_C = -C \frac{du_C}{dt} = \frac{U_0}{\omega L} e^{-\delta t} \sin\omega t \quad (5-6-8)$$

它们的波形曲线如图 5-6-5 所示。可以看出,当 $t=0$ 时, $u_C = U_0$, u_C 整体曲线是振幅以 $\pm \frac{\omega_0}{\omega} U_0$ 为包络线,按指数规律衰减的正弦函数。在 $\omega t = \pi - \beta, 2\pi - \beta, \dots, n\pi - \beta$ 等位置处 $u_C = 0$ 。 i_C 仍然是按指数规律衰减的正弦函数,在 $\omega t = 0, \pi, 2\pi, \dots, n\pi$ 等位置时, $i_C = 0$, i_C 的零点是 u_C 的极值点。电压电流的这种放电过程叫作振荡放电。振荡衰减的快慢由特征根的实部 δ 决定。 δ 越小,衰减越慢,因此 δ 称为衰减系数。振荡波形按正弦规律变化的角频率为 ω 。 ω 越大,振荡速度越快,因此被称为振荡角频率。由于 $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, 比较小,电阻耗能较慢,造成电路中的能量在电感和电容之间进行往复交换,进而产生了衰减振荡的过程。这个过程称为欠阻尼工作过程。

欠阻尼工作状态有一个特例,即 $R=0$ 时, $\delta=0$, $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $\beta = \frac{\pi}{2}$ 。将这些参数代

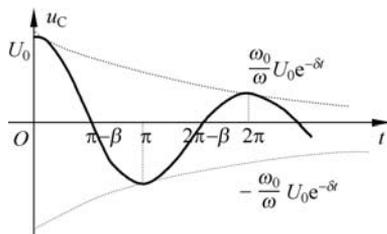


图 5-6-5 电容电压、电流波形曲线

入式(5-6-7)和式(5-6-8),得到此时的电容电压、电流:

$$u_C = U_0 \sin(\omega t + 90^\circ)$$

$$i = \frac{U_0}{\omega L} \sin \omega t$$

从电容电压、电流的表达式可以看出,它们都不包含衰减的成分,仅含有正弦变化的函数,因此这是一种等幅振荡放电过程,其原因就在于电路中电阻为0,没有能量消耗,只有电容和电感之间能量的反复交换。这个过程为无阻尼工作过程。

(3) 当 $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时,微分方程有两个相等的实根,此时电路处于临界阻尼工作状态。

方程的特征根: $P_1 = P_2 = -\frac{R}{2L} = -\delta$, 则电容电压的表达式为

$$u_C = A_1 e^{-\delta t} + A_2 t e^{-\delta t}$$

代入初始值 $u_C(0_+) = U_0$, $\frac{du_C}{dt}(0_+) = 0$, 得到系数 A_1 、 A_2 的关系:

$$\begin{cases} A_1 = U_0 \\ A_1(-\delta) + A_2 = 0 \end{cases}$$

最终得到各系数:

$$\begin{cases} A_1 = U_0 \\ A_2 = U_0 \delta \end{cases}$$

写出各电压、电流的表达式:

$$\begin{cases} u_C = U_0 e^{-\delta t} (1 + \delta t) \\ i_C = -C \frac{du_C}{dt} = \frac{U_0}{L} t e^{-\delta t} \\ u_L = L \frac{di}{dt} = U_0 e^{-\delta t} (1 - \delta t) \end{cases}$$

基于以上分析,动态电路零输入响应的变化规律仅取决于电路的固有频率,而与电路的初始条件无关,因此可将此结论推广应用于一般二阶电路。

5.6.3 二阶电路暂态分析的应用

【例题 5-6-1】 电路如图 5-6-6 所示, $t=0$ 时打开开关。求 u_C , 并画出其变化曲线。

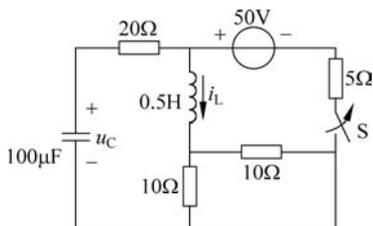


图 5-6-6 例题 5-6-1 图

【解】

(1) 在开关动作前,电路达到稳定状态,则画出如图 5-6-7 所示的 0_- 等效电路: 得到 $u_C(0_-) = 25\text{V}$, $i_L(0_-) = 5\text{A}$ 。

(2) 开关打开为 RLC 串联电路,方程为

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

特征方程为

$$50P^2 + 2500P + 10^6 = 0$$

$$P = -25 \pm j139$$

$$u_C = A e^{-25t} \sin(139t + \beta)$$

(3) 根据换路定律:

$$\begin{cases} u_C(0_+) = 25 \\ C \left. \frac{du_C}{dt} \right|_{0_+} = -5 \end{cases}$$

得到

$$\begin{cases} A \sin\beta = 25 \\ A(139\cos\beta - 25\sin\beta) = \frac{-5}{10^{-4}} \end{cases}$$

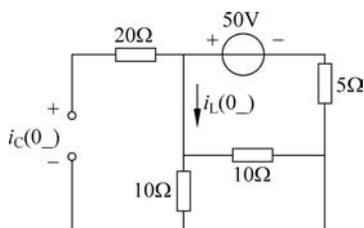
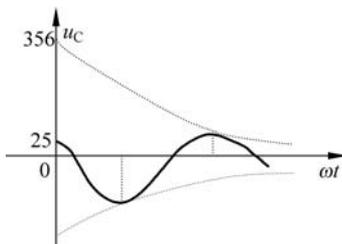
最终得到相关系数:

$$A = 358, \quad \beta = 176^\circ$$

写出电容电压的表达式:

$$u_C = 358 e^{-25t} \sin(139t + 176^\circ) \text{V}$$

画出电容电压的变化曲线如图 5-6-8 所示。

图 5-6-7 0_- 等效电路图 5-6-8 u_C 波形变化曲线

【* 2014-10】 在如图 5-6-9 所示的电路中,开关 K 闭合后, C_1 上的电压为()。

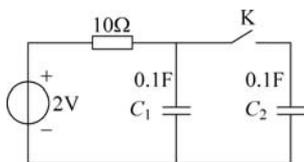


图 5-6-9 * 2014-10 题图

- A. $2 - e^{-t}$ V B. $2 + e^{-t}$ V C. $1 - \frac{1}{2}e^{-t}$ V D. $1 + \frac{1}{2}e^{-t}$ V

【解】 A

稳态时电流没有通路,因此 $U_1(0_-) = 2V$,初始态,电压必须突变,否则违背电压环路定理(KVL)。

使用电荷守恒定律,突变前后,电容总电荷守恒:

$$C_1[U_1(0_+) - U_1(0_-)] + C_2[U_2(0_+) - U_2(0_-)] = 0$$

根据初始条件: $U_1(0_-) = 2V, U_2(0_-) = 0V, U_1(0_+) = U_2(0_+)$ 。

两个电容容量相同,则 $U_1 = 2 - e^{-t}$ V。

5.6.4 二阶电路的零状态响应和全响应

在如图 5-6-10 所示的 RLC 串联电路中,电容和电感元件的初始储能为零,即 $u_C(0_-) = 0, i_L(0_-) = 0$,电路由外加电源激励。 $t = 0$ 时,开关闭合,根据图 5-6-10 所标的各元件参数方向,由 KVL 和元件的伏安关系可得关于 u_C 的微分方程为

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U_S \quad (5-6-9)$$

式(5-6-9)是电路的二阶线性非齐次常微分方程,它的解由非齐次方程的特解 u'_C 和通解 u''_C 组成,即

$$u_C = u'_C + u''_C$$

方程的特解 u'_C 是电容电压的稳态解,由外加激励决定。当激励为直流电压 U_S 时,特解 $u'_C = U_S$ 。方程的通解 u''_C 是电容电压响应的固有分量,由电路的固有频率(特征根)所决定,即由电路中的 R, L, C 的大小所决定。对应式(5-6-9)的齐次方程的特征方程为

$$LCP^2 + RCP + 1 = 0$$

其特征根(即固有频率)为

$$P_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm j \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

与零输入响应电路的分析方法一样,根据电路的 R, L, C 参数关系不同,所产生的特征根有 3 种情况,对应的电路的动态响应也将有 3 种工作状态。

(1) $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时,过阻尼的情况。

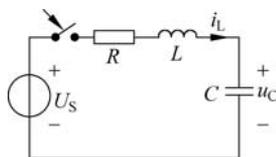


图 5-6-10 RLC 串联电路

此时特征根 $P_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm j\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$, 是两个不相等的负实根。电容电压 u_C 的表达形式为

$$u_C = U_S + A_1 e^{P_1 t} + A_2 e^{P_2 t}$$

电路的动态响应为非振荡放电工作状态。

(2) $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时, 临界阻尼的情况。

此时特征根 $P_{1,2} = -\frac{R}{2L} = P$ 是两个相等的负实根。电容电压 u_C 的表达形式为

$$u_C = U_S + A_1 e^{Pt} + A_2 t e^{Pt}$$

电路的动态响应为非振荡放电工作状态。

(3) $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时, 欠阻尼的情况。

此时特征根 $P_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$, 是一对共轭复根。电容电压 u_C 的表达形式为

$$u_C = U_S + A_1 e^{P_1 t} + A_2 e^{P_2 t} = U_S + e^{-\delta t} (A_1 e^{j\omega t} + A_2 e^{-j\omega t})$$

经常写为

$$u_C = U_S + A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \beta)$$

式中, $\delta = \frac{R}{2L}$, $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$ 。其动态响应为振荡放电工作状态。

在以上 3 种情况中, 每一种情况都有两个待定常数 A_1 、 A_2 或 A 、 β 。它们要根据初始条件 $u_C(0_+)$ 、 $\frac{du_C(0_+)}{dt}$ 和 $i_L(0_+)$ 、 $\frac{di_L(0_+)}{dt}$ 及外加激励确定。当 $u_C(0_+) = 0$ 、 $i_L(0_+) = 0$ 时, 电路的响应为零状态响应; 当初始值不为零时, 电路的响应称为全响应。这两种响应求取方法相同, 区别仅在于初始条件及待求的常数不同。当然, 按一阶电路全响应的分析结果, 从叠加的角度分析, 二阶电路的全响应也可以由分别计算的零输入响应和零状态响应之和来求取。

【例题 5-6-2】 求如图 5-6-11 所示电路中电流 $i(t)$ 的零状态响应。

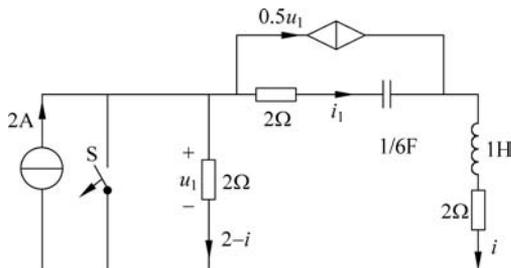


图 5-6-11 例题 5-6-2 图

【解】

(1) 列出电路的微分方程。

在 $t=0$ 时刻, 开关 S 打开, 则

$$\text{由 KCL: } i_1 = i - 0.5u_1 = i - 0.5 \times 2(2-i) = 2i - 2;$$

$$\text{由 KVL: } 2(2-i) = 2i_1 + 6 \int i_1 dt + \frac{di}{dt} + 2i。$$

整理得二阶非齐次常微分方程:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 8 \frac{di}{dt} + 12i = 12$$

方程的解答形式为: $i = i' + i''$, 包含特解 i' 和通解 i'' 。

(2) 求特解 i' 。

画出原电路达到稳定后的 ∞ 等效电路, 如图 5-6-12 所示。

由稳态模型得: $i' = 0.5u_1, u_1 = 2(2 - 0.5u_1)$ 。

计算得到: $u_1 = 2\text{V}, i' = i(\infty) = 1\text{A}$ 。

(3) 求通解 i'' 。

方程的两个特征根: $P_1 = -2, P_2 = -6$ 。那么, 通解的表达形式为

$$i'' = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-6t}$$

(4) 求初值。

画出原电路在 $t=0_+$ 的等效电路, 如图 5-6-13 所示。

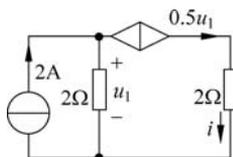


图 5-6-12 ∞ 等效电路

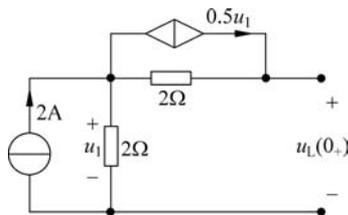


图 5-6-13 0_+ 等效电路

由换路定律,

$$\begin{cases} i(0_+) = i(0_-) = 0 \\ \left. \frac{di}{dt} \right|_{0_+} = \frac{1}{L} u_L(0_+) \end{cases}$$

由于 $u_1 = 2 \times 2 = 4\text{V}$, 根据 0_+ 等效电路可得:

$$u_L(0_+) = 0.5u_1 \times 2 + u_1 = 2u_1 = 8\text{V}$$

那么,

$$\begin{cases} i(0_+) = i(0_-) = 0 \\ \left. \frac{di}{dt} \right|_{0_+} = \frac{1}{L} u_L(0_+) = 8 \end{cases}$$

(5) 定常数。

将初始值代入 $i = 1 + A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-6t}$ 得:

$$\begin{cases} 0 = 1 + A_1 + A_2 \\ 8 = -2A_1 - 6A_2 \end{cases}$$

$$\text{求得系数: } \begin{cases} A_1 = 0.5 \\ A_2 = -1.5 \end{cases}$$

因此,

$$i = 1 + 0.5e^{-2t} - 1.5e^{-6t} \text{ A}, \quad t \geq 0$$

【例题 5-6-3】 二阶电路如图 5-6-14 所示, 已知: $i_L(0_-) = 2\text{A}$, $u_C(0_-) = 0\text{V}$, 求 $t \geq 0$ 时的 $i_L(t)$ 和 $i_R(t)$ 。

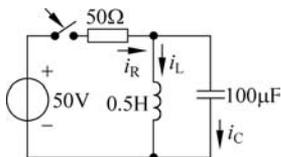


图 5-6-14 例题 5-6-3 题图

【解】

(1) 列微分方程。

由 KCL:

$$L \frac{di_L}{dt} - 50 + i_L + LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} = 0$$

整理后的微分方程为:

$$RLC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + L \frac{di_L}{dt} + Ri_L = 50$$

(2) 求特解。

$$i'_L = 1\text{A}$$

(3) 求通解(自由分量)。

电路的特征方程为: $P^2 + 200P + 20000 = 0$, 对应的特征根为 $P = -100 \pm j100$, 进而可得到方程的通解:

$$i''_L = Ae^{-100t} \sin(100t + \varphi)$$

进而得到方程的全响应为:

$$i_L(t) = 1 + Ae^{-100t} \sin(100t + \varphi)$$

(4) 求初值。

已知 $i_L(0_+) = i_L(0_-) = 2\text{A}$, $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$, 且

$$\left. \frac{di_L}{dt} \right|_{0_+} = \frac{1}{L} u_L(0_+) = \frac{1}{L} u_C(0_+) = 0$$

根据全响应电流的表达形式求导的:

$$\frac{di_L}{dt} = -100Ae^{-100t} \sin(100t + \beta) + 100Ae^{-100t} \cos(100t + \beta)$$

(5) 定常数。

将初始值 $i_L(0_+) = 0$, $u_L(0_+) = 0$ 代入:

$$\begin{cases} 1 + A \sin \varphi = 2 \\ 100A \cos \varphi - 100A \sin \varphi = 0 \end{cases}$$

求得:

$$\begin{cases} \varphi = 45^\circ \\ A = \sqrt{2} \end{cases}$$

因此,

$$i_L(t) = 1 + \sqrt{2}e^{-100t} \sin(100t + 45^\circ) \text{ A}, \quad t \geq 0$$

(6) 求 $i_R(t)$ 。

设解答形式为

$$i_R(t) = 1 + A e^{-100t} \sin(100t + \varphi)$$

① 求初值。

画出 $t=0_+$ 的等效电路图,如图 5-6-15 所示。

在 0_+ 等效电路中,得到:

$$i_R(0_+) = \frac{50 - u_C(0_+)}{50} = 1\text{A}$$

$$i_C(0_+) = -1\text{A}$$

$$\left. \frac{di_R}{dt} \right|_{0_+} = - \left. \frac{du_C}{dt} \right|_{0_+} = - \frac{1}{RC} i_C(0_+) = - \frac{-1}{50 \times 100 \times 10^{-6}} = 200$$

② 定常数。

将初始值代入 $i_R(t)$ 的表达式得到:

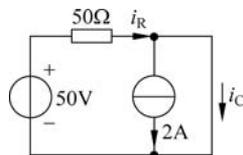
$$\begin{cases} 1 + A \sin \varphi = 1 \\ 100A \cos \varphi - 100A \sin \varphi = 200 \end{cases}$$

求得:

$$\begin{cases} \varphi = 0 \\ A = 2 \end{cases}$$

因此,

$$i_R(t) = 1 + 2e^{-100t} \sin 100t (\text{A}), \quad t \geq 0$$



例 5-6-15 0_+ 等效电路

5.7 本章小结

(1) 换路定律:

$$u_C(0_+) = u_C(0_-)$$

$$i_L(0_+) = i_L(0_-)$$

(2) 在 0_+ 等效电路中计算初始值。 0_+ 等效电路是:

① 换路后的电路。

② 电容(电感)用电压源(电流源)替代。

(3) 电路的零输入响应:

$$u_C = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

(4) 电路的零状态响应:

$$u_C = U_S (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

(5) 电路的全响应:

$$u_C = U_S + (U_0 - U_S) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

(6) 三要素法计算全响应:

$$f(t) = f(\infty) + [f(0_+) - f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

(7) 二阶电路含二个独立储能元件,是用二阶常微分方程所描述的电路。

(8) 二阶电路的性质取决于特征根,特征根取决于电路结构和参数,与激励和初始值无关。特征根 $P = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$, 对应 3 种情况下的电容电压:

① $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, $\delta > \omega_0$, 两个不等的负实根, 过阻尼, 非振荡放电, $u_C = A_1 e^{P_1 t} + A_2 t e^{P_2 t}$ 。

② $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, $\delta = \omega_0$, 两个相等的实根, 临界阻尼, 非振荡放电 $u_C = A_1 e^{-\delta t} + A_2 t e^{-\delta t}$ 。

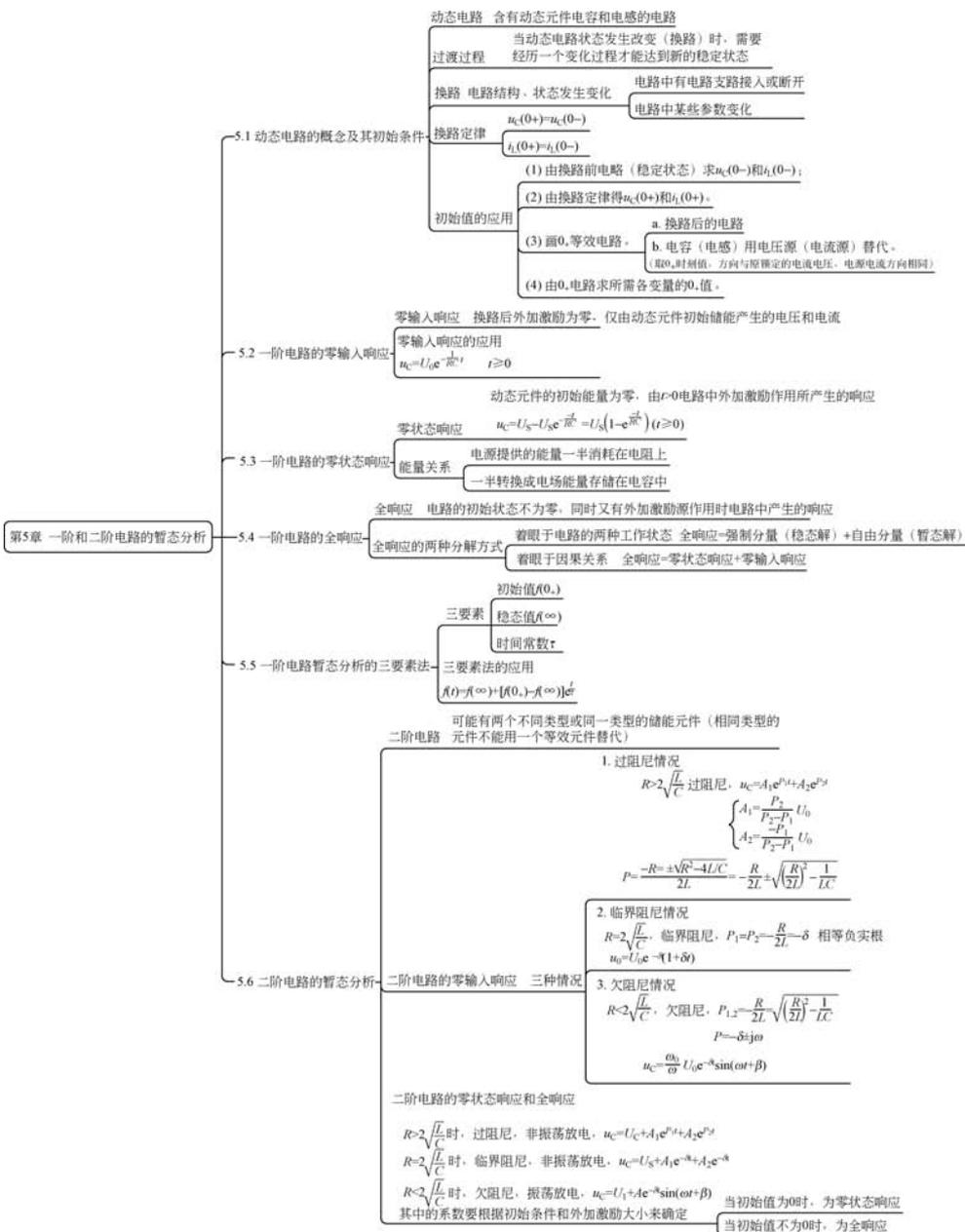
③ $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, $\delta < \omega_0$, 两个共轭复根, 欠阻尼, 振荡放电 $u_C = A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \beta)$ 。

$R = 0$, 两个共轭虚根, 无阻尼, 等幅振荡, $u_C = A \sin(\omega_0 t + \beta)$ 。

(9) 求二阶电路全响应的步骤:

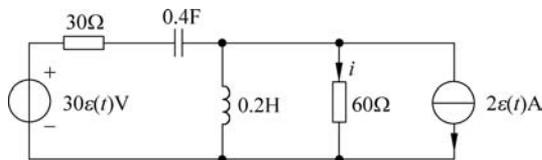
- ① 列写换路后 (0_+) 电路的微分方程;
- ② 求特征根, 由根的性质写出自由分量(积分常数待定);
- ③ 求强制分量(稳态分量);
- ④ 全响应 = 自由分量 + 强制分量;
- ⑤ 将初值 $f(0_+)$ 和 $f'(0_+)$ 代入全解, 定积分常数求响应。

第5章 思维导图



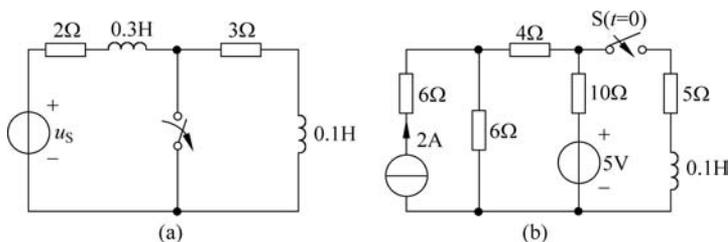
习 题

5-1 在如题 5-1 图所示的电路中初始状态为零,计算 $i(0_+)$ 。



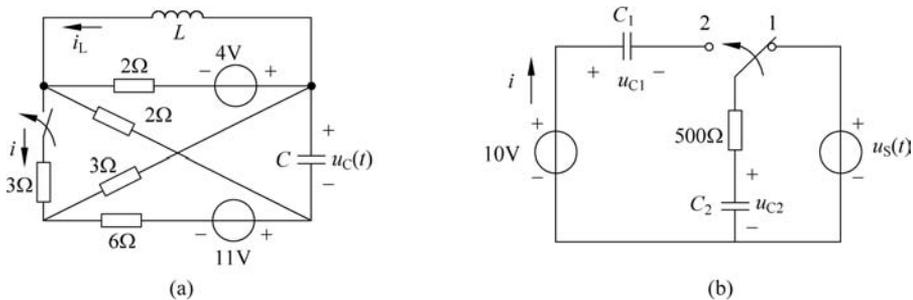
题 5-1 图

5-2 求题 5-2 图中动态电路的时间常数 τ 。



题 5-2 图

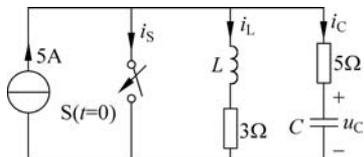
5-3 分别求题 5-3 图中各电路中电流的初值 $i(0_+)$ 。



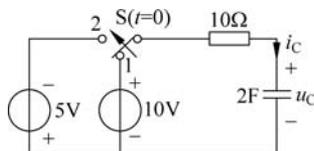
题 5-3 图

5-4 如题 5-4 图所示电路在换路前已稳定, $t=0$ 时开关 S 闭合。求 $u_C(0_+)$ 、 $i_C(0_+)$ 、 $i_L(0_+)$ 、 $i_S(0_+)$ 。

5-5 如题 5-5 图所示电路中开关 S 在 $t=0$ 时由 1 合向 2, 电路在换路前已处于稳态。试求 $t=0_+$ 时的 u_C 、 i_C 。



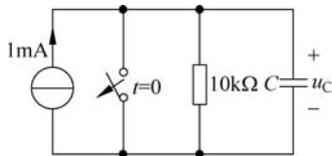
题 5-4 图



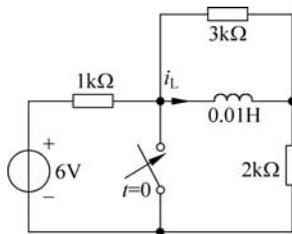
题 5-5 图

5-6 在如题 5-6 图所示的电路中, $t=0$ 时开关断开。已知 $u_C(2)=8\text{V}$, 求电容 C 。

5-7 如题 5-7 图所示电路在换路前已达稳态。 $t=0$ 时开关接通, 求 $t>0$ 时的 $i_L(t)$ 。



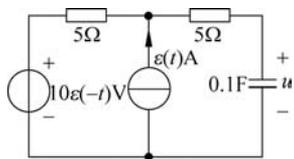
题 5-6 图



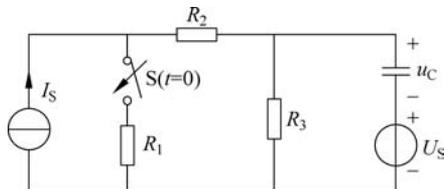
题 5-7 图

5-8 求如题 5-8 图所示电路中 $-\infty < t < \infty$ 的 $u(t)$ 。

5-9 如题 5-9 图所示电路换路前已处于稳态, 试用三要素法求换路后的全响应 u_C 。图中 $C=0.01\text{F}$, $R_1=R_2=10\Omega$, $R_3=20\Omega$, $U_S=10\text{V}$, $I_S=1\text{A}$ 。



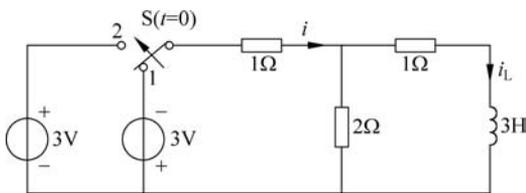
题 5-8 图



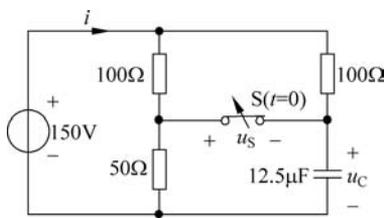
题 5-9 图

5-10 如题 5-10 图所示电路, 开关 S 在 $t=0$ 时由 1 合向 2, 换路前电路已处于稳态。试求换路后电流 i_L 和 i 。

5-11 如题 5-11 图所示电路换路前已处于稳态, 求换路后的 u_C 和开关 S 两端的电压 u_S 。



题 5-10 图

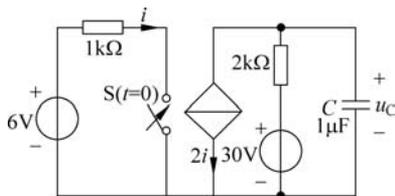


题 5-11 图

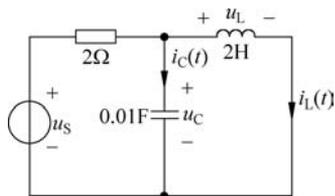
5-12 电路如题 5-12 图所示, 设开关闭合前电路已处于稳态, 当 $t=0$ 时开关 S 闭合, 求开关闭合后的 $u_C(t)$ 。

5-13 对于如题 5-13 图所示的电路, 已知电感电流 $i_L(t)=5(1-e^{-10t})\text{A}$, $t\geq 0$, 求 $t\geq 0$ 时电容电流 $i_C(t)$ 和电压源电压 $u_S(t)$ 。

5-14 如题 5-14 图所示电路处于稳态, $t=0$ 时开关 S 闭合。求换路后电流 i_1 、 i_2 及流过开关的电流 i 。

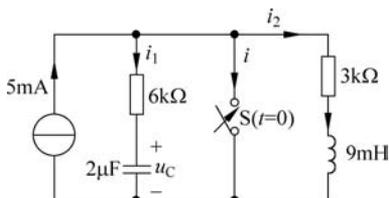


题 5-12 图

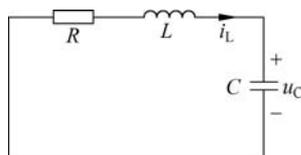


题 5-13 图

5-15 电路如题 5-15 图所示, $R=4\Omega, L=1\text{H}, C=\frac{1}{4}\text{F}, u_C(0)=4\text{V}, i_L(0)=2\text{A}$, 试求电路的零输入响应 $i_L(t), t \geq 0$ 。



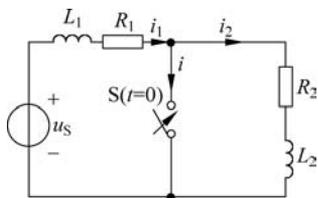
题 5-14 图



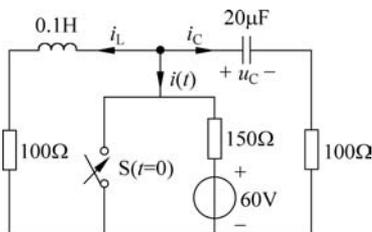
题 5-15 图

5-16 电路如题 5-16 图所示, 换路前已处于稳态。 $t=0$ 时开关 S 闭合。求 i_1, i_2 及流经开关的电流 i , 并绘制它们的波形。

5-17 电路如题 5-17 图所示。当 $t < 0_-$ 时, 电路已处于稳态。若 $t=0$ 时开关 S 闭合, 求电流 $i(t)$ 。



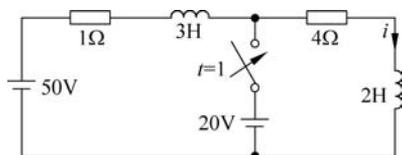
题 5-16 图



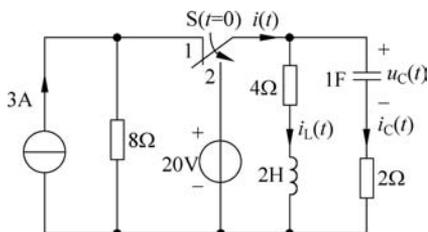
题 5-17 图

5-18 电路如题 5-18 图所示, 当 $t=1\text{s}$ 时开关闭合, 闭合前电路已达稳态。试求 $i(t), t \geq 1\text{s}$ 。

5-19 如题 5-19 图所示电路, $t < 0$ 时已处于稳态, 在 $t=0$ 时刻将开关 S 从位置 1 打到位置 2, 试求 $t \geq 0_+$ 后的电流 $i(t)$ 。

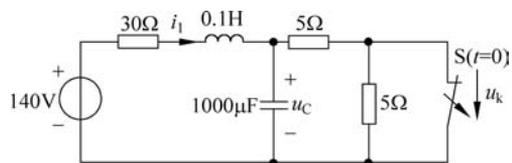


题 5-18 图



题 5-19 图

5-20 在如题 5-20 图所示的电路中,开关闭合已久。求开关打开后其端电压 $u_k(t)$ 和电容电压 $u_C(t)$ 。



题 5-20 图