

第3章

连续时间信号与系统的频域分析

考点 1 信号的正交分解和傅里叶级数

本节考点：主要考查对信号的正交分解的理解及周期信号的傅里叶级数展开。

……知识点链接……

1. 信号正交分解原理

定义在时间区间 (t_1, t_2) 上的信号 $x(t)$ 可以用完备正交信号集 $\{\phi_i(t), i=1, 2, \dots, n\}$ 中各基底信号和表示, 即 $x(t) = \sum_{i=1}^n C_i \phi_i(t)$, 此式为信号的精确的正交分解(正交展开)式, 又称广义傅里叶展开式, $C_i \phi_i(t)$ 就是信号 $x(t)$ 在基底 $\phi_i(t)$ 上的正交分量。

信号的能量等于其各正交展开分量的能量之和, 这就是广义的帕塞瓦尔能量等式, 即

$$\int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt = \sum_{i=1}^n C_i^2 K_i$$

其中, $\int_{t_1}^{t_2} |\phi_i(t)|^2 dt = K_i, C_i = \frac{1}{K_i} \int_{t_1}^{t_2} x(t) \phi_i^*(t) dt, i=1, 2, \dots, n$ 。

2. 周期信号傅里叶级数展开

1) 三角函数形式的傅里叶级数展开

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)], t_0 < t < t_0 + T, \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

或

$$x(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(k\omega_0 t + \phi_k)$$

各次谐波成分的幅度分别如下。

$$\text{直流分量: } a_0 = c_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt。$$

$$\text{余弦分量的幅度值: } a_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cos(k\omega_0 t) dt。$$

$$\text{正弦分量的幅度值: } b_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \sin(k\omega_0 t) dt。$$

$$c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \phi_k = \arctan\left(-\frac{b_k}{a_k}\right)$$

2) 指数形式的傅里叶级数展开

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t}, \quad t_0 < t < t_0 + T, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

系数为

$$X_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

(1) 两种表达形式的系数关系。

$$X_0 = c_0 = a_0$$

$$X_k = |X_k| e^{j\phi_k} = \frac{1}{2}(a_k - jb_k)$$

$$X_{-k} = |X_{-k}| e^{j\phi_{-k}} = \frac{1}{2}(a_k + jb_k)$$

也可以写成

$$c_k = \begin{cases} X_0, & k=0 \\ \frac{1}{2}|X_k|, & k>0 \end{cases}$$

$$\varphi_k = \angle X_k, k \geq 0$$

(2) 傅里叶级数展开的条件。

周期信号 $x(t)$ 应满足下述狄利克雷(Dirichlet)条件,即在 $(t_0, t_0 + T)$ 区间有定义,并且:

- $x(t)$ 绝对可积, 即 $\int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)| dt < \infty$;
- $x(t)$ 的极大值和极小值的数目应有限;
- $x(t)$ 如有间断点, 则间断点的数目应有限。

3. 周期信号的频谱分析

1) 波形对称性与谐波特性关系

偶周期信号 $x(t)$ 的傅里叶级数不含正弦项, 只含余弦项和直流项, 即偶信号 $\leftrightarrow$ 余弦级数。

奇周期信号 $x(t)$ 的傅里叶级数不含余弦项和直流项, 只含正弦项, 即奇信号 $\leftrightarrow$ 正弦级数。

若 $x(t) = -x\left(t \pm \frac{T}{2}\right)$, 则称周期信号 $x(t)$ 为半波像对称信号, 半波像对称信号的傅里叶级数中只含奇次谐波项 ($\omega = k\omega_0, k=1, 3, 5, \dots$), 不含偶次谐波项 ($\omega = k\omega_0, k=2, 4, 6, \dots$), 故半波像对称信号又称奇谐信号。

若 $x(t) = x\left(t \pm \frac{T}{2}\right)$, 则称周期信号 $x(t)$ 为半波对称信号, 半波对称信号的傅里叶级数中只含偶次谐波项 ($\omega = k\omega_0, k=2, 4, 6, \dots$) 不含奇次谐波项 ($\omega = k\omega_0, k=1, 3, 5, \dots$), 故半波对称信号又称偶谐信号, 偶谐信号的实际周期为 $\frac{T}{2}$, 实际基频为 $2\omega_0 = \frac{4\pi}{T}$ 。

2) 功率谱和有效频带

(1) 功率有限信号的帕塞瓦尔等式。

$$P = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2 = |X_0|^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |X_k|^2 \\
 &= c_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{c_k}{\sqrt{2}} \right)^2
 \end{aligned}$$

(2) 有效频带。

周期信号的功率主要集中在低频段,通常将信号中从零频率(直流)到所需考虑的最高频率的频率范围称为信号占有的有效频带。

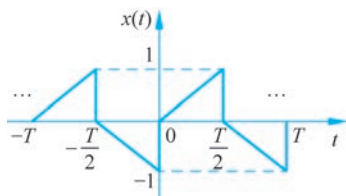


图 3-1-1

【题 3-1-1】 填空题

(1) 已知周期信号 $x(t)$ 的波形如图 3-1-1 所示,其

傅里叶级数展开式为 $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t}$, 其中 $\omega_0 = 2\pi/T$, 则 $X_2 =$ _____。

【分析】 该信号为半波像对称信号(奇谐信号),故偶次谐波为 0。

【解答】 0。

(2) 周期信号 $x(t) = 5\cos \frac{1}{2}t + 2\sin\left(\frac{3}{4}t + 30^\circ\right) + \frac{1}{2}\cos(2t - 45^\circ)$, 其基频 $\omega_0 =$ _____。

【分析】 连续时间周期信号的谱具有离散性、谐波性和收敛性,其中谐波性要求各频率分量的频率均为基波频率的整数倍。该信号各分量频率都是 $1/4$ 的整数倍,因此基频为 $1/4$ 。

【解答】 $1/4$ 。

(3) 信号 $x(t) = |\cos t|$ 中的直流分量为 _____。

【分析】 三角形式的傅里叶级数展开中 a_0 代表了信号的直流分量。该信号的周期为 π , 利用直流分量的计算公式得 $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t dt = \frac{2}{\pi}$ 。

【解答】 $\frac{2}{\pi}$ 。

(4) 实信号 $x(t) = 2 + \cos 2(\pi t) + 3\sin 6(\pi t)$ 的平均功率为 _____。

【分析】 由于傅里叶级数展开将信号在正交基上进行了表示,信号的平均功率就是各分量的功率之和。

【解答】 $P = 2^2 + \frac{1}{2} \times 1^2 + \frac{1}{2} \times 3^2 = 9$ 。

(5) $x(t) = \cos(5t)\sin(3t)$, 其指数函数形式的傅里叶级数为 _____。

【分析】 利用欧拉公式将三角函数转化为复指数函数,得到指数函数形式的傅里叶级数。

【解答】 利用欧拉公式,有

$$x(t) = \cos(5t)\sin(3t) = \frac{e^{j5t} + e^{-j5t}}{2} \frac{e^{j3t} - e^{-j3t}}{2j} = \frac{1}{4j} (-e^{-j8t} + e^{-j2t} - e^{j2t} + e^{j8t})$$

【题 3-1-2】 选择题

(1) 连续周期信号的频谱具有_____。

- A. 连续性、周期性 B. 连续性、收敛性
C. 离散性、周期性 D. 离散性、收敛性

【分析】 连续时间周期信号的谱具有离散性、谐波性和收敛性。

【解答】 D。

(2) 已知 $x(t) = \sum_{k=-100}^{100} \cos(k\pi) e^{j\frac{\pi}{25}kt}$, 则该信号为()。

- A. 周期信号 B. 非周期信号 C. 实偶信号 D. 实奇信号

【分析】 题目给出了该信号复指数形式的傅里叶级数展开, 因此该信号为周期信号。由其表达式可知 $\omega_0 = \frac{\pi}{25}$, 故周期为 $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 50$ 。又因其谱线 $X_k = \cos(k\pi) (k = -100, -99, \dots, 100)$ 是关于 k 的实偶函数, 因此时域信号也是实偶信号。

【解答】 A、C。

(3) 某周期信号 $x(t) = 3 + 3\cos 2t + 2\sin\left(4t - \frac{\pi}{4}\right)$ 的基频为()。

- A. 2rad/s B. 2π rad/s C. 4rad/s D. 0

【分析】 周期信号的谱具有离散性、谐波性和收敛性, 其中谐波性要求各频率分量的频率均为基波频率的整数倍。

【解答】 A。

【题 3-1-3】 判断题

周期矩形脉冲信号频谱的谱线间隔与脉宽及周期有关。()

【分析】 周期信号谱线间隔与信号周期成反比, 与其他参数无关。对于周期为 T 的矩形脉冲信号, 谱线间隔 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ 。

【解答】 错误。

【题 3-1-4】 判断题

已知两信号分别为

$$x_1(t) = 2\cos(\pi t) + 4\sin(3t)$$

$$x_2(t) = 2 + 7\cos\left(\frac{1}{2}t\right) + 3\cos\left(\frac{2}{3}t\right) + 5\sin\left(\frac{7}{6}t\right)$$

试判断说明上述两信号是否为周期信号。若为周期信号, 求出周期和基频, 指出组成周期信号的谐波成分。

【分析】 周期信号的谱具有离散性、谐波性和收敛性, 其中谐波性要求各频率分量的频率均为基波频率的整数倍。

【解答】 (1) $x_1(t)$ 的两个频率分量不具有整数倍关系, 故 $x_1(t)$ 不是周期信号。

(2) $x_2(t)$ 的 3 个非直流分量的频率可分别写为 $3/6$ 、 $4/6$ 和 $7/6$, 因此该信号是周期信号, 基频为 $1/6$, 含有直流分量和三、四、七次谐波。

【题 3-1-5】 画图题

画出信号 $x(t) = 2 + \cos t + 3\cos\left(5t - \frac{\pi}{6}\right) - 2\cos\left(8t - \frac{\pi}{3}\right)$ 的频谱图。

【分析】 本题考查三角函数形式傅里叶级数的展开, 由于信号的时域表达式已经具有各次谐波分量之和的形式, 因此只需将其转换为幅度为正数的余弦信号, 即可得到幅度谱和相位谱。

【解答】 由 $x(t)$ 表达式可得基频

$$\omega_0 = 1$$

$$x(t) = 2 + \cos t + 3\cos\left(5t - \frac{\pi}{6}\right) + 2\cos\left(8t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

频谱图如图 3-1-2 所示。

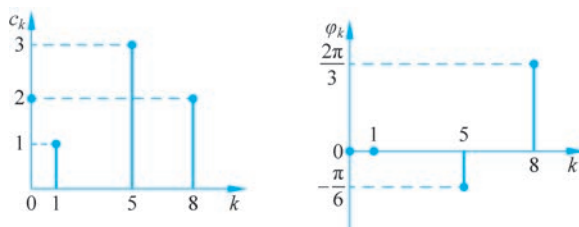


图 3-1-2

【题 3-1-6】 画图题

周期信号 $x(t) = 2 + 6\cos(10\pi t - 45^\circ) + 4\sin(30\pi t)$, 画出该信号双边相位频谱图。

【分析】 本题考查傅里叶级数的展开。由于信号的时域表达式已经具有各次谐波分量之和的形式, 因此只需将其转换为幅度为正数的余弦信号, 即可得到单边的幅度谱和相位谱, 再根据实信号双边谱与单边谱的关系得到双边谱。

【解答】 $x(t) = 2 + 6\cos(10\pi t - 45^\circ) + 4\cos(30\pi t - 90^\circ)$

$$\omega_0 = 10\pi$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$X_0 = 2, |X_1| = |X_{-1}| = 3, |X_3| = |X_{-3}| = 2$$

$$\angle X_1 = -\angle X_{-1} = -\frac{\pi}{4}$$

$$\angle X_3 = -\angle X_{-3} = -\frac{\pi}{2}$$

频谱图如图 3-1-3 所示。

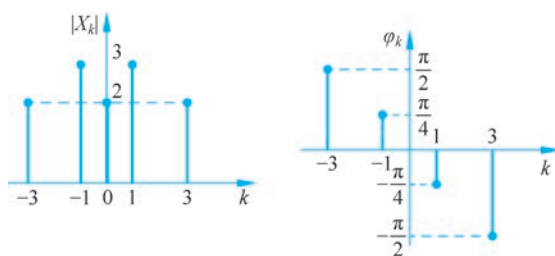


图 3-1-3

【题 3-1-7】 计算题

周期信号 $x(t)$ 的频谱如图 3-1-4 所示, 求 $x(t)$ 的实函数形式表达式, 并求其功率。

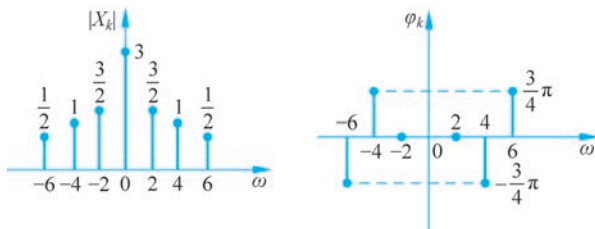


图 3-1-4

【分析】 本题考查复指数形式的傅里叶级数与三角函数形式傅里叶级数的转换关系。

【解答】 $\omega_0 = 2$

$$x(t) = 3 + 3\cos 2t + 2\cos(4t - 3\pi/4) + \cos(6t + 3\pi/4)$$

$$P = 3^2 + \frac{1}{2}(3^2 + 2^2 + 1^2) = 16$$

【题 3-1-8】 证明题

设连续时间周期信号 $x(t)$ 的指数形式的傅里叶级数为 $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t}$, 证明:

$x(t)$ 的平均功率为 $P = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2$ 。

【分析】 这是功率有限信号的帕塞瓦尔等式, 由于傅里叶级数展开将信号在正交基上进行了表示, 信号的平均功率就是各分量的功率之和。这是一道证明题, 不能直接使用结论, 需要对性质进行推导。

$$\begin{aligned} \text{【证明】} \quad P &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) x^*(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t} \right]^* dt \end{aligned}$$

交换求和积分次序, 有

$$P = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k^* \left[\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k^* X_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2$$

【题 3-1-9】 计算题

设 $x(t)$ 是基本周期为 T 的周期信号, 那么它也是周期为 NT 的周期信号 (N 为正整数)。令 X_{1n} 表示以 T 为周期的傅里叶级数系数, X_{2n} 表示以 NT 为周期的傅里叶级数系数, 试用 X_{1n} 表示 X_{2n} 。

【分析】 本题考查傅里叶级数展开的谱线间隔与信号时域周期的关系。将信号视为周期为 NT 的信号后, 其基频降低为原信号基频的 $1/N$, 但展开信号所需的谐波分量没有改变, 因此新增的谱线幅度都为 0。

$$\begin{aligned} \text{【解答】 } x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_{1k} e^{jk\omega_0 t} \\ x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_{2n} e^{jn\frac{\omega_0}{N}t} \end{aligned}$$

令 $n=kN$, 得到

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_{1k} e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_{1k} e^{jkN(\frac{\omega_0}{N})t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_{2n} e^{jn\frac{\omega_0}{N}t}, n=kN$$

$$\text{所以有 } X_{2n} = \begin{cases} X_{1k}, & n=kN \\ 0, & \text{其他} \end{cases}。$$

考点 2 傅里叶变换及其性质

本节考点: 主要考查根据傅里叶变换的定义和性质求解傅里叶变换或其反变换。

……知识点链接……**1. 傅里叶变换**

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = F[x(t)]$$

2. 傅里叶反变换

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = F^{-1}[X(j\omega)]$$

3. 常用到的傅里叶变换的特性

(1) 对于实信号 $x(t)$, 有 $|X(j\omega)| = |X(-j\omega)|$, $\angle X(j\omega) = -\angle X(-j\omega)$ 。

(2) 当 $\omega=0$ 时, 有 $X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt$ 。

(3) 当 $t=0$ 时, 有 $x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) d\omega$ 。

【题 3-2-1】 填空题

(1) $x(t) = e^{3t} u(t)$ 的傅里叶变换为 _____, 拉普拉斯变换为 _____。

【分析】 本题考查傅里叶变换与拉普拉斯变换的关系, 当拉普拉斯变换的收敛域不包含虚轴时, 傅里叶变换不存在。

【解答】 傅里叶变换不存在；

拉普拉斯变换为 $\frac{1}{s-3}$, $\text{Re}[s] > 3$ 。

(2) 信号时域变化越快,其对应的频谱所含的高频分量(越多,越少)_____。

【分析】 本题考查频谱的物理含义,频谱表示信号中不同频率分量的幅度和相位,其中高频分量对应着信号时域快速变化的部分。

【解答】 越多。

【题 3-2-2】 判断题

只要是满足绝对可积的连续信号,就存在傅里叶变换。()

【分析】 本题考查傅里叶变换存在的条件:信号绝对可积;只有有限个间断点;有限个极值点,即狄利克雷条件。注意,狄利克雷条件是傅里叶变换的充分条件,在频域引入冲激函数后,某些不绝对可积的函数,如正弦信号,也可以定义其傅里叶变换。

【解答】 错误。

【题 3-2-3】 选择题

冲激信号 $\delta(t)$ 的傅里叶变换为()。

- A. $\delta(\omega)$ B. $2\pi\delta(\omega)$ C. $e^{j\omega}$ D. 1

【分析】 本题考查基本的傅里叶变换对。

【解答】 D。

【题 3-2-4】 简答题

(1) 信号分解与合成是信号分析的常用方法,若 $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$,能否用 $e^{j\omega t}$ 合成 $x(t)$?若能,请写出其表达式。

【分析】 本题考查傅里叶变换的物理含义:用复正弦信号展开原信号。

【解答】 能。

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

(2) 求 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(t-0.5)}{t-0.5} dt$

【分析】 本题可利用基本的傅里叶变换对及傅里叶变换的定义求解。

【解答】 由 $\text{Sa}(\omega_c t) \leftrightarrow \frac{\pi}{\omega_c} G_{2\omega_c}(\omega)$, 可知 $\frac{\sin(t-0.5)}{t-0.5} \leftrightarrow \pi G_2(\omega) e^{-j0.5\omega}$;

由 $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$, 可得 $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = X(0) = \pi G_2(\omega) e^{-j0.5\omega} \big|_{\omega=0} = \pi$ 。

【题 3-2-5】 证明题

设 $\mathcal{F}[x(t)] = X(j\omega)$, 试证明:

(a) $x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) d\omega$;

(b) $X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt$ 。

【分析】 本题可由傅里叶变换和傅里叶反变换的定义导出。

【证明】 (a) 因为 $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$, 所以

$$x(0) = x(t) \big|_{t=0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \big|_{t=0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) d\omega$$

(b) 因为 $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$, 所以

$$X(0) = X(j\omega) \big|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \big|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt$$

……知识点链接……

1. 常用傅里叶变换性质

(1) 线性特性(叠加性)。

若 $x_1(t) \leftrightarrow X_1(j\omega)$, $x_2(t) \leftrightarrow X_2(j\omega)$, 则

$$ax_1(t) + bx_2(t) \leftrightarrow aX_1(j\omega) + bX_2(j\omega)$$

(2) 对称特性。

若 $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$, 则 $X(jt) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$ 。

(3) 时频展缩特性。

若 $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$, 则 $x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(j\frac{\omega}{a}\right)$ 。

(4) 时移特性。

若 $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$, 则 $x(t+t_0) \leftrightarrow X(j\omega) e^{j\omega t_0}$ 。

(5) 频移特性。

若 $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$, 则 $x(t) e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow X[j(\omega - \omega_0)]$ 。

(6) 时域微分特性。

若 $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$, 且 $\frac{dx(t)}{dt}$ 存在傅里叶变换, 则 $\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega X(j\omega)$ 。

(7) 频域微分特性。

若 $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$, 则 $tx(t) \leftrightarrow j \frac{d}{d\omega} X(j\omega)$ 。

(8) 时域卷积定理。

若 $x_1(t) \leftrightarrow X_1(j\omega)$, $x_2(t) \leftrightarrow X_2(j\omega)$, 则

$$x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(j\omega) * X_2(j\omega)$$

(9) 频域卷积定理。

若 $x_1(t) \leftrightarrow X_1(j\omega)$, $x_2(t) \leftrightarrow X_2(j\omega)$, 则

$$x_1(t)x_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X_1(j\omega) * X_2(j\omega)$$

(10) 信号能量与频谱的关系。

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

2. 常用信号的傅里叶变换对

$$(1) e^{-at}u(t), a>0 \leftrightarrow \frac{1}{j\omega + a}$$

$$(2) \delta(t) \leftrightarrow 1$$

$$(3) 1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

$$(4) G_\tau(t) \leftrightarrow \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$(5) \text{Sa}(\omega_c t) \leftrightarrow \frac{\pi}{\omega_c} G_{2\omega_c}(\omega)$$

$$(6) \Lambda_{2\tau}(t) \leftrightarrow \tau \text{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$(7) \text{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega}$$

$$(8) u(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

$$(9) e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

$$(10) \cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$$

$$(11) \sin(\omega_0 t) \leftrightarrow j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$$

$$(12) \delta_T(t) \leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} \omega_0 \delta(\omega - k\omega_0), \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

【题 3-2-6】 填空题

(1) 实周期信号的傅里叶级数是复序列,其实部和虚部的对称性分别为_____。

【分析】 本题考查傅里叶级数展开的奇偶特性,它与傅里叶变换的奇偶特性是相同的。

【解答】 实部偶对称,虚部奇对称。

(2) 已知 $x(t)$ 为实信号,其傅里叶变换为 $X(j\omega) = R(\omega) + jQ(\omega)$, 则 $\frac{1}{2}[x(t) + x(-t)]$ 的傅里叶变换为_____。

【分析】 本题考查傅里叶变换的奇偶特性。

【解答】 对于实信号

$$x(t) \leftrightarrow X(j\omega) = R(\omega) + jQ(\omega), R(\omega) \text{ 偶对称}, Q(\omega) \text{ 奇对称}$$

$$x(-t) \leftrightarrow X(-j\omega) = R(-\omega) + jQ(-\omega) = R(\omega) - jQ(\omega)$$

$$\frac{1}{2}[x(t) + x(-t)] \leftrightarrow \frac{1}{2}[X(j\omega) + X(-j\omega)] = R(\omega)$$

(3) 设 $x(t) = \begin{cases} e^{-t}, & 0 \leq t \leq 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 已知 $f(t) = e^{-t}u(t)$ 的傅里叶变换为 $F(j\omega) =$

$\frac{1}{1+j\omega}$, 根据傅里叶变换的性质, 可得 $x(t)$ 的傅里叶变换为 $X(j\omega) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【分析】 本题考查傅里叶变换的时移性质。

【解答】 $e^{-t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{1+j\omega}$, $e^{-(t-2)}u(t-2) \leftrightarrow \frac{1}{1+j\omega}e^{-j2\omega}$

则

$$x(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2}e^{-(t-2)}u(t-2) \leftrightarrow \frac{1}{1+j\omega}(1 - e^{-2(j\omega+1)})$$

$$\text{故 } x(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega}(1 - e^{-2(j\omega+1)})$$

(4) 已知 $u(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$, 则 $u(t-3) \leftrightarrow \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【分析】 本题考查傅里叶变换的时移特性。同时需要运用冲激函数的运算特性对结果进行简化。

【解答】 $u(t-3) \leftrightarrow \left(\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right)e^{-j3\omega} = \pi\delta(\omega) + \frac{e^{-j3\omega}}{j\omega}$

(5) 已知 $X(j\omega) = \cos(3\omega)$, 其傅里叶反变换 $x(t) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【分析】 本题考查基本的傅里叶变换对及傅里叶变换的时移特性。注意, $\delta(t) \leftrightarrow 1$, 且根据时移特性, $\delta(t-3) \leftrightarrow e^{-j3\omega}$ 。

【解答】 $X(j\omega) = \cos(3\omega) = \frac{1}{2}(e^{j3\omega} + e^{-j3\omega})$

则

$$x(t) = \frac{1}{2}[\delta(t-3) + \delta(t+3)]$$

(6) 频谱 $X(j\omega) = \cos(\pi\omega)G_4(\omega)$ 对应的信号 $x(t)$ 等于 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

【分析】 本题考查基本的傅里叶变换对及傅里叶变换的时移特性。注意, $\cos(\pi\omega) = \frac{1}{2}(e^{j\pi\omega} + e^{-j\pi\omega})$ 。

【解答】 $\frac{2}{\pi}\text{Sa}(2t) \leftrightarrow G_4(\omega)$

$$\frac{2}{\pi}\text{Sa}[2(t-\pi)] \leftrightarrow G_4(\omega)e^{-j\pi\omega}$$

$$\frac{2}{\pi}\text{Sa}[2(t+\pi)] \leftrightarrow G_4(\omega)e^{j\pi\omega}$$

因此

$$x(t) = \frac{1}{\pi}\{\text{Sa}[2(t+\pi)] + \text{Sa}[2(t-\pi)]\}$$

(7) 若 $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$, 则 $2X(2j\omega)$ 的原函数为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

【分析】 本题考查傅里叶变换的时频展缩特性。

【解答】 $x\left(\frac{1}{2}t\right)$ 。

(8) 若 $x(t)$ 的傅里叶变换为 $X(\omega)$, 则 $x(2t-2)$ 的傅里叶变换为_____。

【分析】 本题考查傅里叶变换的时移特性和时频展缩特性, 注意时移和时域展缩的顺序。

【解答】 方法一: 先时移后展缩。 $x(t) \rightarrow x(t-2) \rightarrow x(2t-2)$, $X(j\omega) \rightarrow X(j\omega)e^{-2j\omega} \rightarrow \frac{1}{2}X\left(j\frac{\omega}{2}\right)e^{-j\omega}$ 。

方法二: 先展缩后时移。 $x(t) \rightarrow x(2t) \rightarrow x[2(t-1)]$, $X(j\omega) \rightarrow \frac{1}{2}X\left(j\frac{\omega}{2}\right) \rightarrow \frac{1}{2}X\left(j\frac{\omega}{2}\right)e^{-j\omega}$ 。

故傅里叶变换为 $\frac{1}{2}X\left(j\frac{\omega}{2}\right)e^{-j\omega}$ 。

(9) 若信号 $x(t)$ 的傅里叶变换为 $X(j\omega)$, 则 $x(-2t+3)$ 的傅里叶变换为_____。

【分析】 本题综合运用傅里叶变换的奇偶、时移和时频展缩特性。

【解答】 $x(t) \rightarrow x(2t) \rightarrow x\left[2\left(t+\frac{3}{2}\right)\right] \rightarrow x(-2t+3)$

$$X(j\omega) \rightarrow \frac{1}{2}X\left(j\frac{\omega}{2}\right) \rightarrow \frac{1}{2}X\left(j\frac{\omega}{2}\right)e^{j\frac{3}{2}\omega} \rightarrow \frac{1}{2}X\left(-j\frac{\omega}{2}\right)e^{-j\frac{3}{2}\omega}$$

故傅里叶变换为 $\frac{1}{2}X\left(-j\frac{\omega}{2}\right)e^{-j\frac{3}{2}\omega}$ 。

(10) 若 $x_1(t) \leftrightarrow X_1(j\omega)$, 则 $X_2(j\omega) = 2X_1(2j\omega)e^{-j4\omega}$ 的原函数 $x_2(t)$ 为_____。

【分析】 本题考查傅里叶变换的时频展缩特性及时移特性。

【解答】 $x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|}X\left(j\frac{\omega}{a}\right)$, $x\left[a\left(t+\frac{b}{a}\right)\right] \leftrightarrow \frac{1}{|a|}X\left(j\frac{\omega}{a}\right)e^{j\frac{b}{a}\omega}$, 本题中 $a = \frac{1}{2}$, $b = -2$ 。

故 $X_2(t) = x_1\left(\frac{t}{2}-2\right)$ 。

(11) $x(t) = e^{-jt}\delta(t-2)$, 其傅里叶变换为_____。

【分析】 本题考查傅里叶变换的时移和频域调制特性。

【解答】 $\delta(t) \leftrightarrow 1 \Rightarrow \delta(t-2) \leftrightarrow e^{-2j\omega} \Rightarrow e^{-jt}\delta(t-2) \leftrightarrow e^{-2j(\omega+1)}$

(12) 设 $x(t)$ 的傅里叶变换为 $X(j\omega)$, 则 $X(jt)$ 的傅里叶变换为_____。

【分析】 本题考查傅里叶变换对称特性: $x(t) \leftrightarrow X(j\omega) \Rightarrow X(jt) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$ 。

【解答】 $2\pi x(-\omega)$ 。

(13) 已知 $x(t)$ 的傅里叶变换是 $X(j\omega)$, 则 $X(j2t)$ 的傅里叶变换是_____。

【分析】 本题考查傅里叶变换对称特性和时域展缩特性。

【解答】 $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$, 根据对称特性有 $X(jt) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$, 进而 $X(j2t) \leftrightarrow \pi x(-\omega/2)$ 。

(14) 已知 $x(t)$ 的傅里叶变换为 $X(j\omega)$, 则 $t \frac{dx(t)}{dt}$ 的傅里叶变换为_____。

【分析】 本题需综合利用傅里叶变换的时域微分特性和频域微分特性。

【解答】 方法一:

$$\begin{aligned} x(t) &\leftrightarrow X(j\omega), x'(t) \leftrightarrow j\omega X(j\omega) \\ -jtx'(t) &\leftrightarrow \frac{d[j\omega X(j\omega)]}{d\omega} = jX(j\omega) + j\omega \frac{d[X(j\omega)]}{d\omega} \\ tx'(t) &\leftrightarrow -X(j\omega) - \omega \frac{d[X(j\omega)]}{d\omega} \end{aligned}$$

方法二:

$$\begin{aligned} x(t) &\leftrightarrow X(j\omega) \Rightarrow -jtx(t) \leftrightarrow \frac{d[X(j\omega)]}{d\omega}, -j[tx'(t) + x(t)] \leftrightarrow j\omega \frac{d[X(j\omega)]}{d\omega} \\ tx'(t) &\leftrightarrow -X(j\omega) - \omega \frac{d[X(j\omega)]}{d\omega} \end{aligned}$$

故傅里叶变换为 $-X(j\omega) - \omega \frac{d[X(j\omega)]}{d\omega}$ 。

(15) 已知 $x(t)$ 傅里叶变换为 $X(j\omega)$, 则 $(2-t)x(2-t)$ 的傅里叶变换为_____。

【分析】 本题考查傅里叶变换的时频展缩特性、时移特性及频域微分特性。注意, 当需要同时运用频域微分特性和时频展缩特性时, 需要对复合函数求导, 不要采用 $X'(g(j\omega))$ 的写法, 容易引起歧义。另外, 如果先进行频域微分, 再进行时域展缩, 注意自变量的微分也要展缩, 例如, 频谱 $\frac{dX(j\omega)}{d\omega}$ 的翻转结果为 $\frac{dX(-j\omega)}{d(-\omega)} = -\frac{dX(-j\omega)}{d\omega}$ 。

【解答】 $x(-t) \leftrightarrow X(-j\omega)$

$$(-jt)x(-t) \leftrightarrow \frac{dX(-j\omega)}{d\omega}$$

$$(t-2)x(2-t) \leftrightarrow j \frac{dX(-j\omega)}{d\omega} e^{-j2\omega}$$

因此 $(2-t)x(2-t) \leftrightarrow -j \frac{dX(-j\omega)}{d\omega} e^{-j2\omega}$ 。

(16) 已知 $x(t)$ 和 $X(j\omega)$ 是傅里叶变换对, 那么 $x(t)\cos\omega_0 t$ 的频谱是_____。

【分析】 根据傅里叶变换的频域卷积定理和余弦信号的频谱特点, 可以导出时域调制对应频谱的搬移。

【解答】 $\frac{1}{2}X[j(\omega-\omega_0)] + \frac{1}{2}X[j(\omega+\omega_0)]$ 。

(17) 若 $\mathcal{F}[x(t)] = X(j\omega)$, 则 $\mathcal{F}[x(t-t_0) * u(t-t_0)] =$ _____。

【分析】 本题用到傅里叶变换的时域卷积定理、阶跃信号的频谱及傅里叶变换的时

移特性。

【解答】 $X(j\omega) \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] e^{-j2\omega t_0} = \pi X(0)\delta(\omega) + \frac{X(j\omega)}{j\omega} e^{-j2\omega t_0}$

(18) 已知信号 $x(t) = \sin(t)/t$, 则 $\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt =$ _____。

【分析】 本题考查基本的傅里叶变换对和帕塞瓦尔定理, 根据时域和频域均可求信号的能量, 而该信号在频域具有门函数的形式, 易求能量。

【解答】 $\frac{\sin t}{t} \leftrightarrow \pi G_2(\omega)$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \times 2 \times \pi^2 = \pi$$

【题 3-2-7】 判断题

如果 $f(t)$ 是实函数, 且 $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$, 则下列哪些关系式是成立的?

- A. $R(\omega) = R(-\omega)$ ()
- B. $X(\omega) = -X(-\omega)$ ()
- C. $F(\omega) = F^*(\omega)$ ()
- D. $F(\omega) = X(\omega) + jR(\omega)$ ()

【分析】 本题考查傅里叶变换的奇偶特性。实信号的频谱是共轭对称函数, 因此其实部为偶函数, 虚部为奇函数。

【解答】 A. 正确; B. 正确; C. 错误; D. 错误。

【题 3-2-8】 选择题

(1) 实信号的频谱一定满足()。

- A. 频谱是实函数
- B. 频谱是偶函数
- C. 幅度谱是偶函数
- D. 频谱的实部是奇函数

【分析】 本题考查傅里叶变换的奇偶特性。实信号的频谱是共轭对称函数, 其中幅频特性是偶函数, 相频特性是奇函数。

【解答】 C。

(2) 系统的频谱响应为 $H(j\omega) \leftrightarrow |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$, 其中幅频特性是偶函数, 相频特性是奇函数, 则系统的单位冲激响应 $h(t)$ 是()。

- A. 奇函数
- B. 偶函数
- C. 实函数
- D. 虚函数

【分析】 本题考查傅里叶变换的奇偶特性。实信号的频谱是共轭对称函数, 其中幅频特性是偶函数, 相频特性是奇函数。系统的单位冲激响应与系统的频率响应构成一对傅里叶变换对。由题干可知, 系统的频率响应是共轭对称函数, 因此单位冲激响应必是实函数。

【解答】 C。

(3) 信号 $x(t-t_0)$ 的频谱与 $x(t)$ 的频谱相比, 二者()。

- A. 相位谱相同
- B. 幅度谱相同

C. 幅度谱、相位谱相同

D. 幅度谱、相位谱均不同

【分析】 本题考查傅里叶变换的时移特性。时移引起与频率成正比的相移,幅频特性不变。 $x(t \pm t_0) \leftrightarrow X(j\omega)e^{\pm j\omega t_0}$

【解答】 B。

(4) 已知 $u(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$, 则 $u(t-4)$ 的傅里叶变换为()。

A. $\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}e^{j4\omega}$

B. $\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}e^{-j4\omega}$

C. $\pi\delta(\omega-4) + \frac{1}{j(\omega-4)}$

D. $\pi\delta(\omega) - \frac{1}{j\omega}e^{-j4\omega}$

【分析】 本题考查傅里叶变换的时移特性。同时需要利用冲激函数的运算特性对结果进行简化。

【解答】 B。

$$u(t-4) \leftrightarrow \left(\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right) e^{-j4\omega} = \pi\delta(\omega) + \frac{e^{-j4\omega}}{j\omega}$$

(5) 已知某信号 $x(t)$ 的频谱为 $X(j\omega) = \frac{\sin(2\omega+4)}{\omega+2}$, 则 $x(t)$ 为()。

A. $\frac{1}{2}e^{-2jt}G_4(t)$

B. $2e^{-2jt}G_2(t)$

C. $2e^{2jt}G_4(t)$

D. $\frac{1}{2}e^{2jt}G_2(t)$

【分析】 本题综合运用基本的傅里叶变换对、傅里叶变换的频移特性。

【解答】 A。

$$\frac{\sin(2\omega+4)}{\omega+2} = 2\text{Sa}[2(\omega+2)]$$

$$G_4(t) \leftrightarrow 4\text{Sa}(2\omega)$$

$$\frac{1}{2}G_4(t) \leftrightarrow 2\text{Sa}(2\omega)$$

$$\frac{1}{2}G_4(t)e^{-2jt} \leftrightarrow 2\text{Sa}[2(\omega+2)]$$

(6) 已知 $x(t)$ 的傅里叶变换为 $X(j\omega)$, 则 $e^{j4t}x(t-2)$ 的傅里叶变换为()。

A. $X[j(\omega+4)]e^{-2(j\omega+4)}$

B. $X[j(\omega+4)]e^{-2j\omega}$

C. $X[j(\omega-4)]e^{-2j(\omega-4)}$

D. $X[j(\omega-4)]e^{-2j\omega}$

【分析】 本题考查傅里叶变换的时移和时域调制特性,先时移后调制推导更简便。

【解答】 C。

$$x(t-2) \leftrightarrow X(j\omega)e^{-2j\omega}$$

$$e^{j4t}x(t-2) \leftrightarrow X(j(\omega-4))e^{-2j(\omega-4)}$$

(7) 信号 $x(t) = e^{j2t}\delta'(t)$ 的傅里叶变换等于()。

- A. $j(\omega-2)$ B. $j(\omega+2)$ C. $j\omega-2$ D. $j\omega+2$

【分析】 本题需综合利用傅里叶变换的时域微分特性和频移性质。

【解答】 A。

方法一：

$$x'(t) \leftrightarrow j\omega X(j\omega)$$

$$\delta'(t) \leftrightarrow j\omega$$

$$e^{j2t} \delta'(t) \leftrightarrow j(\omega-2)$$

方法二：

因为

$$x(t)\delta'(t) = x(0)\delta'(t) - x'(t)\delta(t)$$

故

$$e^{j2t} \delta'(t) = \delta'(t) - 2j\delta(t)$$

$$e^{j2t} \delta'(t) \leftrightarrow j\omega - 2j$$

(8) 已知 $x(t)$ 的频谱 $X(j\omega)$ 如图 3-2-1 所示, 则 $x(t)$ 为()。

- A. 能量有限信号, 能量为 $2/\pi$ B. 能量有限信号, 能量为 $4/\pi$
C. 功率有限信号, 功率为 $2/\pi$ D. 功率有限信号, 功率为 $4/\pi$

【分析】 本题考查帕塞瓦尔定理, 由时域和频域均可求信号的能量, 题目中给出了信号的频谱, 可以直接从频域求信号的能量。

【解答】 B。

【题 3-2-9】 证明题

(1) 已知 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 为两个实信号, 其傅里叶变换分别为 $X_1(j\omega)$ 和 $X_2(j\omega)$, 信号 $x(t) = x_1(t) + jx_2(t)$, 其傅里叶变换为 $X(j\omega)$, 利用傅里叶变换的定义式证明:

$$X(j\omega) + X^*(-j\omega) = 2X_1(j\omega)$$

【分析】 本题可用傅里叶变换的线性特性和奇偶特性证明, 也可用傅里叶变换的定义证明。根据题意, 应采用后者。

【证明】

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [x_1(t) + jx_2(t)] e^{-j\omega t} dt$$

$$\begin{aligned} X^*(-j\omega) &= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [x_1(t) + jx_2(t)] e^{j\omega t} dt \right\}^* \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [x_1(t) - jx_2(t)] e^{-j\omega t} dt \end{aligned}$$

所以

$$X(j\omega) + X^*(-j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} 2x_1(t) e^{-j\omega t} dt = 2X_1(j\omega)$$

(2) 设 $x(t)$ 为复数函数, 可表示为 $x(t) = x_r(t) + jx_d(t)$, 且设 $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$, 试

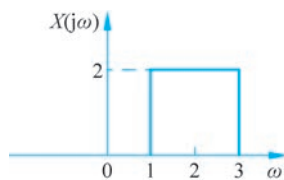


图 3-2-1

证明:

$$\mathcal{F}[x_r(t)] = \frac{1}{2}[X(j\omega) + X^*(-j\omega)]$$

$$\mathcal{F}[x_d(t)] = \frac{1}{2j}[X(j\omega) - X^*(-j\omega)]$$

其中, $X^*(-j\omega) = \mathcal{F}[x^*(t)]$ 。

【分析】 本题考查复数的表示和傅里叶变换的奇偶特性。注意, 对于一般的复信号 $x(t)$, 可根据傅里叶变换的定义导出 $x^*(t) \leftrightarrow X^*(-j\omega)$ 。

【证明】 因为

$$x(t) = x_r(t) + jx_d(t)$$

$$x^*(t) = x_r(t) - jx_d(t)$$

对于一般的复信号 $x(t)$, 可根据傅里叶变换的定义导出

$$x^*(t) \leftrightarrow X^*(-j\omega)$$

所以

$$x_r(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x^*(t)], \quad x_d(t) = \frac{1}{2j}[x(t) - x^*(t)]$$

则

$$\mathcal{F}[x_r(t)] = \frac{1}{2} \mathcal{F}[x(t) + x^*(t)] = \frac{1}{2} \mathcal{F}[X(j\omega) + X^*(-j\omega)]$$

$$\mathcal{F}[x_d(t)] = \frac{1}{2j} \mathcal{F}[X(j\omega) - X^*(-j\omega)]$$

(3) 试证明傅里叶变换的卷积定理。

若给定两个时间函数 $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$, 已知 $\mathcal{F}[x_1(t)] = X_1(j\omega)$, $\mathcal{F}[x_2(t)] = X_2(j\omega)$, 则 $\mathcal{F}[x_1(t) * x_2(t)] = X_1(j\omega)X_2(j\omega)$ 。

【分析】 时域卷积定理是傅里叶变换的基本性质之一, 但在证明题中, 必须根据卷积运算和傅里叶变换的定义进行推导。

$$\mathcal{F}[x_1(t) * x_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt$$

变换积分次序, 可得

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t - \tau) e^{-j\omega t} dt \right] d\tau &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) e^{-j\omega\tau} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t - \tau) e^{-j\omega(t-\tau)} dt \right] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) X_2(j\omega) e^{-j\omega\tau} d\tau = X_1(j\omega) X_2(j\omega) \end{aligned}$$

(4) 如果有 $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$, 则有如下的帕塞瓦尔关系存在:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

①证明上述关系。②阐明帕塞瓦尔关系的物理意义。

【分析】 本题考查帕塞瓦尔定理的证明过程和物理含义。

【解答】 ① 证明:

根据傅里叶变换的定义式,有

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega, x^*(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega) e^{-j\omega t} d\omega \\
 \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x^*(t) dt \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega_1) e^{j\omega_1 t} d\omega_1 \int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega_2) e^{-j\omega_2 t} d\omega_2 \right] dt \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega_1) X^*(j\omega_2) e^{j(\omega_1 - \omega_2)t} d\omega_1 d\omega_2 \right] dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega_1) X^*(j\omega_2) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega_1 - \omega_2)t} dt \right] d\omega_1 d\omega_2 \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega_1) X^*(j\omega_2) \delta(\omega_1 - \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega_1) X^*(j\omega_1) d\omega_1 \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega
 \end{aligned}$$

其中, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} dt = 2\pi\delta(\omega)$ 的推导过程如下:

根据傅里叶变换对

$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

可知

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt = 2\pi\delta(\omega)$$

进而

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} dt = 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

② 对于能量有限信号

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$$

由帕塞瓦尔定理可知,从时域或者频域都可以求信号的能量。

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

(5) 试证明 $\int_{-\infty}^{\infty} \text{Sa}^2(t) dt = \pi$ 。

【分析】 本题可视为求信号 $\text{Sa}(t)$ 的能量,也可视为求信号 $\text{Sa}^2(t)$ 的直流分量。

【证明】 方法一:

$$\text{Sa}(t) \leftrightarrow \pi G_2(\omega)$$

根据帕塞瓦尔等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

故

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\text{Sa}(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \pi^2 |G_2(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \pi^2 d\omega = \pi$$

方法二:

由 $\text{Sa}(t) \leftrightarrow \pi G_2(\omega)$, 可知 $\text{Sa}^2(t) \leftrightarrow \frac{\pi}{2} G_2(\omega) * G_2(\omega) = \pi \Lambda_4(\omega)$ 。

由 $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$, 可知

$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt$$

故

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{Sa}^2(t) dt = \pi \Lambda_4(0) = \pi$$

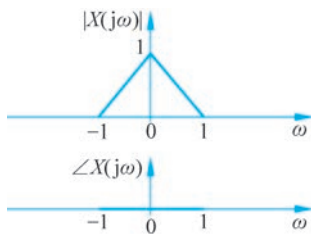


图 3-2-2

【题 3-2-10】画图题

已知信号 $x(t)$ 的频谱如图 3-2-2 所示, 试画出 $y(t) = x(t-1)e^{j2t}$ 的幅度谱和相位谱图。

【分析】 本题考查傅里叶变换的时移特性和调制特性。时移引起与频率成正比的相移, 幅频特性不变; 时域调制引起频谱的搬移。注意, 本题是先时移后调制, 因此频谱先相位滞后再搬移。

$$\begin{aligned} \text{【解答】 } x(t-1) &\leftrightarrow X(j\omega) e^{-j\omega} \\ x(t-1)e^{j2t} &\leftrightarrow X[j(\omega-2)] e^{-j(\omega-2)} \\ Y(j\omega) &= X[j(\omega-2)] e^{-j(\omega-2)} \end{aligned}$$

幅度谱和相位谱图如图 3-2-3 所示。

【题 3-2-11】计算题

$$(1) \text{ 计算卷积积分 } \frac{\sin(2\pi t)}{2\pi t} * \frac{\sin(8\pi t)}{8\pi t}。$$

【分析】 本题考查基本的傅里叶变换对和傅里叶变换的时域卷积定理。

$$\text{【解答】 } \text{Sa}(\omega_c t) \leftrightarrow \frac{\pi}{\omega_c} G_{2\omega_c}(\omega)$$

$$\text{Sa}(2\pi t) * \text{Sa}(8\pi t) \leftrightarrow \frac{1}{2} G_{4\pi}(\omega) \cdot \frac{1}{8} G_{16\pi}(\omega) = \frac{1}{16} G_{4\pi}(\omega)$$

$$\frac{1}{8} \text{Sa}(2\pi t) \leftrightarrow \frac{1}{16} G_{4\pi}(\omega),$$

$$\text{所以 } \text{Sa}(2\pi t) * \text{Sa}(8\pi t) = \frac{1}{8} \text{Sa}(2\pi t)$$

$$(2) \text{ 已知 } x_1(t) = \frac{2}{\pi} \text{Sa}(2t), x_2(t) = \frac{2}{\pi} \text{Sa}(t) \cos 2t, \text{ 求 } x_1(t) * x_2(t)。$$

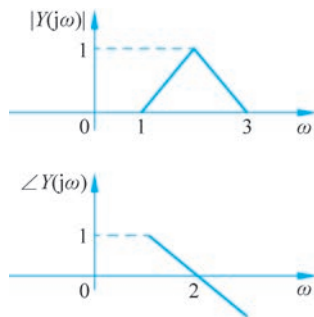


图 3-2-3

【分析】 本题考查基本的傅里叶变换对和傅里叶变换的时域卷积定理。

【解答】 $\text{Sa}(\omega_c t) \leftrightarrow \frac{\pi}{\omega_c} G_{2\omega_c}(\omega)$

$$X_1(j\omega) = G_4(\omega)$$

$$X_2(j\omega) = G_2(\omega + 2) + G_2(\omega - 2)$$

$$x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(j\omega)X_2(j\omega) = G_1\left(\omega + \frac{3}{2}\right) + G_1\left(\omega - \frac{3}{2}\right)$$

所以

$$x_1(t) * x_2(t) = \frac{1}{\pi} \text{Sa}\left(\frac{t}{2}\right) \cos\left(\frac{3}{2}t\right)$$

(3) $x(t)$ 的傅里叶变换为 $X(j\omega) = \frac{(\sin\omega)^3}{\left(\frac{\omega}{2}\right)^3}$, 求 $x(0)$ 、 $x(4)$ 。

【分析】 本题需要两次利用傅里叶变换的时域卷积性质。

【解答】 $G_2(t) \leftrightarrow 2\text{Sa}(\omega)$, $G_2(t) * G_2(t) * G_2(t) \leftrightarrow [2\text{Sa}(\omega)]^3$

$$x(t) = G_2(t) * G_2(t) * G_2(t) = 2\Lambda_4(t) * G_2(t)$$

$$x(0) = \int_{-1}^1 2\Lambda_4(\tau) d\tau = 3, x(t) \text{ 波形范围为 } [-3, 3], \text{ 因而 } x(4) = 0.$$

(4) 计算信号 $\frac{\sin(5t)}{\pi t} \cos(30t)$ 的能量。

【分析】 本题考查帕塞瓦尔定理, 由时域和频域均可求信号的能量。

【解答】 $\frac{\sin(5t)}{\pi t} \leftrightarrow G_{10}(\omega)$

$$\cos(30t) \frac{\sin(5t)}{\pi t} \leftrightarrow \frac{1}{2} [G_{10}(\omega - 30) + G_{10}(\omega + 30)]$$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{4} (10 + 10) = \frac{5}{2\pi}$$

(5) 求如图 3-2-4 所示信号 $x(t)$ 的频谱函数 $X(j\omega)$ 。

【分析】 本题考查傅里叶变换的线性特性和基本的傅里叶变换对。

【解答】 因为 $x(t) = 0.5 + G_2(t)$

所以

$$X(j\omega) = F[x(t)] = \pi\delta(\omega) + 2\text{Sa}(\omega)$$

(6) 求图 3-2-5 所示信号 $x(t)$ 的频谱 $X(j\omega)$ 。

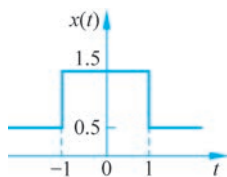


图 3-2-4

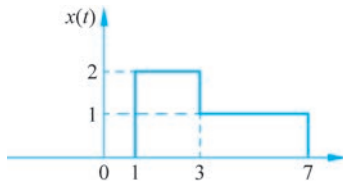


图 3-2-5

【分析】 本题可用基本傅里叶变换对结合傅里叶变换的性质完成。将 $x(t)$ 视为两个门信号的叠加,这两个门信号经过了不同的时移和缩放。根据傅里叶变换的线性特性, $x(t)$ 的频谱就是两个门信号频谱的叠加。

【解答】 $G_{\tau}(t) \leftrightarrow \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$

$$x(t) = G_2(t-2) + G_6(t-4)$$

$$X(j\omega) = 2\text{Sa}(\omega)e^{-j2\omega} + 6\text{Sa}(3\omega)e^{-j4\omega}$$

(7) 已知矩形脉冲信号 $G_{\tau}(t)$ 的脉冲宽度为 τ ,其频谱为 $\tau\text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$,请根据傅里叶变换的对称性求出信号 $\text{Sa}(10t)$ 的傅里叶变换。

【分析】 本题考查傅里叶变换的对称特性。

【解答】 $G_{\tau}(t) \leftrightarrow \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$, $\text{Sa}(\omega_c t) \leftrightarrow \frac{\pi}{\omega_c} G_{2\omega_c}(\omega)$, $\text{Sa}(10t) \leftrightarrow \frac{\pi}{10} G_{20}(\omega)$

(8) 求 $x(t) = \frac{1}{\pi t}$ 的傅里叶变换。

【分析】 本题可利用基本的傅里叶变换对及傅里叶变换的对称特性求解。

【解答】 $\text{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega}$, $\frac{2}{jt} \leftrightarrow 2\pi \text{sgn}(-\omega)$, $\frac{1}{\pi t} \leftrightarrow j \text{sgn}(-\omega) = -j \text{sgn}(\omega)$

(9) 已知 $X(j\omega) = e^{-2j\omega} u(\omega)$,其中, $u(\omega)$ 是关于 ω 的单位阶跃函数,求其傅里叶反变换。

【分析】 本题考查傅里叶变换的奇偶特性和对称特性。

【解答】 因为 $X(j\omega) = e^{-2j\omega} u(\omega)$,所以 $X(jt) = e^{-2jt} u(t)$ 。

$$F[X(jt)] = F[e^{-2jt} u(t)] = \pi\delta(\omega + 2) + \frac{1}{j(\omega + 2)}$$

所以由傅里叶变换的互易对称性,可得

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \cdot \frac{1}{2-t} + \frac{1}{2} \delta(t-2)$$

(10) 已知 $X(j\omega) = [u(\omega) - u(\omega-2)]e^{-j2\omega}$,求其傅里叶反变换 $x(t)$ 。

【分析】 本题综合运用傅里叶变换的奇偶特性、时移特性和对称特性。

【解答】 $u(t) - u(t-2) = G_2(t-1) \leftrightarrow 2\text{Sa}(\omega)e^{-j\omega}$
 $[u(t) - u(t-2)]e^{-j2t} \leftrightarrow 2\text{Sa}(\omega+2)e^{-j(\omega+2)}$
 $2\text{Sa}(t+2)e^{-j(t+2)} \leftrightarrow 2\pi[u(-\omega) - u(-\omega-2)]e^{j2\omega}$
 $2\text{Sa}(-t+2)e^{-j(-t+2)} \leftrightarrow 2\pi[u(\omega) - u(\omega-2)]e^{-j2\omega}$

注意,辛格函数是偶函数:

$$\frac{1}{\pi} \text{Sa}(t-2)e^{j(t-2)} \leftrightarrow [u(\omega) - u(\omega-2)]e^{-j2\omega}$$

(11) 设 $x(t) = \frac{\sin t \sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\pi t^2}$,求 $x(t)$ 的傅里叶变换。

【分析】 本题考查傅里叶变换的频域卷积定理,注意到题干中的函数可写为两个 sinc 函数的乘积形式。

$$\text{【解答】} \quad x(t) = \frac{\sin t \sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\pi t^2} = \frac{\sin t}{t} \frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{t}{2}} \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \text{Sa}(t) \text{Sa}\left(\frac{t}{2}\right)$$

所以

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x(t)] &= \frac{1}{4\pi^2} \mathcal{F}[\text{Sa}(t)] * \mathcal{F}\left[\text{Sa}\left(\frac{t}{2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2} G_2(\omega) * G_1(\omega) \\ &= \frac{1}{2} [u(\omega+1) - u(\omega-1)] * \left[u\left(\omega + \frac{1}{2}\right) - u\left(\omega - \frac{1}{2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2} \left[r\left(\omega + \frac{3}{2}\right) - r\left(\omega + \frac{1}{2}\right) - r\left(\omega - \frac{1}{2}\right) + r\left(\omega - \frac{3}{2}\right)\right] \end{aligned}$$

(12) 已知 $x(t)$ 如图 3-2-6 所示,求其傅里叶变换 $X(j\omega)$ 。

【分析】 本题考查傅里叶变换的时移和调制特性。

$$\text{【解答】} \quad g(t) = -\frac{E}{2} \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right) G_\tau(t), x(t) = g\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$$

$$G_\tau(t) \leftrightarrow 2 \frac{\sin\left(\frac{\tau\omega}{2}\right)}{\omega}$$

$$\sin\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right) G_\tau(t) \leftrightarrow$$

$$\frac{1}{j} \left\{ \frac{\sin\left[\frac{\tau}{2}(\omega - \omega_0)\right]}{\omega - \omega_0} - \frac{\sin\left[\frac{\tau}{2}(\omega + \omega_0)\right]}{\omega + \omega_0} \right\}$$

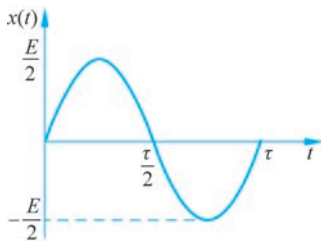


图 3-2-6

注意到

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{\tau}, \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right) G_\tau(t) \leftrightarrow j \sin\left(\frac{\tau}{2}\omega\right) \left(\frac{2\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2}\right)。$$

$$\text{因此 } X(j\omega) = -j \frac{2E\pi}{\tau} \sin\left(\frac{\tau}{2}\omega\right) \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} e^{-j\frac{\tau}{2}\omega}。$$

(13) 升余弦脉冲信号 $x(t) = \frac{1}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{\pi}{\tau}t\right)\right] [u(t+\tau) - u(t-\tau)]$, 求其傅里叶变换 $X(j\omega)$ 。

【分析】 本题考查基本的傅里叶变换对,以及傅里叶变换的时域调制特性。

【解答】 方法一: 运用傅里叶变换的调制特性。

$$G_{2\tau}(t) \leftrightarrow 2 \frac{\sin(\tau\omega)}{\omega}$$

$$\cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right)G_{2\tau}(t) \leftrightarrow \frac{\sin[\tau(\omega - \omega_0)]}{\omega - \omega_0} + \frac{\sin[\tau(\omega + \omega_0)]}{\omega + \omega_0}$$

注意到

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \frac{\pi}{\tau}, \cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right)G_{2\tau}(t) \leftrightarrow -\sin(\tau\omega)\left(\frac{2\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}\right) \\ \frac{1}{2}\left[1 + \cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right)\right]G_{2\tau}(t) &\leftrightarrow \sin(\tau\omega)\left(\frac{1}{\omega} - \frac{\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}\right)\end{aligned}$$

方法二：运用频域卷积性质。

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{1}{2}\left[1 + \cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right)\right]G_{2\tau}(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \frac{\pi}{2}\left[2\delta(\omega) + \delta\left(\omega - \frac{\pi}{\tau}\right) + \delta\left(\omega + \frac{\pi}{\tau}\right)\right] * 2\tau\text{Sa}(\omega\tau) \\ &= \frac{\tau}{2}[2\text{Sa}(\omega\tau) + \text{Sa}(\omega\tau - \pi) + \text{Sa}(\omega\tau + \pi)] \\ &= \frac{\tau}{2}\left[2\frac{\sin(\omega\tau)}{\omega\tau} - \frac{\sin(\omega\tau)}{\omega\tau - \pi} - \frac{\sin(\omega\tau)}{\omega\tau + \pi}\right] \\ &= \sin(\tau\omega)\left(\frac{1}{\omega} - \frac{\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}\right)\end{aligned}$$

【题 3-2-12】 计算题

已知实函数 $x(t)$ 满足以下 3 个条件：

- (1) $x(t) = 0, t < 0$;
- (2) $(2 + j\omega)X(j\omega)$ 为 $ke^{-3t}u(t)$ 的傅里叶变换, 其中 k 为非负的实常数;
- (3) $\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = \pi$;

求 $x(t)$ 。

【分析】 本题可利用基本的傅里叶变换对的性质、时域微分定理和帕塞瓦尔定理求解。

【解答】 (1) $x(t) = x(t)u(t)$

$$(2) (2 + j\omega)X(j\omega) = \frac{k}{3 + j\omega} \Rightarrow X(j\omega) = \frac{k}{(3 + j\omega)(2 + j\omega)} = k\left[\frac{1}{(2 + j\omega)} - \frac{1}{(3 + j\omega)}\right]$$

有 $x(t) = k(e^{-2t} - e^{-3t})u(t)$

$$(3) \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = 2\pi k^2 \int_0^{\infty} (e^{-4t} + e^{-6t} - 2e^{-5t}) dt = \pi$$

$$\text{有 } k^2\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \sqrt{30}$$

所以

$$x(t) = \sqrt{30}(e^{-2t} - e^{-3t})u(t)。$$

【题 3-2-13】 计算题

求下列信号的傅里叶变换, 设 $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$ 。

- (1) $u(t) + \text{Sa}(t)$

$$(2) x(t)\sin(\omega_0 t)$$

$$(3) x(at-t_0)$$

【分析】 本题综合利用基本的傅里叶变换对及傅里叶变换的性质。

【解答】 (1) $u(t) + \text{Sa}(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} + \pi G_2(\omega)$

$$(2) x(t)\sin\omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2j}X(j\omega) * [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$$

$$= \frac{1}{2j}\{X[j(\omega - \omega_0)] - X[j(\omega + \omega_0)]\}$$

$$(3) x(at-t_0) \leftrightarrow \frac{1}{|a|}X\left(j\frac{\omega}{a}\right)e^{-j\frac{t_0}{a}\omega}$$

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|}X\left(j\frac{\omega}{a}\right)$$

$$x\left[a\left(t + \frac{b}{a}\right)\right] \leftrightarrow \frac{1}{|a|}X\left(j\frac{\omega}{a}\right)e^{j\frac{b}{a}\omega}$$

本题中, $b = -t_0$ 。

……知识点链接……

设周期信号 $x_T(t)$ 的傅里叶变换为 $X_T(j\omega)$, $x(t)$ 一般取周期信号 $x_T(t)$ 在原点附近的一个周期(称为主周期), 其傅里叶变换为 $X(j\omega)$ 。

周期信号 $x_T(t)$ 的傅里叶级数展开系数与非周期信号 $x(t)$ 的傅里叶变换之间存在如下关系:

$$X_k = \frac{1}{T}X(jk\omega_0) = \frac{1}{T}X(j\omega) \big|_{\omega = k\omega_0}, \text{ 其中 } \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

计算周期信号的傅里叶变换有两种方法:

方法一:

$$F[x_T(t)] = X_T(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \omega_0 X(jk\omega_0) \delta(\omega - k\omega_0)$$

方法二:

$$F[x_T(t)] = X_T(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi X_k \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right)$$

【题 3-2-14】 填空题

(1) 若信号在时域是周期的、连续的, 则其频谱特点为_____、_____。

【分析】 本题考查周期信号的频谱特点。时域的周期性对应频域的离散性, 时域的离散性对应频域的周期性。

【解答】 离散, 非周期。

(2) 周期矩形脉冲信号的脉宽与其频谱的主瓣宽度成_____比。

【分析】 连续时间周期信号的频谱具有离散性, 其包络由一个周期内的信号形式决

定。对周期矩形脉冲串来说,频谱包络具有辛格函数形式,且其主瓣宽度与脉冲宽度成反比。

【解答】 反。

【题 3-2-15】 选择题

下列论述正确的有()。

- A. 周期信号的频谱是离散的
- B. 非周期信号与周期信号的频谱的表示方法是相同的
- C. 非周期信号的频谱是连续的
- D. $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$ 是傅里叶变换存在的充分条件

【分析】 前 3 个选项考查周期信号与非周期信号频谱的区别。时域的周期性对应频域的离散性。对于周期信号,可用傅里叶级数展开和傅里叶变换两种方法表示其频谱,其中傅里叶级数展开每一根谱线都代表对应分量的强度,而傅里叶变换求得的是频谱密度,因此每根谱线都是冲激函数。D 选项考查傅里叶变换存在的条件。狄利克雷条件是傅里叶变换的充分条件:信号绝对可积;只有有限个间断点;有限个极值点。D 选项只说明信号是绝对可积的,不能构成充分条件。

【解答】 A、C。

【题 3-2-16】 选择题

(1) 如图 3-2-7 所示,周期冲激串 $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$ 的频谱为()。

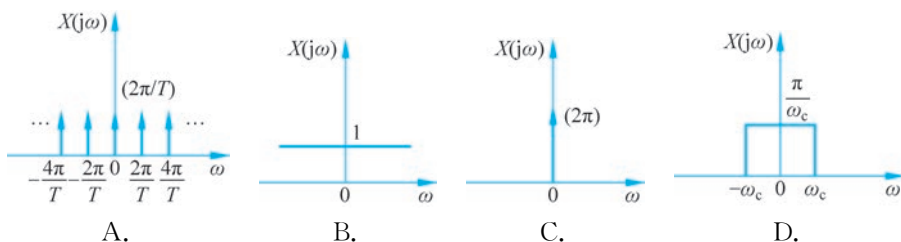


图 3-2-7

【分析】 周期冲激串信号的频谱仍然是周期冲激串,将周期冲激串与时长有限的信号卷积,可得到其他周期信号。

【解答】 A。

(2) 连续时间周期信号的频谱具有()。

- A. 周期性
- B. 非周期性
- C. 离散性
- D. 连续性

【分析】 本题考查周期信号的频谱特点。时域的周期性对应频域的离散性,时域的离散性对应频域的周期性。

【解答】 B、C。

(3) 信号的频谱是周期的连续谱,则原信号是()。

- A. 连续的周期信号
- B. 连续的非周期信号

C. 离散的非周期信号

D. 离散的周期信号

【分析】 本题考查周期信号的频谱特点。时域的周期性对应频域的离散性,时域的离散性对应频域的周期性。

【解答】 C。

(4) 下列说法中,正确的是()。

A. 系统 $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = x(t)$ 一定是因果系统B. 系统 $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = x(t)$ 一定是稳定系统C. 设 $x(t)$ 的傅里叶变换为 $X(j\omega) = \delta(\omega) + \delta(\omega - \pi) - \delta(\omega + 2)$, 则 $x(t)$ 肯定不是周期的

D. 两个非周期信号的卷积可能是周期的

【分析】 极点在 s 平面的左半平面,是因果系统稳定的充要条件。周期信号的频谱不但具有离散性,还具有谐波性。C选项中的频谱虽然是离散的,但不具有谐波性,由其

傅里叶反变换也可知, $x(t) = \frac{1}{2\pi} [1 + e^{j\pi t} - e^{-j2t}]$ 不是周期的。

【解答】 C。

【题 3-2-17】 计算题

已知信号 $x(t)$ 如图 3-2-8 所示,试求其傅里叶变换。

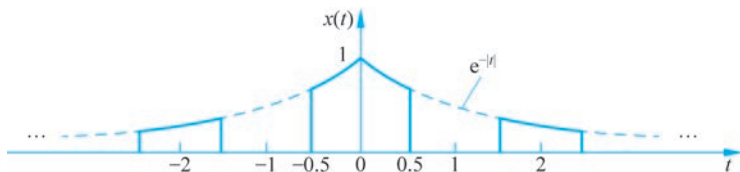


图 3-2-8

【分析】 可将信号 $x(t)$ 视为 $s(t) = e^{-|t|}$ 与周期矩形脉冲串相乘,因此其傅里叶变换为周期矩形脉冲串频谱与 $S(j\omega)$ 的卷积。

【解答】 $s(t) = e^{-|t|} = e^{-t}u(t) + e^t u(-t)$

$$e^{-t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{1+j\omega}, e^t u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{1-j\omega}$$

因此

$$S(j\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$$

对周期矩形脉冲串,有

$$T = 2, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi \text{ rad/s}, \quad \frac{E\tau}{T} = 0.5, \quad \omega_0 \tau = \frac{2\pi}{T} \tau = \pi$$

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_1(t - kT)$$

$$P(j\omega) = \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{k\pi}{2}\right) \delta(\omega - k\pi)$$

故

$$X(j\omega) = \frac{1}{2\pi} S(j\omega) * P(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{k\pi}{2}\right) \frac{1}{1 + (\omega - k\pi)^2}$$

【题 3-2-18】 计算题

设 $X(j\omega)$ 表示图 3-2-9 所示信号 $x(t)$ 的傅里叶变换。

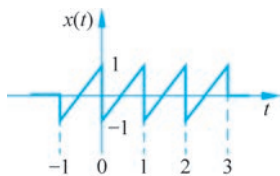


图 3-2-9

(1) 求 $X(j\omega)$ 的相位谱函数 $\angle X(j\omega)$ 。

(2) 求 $\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$ 。

(3) 计算 $\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \frac{2\sin\omega}{\omega} e^{2j\omega} d\omega$ 。

(4) 若分别以 $T=2, 4, 8$ 为周期, 将信号 $x(t)$ 周期延拓为 $x_T(t)$, 试分析确定 $x_T(t)$ 包含哪些频率分量。

【分析】 注意, $x(t)$ 是一个周期信号被截取后的片段。它的相位特性可通过将该片段时移到某个对称的位置进行分析。它的能量可从频域或时域计算, 本题中从时域计算更方便。对于第(3)问, 将待积分的部分视为某个信号的频谱, 则积分结果将是该信号的直流分量。对于第(4)问, 需要从时域分析延拓后其周期性及一个周期的具体形式, 才能进一步判断其包含的频率分量。

【解答】 (1) 由于 $x(t+1)$ 是奇信号, 其频谱为虚奇谱, 相位为 $\frac{\pi}{2}$ 或 $-\frac{\pi}{2}$, 故

$$\angle X(j\omega) = \pm \frac{\pi}{2} - \omega$$

(2) 由帕塞瓦尔定理

$$\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

从时域计算该信号的能量为

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = 8 \int_0^{1/2} (2t)^2 dt = \frac{4}{3}$$

因此

$$\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = \frac{8}{3}\pi$$

(3) $G_2(t) \leftrightarrow 2\text{Sa}(\omega)$

$$x(t+2) \leftrightarrow X(j\omega) e^{2j\omega}$$

记

$$y(t) = G_2(t) * x(t+2)$$

则原积分为

$$2\pi y(0) = \int x(\tau+2) G_2(\tau) d\tau = 0$$

(4) 记 $x(t)$ 的一个基本片段为 $x_0(t)=G_1(t)x(t)$, 它是一个奇信号, 直流分量为 0。

为分析以 $T=2$ 为周期的延拓, 将 $x(t)$ 分解为两个长度为 2 的部分, $x(t)=x'(t)+x'(t-2)$, 其中 $x'(t)=G_2(t)x(t)$, 对两部分分别进行以 $T=2$ 为周期的延拓, 则将 $x(t)$ 以 $T=2$ 为周期延拓后, $x_2(t)=2\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_0(t-n)$, 基频为 2π , 含有的频率分量为 $2k\pi$, k 为整数且 $k\neq 0$ 。

对 $x(t)$ 以 $T=4$ 为周期延拓后, $x_4(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_0(t-n)$, 基频为 2π , 含有的频率分量为 $2k\pi$, k 为整数且 $k\neq 0$ 。

对 $x(t)$ 以 $T=8$ 为周期延拓后, $x_8(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(t-8n)$, 基频为 $\pi/4$, 含有的频率分量为 $k\pi/4$, k 为整数。

考点 3 连续时间系统的频域分析

本节考点: 主要考查利用频谱分析求解系统的响应, 以及对系统频率响应的理解。

……知识点链接……

1. 系统的频率响应

$H(j\omega)$ 是系统单位冲激响应 $h(t)$ 的傅里叶变换, 称为系统的频率响应, 简称频率响应, $H(j\omega)$ 的模 $|H(j\omega)|$ (常记为 $H(\omega)$) 表征系统对各频率分量幅度的加权能力, 称为系统的幅频特性。而 $H(j\omega)$ 的辐角 $\angle H(j\omega)$ 表征各频率分量通过系统后产生的附加相移, 称为系统的相频特性。

2. 线性时不变系统对单一频率信号的响应

$$e^{j\omega_0 t} \rightarrow H(j\omega_0)e^{j\omega_0 t}$$

由此可知

$$\cos(\omega_0 t + \theta) \rightarrow |H(j\omega_0)| \cos[\omega_0 t + \theta + \angle H(j\omega_0)]$$

线性时不变系统对正弦信号的响应又称正弦稳态响应。

3. 求解系统频率响应的方法

方法一: $H(j\omega) = \mathcal{F}[h(t)]$

方法二: $H(j\omega) = \frac{Y_{zs}(j\omega)}{X(j\omega)}$

方法三: 对于微分方程

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i}{dt^i} y(t) = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j}{dt^j} x(t), \quad n \geq m$$

有

$$H(j\omega) = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)}$$

其中, $N(j\omega)$ 、 $D(j\omega)$ 分别为

$$N(j\omega) = b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \cdots + b_1(j\omega) + b_0$$

$$D(j\omega) = a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \cdots + a_1(j\omega) + a_0$$

【题 3-3-1】 填空题

(1) 已知某系统的频率响应为 $H(j\omega) = \frac{1}{1+j3\omega}$, 则其幅频特性 $|H(j\omega)| =$ _____, 相频特性 $\angle H(j\omega) =$ _____。

【解答】 $|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{9\omega^2+1}}$, $\angle H(j\omega) = -\arctan 3\omega$ 。

(2) 已知一个线性时不变系统的频率响应为 $H(j\omega)$, 当输入信号为 $2e^{j2t}$ 时, 系统的零状态响应为 _____。

【分析】 输入信号是正弦信号, 通过线性时不变系统后输出也是同频率的正弦信号, 其幅度和相位的变化量由系统的频率响应特性决定, 即有 $e^{j\omega_0 t} \rightarrow H(j\omega_0)e^{j\omega_0 t}$ 。

【解答】 $2H(2j)e^{j2t}$ 。

(3) 已知线性时不变系统的冲激响应为 $h(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 1/2 \\ 0, & |t| > 1/2 \end{cases}$, 输入为 $x(t) = \cos(\omega_0 t)$, 若使输出 $y(t) = x(t) * h(t)$ 恒为 0, 则 ω_0 所有可能的取值为 _____。

【分析】 输入信号是正弦信号, 通过线性时不变系统后输出也是同频率的正弦信号, 其幅度和相位的变化量由系统的频率响应特性决定。因此本题的关键在于求解该系统幅度响应为 0 的频率点。

【解答】 $H(j\omega) = \text{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right)$

因此当 $\omega = 2k\pi, k \neq 0$ 时, 有 $H(j\omega) = 0$ 。

故答案为: $\omega_0 = 2k\pi, k$ 为整数且 $k \neq 0$ 。

(4) 已知线性时不变系统的微分方程为 $y'(t) + y(t) = x'(t)$, 当输入信号为 $x(t) = 1 + 2\cos t$ 时, 系统输出响应 $y(t)$ 为 _____。

【分析】 本题输入信号 $x(t)$ 包含两个单频分量, 根据微分方程求得系统的频率特性后, 分别计算系统对这两个单频分量的响应, 再合成得到系统的输出。

【解答】 $H(j\omega) = \frac{j\omega}{1+j\omega}$

$$H(j\omega)|_{\omega=0} = 0$$

$$H(j\omega)|_{\omega=1} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$$

故输出为

$$y(t) = \sqrt{2} \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$$

【题 3-3-2】 选择题

某线性时不变系统对于任意频率 ω_0 的输入信号 $x(t) = \cos(\omega_0 t)$, 都有输出 $y(t) = \frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$, 则该系统的冲激响应 $h(t)$ 为()。

- A. $-\delta'(t)$ B. $\delta'(t)$ C. $u(t)$ D. 不能确定

【分析】 根据题目描述可知该系统的频率响应特性, 进而求得其单位冲激响应。

【解答】 C。

注意, $\sin(\omega_0 t) = \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)$ 。

故当 $\omega \neq 0$ 时, $H(j\omega) = \frac{1}{\omega} e^{-j\pi/2} = \frac{1}{j\omega}$, 这是一个积分器的频率响应特性。

【题 3-3-3】 证明题

某线性时不变系统的频率响应为 $H(j\omega)$, 当输入信号为 $x(t) = \cos(\omega_0 t)$ 时, 试证明系统输出响应为 $y(t) = |H(j\omega_0)| \cos[\omega_0 t + \angle H(j\omega_0)]$ 。

【分析】 在其他题目中, 本题结论可直接使用。但本题为证明题, 需从更基本的原理导出该结论。此处采用分析一般信号通过线性时不变系统的方法。

【证明】 $y(t) = x(t) * h(t)$

$$Y(j\omega) = X(j\omega) H(j\omega)$$

$$X(j\omega) = \pi[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$$

于是

$$Y(j\omega) = \pi H(j\omega_0) \delta(\omega - \omega_0) + \pi H(-j\omega_0) \delta(\omega - \omega_0)$$

$$y(t) = \frac{1}{2} H(j\omega_0) e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} H(-j\omega_0) e^{-j\omega_0 t}$$

对于一个实际的线性时不变系统, $h(t)$ 是实函数, $H(j\omega)$ 是共轭对称函数, $H(j\omega_0) = |H(j\omega_0)| e^{j\angle H(j\omega_0)}$, $H(-j\omega_0) = |H(j\omega_0)| e^{-j\angle H(j\omega_0)}$ 。

因此

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2} |H(j\omega_0)| (e^{j(\omega_0 t + \angle H(j\omega_0))} + e^{-j(\omega_0 t + \angle H(j\omega_0))}) \\ &= |H(j\omega_0)| \cos(\omega_0 t + \angle H(j\omega_0)) \end{aligned}$$

【题 3-3-4】 计算题

(1) 已知某线性时不变系统的冲激响应为 $h(t) = G_2(t-1)$, 试求 $x(t) = \cos t$ ($-\infty < t < \infty$) 通过该系统的响应的频谱 $Y(j\omega)$ 。

【分析】 输入信号是 $\omega_0 = 1$ 的余弦信号, 其频谱包含两个冲激函数, 因此本题在运算中要用到冲激函数的筛选特性。

【解答】 方法一:

$$G_2(t-1) = u(t) - u(t-2)$$

$$\begin{aligned}
 Y(j\omega) &= H(j\omega)X(j\omega) = \frac{1 - e^{-2j\omega}}{j\omega} \pi [\delta(\omega + 1) + \delta(\omega - 1)] \\
 &= j\pi [(1 - e^{2j})\delta(\omega + 1) - (1 - e^{-2j})\delta(\omega - 1)]
 \end{aligned}$$

方法二:

$$G_2(t-1) \leftrightarrow 2\text{Sa}(\omega)e^{-j\omega}$$

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega) = 2\pi\text{Sa}(\omega)e^{-j\omega} \cdot [\delta(\omega + 1) + \delta(\omega - 1)]$$

注意

$$\text{Sa}(1) = \text{Sa}(-1) = \sin 1 = \frac{e^{j\omega} - e^{-j\omega}}{2j}$$

即得到了与方法一相同的结果。

(2) 已知 LTI 系统的频率特性为 $H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega}$, 输入周期信号为 $x(t) = \sin 2t$, 计算系统的稳态响应。

【分析】 输入信号是正弦信号, 通过线性时不变系统后输出也是同频率的正弦信号, 其幅度和相位的变化量由系统的频率响应特性决定。因此本题的关键在于求解该系统在 $\omega_0 = 2$ 时的频率响应。

$$\text{【解答】} \quad H(j\omega) \big|_{\omega=2} = \frac{1}{1+j2} = \frac{1}{\sqrt{5}} e^{-j\arctan 2}$$

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{5}} \sin(2t - \arctan 2)$$

(3) 已知一连续时间系统的单位冲激响应为 $h(t) = \frac{1}{\pi} \text{Sa}(3t)$, 输入信号为 $x(t) = 3 + 6\cos 2t + 3\cos 4t$ ($-\infty < t < \infty$), 试求该系统的稳态响应。

【分析】 输入信号是正弦信号, 通过线性时不变系统后输出也是同频率的正弦信号, 其幅度和相位的变化量由系统的频率响应特性决定。因此本题的关键在于求解该系统在输入信号包含的频率处的频率响应。

$$\text{【解答】} \quad H(j\omega) = \frac{1}{3} G_6(\omega)$$

$$H(j\omega) \big|_{\omega=0} = H(j\omega) \big|_{\omega=2} = \frac{1}{3}$$

$$H(j\omega) \big|_{\omega=4} = 0$$

故稳态输出为 $y(t) = 1 + 2\cos 2t$ 。

【题 3-3-5】 计算及画图题

如图 3-3-1 所示的 RC 电路, $R=1\Omega$, $C=1\text{F}$, 输入电压源 $x(t)$ 为门信号, 系统初始状态为零, 取电阻上的电压为输出 $y(t)$ 。

(1) 求系统的频率响应 $H(j\omega)$, 并画出幅频响应 $|H(j\omega)|$ 。

(2) 求输出 $y(t)$, 并画出 $y(t)$ 的波形图。

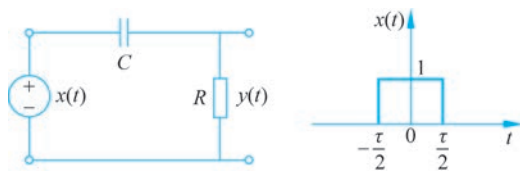


图 3-3-1

【分析】 本题第(1)问考查电路系统的频域分析,需要用到电阻和电容的复阻抗。第(2)问考查门信号通过滤波器的输出。将门信号视为两个不同时延阶跃信号之差,可以简化求解的过程。

【解答】 (1) $H(j\omega) = \frac{R}{R + 1/j\omega C} = \frac{j\omega}{1 + j\omega}, |H(j\omega)| = \frac{\omega}{\sqrt{1 + \omega^2}}$

幅频响应如图 3-3-2 所示。

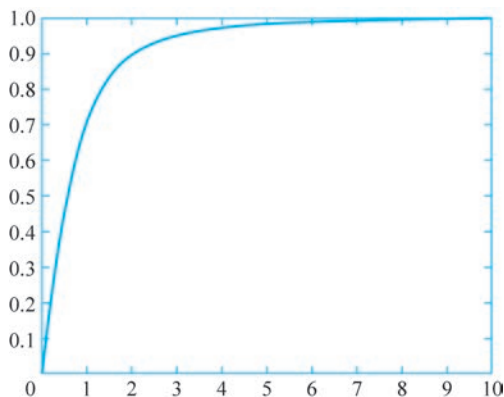


图 3-3-2

$$(2) x(t) = u(t + \tau/2) - u(t - \tau/2) \leftrightarrow \frac{e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2}}{j\omega}$$

$$Y(j\omega) = \frac{e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2}}{j\omega} \frac{j\omega}{1 + j\omega} = \frac{e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2}}{1 + j\omega}$$

$$y(t) = e^{-(t+\tau/2)} u(t + \tau/2) - e^{-(t-\tau/2)} u(t - \tau/2)$$

波形图如图 3-3-3 所示。

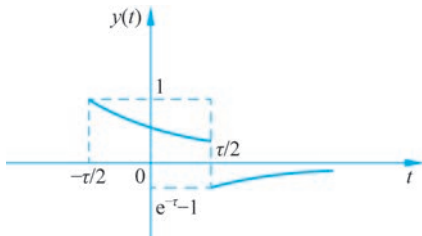


图 3-3-3

考点 4 无失真传输与滤波

本节考点：主要考查信号传输的两种状况：无失真传输和滤波，包括其定义及理解，以及利用信号传输理论求解系统输出。通常是重点考查内容。

……知识点链接……

1. 无失真传输

无失真传输是指系统输出信号与输入信号相比，只有幅度大小和出现时刻不同，而无波形上的变化。

若输入信号为 $x(t)$ ，则经过无失真传输后，输出信号 $y_{zs}(t)$ 应为

$$y_{zs}(t) = kx(t - t_d)$$

其中， k 为实常数， $k \neq 0, t_d \geq 0$ 。

系统的频率响应为

$$H(j\omega) = ke^{-j\omega t_d}$$

系统的冲激响应为

$$h(t) = k\delta(t - t_d)$$

2. 有失真传输与滤波

对于一个线性时不变系统，若信号在传输过程中不满足无失真，则称为有失真传输。原因有：系统对输入信号中各频率分量的幅度产生不同程度的衰减，使响应的各频率分量的相对幅度产生变化，称幅度失真；系统对输入信号中各频率分量产生的相移不与频率成正比，使响应的各频率分量在时间轴上的相对位置产生变化，称相位失真。

在许多情况下，希望信号通过系统后产生“预定”的失真，或者想改变一个信号所含频率分量的相对大小，或者全部滤除某些频率分量，这样的过程称为信号的滤波。

【题 3-4-1】 填空题

(1) 一个无失真传输系统的频率响应特性是_____。

【分析】 本题考查无失真传输系统的基本特性。无失真传输系统的频率响应可表示为 $H(j\omega) = ke^{-j\omega t_d}$ ，其中， t_d 为系统传输引起的时延， k 为幅度增益，是实常数。

【解答】 幅频特性是常数，相频特性是过原点的负斜率的直线。

(2) 一个系统的增益为 1，相移为 $-\sigma\omega$ ，当输入 $x(t)$ 作用于该线性时不变系统时，其输出为_____。

【分析】 本题考查无失真传输系统的基本特性。无失真传输系统的频率响应可表示为 $H(j\omega) = ke^{-j\omega t_d}$ ，其中， t_d 为系统传输引起的时延。

【解答】 $x(t - \sigma)$ 。

(3) 系统 $H(j\omega) = \begin{cases} e^{-j2\omega}, & |\omega| \leq 120\pi \\ 0, & |\omega| > 120\pi \end{cases}$ 能否对信号 $x(t) = \frac{\sin(100\pi t)}{t}$ 实现无失真传输？_____。

【分析】 输入信号的频率范围为 $[-120\pi, 120\pi]$ 时,可无失真地通过题中描述的理想低通滤波器。信号 $x(t) = \frac{\sin(100\pi t)}{t} = 100\pi \text{Sa}(100\pi t) \leftrightarrow \pi G_{200\pi}(\omega)$,该信号的最大频率为 100π ,故能用题中的滤波器实现无失真传输。

【解答】 能。

(4) 信号 $x(t) = \sin(\omega_1 t) + 3\sin(2\omega_1 t)$,通过某系统后的输出为 $y(t) = k_1 \sin(\omega_1 t - \theta_1) + k_2 \sin(2\omega_1 t - \theta_2)$,若系统为无失真传输系统,则 $\frac{k_1}{k_2}, \frac{\theta_1}{\theta_2}$ 各自要满足什么条件?_____。

【分析】 本题利用无失真传输系统的基本特性。无失真传输系统频率响应要求幅频特性为常数 K ,相频特性为过原点负斜率直线 $-\omega t_d$,则 $K = \frac{k_1}{1} = \frac{k_2}{3}, t_d = \frac{\theta_1}{\omega_1} = \frac{\theta_2}{2\omega_1}$,由

此得到 $\frac{k_1}{k_2} = \frac{1}{3}, \frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{\omega_1}{2\omega_1} = \frac{1}{2}$ 。

【解答】 $\frac{k_1}{k_2} = \frac{1}{3}, \frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{1}{2}$ 。

【题 3-4-2】 选择题

(1) 下列信号中,能无失真地通过截止频率为 100π 的理想低通滤波器的信号有()。 [注: $\text{Sa}(x) = \frac{\sin x}{x}$]

A. $\text{Sa}(50\pi t)$ B. $\text{Sa}(200\pi t)$ C. $G_{50\pi}(t)$ D. $G_{200\pi}(t)$

【分析】 信号的频率范围为 $[-100\pi, 100\pi]$ 时可无失真地通过题中描述的理想低通滤波器。因 $\text{Sa}(\omega_c t) \leftrightarrow \frac{\pi}{\omega_c} G_{2\omega_c}(\omega), G_\tau(t) \leftrightarrow \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$,对于以上4个信号,A和B的截止频率分别为 50π 和 200π ,C和D不是带限信号。

【解答】 A。

(2) 能够无失真地通过截止频率为 100π 的理想低通滤波器的是()。

A. $G_{50\pi}(t)$ B. $\text{Sa}\left(50\pi t + \frac{1}{2}\right)$ C. $\text{Sa}(50\pi t)e^{j100\pi t}$ D. $G_{100\pi}(t)$

【分析】 信号的频率范围为 $[-100\pi, 100\pi]$ 时可无失真地通过题中描述的理想低通滤波器。本题与题 3-4-1 的区别在于,部分信号发生了时延或调制。时延不改变信号频谱的范围,而调制则会导致频谱搬移。

【解答】 B。

A 和 D 选项中的信号频谱是 Sa 函数,最大频率为 ∞ ;

C 选项 $\text{Sa}(50\pi t)e^{j100\pi t} \leftrightarrow \frac{1}{50}G_{100\pi}(\omega - 100\pi)$,其最大频率为 150π ;

B 选项 $\text{Sa}\left(50\pi t + \frac{1}{2}\right) \leftrightarrow \frac{1}{50}G_{100\pi}(\omega)e^{j\frac{1}{100\pi}\omega}$,其最大频率为 50π 。

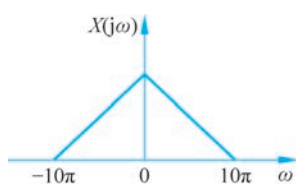


图 3-4-1

(3) 某信号的频谱函数如图 3-4-1 所示, 下列系统中能实现无失真传输的有()。

A. $H(j\omega) = G_{30\pi}(\omega)e^{-j2\omega}$

B. $H(j\omega) = G_{10\pi}(\omega)$

C. $H(j\omega) = \Lambda_{30\pi}(\omega)$

D. $H(j\omega) = G_{30\pi}(\omega)e^{-j2\omega^2}$

【分析】 信号的频率范围为 $[-10\pi, 10\pi]$, 在此频率范围内满足无失真传输条件(幅频特性为常数, 相频特性为过原点负斜率直线)的只有选项 A。

【解答】 A。

【题 3-4-3】 简答题

(1) 何谓无失真传输系统?

【分析】 本题考查无失真传输系统的定义, 可从时域和频域两个角度进行描述。

【解答】 从时域上说, 信号的无失真传输是指通过系统后输出信号波形与输入信号波形相同, 只允许改变其幅度及增加一定的延迟时间, 相应的系统称为无失真传输系统。从频域上说, 无失真传输系统的幅频特性是常数, 相频特性是过原点的负斜率的直线, 频率响应可表示为 $H(j\omega) = ke^{-j\omega t_d}$, 其中, t_d 为系统传输引起的时延。

(2) 无失真传输系统的系统函数 $H(j\omega)$ 应满足什么条件? 为什么?

【分析】 本题考查无失真传输系统的频率特性。由于是简答题, 所以需要由无失真传输的定义导出其频率特性。

【解答】 无失真传输的定义为: 输出信号的波形与输入信号的波形相同, 只允许改变幅度及增加一定的延迟, 即 $y(t) = kx(t - t_d)$, k 为正实常数, $t_d \geq 0$ 。对输入和输出分别求傅里叶变换, 得 $Y(j\omega) = ke^{-j\omega t_d}X(j\omega)$, 因此 $H(j\omega) = ke^{-j\omega t_d}$, 即无失真传输系统的系统函数应满足的条件是: 幅频特性为常数, 相频特性为过原点的负斜率直线。

【题 3-4-4】 计算题

某系统的系统框图如图 3-4-2 所示, 其中, $H(j\omega) = G_{2\omega_c}(\omega)e^{-j2\omega t_d}$, 单位延时器的冲激响应为 $\delta(t-1)$ 。

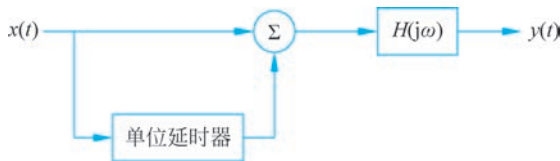


图 3-4-2

(1) 在 $\omega_c \geq \frac{1}{2}$ 和 $\omega_c < \frac{1}{2}$ 两种情况下, 求输入为 $x(t) = \frac{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{t}$ 时的输出响应。

(2) 哪种情况满足无失真传输条件?

【分析】 本题首先要分析输入信号的频谱。由于输入信号是辛格函数, 其频谱具有

门函数形式,通过比较输入信号截止频率与低通滤波器截止频率的关系,可以求得输出信号的频谱。

【解答】 $y(t) = [x(t) + x(t-1)] * h(t) = x_1(t) * h(t)$

$$x(t) = \text{Sa}\left(\frac{1}{2}t\right) \leftrightarrow X(j\omega) = 2\pi G_1(\omega)$$

$$X_1(j\omega) = [X(j\omega) + X(j\omega)e^{-j\omega T}] = 2\pi G_1(\omega)(1 + e^{-j\omega T})$$

当 $\omega_c \geq \frac{1}{2}$ 时,满足无失真传输条件。

$$\begin{aligned} y(t) &= x_1(t - t_d) = x(t - t_d) + x(t - T - t_d) \\ &= \text{Sa}\left[\frac{1}{2}(t - t_d)\right] + \text{Sa}\left[\frac{1}{2}(t - 1 - t_d)\right] \end{aligned}$$

当 $\omega_c < \frac{1}{2}$ 时,滤掉了信号中 $> \omega_c$ 的分量。

$$Y(j\omega) = 2\pi G_{2\omega_c}(\omega)[1 + e^{-j\omega T}]e^{-j\omega t_d}$$

$$y(t) = 2\omega_c \text{Sa}[\omega_c(t - t_d)] + 2\omega_c \text{Sa}[\omega_c(t - 1 - t_d)]$$

【题 3-4-5】 计算题

理想低通滤波器的频率响应为 $H(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < 50 \\ 0, & |\omega| > 50 \end{cases}$,当滤波器的输入为基波周期

$T_0 = \frac{\pi}{2}$ 的周期信号 $x_p(t)$,其傅里叶级数系数为 a_k 时,若要满足输入/输出关系:

$x_p(t) \xrightarrow{\text{LTI}} y_p(t) = x_p(t)$,则在信号 $x_p(t)$ 的 a_k 中,当 k 取何值时,必须有 $a_k = 0$?

【分析】 本题要求输入信号中不含频率大于理想低通滤波器截止频率的频率分量。

【解答】 $T_0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega_0 = 4$; 若使 $H(\omega) = G_{100}(\omega)$ 的滤波器对该信号实现无失真传输,则该信号的最大角频率应小于 50rad/s ,即 $a_k = 0, k\omega_0 \geq 50 \Rightarrow k > 12$ 。

……知识点链接……

理想低通滤波器的频率响应满足

$$H(j\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_d}, & |\omega| \leq \omega_c = G_{2\omega_c}(\omega) e^{-j\omega t_d} \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

其中, $t_d > 0$ 为实数, ω_c 为截止频率,称为理想低通滤波器的通频带,简称频带。

理想低通滤波器的单位冲激响应为

$$h(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}[\omega_c(t - t_d)]$$

理想低通滤波器的单位阶跃响应为

$$s(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}[\omega_c(t - t_d)]$$

理想低通滤波器是非因果系统,在工程实践中不可能实现,但仍具有理论价值。

【题 3-4-6】 选择题

(1) 理想低通滤波器的带宽越宽,则其阶跃响应的上升时间()。

- A. 越短 B. 越长 C. 不受影响 D. 不能判断

【分析】 理想低通滤波器的单位阶跃响应是单位冲激响应的积分,带宽越宽,单位冲激响应的主瓣越窄,因此单位阶跃响应的上升时间越短。

【解答】 A。

(2) 下面各种命题中正确的是()。

- A. 理想低通滤波器的截止频率与其阶跃响应的上升时间成正比
B. 在指数形式的傅里叶级数中,负频率分量无任何物理意义,只是数字运算结果
C. 系统函数的零点位置影响时域波形的衰减或增长
D. 一个信号存在傅里叶变换,就一定存在双边拉普拉斯变换;反之,一个信号存在拉普拉斯变换,就一定存在傅里叶变换

【分析】 本题 A 选项考查低通滤波器的时域响应特点,通带越宽,能通过的高频分量越多,阶跃响应上升越快。C 选项考查零极点位置与系统的稳定性,时域波形的衰减或增长与系统稳定性有关,极点位置决定系统的稳定性。

A 错误。一般地,信号(系统)时域的时宽(或上升时间)与其频域带宽(或截止频率)的乘积为常数。设理想低通滤波器的截止频率为 ω_c ,其频率响应为 $H(j\omega) = G_{2\omega_c}(\omega)$

$e^{-j\omega t_d}$,其单位冲激响应为 $h(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}[\omega_c(t - t_d)]$,其阶跃响应的上升时间为 $\frac{2\pi}{\omega_c}$ 。

B 正确。定义周期信号的周期为满足 $x(t) = x(t + T)$ 的最小正实数,定义其频率为 $f = 1/T$,在此意义下周期信号的频率为正。

C 错误。系统函数的极点决定了该系统单位冲激响应的增长或衰减。

D 错误。如直流信号存在傅里叶变换,但不存在拉普拉斯变换;又如 $e^{2t}u(t)$ 存在拉普拉斯变换,但不存在傅里叶变换。

【解答】 B。

(3) 如图 3-4-3(a)所示系统,该系统含有两个低通滤波器,其频率响应如图 3-4-3(b)所示,当输入为一带限信号 $x(t)$,其频谱 $X(j\omega)$ 如图 3-4-3(c)所示,当 $\omega_m < \omega_c, \omega_1 < \omega_c, \omega_2 > \omega_c - \omega_1$ 时,整个系统等效于何种滤波器?()

- A. 低通 B. 高通 C. 带通 D. 带阻

【分析】 $x(t)$ 被调制后的频谱如图 3-4-4(a)所示,滤波后的频谱如图 3-4-4(b)所示,该信号被再次调制后的频谱如图 3-4-4(c)所示。被低通滤波后,仅原信号的高频分量被保留。

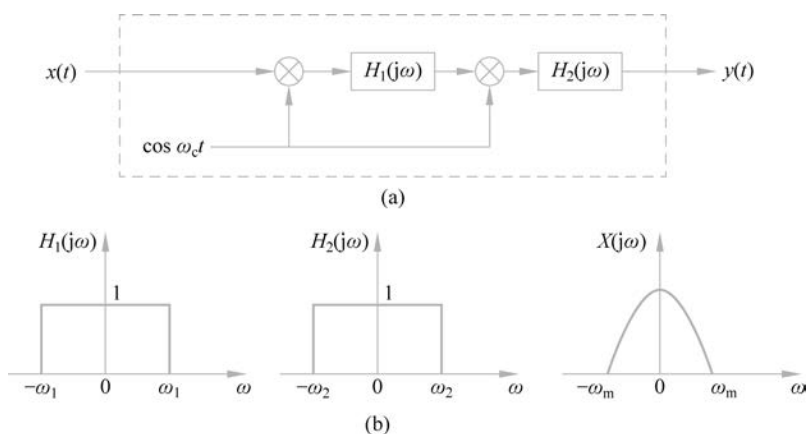


图 3-4-3

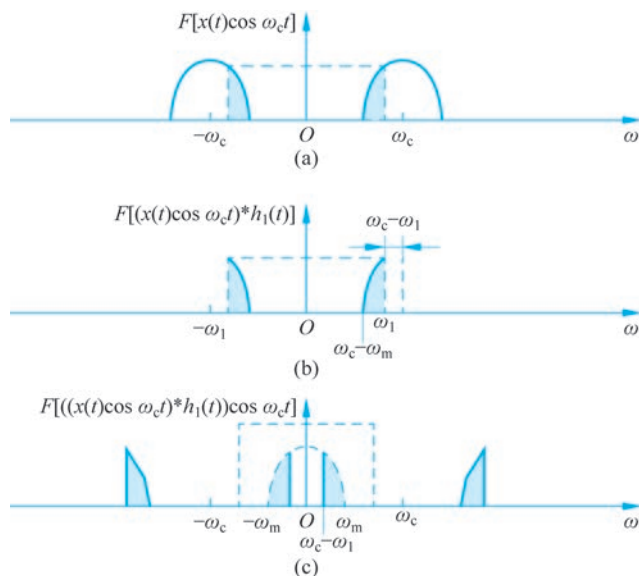


图 3-4-4

【解答】 B。

【题 3-4-7】 填空题

某系统的零极点图如图 3-4-5 所示,从频率选择性上看,该系统完成_____ (低通、高通、带通、带阻)滤波功能。

【分析】 本题考查基于零极点图分析系统的滤波特性。由于系统在原点有零点,因而有 $|H(j\omega)|_{\omega=0}=0$,又由于系统有两个极点、一个零点,故分母比分子高一阶,因而 $|H(j\omega)|_{\omega=\infty}=0$,故为带通滤波器, ω_0 近似为通带中心频率。

【解答】 带通。

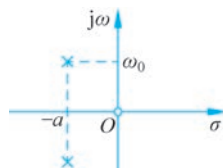


图 3-4-5

【题 3-4-8】 计算题

理想低通滤波器(LPF)的截止频率为 10Hz,其相频特性为 $\angle H(f) = -6\pi f$,求该滤波器的单位冲激响应 $h(t)$ 。

【分析】 本题考查理想低通滤波器的时域和频域特性。理想低通滤波器的截止频率为 ω_c ,其频率响应为 $H(j\omega) = G_{2\omega_c}(\omega) e^{-j\omega t_d}$,其单位冲激响应为 $h(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}[\omega_c(t - t_d)]$ 。

【解答】 因为截止角频率为

$$\omega = 2\pi f = 20\pi \text{ rad/s}; \angle H(\omega) = -3\omega$$

所以

$$H(j\omega) = G_{40\pi}(\omega) e^{-j3\omega}; h(t) = 20\text{Sa}[20\pi(t - 3)]$$

【题 3-4-9】 证明题

已知理想低通滤波器的传输函数为 $H(j\omega) = G_{2\pi}(\omega)$,试证明:输入为 $x_1(t) = \text{Sa}(\pi t)$ 时的响应 $y_1(t)$ 等于输入为 $x_2(t) = \frac{\sin(4\pi t)}{\pi t}$ 时的响应 $y_2(t)$ 。

【分析】 当两个不同的输入信号在系统通带内的频率分量相同时,通过滤波器后的输出就会相同。

【证明】

$$\text{Sa}(\omega_c t) \leftrightarrow \frac{\pi}{\omega_c} G_{2\omega_c}(\omega)$$

$$\text{Sa}(\pi t) \leftrightarrow G_{2\pi}(\omega), \frac{\sin(4\pi t)}{\pi t} = 4\text{Sa}(4\pi t) \leftrightarrow G_{8\pi}(\omega)$$

$$Y_1(j\omega) = X_1(j\omega)H(j\omega) = G_{2\pi}(\omega)G_{2\pi}(\omega) = G_{2\pi}(\omega)$$

$$Y_2(j\omega) = X_2(j\omega)H(j\omega) = G_{8\pi}(\omega)G_{2\pi}(\omega) = G_{2\pi}(\omega) = Y_1(j\omega)$$

【题 3-4-10】 简答题

如图 3-4-6(a)、图 3-4-6(b)所示两个信号, $T_1 = T_2$ 。试问其分别通过有相同截止频率的低通滤波器时,哪个信号可能失真更大?为什么?

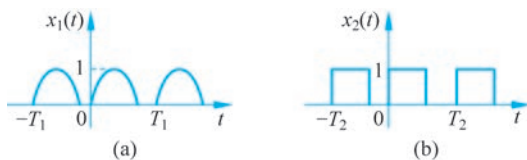


图 3-4-6

【分析】 低通滤波器只能允许输入信号中小于截止频率的频率分量通过,抑制高频分量。

【解答】 图 3-4-6(b)所示信号失真更大。这是由于信号 $x_1(t)$ 在时域上没有突变,信号 $x_2(t)$ 在时域上比 $x_1(t)$ 变化更快,因此 $x_2(t)$ 的高频分量大于 $x_1(t)$,通过低通滤波器后失真更大。

……知识点链接……

线性时不变系统对周期信号的响应

周期信号可通过傅里叶级数展开表示成复正弦信号的和,即

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t}, \quad t_0 < t < t_0 + T, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

系数为

$$X_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

线性时不变系统对周期信号的响应可以通过系统对各个分量的响应合成,即

$$e^{j\omega_0 t} \rightarrow H(j\omega_0) e^{j\omega_0 t}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t} \rightarrow y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

其中, $H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} h(\tau) d\tau$ 。

【题 3-4-11】 简答题

已知周期信号 $x(t)$ 波形如图 3-4-7 所示,判断将 $x(t)$ 通过频率 $\omega_c = 4\pi \text{ rad/s}$ 的理想低通滤波器后,有哪些频率成分?

【分析】 对周期脉冲串进行傅里叶级数展开可分析其频率成分。低通滤波器只能允许输入信号中小于截止频率的频率分量通过,抑制频率大于截止频率的分量。

【解答】 该周期信号的周期为 2,故基频为 $\omega_0 = \pi$; 又因该信号无直流且为奇谐信号,故信号包含的频率分量为

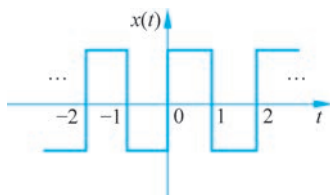


图 3-4-7

$$(2k+1)\omega_0 = (2k+1)\pi$$

低通滤波器的截止频率为 $\omega_c = 4\pi$,故输出信号的频率成分只有 π 和 3π 。

【题 3-4-12】 计算题

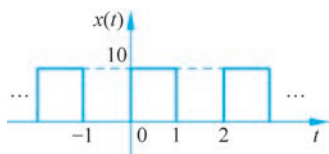


图 3-4-8

已知理想低通滤波器的频率响应为 $H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < 4\pi \\ 0, & |\omega| > 4\pi \end{cases}$,滤波器的输入信号 $x(t)$ 为周期矩形脉冲信号,如图 3-4-8 所示,则滤波器输出 $y(t)$ 为()。

【分析】 对周期脉冲串进行傅里叶级数展开可分析其频率成分。低通滤波器只能允许输入信号中小于截止频率的频率分量通过,抑制频率大于截止频率的分量。

【解答】 $\omega_0 = 2\pi/T = \pi \text{ rad/s}$, $\frac{E\tau}{T} = 5$, $\omega_0\tau = \frac{2\pi}{T}\tau = \pi$

$$x_0(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{E\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{k\omega_0\tau}{2}\right) e^{jk\omega_0 t} = 5 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{k\pi}{2}\right) e^{jk\pi t}$$

$$x(t) = x_0\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

原信号偶次谐波分量幅度为 0, 低通滤波器的截止频率为 4π , 故输出信号只含有 $k = 0, \pm 1, \pm 3$ 的频率成分。

$$y_0(t) = \sum_{k=-3}^3 \text{Sa}\left(\frac{k\pi}{2}\right) e^{jk\pi t} = 5 + \frac{20}{\pi} \cos(\pi t) - \frac{20}{3\pi} \cos(3\pi t)$$

$$y(t) = y_0\left(t - \frac{1}{2}\right) = 5 + \frac{20}{\pi} \sin(\pi t) + \frac{20}{3\pi} \sin(3\pi t)$$

【题 3-4-13】 计算题

如图 3-4-9(a) 所示周期矩形脉冲信号 $x(t)$, 通过幅频特性和相频特性如图 3-4-9(b)、(c) 所示的系统, 求零状态响应 $y(t)$ 。

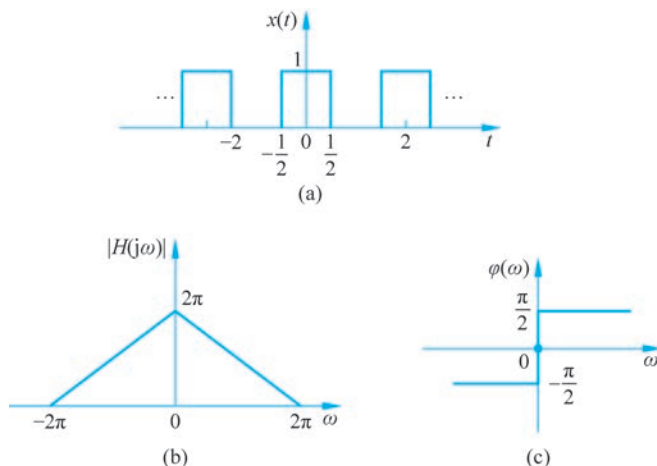


图 3-4-9

【分析】 本题通过傅里叶级数展开分析信号的频率分量, 通过系统的频率特性求每个频率分量对应的输出。本题中, 系统起到了低通滤波作用, 输入信号中只有直流和基波分量能通过系统。

【解答】 输入信号的周期为 2, 则 $\omega_0 = \pi$, 且为偶对称信号, $b_k = 0$ 。

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt = \frac{1}{2}, \quad a_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cos(k\omega_0 t) dt = \text{Sa}\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

故有

$$x(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{k\pi}{2}\right) \cos(k\pi t)$$

因 $\omega_0 = \pi$, 故信号通过如图 3-4-9(b) 所示的滤波器后, 输出只有直流分量和基波分量, 且有 $H(j\omega)|_{\omega_0=0} = 2\pi$, $H(j\omega)|_{\omega_0=\pi} = \pi e^{j\frac{\pi}{2}}$, 因而输出为

$$x(t) = 2\pi \cdot \frac{1}{2} + \pi \cdot \text{Sa}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = \pi - 2\sin\pi t$$

【题 3-4-14】 计算题

已知周期信号 $x(t)$ 波形如图 3-4-10 所示 ($E=1, T=2$), 将 $x(t)$ 通过频率 $\omega_c = 3.1\pi$ 理想低通滤波器, 求输出 $y(t)$ 。

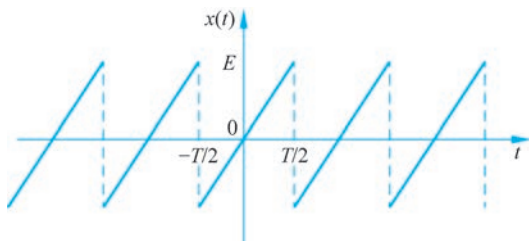


图 3-4-10

【分析】 本题通过傅里叶级数展开分析信号的频率分量, 并将通过理想低通滤波器的频率分量合成输出信号。

【解答】 该周期信号的周期为 $T=2$, 故 $\omega_0 = \pi$ 。

$x(t)$ 为奇对称信号, 其傅里叶级数只含正弦项, 且有

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} E \frac{2t}{T} \sin(k\omega_0 t) dt = 2 \int_0^1 t \sin(k\pi t) dt \\ &= 2 \left[-t \frac{\cos(k\pi t)}{k\pi} \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos(k\pi t)}{k\pi} dt \right] = 2 \left[-\frac{\cos(k\pi)}{k\pi} + \frac{\sin(k\pi t)}{(k\pi)^2} \Big|_0^1 \right] \\ &= \frac{2(-1)^{k+1}}{k\pi} \end{aligned}$$

低通滤波器的截止频率为 $\omega_0 = 3.1\pi$, 故输出信号只含 1~3 次谐波, 即

$$y(t) = \sum_{k=1}^3 \frac{2(-1)^{k+1}}{k\pi} \sin(k\pi t)$$

……知识点链接……

物理可实现

(1) 系统物理可实现需满足如下条件:

系统单位冲激响应为

$$h(t) = 0, \quad t < 0$$

(2) 佩利-维纳准则:

对于幅频特性 $|H(j\omega)|$, 物理可实现的必要条件为

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln |H(j\omega)||}{1+\omega^2} d\omega &< \infty \\ \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega &< \infty \end{aligned}$$

若此条件不能满足,则系统的单位冲激响应是非因果的,因此是物理不可实现的,佩利-维纳准则仅为必要条件,不是充分条件。

系统可实现性的本质是因果性,对于物理可实现的系统,允许 $|H(j\omega)|$ 在某些不连续的频率点上为零,但不允许在一个有限频带内为零。

【题 3-4-15】 简答题

某一系统的频谱图如图 3-4-11 所示,试问该系统是否为物理可实现的,说明理由。

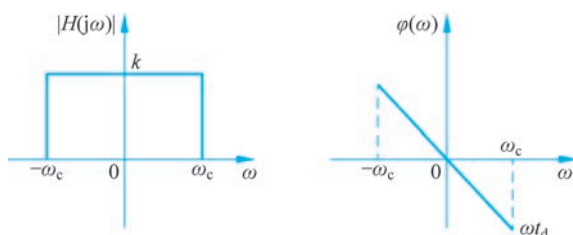


图 3-4-11

【解答】 理想低通滤波器具有无限长的单位冲激响应,因此是非因果的和物理不可实现的。

【题 3-4-16】 计算题

已知一连续线性时不变系统的单位冲激响应为

$$h(t) = \frac{1}{4} \left[\text{Sa}\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) + 2\text{Sa}\left(\pi t - \frac{\pi}{2}\right) + \text{Sa}\left(\pi t - \frac{3\pi}{2}\right) \right]$$

其中,函数 $\text{Sa}(t) = \frac{\sin t}{t}$,试求:

- (1) 该系统的频率响应 $H(j\omega)$,并画出它的频谱图。
- (2) 该系统是何种类型(低通、带通、高通、全通、线性相位等)滤波器?

(3) 当系统的输入信号为 $x(t) = \frac{\sin(\pi t/2)}{\pi t} \cos(2\pi t) + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cos\left[n\left(\frac{\pi t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$ 时,

求系统的输出 $y(t)$ 。

【分析】 本题需根据单位冲激响应的傅里叶变换求得系统的频率响应,从而判断其滤波类型。在求系统输出时,首先判断各频率分量能不能通过该滤波器,从而极大地简化输出信号的形式。

【解答】 (1) 由 $\text{Sa}(\omega_c t) \leftrightarrow \frac{\pi}{\omega_c} G_{2\omega_c}(\omega)$ 可知

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \frac{1}{4} G_{2\pi}(\omega) (e^{j\frac{1}{2}\omega} + 2e^{-j\frac{1}{2}\omega} + e^{-j\frac{3}{2}\omega}) \\ &= \frac{1}{4} G_{2\pi}(\omega) e^{-j\frac{1}{2}\omega} (e^{j\omega} + 2 + e^{-j\omega}) \\ &= \frac{1}{2} G_{2\pi}(\omega) e^{-j\frac{1}{2}\omega} (1 + \cos(\omega)) \end{aligned}$$

频谱图如图 3-4-12 所示。

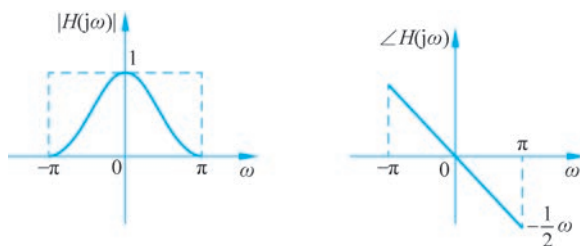


图 3-4-12

(2) 由其幅频特性可知该系统为低通滤波器,截止频率为 π ,且具有线性相位特性。

(3) 对输入信号的两个分量分别分析其频率成分。

$\frac{\sin(\pi t/2)}{\pi t} \cos(2\pi t)$ 是中心频率为 $\omega_0 = 2\pi$ 、带宽为 π 的带通信号,不能通过截止频率为 π 的低通滤波器。

$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cos\left[n\left(\frac{\pi t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$ 中的每个分量都是余弦信号,频率分别为 $\omega_n = \frac{\pi}{2}n$,能通过 $H(j\omega)$ 的仅有 $n=0, 1$ 的两个分量,其幅度增益分别为 $|H(j\omega)|_{\omega=0} = 1$, $|H(j\omega)|_{\omega=\pi/2} = 0.5$ 。由 $H(j\omega)$ 的相位特性可知,输出相对于输入还有 $t_d = 0.5$ 的时延。因此

$$y(t) = 1 + \frac{1}{4} \cos\left(\frac{\pi}{2}(t - 0.5) + \frac{\pi}{4}\right) = 1 + \frac{1}{4} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

【题 3-4-17】 计算题

已知一个信号 $x(t)$ 的频谱如图 3-4-13 所示。

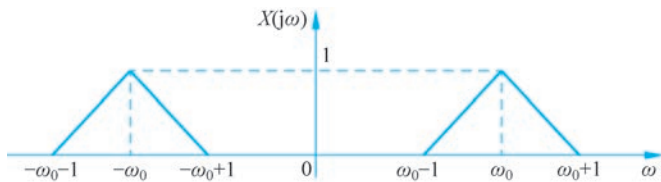


图 3-4-13

其中, $\omega_0 > 1$ 。若该信号通过如图 3-4-14 所示的系统,求系统的零状态响应。

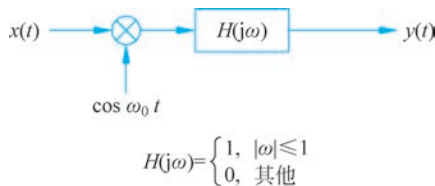


图 3-4-14

【分析】 本题综合运用基本的傅里叶变换对、傅里叶变换的调制特性及系统的滤波特性。题中系统为理想的低通滤波器。

【解答】 $X(j\omega) = \Lambda_2(\omega + \omega_0) + \Lambda_2(\omega - \omega_0) = \Lambda_2(\omega) * [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$

$$\begin{aligned}
 x(t) \cos \omega_0 t &\leftrightarrow \frac{1}{2} X(j\omega) * [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] \\
 &= \frac{1}{2} \Lambda_2(\omega) * [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] * [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] \\
 &= \Lambda_2(\omega) * \frac{1}{2} [\delta(\omega + 2\omega_0) + \delta(\omega - 2\omega_0) + 2\delta(\omega)] \\
 &= \frac{1}{2} \Lambda_2(\omega + 2\omega_0) + \frac{1}{2} \Lambda_2(\omega - 2\omega_0) + \Lambda_2(\omega) \\
 Y(j\omega) &= \left[\frac{1}{2} \Lambda_2(\omega + 2\omega_0) + \frac{1}{2} \Lambda_2(\omega - 2\omega_0) + \Lambda_2(\omega) \right] H(j\omega) \\
 &= \left[\frac{1}{2} \Lambda_2(\omega + 2\omega_0) + \frac{1}{2} \Lambda_2(\omega - 2\omega_0) + \Lambda_2(\omega) \right] G_2(\omega) = \Lambda_2(\omega)
 \end{aligned}$$

其中

$$\Lambda_2(\omega) = G_1(\omega) * G_1(\omega), \quad \frac{1}{2\pi} \text{Sa}\left(\frac{t}{2}\right) \leftrightarrow G_1(\omega)$$

因此系统的零状态响应为

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \text{Sa}^2\left(\frac{t}{2}\right)$$

【题 3-4-18】 计算题

如图 3-4-15 所示系统, 已知 $H(j\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_0}, & |\omega| < 2\omega_1 \\ 0, & |\omega| \geq 2\omega_1 \end{cases}$, 且 $\omega_0 \gg \omega_1$ 。

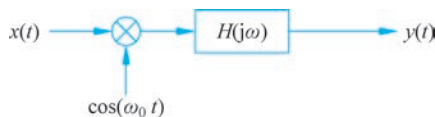


图 3-4-15

(1) 当输入为 $x(t) = \left(\frac{\sin(\omega_1 t)}{\omega_1 t}\right)^2 \cos(\omega_0 t)$ 时, 求输出 $y(t)$ 。

(2) 当输入为 $x(t) = \left(\frac{\sin(\omega_1 t)}{\omega_1 t}\right)^2 \sin(\omega_0 t)$ 时, 求输出 $y(t)$ 。

【分析】 本题综合运用基本的傅里叶变换对、傅里叶变换的调制特性及系统的滤波特性。其难点在于分析输入信号的频谱范围, 以及其被调制后基带频谱与原信号频谱的关系。由时域表达式求解输入信号与余弦信号相乘后的低频分量, 比由频域分析更简便。

【解答】 (1)

$$\begin{aligned}
 x(t) \cos(\omega_0 t) &= \text{Sa}^2(\omega_1 t) \cos^2(\omega_0 t) = \text{Sa}^2(\omega_1 t) \frac{1 + \cos(2\omega_0 t)}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \text{Sa}^2(\omega_1 t) + \frac{1}{2} \text{Sa}^2(\omega_1 t) \cos(2\omega_0 t)
 \end{aligned}$$

所以

$$y(t) = \frac{1}{2} \text{Sa}^2[\omega_1(t - t_0)]$$

(2) $y(t) = 0$

【题 3-4-19】 计算及画图题

已知输入信号 $x(t) = \frac{\sin(\omega_c t)}{\omega_c t}$, 按图 3-4-16 所示进行处理, 其中系统 1 的频率响应为 $H_1(j\omega) = G_{2\omega_c}(\omega + \omega_0)e^{-j(\omega + \omega_0)t_d} + G_{2\omega_c}(\omega - \omega_0)e^{-j(\omega - \omega_0)t_d}$, $\omega_0 \gg \omega_c$, $t_d > 1$ 。

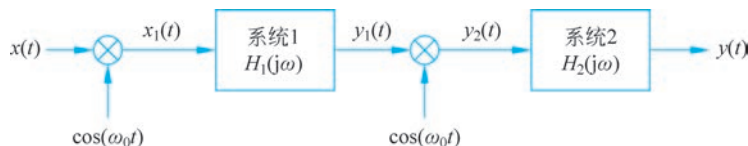


图 3-4-16

- (1) 求 $x_1(t)$ 的傅里叶变换 $X_1(j\omega)$, 并画出其幅度谱 $|X_1(j\omega)|$ 。
- (2) 求 $y_1(t)$ 。
- (3) 求 $y_2(t)$ 的傅里叶变换 $Y_2(j\omega)$, 并画出其幅度谱 $|Y_2(j\omega)|$ 。
- (4) 若要使输出 $y(t) = x(t)$, 则系统 2 的频率响应 $H_2(j\omega)$ 应是什么? 系统 2 是否为物理可实现系统? 为什么?

【分析】 本题综合运用基本的傅里叶变换对、傅里叶变换的调制特性及系统的滤波特性。

注意: 在第(2)问中, 系统 1 只对 $x_1(t)$ 信号增加了相位项, 而该相频特性并不是过 $(0, 0)$ 点的线性相位, 而是分别过 $(-\omega_0, 0)$ 和 $(\omega_0, 0)$ 的两组线性相位, 它等效于将基带信号延时后再进行调制产生的相位, 因此 $y_1(t)$ 的延时只体现在基带部分。在第(3)问中, 先写出 $y_2(t)$ 的时域表达式再求频谱, 比从频域求解更简便。

【解答】 (1) $x_1(t) = x(t) \cos \omega_0 t$

故

$$X_1(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{\pi}{2\omega_c} G_{2\omega_c}(\omega + \omega_0) + \frac{\pi}{2\omega_c} G_{2\omega_c}(\omega - \omega_0)$$

其图形如图 3-4-17 所示。

$$(2) Y_1(j\omega) = X_1(j\omega) H_1(j\omega) = \frac{\pi}{2\omega_c} H_1(j\omega)$$

$$\text{故 } y_1(t) = \text{Sa}[\omega_c(t - t_d)] \cos \omega_0 t$$

$$(3) y_2(t) = y_1(t) \cos \omega_0 t = \text{Sa}(\omega_c(t - t_d)) \cos^2 \omega_0 t =$$

$$\frac{1}{2} \text{Sa}[\omega_c(t - t_d)] (1 + \cos 2\omega_0 t)$$

$$Y_2(j\omega) = \frac{\pi}{4\omega_c} G_{2\omega_c}(\omega + 2\omega_0) e^{-j(\omega + 2\omega_0)t_d} + \frac{\pi}{2\omega_c} G_{2\omega_c}(\omega) e^{-j\omega t_d} + \frac{\pi}{4\omega_c} G_{2\omega_c}(\omega - 2\omega_0)$$

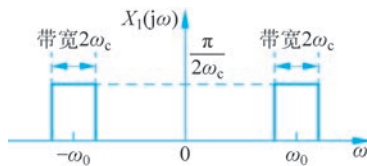


图 3-4-17

$$e^{-j(\omega-2\omega_0)t_d}$$

其图形如图 3-4-18 所示。

$$(4) H_2(j\omega) = \begin{cases} 2e^{j\omega t_d}, & |\omega| \leq \omega_d \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (\text{其中}, \omega_c \leq \omega_d \leq 2\omega_0 - \omega_c)$$

系统 2 是物理不可实现的,原因有二:正斜率的相位说明输出比输入超前,是非因果系统;系统的频率响应在截止频率之外都为零,不满足佩利-维纳准则要求。

【题 3-4-20】 计算题

在如图 3-4-19 所示的系统中,理想低通滤波器的频率响应为 $H_L(j\omega) = G_{4\omega_c}(\omega)$ $e^{-j\omega t_0}$, ω_c, ω_0, t_0 为实数,且 $\omega_0 \gg \omega_c$ 。

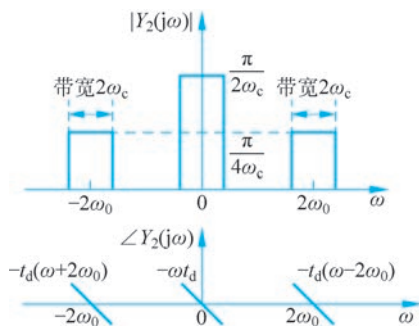


图 3-4-18

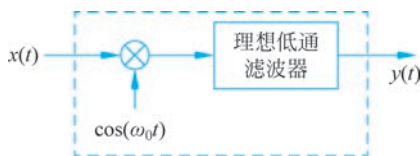


图 3-4-19

(1) 求虚框所示系统的单位冲激响应 $h(t)$ 。

(2) 若输入信号为 $x(t) = \left[\frac{\sin(\omega_c t)}{\omega_c t} \right]^2 \cos(\omega_0 t)$, 求系统输出响应 $y(t)$ 。

(3) 图 3-4-19 中虚框所示系统是否为因果系统?

【分析】 虚框中的系统含有调制模块,会对输入信号进行频谱搬移,不是线性时不变系统。对该系统仍可求输入为单位冲激信号时的响应,即单位冲激响应,但此时单位冲激响应不能完全描述该系统的特性,也不能求该系统对其他输入信号的响应。另外,理想低通滤波器不是因果系统,因此整个虚框内的系统也不是因果系统。

【解答】 (1) 因为

$$\delta(t) \cos(\omega_0 t) = \delta(t)$$

所以

$$h(t) = h_L(t) = \frac{2\omega_c}{\pi} \text{Sa}[2\omega_c(t - t_0)]$$

$$(2) x(t) \cos(\omega_0 t) = \text{Sa}^2(\omega_c t) \cos^2(\omega_0 t) = \frac{1}{2} \text{Sa}^2(\omega_c t) + \frac{1}{2} \text{Sa}^2(\omega_c t) \cos(2\omega_0 t)$$

$\frac{1}{2} \text{Sa}^2(\omega_c t)$ 能完全通过低通滤波器 $H_L(j\omega)$, 而高频分量 $\frac{1}{2} \text{Sa}^2(\omega_c t) \cos(2\omega_0 t)$ 则被

低通滤波器滤除, 因此 $y(t) = \frac{1}{2} \text{Sa}^2[\omega_c(t-t_0)]$ 。

(3) 理想低通滤波器不是一个因果系统, 因此整个虚框内的系统也不是因果系统。

【题 3-4-21】 计算及画图题

在图 3-4-20(a)所示的系统中, $H_1(j\omega)$ 为理想的低通滤波器, 即

$$H_1(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_m \\ 0, & |\omega| > \omega_m \end{cases}$$

$H_2(j\omega)$ 为带通滤波器, 其频率特性如图 3-4-20(b)所示。

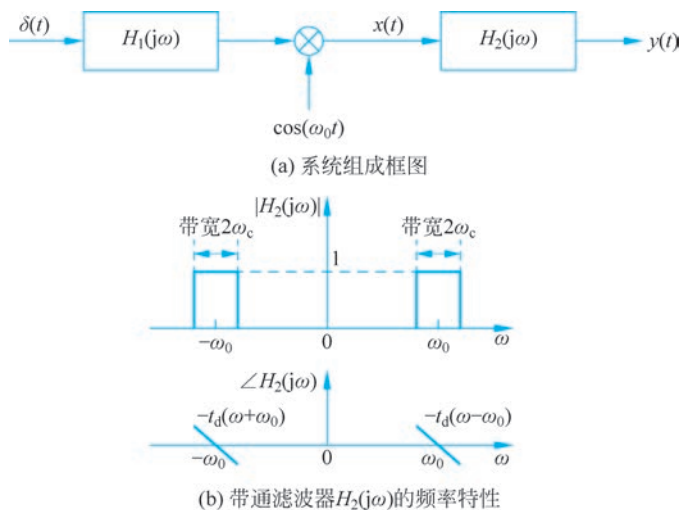


图 3-4-20

(1) 假设 $\omega_0 \gg \omega_m$, 请写出 $x(t)$ 的时域表达式, 推导其频谱 $X(j\omega)$, 并绘制其频谱图。

(2) 分别在 $\omega_c > \omega_m$ 和 $\omega_c < \omega_m$ 两种情况下求系统输出 $y(t)$ 的时域表达式。

【分析】 单位冲激函数通过理想低通滤波器后, 输出为理想低通滤波器的单位冲激响应, 其具有辛格函数的形式。本题中经调制后得到一个带通信号, 该信号再通过带通滤波器 $H_2(j\omega)$, 得到输出 $y(t)$ 。

【解答】 (1) 记 $\delta(t)$ 经过 $H_1(j\omega)$ 后的信号为 $x_0(t)$, 根据 $\frac{\sin(\omega_c t)}{\omega_c t} \leftrightarrow \frac{\pi}{\omega_c} G_{2\omega_c}(\omega)$, 有

$$x_0(t) = \frac{\omega_m}{\pi} \frac{\sin(\omega_m t)}{\omega_m t} = \frac{\omega_m}{\pi} \text{Sa}(\omega_m t) = \frac{\sin(\omega_m t)}{\pi t}$$

$$x(t) = x_0(t) \cos(\omega_0 t) = \frac{\omega_m}{\pi} \text{Sa}(\omega_m t) \cos(\omega_0 t) = \frac{\sin(\omega_m t)}{\pi t} \cos(\omega_0 t)$$

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} \cdot G_{2\omega_m}(\omega) * \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] \\ &= \frac{1}{2} [G_{2\omega_m}(\omega + \omega_0) + G_{2\omega_m}(\omega - \omega_0)] \end{aligned}$$

其图形如图 3-4-21 所示。

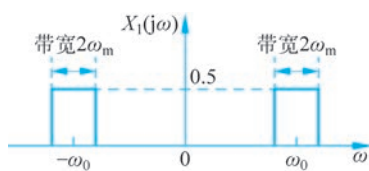


图 3-4-21

$$\begin{aligned}
 (2) \quad H_2(j\omega) &= G_{2\omega_c}(\omega) e^{-j\omega t_d} * [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \cdot 2G_{2\omega_c}(\omega) e^{-j\omega t_d} * \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]
 \end{aligned}$$

故

$$h_2(t) = \frac{2\omega_c}{\pi} \text{Sa}[\omega_c(t - t_d)] \cos(\omega_0 t) = \frac{2\sin[\omega_c(t - t_d)]}{\pi(t - t_d)} \cos(\omega_0 t)$$

当 $\omega_c > \omega_m$ 时, $H_2(j\omega)$ 仅起到对 $x(t)$ 中低频因子的延时作用, 因此

$$y(t) = \frac{\omega_m}{\pi} \text{Sa}[\omega_m(t - t_d)] \cos(\omega_0 t) = \frac{\sin[\omega_m(t - t_d)]}{\pi(t - t_d)} \cos(\omega_0 t)$$

当 $\omega_c < \omega_m$ 时,

$$y(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}[\omega_c(t - t_d)] \cos(\omega_0 t) = \frac{\sin[\omega_c(t - t_d)]}{\pi(t - t_d)} \cos(\omega_0 t)$$

【题 3-4-22】 计算题

已知某系统 $H(j\omega) = \begin{cases} -j, & \omega \geq 0 \\ j, & \omega < 0 \end{cases}$, 输入 $x(t) = \cos(\omega_0 t)$, 其中 $\omega_0 > 0$, 求输出 $y(t)$ 。

【分析】 题干中的 $H(j\omega)$ 是一个希尔伯特变换器, 对单频信号实现了相位的 90° 旋转。

$$\text{【解答】} \quad H(j\omega) = \begin{cases} e^{-j\frac{\pi}{2}}, & \omega \geq 0 \\ e^{j\frac{\pi}{2}}, & \omega < 0 \end{cases}$$

所以

$$y(t) = \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\omega_0 t$$

【题 3-4-23】 计算及画图题

如图 3-4-22 所示, 信号 $x(t)$ 的频谱 $X(\omega)$ 处于 $-\omega_m \sim \omega_m$ 范围内, $\omega_0 \gg \omega_m$, $H(j\omega) = -j\text{sgn}(\omega)$ 。设 $y(t)$ 的频谱为 $Y(\omega)$, 求 $Y(\omega)$ 的表达式, 并画出频谱图。

【分析】 本题综合运用傅里叶变换的调制特性及系统的滤波特性。

注意: 题干中的 $H(j\omega)$ 是希尔伯特变换器, 对于带限信号 $x(t)$, $x(t) + jx(t) * h(t)$ 是一个只有正频率分量的解析信号。但本题的系统还包含调制过程, 不能套用结论。

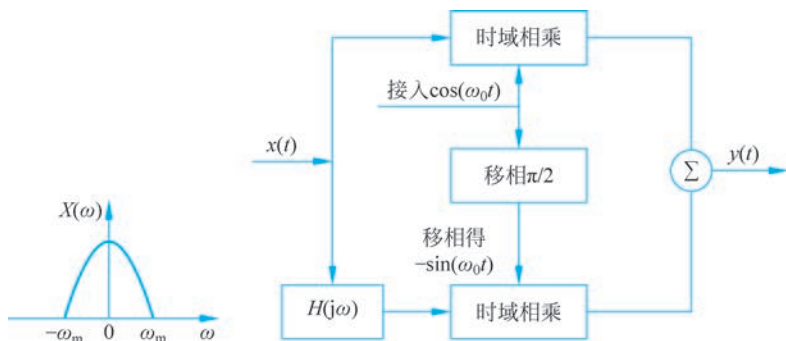


图 3-4-22

【解答】 $y(t) = x(t)\cos(\omega_0 t) - [x(t) * h(t)]\sin(\omega_0 t)$

$$Y(\omega) = \frac{1}{2}[X(\omega + \omega_0) + X(\omega - \omega_0)] - j\frac{1}{2}[X(\omega + \omega_0)H(\omega + \omega_0) - X(\omega - \omega_0)H(\omega - \omega_0)]$$

因 $H(\omega) = -j\operatorname{sgn}(\omega)$, 且 $\omega_0 \gg \omega_m$, 故有

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \frac{1}{2}[X(\omega + \omega_0) + X(\omega - \omega_0)] - \frac{1}{2}[X(\omega + \omega_0)\operatorname{sgn}(\omega + \omega_0) - X(\omega - \omega_0)\operatorname{sgn}(\omega - \omega_0)] \\ &= \frac{1}{2}X(\omega + \omega_0)[1 - \operatorname{sgn}(\omega + \omega_0)] + \frac{1}{2}X(\omega - \omega_0)[1 + \operatorname{sgn}(\omega - \omega_0)] \\ &= \begin{cases} X(\omega + \omega_0), & \omega < -\omega_0 \\ 0, & |\omega| < \omega_0 \\ X(\omega - \omega_0), & \omega > \omega_0 \end{cases} \end{aligned}$$

频谱图如图 3-4-23 所示。

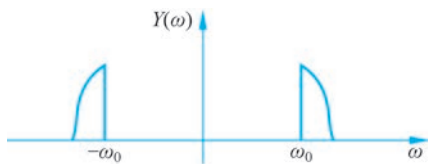


图 3-4-23

考点 5 时频抽样

本节考点：主要考查信号时域抽样定理和频域抽样定理的掌握。通常时域抽样定理是重点考查内容。

……知识点链接……

1. 时域抽样定理

一个频谱在区间 $(-\omega_m, \omega_m)$ 以外为零的频带有限的信号 $x(t)$ 可唯一地由其在均匀

间隔 $T_s \leq \frac{\pi}{\omega_m}$ (或抽样频率 $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} \geq 2\omega_m$) 上的样本点 $x(nT_s)$ 确定。即

$$x(t) = \frac{T_s \omega_c}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \text{Sa}[\omega_c(t - nT_s)]$$

式中, $\omega_m \leq \omega_c \leq \omega_s - \omega_m$ 。

通常将最低允许抽样频率 $\omega_s = 2\omega_m$ 称为奈奎斯特频率, 将最大允许抽样间隔 $T_s = \frac{\pi}{\omega_m}$ 称为奈奎斯特间隔。

2. 频域抽样定理

一个在时间区间 $(-t_m, t_m)$ 内的有限时间信号 $x(t)$ 的频谱 $X(j\omega)$ 可唯一地由其在均匀频率抽样间隔 $\omega_s \left(\omega_s < \frac{\pi}{t_m} \right)$ 上的样本点 $X(jk\omega_s)$ 确定。即

$$X(j\omega) = \frac{\omega_s t_m}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_s) \text{Sa}[t_m(\omega - k\omega_s)]$$

【题 3-5-1】 判断题

对连续周期信号进行抽样, 若抽样过程满足时域抽样定理, 则得到的离散信号仍具有周期性。()

【分析】 周期信号的频谱不但具有离散性, 还具有谐波性。抽样造成频谱的周期延拓, 如果延拓周期不是基波频率的整数倍, 则抽样信号的频谱不满足谐波性要求, 不是周期信号。例如, 对 $\cos t$ 信号以 0.1s 为间隔抽样, 抽样后的信号不是周期信号。

【解答】 错误。

【题 3-5-2】 填空题

(1) 已知非周期信号 $x(t)$ 的频谱为 $X(j\omega)$, 若在时域上将 $x(t)$ 以固定周期 T 进行周期延拓, 则可等效于对其频谱 $X(j\omega)$ 进行以 _____ 为周期的等间隔抽样, 即时域的 _____ 性, 对应频域的 _____ 性。

【分析】 本题考查频域抽样定理的推导过程。

【解答】 $\frac{2\pi}{T}$; 周期; 离散。

(2) 设语音信号的最高频率成分是 400kHz , 则对语音信号进行时域抽样处理, 抽样频率至少应该为 _____。

【分析】 本题直接运用抽样定理作答。

【解答】 800kHz 。

(3) 一个频谱受限的信号 $x(t)$, 其频谱宽度为 $-\omega_m \sim \omega_m$, 则信号 $x(t)$ 可以用等间隔的抽样值唯一地表示, 而抽样间隔必须不大于 _____。

【分析】 本题考查抽样定理。

【解答】 $\frac{\pi}{\omega_m}$ 。

(4) 已知带限信号 $x(t)$ 的频带范围为 $-4\pi \sim 4\pi(\text{rad/s})$, 对 $x(2t)$ 进行抽样, 则满足

抽样定理的最低抽样频率为_____。

【分析】 本题需要根据傅里叶变换的时频展缩特性求信号的频谱支撑集,并进一步应用抽样定理确定抽样频率。

【解答】 8Hz。

$$x(2t) \leftrightarrow \frac{1}{2} X\left(\frac{j\omega}{2}\right), \text{其最大频率 } 4\text{Hz}; \text{ 因此最小抽样频率为 } 8\text{Hz}.$$

(5) 信号 $x(t)$ 的最高频率为 400Hz, 对信号 $x(t) * x\left(\frac{t}{2}\right)$ 进行理想抽样, 使频谱不混叠的最大抽样周期为_____。

【分析】 本题需要利用傅里叶变换的时频展缩特性和时域卷积定理求信号的频率范围, 并进一步应用抽样定理确定抽样频率。

【解答】 2.5ms。

由 $x(t) * x(t/2) \leftrightarrow X(j\omega)2X(j2\omega)$, 得 $X(j\omega)$ 、 $X(j2\omega)$ 的最大频率分别为 400Hz、200Hz, 则该信号的最大频率为 200Hz。

$$f_s \geq 2 \times 200\text{Hz} = 400\text{Hz} \Rightarrow T_s = \frac{1}{f_s} \leq \frac{1}{400}\text{s} = 2.5\text{ms}$$

(6) 若 $x(t)$ 的最高角频率为 ω_m , 则对信号 $y(t) = x(2t)x\left(\frac{t}{3}\right)$ 抽样, 其频谱不混叠的奈奎斯特间隔为_____。

【分析】 本题需要利用傅里叶变换的时频展缩特性和频域卷积定理求信号的频率范围, 并进一步应用抽样定理确定抽样频率。

【解答】 $\frac{6\pi}{14\omega_m}$ 。

$x(2t)$ 的最高角频率为 $2\omega_m$, $x\left(\frac{t}{3}\right)$ 的最高角频率为 $\frac{\omega_m}{3}$, 二者时域相乘, 谱域卷积, 最高角频率为 $7\frac{\omega_m}{3}$, 因此抽样频率不低于 $14\frac{\omega_m}{3}$, 奈奎斯特间隔为 $\frac{6\pi}{14\omega_m}$ 。

(7) 已知信号 $x(t)$ 的最高频率为 $\omega_m \text{ rad/s}$, 则对信号 $x^2(t)$ 进行均匀抽样的奈奎斯特频率为_____。

【分析】 本题需要运用频域卷积定理求信号的频率范围, 并进一步应用抽样定理确定抽样频率。 $x^2(t)$ 的最高角频率为 $2\omega_m$, 因此奈奎斯特频率为 $4\omega_m$ 。

【解答】 $4\omega_m$ 。

(8) 某信号奈奎斯特间隔为 $\frac{\tau}{2}\text{s}$, 频谱为 $X(j\omega)$, 那么对应频谱 $Y(j\omega) = X(3j\omega)X\left(\frac{j\omega}{4}\right)$ 进行抽样, 满足不混叠的最小重复周期是_____s。

【分析】 本题直接给出了待抽样信号的频谱, 分析其最高频率后应用奈奎斯特抽样定理。奈奎斯特间隔为 $\frac{\tau}{2}$ 的信号最高频率为 $\frac{2\pi}{\tau}$, $X(3j\omega)$ 的最高频率为 $\frac{2\pi}{3\tau}$, $X\left(\frac{j\omega}{4}\right)$ 的最高

频率为 $\frac{8\pi}{\tau}$,二者相乘后最高频率为 $\frac{2\pi}{3\tau}$,因此最低抽样频率为 $\frac{4\pi}{3\tau}$,最大抽样周期为 $\frac{3\tau}{2}$ 。

【解答】 $\frac{3\tau}{2}$ 。

(9) 对信号 $x(t) = \text{Sa}(100t)(1 + \text{Sa}(100t))$ 进行理想冲激串抽样,满足频谱不混叠的最小抽样频率是_____Hz。

【分析】 本题需要应用傅里叶变换的频域卷积定理求信号的频率范围,并进一步应用抽样定理确定抽样频率,注意,本题中要求给出以赫兹为单位的频率,而不是角频率。

【解答】 63.66。

信号的最高频率为 200rad/s ,因而最小抽样频率为 $\frac{200}{\pi} \approx 63.66\text{Hz}$ 。

(10) 已知对 $x(t)$ 无失真抽样的最小抽样角频率为 ω_0 ,则对 $x'(t)\cos(\omega_0 t)$ 无失真抽样角频率为_____。

【分析】 本题需要利用傅里叶变换的时域微分性质和调制特性求信号的频率范围,并进一步应用抽样定理确定抽样频率。注意,时域微分不改变信号频谱的支撑集。

【解答】 $3\omega_0$ 。

因为

$$x'(t) \leftrightarrow j\omega X(j\omega)$$

所以

$$x'(t)\cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2}[j(\omega + \omega_0)X(j\omega + j\omega_0) + j(\omega - \omega_0)X(j\omega - j\omega_0)]$$

由于 $x(t)$ 无失真抽样角频率为 ω_0 ,则该信号的最高频率为 $\frac{\omega_0}{2}$,因此信号 $x'(t)\cos(\omega_0 t)$ 的最高频率为 $\frac{\omega_0}{2} + \omega_0 = \frac{3\omega_0}{2}$,故对该信号的无失真抽样角频率为 $3\omega_0$ 。

【题 3-5-3】 选择题

(1) 已知信号 $x(t) = \text{Sa}(100t) + \text{Sa}^2(60t)$,若对其进行冲激串抽样,则使频谱不发生混叠的最低抽样频率 f_s 等于()。

- A. $120/\pi\text{Hz}$ B. 240Hz C. $100/\pi\text{Hz}$ D. 200Hz

【分析】 本题需要利用基本的傅里叶变换对和傅里叶变换的性质求信号的频谱,并进一步应用抽样定理确定抽样频率。

【解答】 A。

$x(t) = \text{Sa}(100t) + \text{Sa}^2(60t)$, $\text{Sa}(100t)$, $\text{Sa}^2(60t)$ 的最大频率分别是 100rad/s 和 120rad/s ; 因此 $x(t)$ 的最大频率为 120rad/s ,故有 $f_s \geq \frac{2 \times 120}{2\pi} = \frac{120}{\pi}$ 。

(2) 已知信号 $x(t) = \text{Sa}(100t)(1 + \text{Sa}(100t))$,对其进行理想抽样后,满足频谱不混叠的最小抽样频率是()。

- A. 100Hz B. $\frac{100}{\pi}\text{Hz}$ C. 200Hz D. $\frac{200}{\pi}\text{Hz}$

【分析】 本题需要利用基本的傅里叶变换对和傅里叶变换的性质求信号的频谱,并进一步应用抽样定理确定抽样频率。

$x(t) = \text{Sa}(100t) + \text{Sa}^2(100t)$, $\text{Sa}(100t)$ 和 $\text{Sa}^2(100t)$ 的最大频率分别为 100rad/s 和 200rad/s ; 因而 $x(t)$ 的最大频率为 200rad/s , 故有 $f_s \geq \frac{2 \times 200}{2\pi} = \frac{200}{\pi}$ 。

【解答】 D。

(3) 信号 $x(t) = \text{Sa}(20t)\sin(30t)$, 对其进行理想抽样, 满足频谱不混叠的最小抽样频率是()。

- A. 50Hz B. $\frac{50}{\pi}\text{Hz}$ C. 100Hz D. $\frac{100}{\pi}\text{Hz}$

【分析】 本题需要应用傅里叶变换的频域卷积定理求信号的频率范围, 并进一步应用抽样定理确定抽样频率。

【解答】 B。

信号的最高频率为 $(20+30)\text{rad/s}$, 因而最小抽样频率为

$$\frac{2 \times 50}{2\pi} = \frac{50}{\pi}\text{Hz}$$

(4) 对于信号 $x(t) = \frac{(\sin 50t)^2}{t^2}$, 当抽样频率为下列何值时, 才能使得到的抽样信号不发生频谱混叠? ()

- A. $\leq 200\text{rad/s}$ B. $\geq 200\text{rad/s}$ C. $\leq 100\text{rad/s}$ D. $\geq 100\text{rad/s}$

【分析】 本题需要利用基本的傅里叶变换对和傅里叶变换的性质求信号的频谱, 并进一步应用抽样定理确定抽样频率。

【解答】 B。

$\text{Sa}(50t)$ 的最大频率是 50rad/s , $\text{Sa}^2(50t)$ 的最大频率是 100rad/s , 因此抽样频率要大于 200rad/s 。

【题 3-5-4】 简答题

(1) 设 $x(t)$ 是最高频率为 100Hz 的带限信号, 对 $x(4t)$ 进行抽样, 抽样间隔 T 应满足什么条件?

【分析】 本题需要利用傅里叶变换的时频展缩特性求信号的频谱支撑集, 并进一步应用抽样定理确定抽样频率。

【解答】 $T \leq 1.25\text{ms}$ 。

$x(4t) \leftrightarrow \frac{1}{4} X\left(\frac{j\omega}{4}\right)$, 其最大频率为 $4 \times 100\text{Hz} = 400\text{Hz}$, 因而最大抽样间隔为 $\frac{1}{2 \times 400\text{Hz}} = 1.25\text{ms}$ 。

(2) 一信号通过如图 3-5-1 所示的系统后再抽样, 试确定满足无失真抽样的抽样周期。

【分析】 本题考查抽样定理。信号经过低通滤波器后, 其最高频率等于低通滤波器

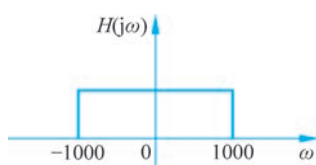


图 3-5-1

的截止频率,而抽样频率应当大于或等于信号最高频率的 2 倍。

【解答】 $\omega_s \geq 2\omega_m = 2000 \text{ rad/s} \Rightarrow T_s = \frac{2\pi}{\omega_s} \leq \frac{\pi}{1000} \text{ s}.$

(3) 若 $x(t)$ 是最高频率 $f_{\max} = 1 \text{ kHz}$ 的带限信号,用周期为 $T = 0.5 \times 10^{-3} \text{ s}$ 的周期冲激串分别对信号 $x(2t)$ 和 $x(t/2)$ 进行抽样,得到抽样信号。问能否由这样的抽样信号重构原信号,用简要概念解释原因。

【分析】 本题需要利用傅里叶变换的时频展缩特性分析信号的最高频率,并进一步应用抽样定理。

【解答】 $x(2t)$ 的最高频率为 2 kHz , 对应的奈奎斯特间隔为 $0.25 \times 10^{-3} \text{ s}$, 不能由 $T = 0.5 \times 10^{-3} \text{ s}$ 的抽样信号重构原信号。

$x(t/2)$ 的最高频率为 0.5 kHz , 对应的奈奎斯特间隔为 $1 \times 10^{-3} \text{ s}$, 可以由 $T = 0.5 \times 10^{-3} \text{ s}$ 的抽样信号重构原信号。

(4) 信号 $x(t) = \frac{\sin(10\pi t) \sin(50\pi t)}{\pi t^2}$, 求满足抽样定理的最低抽样频率。

【分析】 本题综合考查傅里叶变换的频域卷积定理和抽样定理。

【解答】 60 Hz 。

$$x(t) = 500\pi \frac{\sin(10\pi t) \sin(50\pi t)}{(10\pi t)(50\pi t)} \leftrightarrow 500\pi \frac{1}{2\pi} \frac{1}{10} G_{20\pi}(\omega) * \frac{1}{50} G_{100\pi}(\omega) = \frac{1}{2} G_{20\pi}(\omega) * G_{100\pi}(\omega)$$

$G_{100\pi}(\omega)$ 信号的最高频率为 $60\pi \text{ rad/s}$, 因此最低抽样频率为 60 Hz 。

(5) 已知信号 $x(t)$ 的最高频率为 $\omega_1 \text{ rad/s}$, 信号 $h(t)$ 的最高频率为 $\omega_2 \text{ rad/s}$, 若对信号 $y(t) = x(2t) * h(t)$ 进行理想抽样, 要满足从抽样后信号中将 $y(t)$ 完全恢复出来, 应选择的最大抽样间隔 $T_{\max}$ 是多少?

【分析】 本题需要利用傅里叶变换的时频展缩特性和时域卷积定理求信号的频率范围, 并进一步应用抽样定理确定抽样频率。

【解答】 $\frac{\pi}{\min\{2\omega_1, \omega_2\}}^\circ$

$x(2t)$ 的最高频率为 $2\omega_1$, $y(t) \leftrightarrow \frac{1}{2} X\left(j\frac{\omega}{2}\right) H(j\omega)$, 故 $y(t)$ 的最高频率 $\omega_3 = \min\{2\omega_1, \omega_2\}$,

因此对 $y(t)$ 进行无失真抽样的最大抽样间隔为

$$T_{\max} \leq \frac{\pi}{\omega_3} = \frac{\pi}{\min\{2\omega_1, \omega_2\}}$$

(6) $x(t)$ 是截止频率为 ω_2 的低频信号, 其频谱图如图 3-5-2 所示, 但其中 $\omega_1 < \omega < \omega_2$ 范围内的频谱已被噪声污染不可用。对 $x(t)$ 进行理想抽样, 若要完全保留 $0 < \omega < \omega_1$ 范围内的信息, 则抽样频率 ω_s 应满足什么条件? 简述原因。

【分析】 本题不能直接应用抽样定理, 而要具体分析抽样导致频谱周期延拓的情况, 根据题意, 要求 $0 < \omega < \omega_1$ 范围内的频谱不被混叠。

【解答】 以抽样频率 ω_s 抽样后, 信号频谱以 ω_s 为周期延拓, 第一组向右延拓分量的最低频率为 $\omega_s - \omega_2$, 为了不与要保留的信号分量混叠, 要求

$$\omega_s - \omega_2 \geq \omega_1$$

向左延拓的分量分析方法和结论相同。因此对抽样频率的要求为

$$\omega_s \geq \omega_1 + \omega_2$$

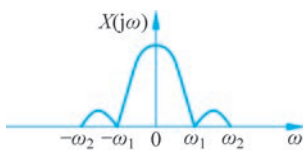


图 3-5-2

(7) 已知连续时间信号 $x(t) = \cos\left(60\pi t + \frac{\pi}{6}\right) - 3\cos\left(300\pi t + \frac{\pi}{5}\right)$, $x_s(t) =$

$x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t + nT)$, 其中 $T=0.005\text{s}$, 将抽样信号 $x_s(t)$ 通过频率响应为 $H(j\omega)$ 的理想

低通滤波器, $H(j\omega) = \begin{cases} T, & \omega < 200\pi \\ 0, & \omega > 200\pi \end{cases}$, 求输出 $y(t)$ 。

【分析】 本题中输入信号最高频率为 300π , 抽样频率为 400π , 因此输入信号中第二个余弦分量抽样后会发生频谱混叠。该频率分量经抽样后产生的频率分量为 $\pm 300\pi + k \cdot 400\pi$, 落在低通滤波器通带内的频率分量为 $\pm 100\pi$ 。注意, 100π 位置的谱线由原 -300π 位置的谱线周期延拓得到, -100π 位置的谱线由原 300π 位置的谱线周期延拓得到, 谱线位置的正负交换会引起信号的初始相位反向。

【解答】 $x_s(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t + nT)$

$$X_s(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[j(\omega - 400\pi k)]$$

故

$$Y(j\omega) = X_s(j\omega) * H(j\omega) = -3\pi e^{j\frac{\pi}{5}} \delta(\omega + 100\pi) - 3\pi e^{-j\frac{\pi}{5}} \delta(\omega - 100\pi) + \pi e^{-j\frac{\pi}{6}} \delta(\omega + 60\pi) + \pi e^{j\frac{\pi}{6}} \delta(\omega - 60\pi)$$

所以输出为

$$y(t) = \cos\left(60\pi t + \frac{\pi}{6}\right) - 3\cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{5}\right)$$

【题 3-5-5】 计算题

(1) 已知矩形脉冲信号 $G_\tau(t)$ 的脉冲宽度为 τ , 其频谱为 $\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$, 请根据傅里叶变换的对称性求出 $\text{Sa}(50t)$ 的傅里叶变换。

(2) 已知信号的时域表达式为 $\text{Sa}^2(50t)$, 请根据卷积定理确定信号的频带范围, 并画出其频谱。

(3) 根据时域抽样定理确定 $\text{Sa}^2(50t) + \sin(80t)$ 的最低抽样频率, 并说明理由。

【分析】 本题有两个关键。一是根据傅里叶变换的对称特性求辛格函数的频谱; 二

是抽样定理。

【解答】 (1) $G_{\tau}(t) \leftrightarrow \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \Rightarrow \text{Sa}(\omega_c t) \leftrightarrow \frac{\pi}{\omega_c} G_{2\omega_c}(\omega), \text{Sa}(50t) \leftrightarrow \frac{\pi}{50} G_{100}(\omega)$

(2) $\text{Sa}^2(50t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\pi}{50} G_{100}(\omega) \right] * \left[\frac{\pi}{50} G_{100}(\omega) \right] = \frac{\pi}{5000} 100 \Lambda_{200}(\omega) = \frac{\pi}{50} \Lambda_{200}(\omega)$

其频率范围为 $[-100, 100] \text{rad/s}$ 。

频谱如图 3-5-3 所示。

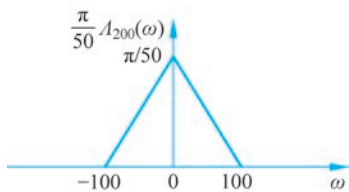


图 3-5-3

(3) $\text{Sa}^2(50t) + \sin(80t)$ 的最大频率为 100rad/s , 因此最低抽样频率为 200rad/s 。

【题 3-5-6】 计算题

(1) 已知矩形脉冲信号 $G_{\tau}(t)$ 的脉冲宽度为 τ , 其频谱为 $\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$, 请根据傅里叶变换的对称性求出

$\text{Sa}(10t)$ 的傅里叶变换。

(2) 已知信号的时域表达式为 $\text{Sa}^2(10t) + \sin(15t)$, 请根据卷积定理确定信号的频带范围, 并根据时域抽样定理确定最低抽样频率。

【分析】 本题需要根据基本的傅里叶变换对和傅里叶变换的性质求信号的频谱, 并进一步应用抽样定理确定抽样频率。

【解答】 (1) $G_{\tau}(t) \leftrightarrow \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \Rightarrow \text{Sa}(\omega_c t) \leftrightarrow \frac{\pi}{\omega_c} G_{2\omega_c}(\omega), \text{Sa}(10t) \leftrightarrow \frac{\pi}{10} G_{20}(\omega)$

(2) $\text{Sa}^2(10t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\pi}{10} G_{20}(\omega) \right] * \left[\frac{\pi}{10} G_{20}(\omega) \right] = \frac{\pi}{200} 20 \Lambda_{40}(\omega) = \frac{\pi}{10} \Lambda_{40}(\omega)$

频谱如图 3-5-4 所示。

其最高角频率为 20rad/s ; $\sin(15t)$ 的角频率为 15rad/s , 所以 $\text{Sa}^2(10t) + \sin(15t)$ 的最高角频率为 20rad/s , 最低抽样频率为 $f = 2 \cdot \frac{20}{2\pi} = \frac{20}{\pi} \text{Hz}$ 。

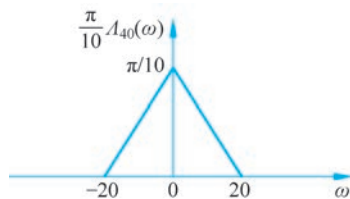


图 3-5-4

【题 3-5-7】 作图题

已知 $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$ 的频谱分别如图 3-5-5(a)、(b) 所示, 试画出 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t)\delta\left(t - n\frac{\pi}{5}\right)$ 的频谱图。

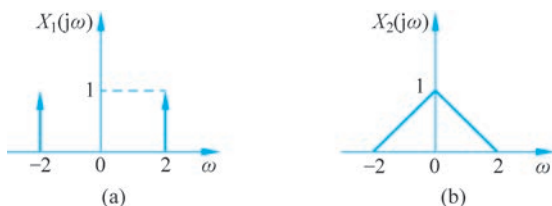


图 3-5-5

【分析】 本题考查傅里叶变换的性质,具体包括:①频域卷积定理;②时域抽样造成频谱的周期延拓。

【解答】 $x_1(t)x_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}X_1(\omega) * X_2(\omega)$

$$x_1(t)x_2(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{2\pi}X_1(\omega) * X_2(\omega) \right] *$$

$$\omega_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s)$$

$$T = \frac{\pi}{5} \Rightarrow \omega_s = 10$$

频谱图如图 3-5-6 所示。

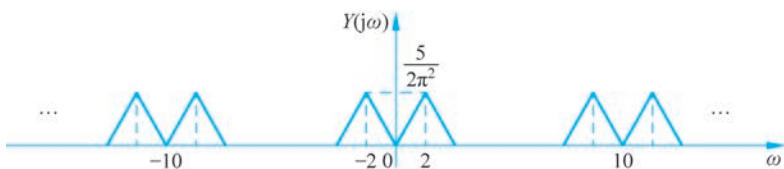


图 3-5-6

【题 3-5-8】 计算及画图题

图 3-5-7(a)所示的系统使用开关电路实现信号调制。已知 $x(t)$ 的频谱如图 3-5-7(b)所示, $p_T(t)$ 为周期脉冲串(开关信号), 波形如图 3-5-7(c)所示, 其角频率 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ 且 $\omega_0 > 2\omega_m$; 滤波器为理想的频率选择滤波器(通带幅度恒为 1, 阻带幅度恒为 0)。

- (1) 求 $x_s(t)$ 的频谱并绘制示意图。
- (2) 若希望 $y(t) = Kx(t)\cos(\omega_0 t)$, 应采用何种频率选择性滤波器? 给出其通带截止频率。
- (3) 当滤波器满足第(2)问要求时, 求调制信号的放大系数 K 。
- (4) 若 $x(t)$ 是能量为 E 的能量有限信号, τ 应如何取值, 才能使输出信号 $y(t)$ 的能量最大。

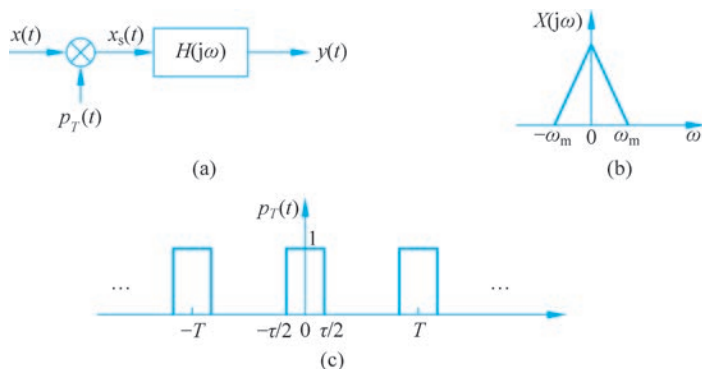


图 3-5-7

【分析】 $p_T(t)$ 是周期脉冲串, 具有离散的频谱, 其频谱包络具有辛格函数形式, $x_s(t)$ 是 $x(t)$ 被周期脉冲串抽样后的信号, 在满足抽样定理的条件下, 抽样同样造成其频谱的周期性搬移, 但搬移到不同谐波频率上的频谱幅度有不同程度的缩放。 $x_s(t)$ 同时含有基波和各次谐波分量, 而本题只希望输出一谐波分量, 因此需要采用带通滤波器。

【解答】 (1) $p_T(t) \leftrightarrow \omega_0 \delta_{\omega_0}(\omega) \tau \text{Sa}\left(\frac{\tau\omega}{2}\right) = \omega_0 \tau \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{k\tau\omega_0}{2}\right) \delta(\omega - k\omega_0)$

$$x_s(t) = x(t)p_T(t)$$

$$\begin{aligned} X_s(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * \omega_0 \tau \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{k\tau\omega_0}{2}\right) \delta(\omega - k\omega_0) \\ &= \frac{\tau}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{k\tau\omega_0}{2}\right) X[j(\omega - k\omega_0)] \end{aligned}$$

频谱图如图 3-5-8 所示。

(2) 采用带通滤波器, 上下截止频率分别满足

$$\omega_m \leq \omega_{c1} \leq \omega_0 - \omega_m, \quad \omega_0 + \omega_m \leq \omega_{c2} \leq 2\omega_0 - \omega_m$$

频谱图如图 3-5-9 所示。

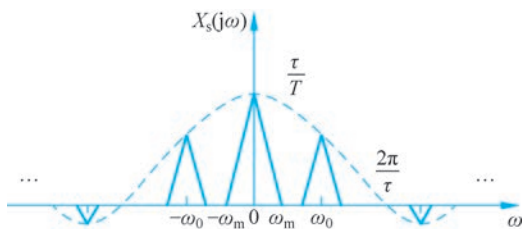


图 3-5-8

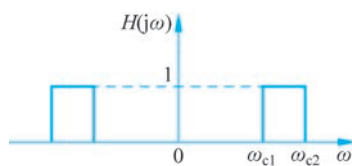


图 3-5-9

(3) 当带通滤波器满足(2)要求时

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= \frac{\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{\tau\omega_0}{2}\right) X[j(\omega - \omega_0)] + \frac{\tau}{T} \text{Sa}\left(-\frac{\tau\omega_0}{2}\right) X[j(\omega + \omega_0)] \\ &= 2 \frac{\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{\tau\omega_0}{2}\right) \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \\ y(t) &= 2 \frac{\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{\tau\omega_0}{2}\right) x(t) \cos(\omega_0 t) \end{aligned}$$

故

$$K = 2 \frac{\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{\tau\omega_0}{2}\right)$$

(4) 根据帕塞瓦尔定理, $y(t)$ 的能量为 $\frac{1}{2} K^2 E$, 当 K 取最大值时, $y(t)$ 的能量最大。

$$K = 2 \frac{\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{\tau\omega_0}{2}\right) = 2 \frac{\tau}{T} \frac{\sin\left(\frac{\tau\omega_0}{2}\right)}{\frac{\tau\omega_0}{2}} = \frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{\tau\omega_0}{2}\right)$$

由于 $\tau < T$, 故 $\frac{\tau\omega_0}{2} < \pi$, 当 $\frac{\tau\omega_0}{2} = \frac{\pi}{2}$ 时 K 取最大值, 此时 $\tau = \frac{\pi}{\omega_0} = \frac{T}{2}$ 。

【题 3-5-9】 计算及画图题

已知信号 $x(t) = \sum_{n=1}^5 \frac{1}{2n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}t\right)$, 若以 $T = 0.4\text{s}$ 为间隔进行冲激串抽样, 得到 $x_s(t)$ 。

(1) 画出 $x_s(t)$ 的频谱图。

(2) 此抽样是否会发生频谱混叠? 为什么?

(3) 将 $x_s(t)$ 通过一截止频率为 $\frac{\pi}{T}$ 、通带增益为 T 的理想低通滤波器, 求输出 $y(t)$ 。

【分析】 本题考查抽样定理。被抽样的信号是周期信号, 题干中以傅里叶级数展开的形式给出其表达式, 因此可直接读出其最高频率为 $\frac{5\pi}{2}$, 该频率的分量为 $x_5(t) = \frac{1}{10} \sin\left(\frac{5\pi}{2}t\right)$ 。当以 $T_s = 0.4\text{s}$ 进行抽样时, 该分量的抽样信号为 $x_5(nT_s) = \frac{1}{10} \sin(n\pi) = 0$, 这是频谱混叠造成的。

【解答】 (1) $x(t) = \sum_{n=1}^5 \frac{1}{2n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}t\right)$; $\omega_s = \frac{2\pi}{0.4} = 5\pi \text{ rad/s}$

频谱图如图 3-5-10 所示。

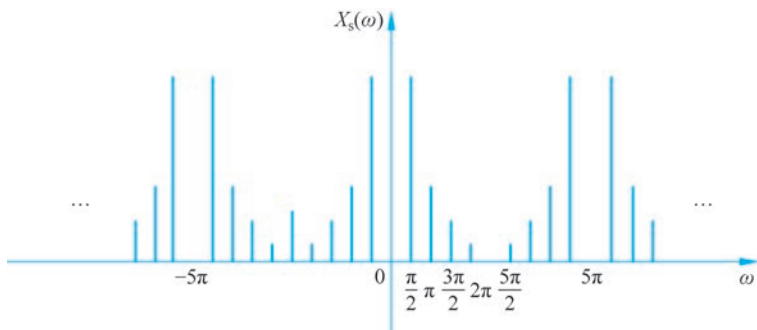


图 3-5-10

(2) 信号的最高频率为 $\frac{5\pi}{2} \text{ rad/s}$, 而抽样角频率 $\omega_s = \frac{2\pi}{0.4} = 5\pi \text{ rad/s}$, 信号的最高频率分量处频谱混叠。

(3) 滤波频率为 $\frac{\pi}{0.4} = \frac{5\pi}{2} \text{ rad/s}$, 增益为 T , 输出为

$$y(t) = \sum_{n=1}^4 \frac{1}{2n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}t\right)$$

【题 3-5-10】 计算及画图题

已知系统框图如图 3-5-11(a) 所示, 信号 $x(t) = \cos(2\pi t)$, $p(t) = \delta(\sin t)$, $h(t)$ 如

图 3-5-11(b)所示。

(1) 试求信号 $p(t)$ 的频谱 $P(j\omega)$, 并画出其频谱图。

(2) 试求系统输出信号 $y(t)$, 并画出其时域波形图。

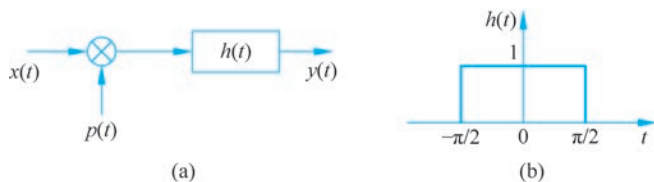


图 3-5-11

【分析】 本题需要根据单位冲激函数的定义将 $p(t)$ 转化为周期冲激串, 从而将图 3-5-11 所示系统转化为理想冲激串抽样。注意, 本题中待抽样的原信号是单频信号, 并且其频率与抽样频率不具有整数倍关系。

【解答】 (1) 根据冲激函数的定义可以证明

$$p(t) = \delta(\sin t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\pi)$$

因此 $P(j\omega) = \omega_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s)$, 其中 $\omega_s = \frac{2\pi}{T} = 2$ 。

频谱图如图 3-5-12 所示。

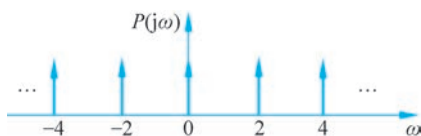


图 3-5-12

(2) 由于 $X(j\omega) = \pi[\delta(\omega + 2\pi) + \delta(\omega - 2\pi)]$; $p(t)x(t) \leftrightarrow \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[j(\omega - 2k)]$, 其中位于低通滤波器通带范围内的谱线仅有两根, 频率分别是 $\omega_1 = 2\pi - 6$ 和 $\omega_2 = -2\pi + 6$, 其幅度均为 1, 于是 $y(t) = 2\cos[(2\pi - 6)t]$ 。

波形图如图 3-5-13 所示。

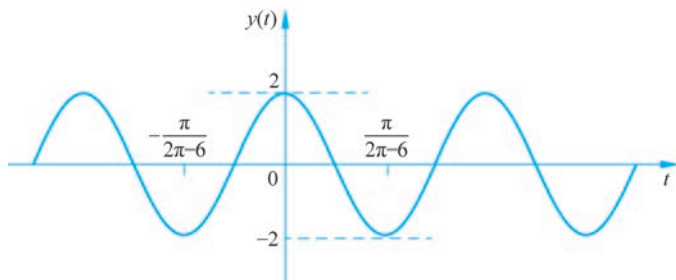


图 3-5-13

考点6 频域分析综合应用

本节考点：主要考查利用傅里叶变换分析和求解信号与系统，重点是信号与其频谱互求，将信号的无失真传输和滤波，周期信号频谱特点和抽样概念、原理融合在一起，对实际线性时不变系统进行分析和求解。

【题 3-6-1】 计算及画图题

某线性系统如图 3-6-1 所示，试求：

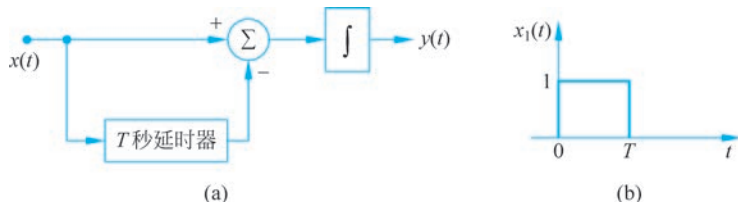


图 3-6-1

- (1) 系统的频率响应 $H(j\omega)$ ，并画出幅频特性和相频特性曲线；
- (2) 当输入信号 $x_1(t)$ 是图 3-6-1(b) 所示宽度为 T 的矩形脉冲时，求系统响应 $y(t)$ ，并画出波形图；
- (3) 当输入信号 $x_2(t)$ 为一个周期为 T 的周期信号时，求系统响应 $y(t)$ 。

【分析】 将输入信号设置为单位冲激信号，可求得该系统的单位冲激响应，进而求得其频率特性。本题的单位冲激响应为门信号，因此由时域求第(2)问的输出更便捷。对于第(3)问，可将输入信号直接代入系统，周期为 T 的信号将在加法器中被对消，这个现象也可从频域考查，周期为 T 的信号所含的频率分量都是 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ 的整数倍，而系统在这些频率上的响应都为 0。

【解答】 (1) $h(t) = [\delta(t) - \delta(t-T)] * u(t) = u(t) - u(t-T) = G_T\left(t - \frac{T}{2}\right)$

$$H(j\omega) = T \text{Sa}\left(\frac{T\omega}{2}\right) e^{-j\frac{T}{2}\omega}$$

频谱图如图 3-6-2 所示。

$$(2) y(t) = x_1(t) * h(t) = G_T\left(t - \frac{T}{2}\right) * G_T\left(t - \frac{T}{2}\right) = T\Lambda_{2T}(t - T)$$

波形图如图 3-6-3 所示。

(3) 方法一：

$$y(t) = [x(t) - x(t-T)] * u(t)$$

由于 $x_2(t)$ 是以 T 为周期的信号， $x_2(t) - x_2(t-T) = 0$ ，故 $y(t) = 0$ 。

方法二：

由于 $x_2(t)$ 是以 T 为周期的信号，所含的频率分量都是 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ 的整数倍，由于

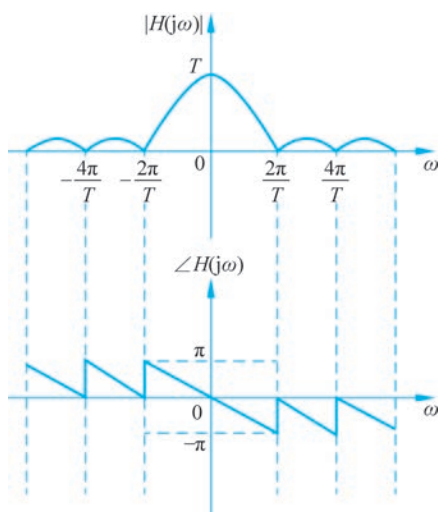


图 3-6-2

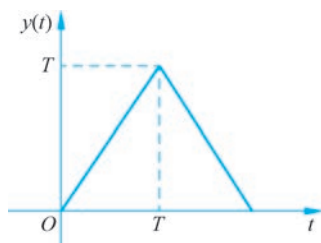


图 3-6-3

$$H(jk\omega_0) = T \text{Sa}\left(\frac{Tk\omega_0}{2}\right) e^{-j\frac{T}{2}k\omega_0} = T \text{Sa}(k\pi) e^{-jk\pi} = 0$$

因此

$$Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega) = 0$$

$$y(t) = 0$$

【题 3-6-2】 计算及画图题

理想微分器的输入信号 $x(t)$ 和输出信号 $y(t)$ 服从微分方程:

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

(1) 求理想微分器的频率特性 $H_1(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$, 并绘制其幅频和相频特性曲线。

(2) 工程上常用系统 S_2 (图 3-6-4) 近似实现微分器, 其中放大倍数 $K > 0$ 。建立 S_2 系统输入信号 $x(t)$ 和输出信号 $y(t)$ 的时域关系, 并求系统的频率特性 $H_2(j\omega)$ 。

(3) 求理想微分器和近似微分器的频率特性之比 $R(\omega) = \frac{H_2(j\omega)}{H_1(j\omega)}$, 若要使 $\lim_{\omega \rightarrow 0} R(\omega) = 1$, 对参数 T 和 K 有何要求?

(4) 在第(3)问导出的参数约束下, 为使 S_2 系统对 $x(t)$ 近似实现微分器功能, 对 $x(t)$ 的频谱特性有何要求? (说明: ① 当 $0.9 \leq \left| \frac{H_2(j\omega)}{H_1(j\omega)} \right| \leq 1$ 时, 可以认为 S_2 系统近似

实现了微分器功能。② 记 $\text{Sa}(x) = \frac{\sin x}{x}$, 有 $\text{Sa}(0.8) \approx 0.9$ 。

【分析】 本题从时域方面给出了系统的描述, 解答时可先写出输入/输出的时域关系, 然后转换到频域, 从而得到系统的时域特性。

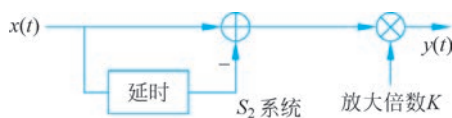


图 3-6-4

【解答】 (1) $H_1(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = j\omega$

幅频和相频特性图如图 3-6-5 所示。

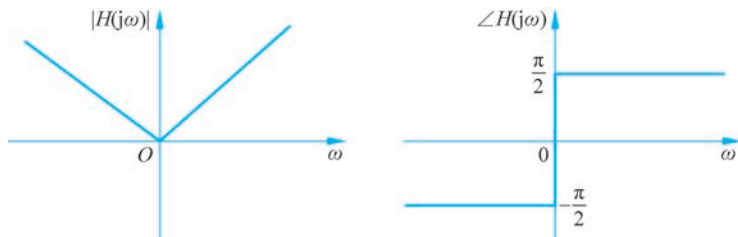


图 3-6-5

(2) 时域关系

$$y(t) = K(x(t) - x(t - T))$$

由时域关系知系统是稳定的,故频率特性 $H_2(j\omega) = K(1 - e^{-j\omega T})$

进一步可将频率特性写成

$$H_2(j\omega) = K(1 - e^{-j\omega T}) = K e^{-j\omega T/2} (e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}) = 2jK e^{-j\omega T/2} \sin(\omega T/2)$$

$$(3) \quad R(\omega) = \frac{H_2(j\omega)}{H_1(j\omega)} = \frac{2jK e^{-j\omega T/2} \sin(\omega T/2)}{j\omega} = 2K e^{-j\omega T/2} \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega}$$

$$= KT e^{-j\omega T/2} \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} = KT e^{-j\omega T/2} \text{Sa}(\omega T/2)$$

因为

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} R(\omega) = KT$$

所以

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} R(\omega) = 1, \quad \text{要求 } KT = 1。$$

(4) 在 $KT=1$ 的条件下,有

$$\frac{H_2(j\omega)}{H_1(j\omega)} = e^{-j\omega T/2} \text{Sa}(\omega T/2)$$

故

$$\left| \frac{H_2(j\omega)}{H_1(j\omega)} \right| = |\text{Sa}(\omega T/2)|$$

根据题意,为使 $0.9 \leq \left| \frac{H_2(j\omega)}{H_1(j\omega)} \right| \leq 1$, 要求 $|\omega T/2| \leq 0.8$, 即 $|\omega| \leq \frac{1.6}{T}$ 。

因此,当 $x(t)$ 为带限于 $|\omega| \leq \frac{1.6}{T}$ 的低频信号时,可通过 S_2 系统实现近似的微分。

【题 3-6-3】 计算题

如图 3-6-6 所示系统, 其中输入信号 $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_2(t-8n)$, $\delta_T(t)$ 为 $T=1$ 的周期冲激串, $h_1(t) = \text{Sa}(\pi t)$, $h_2(t) = 3\text{Sa}(3\pi t)$, 试求:

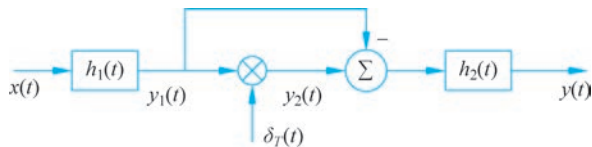


图 3-6-6

- (1) $x(t)$ 的频谱 $X(j\omega)$, 并画出其频谱图。
- (2) $y_1(t)$ 的频谱 $Y_1(j\omega)$, 并画出其频谱图。
- (3) $y_1(t)$ 经过理想冲激串抽样后是否会发生频谱混叠? 为什么?
- (4) 画出 $y(t)$ 的频谱的示意图, 并指明信号 $y(t)$ 与信号 $y_1(t)$ 的关系。

【分析】 $x(t)$ 是脉宽为 2、周期为 8 的周期脉冲串, 具有离散的频谱; $h_1(t)$ 为一个理想低通滤波器的单位冲激响应, 其截止频率为 π , 因此 $y_1(t)$ 仅包含 $x(t)$ 的部分低频频率分量。由于 $y_1(t)$ 的最高频率分量的频率小于或等于滤波器 $h_1(t)$ 的截止频率, 因此对其无失真抽样要求抽样频率大于或等于 2π , 而 $\delta_T(t)$ 满足这一要求。

【解答】 (1) $\omega_0 = 2\pi/T = \pi/4 \text{ rad/s}$, $\frac{E\tau}{T} = \frac{1}{4}$, $\omega_0\tau = \frac{2\pi}{T}\tau = \frac{\pi}{2}$

$$x(t) = \frac{E\tau}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{k\omega_0\tau}{2}\right) e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{4} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{k\pi}{4}\right) e^{jk\frac{\pi}{4}t}$$

$$X(j\omega) = \frac{\pi}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{k\pi}{4}\right) \delta\left(\omega - \frac{\pi}{4}k\right)$$

频谱图如图 3-6-7 所示。

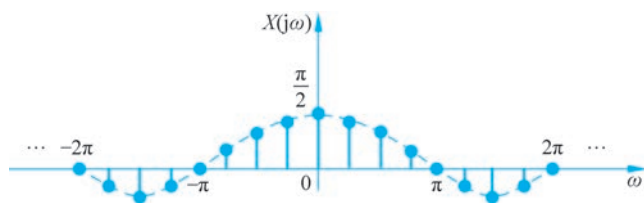


图 3-6-7

$$(2) \text{Sa}(\pi t) \leftrightarrow G_{2\pi}(\omega)$$

故

$$H_1(j\omega) = G_{2\pi}(\omega)$$

注意, 在截止频率处

$$X(j\omega)|_{\omega=\pm\pi} = 0$$

$$Y_1(j\omega) = \frac{\pi}{2} \sum_{k=-3}^3 \text{Sa}\left(\frac{k\pi}{4}\right) \delta\left(\omega - \frac{\pi}{4}k\right)$$

频谱图如图 3-6-8 所示。

(3) $\delta_T(t)$ 的抽样频率为 2π , 满足抽样定理; 因此 $y_1(t)$ 经过理想冲激串抽样后不会发生频谱混叠。

$$(4) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \leftrightarrow \omega_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s);$$

$$Y_2(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y_1(\omega - k\omega_s)$$

本题中 $T=1, \omega_s=2\pi$, 因此

$$Y_2(j\omega) = Y_1(j\omega) + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} Y_1(\omega - 2\pi k)$$

而

$$h_2(t) = 3\text{Sa}(3\pi t), H_2(j\omega) = G_{6\pi}(\omega); Y(j\omega) = Y_1(\omega - 2\pi) + Y_1(\omega + 2\pi)$$

频谱图如图 3-6-9 所示。

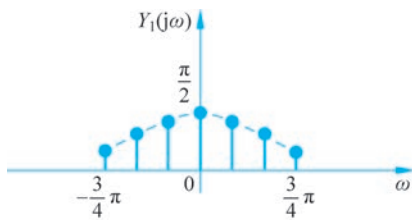


图 3-6-8

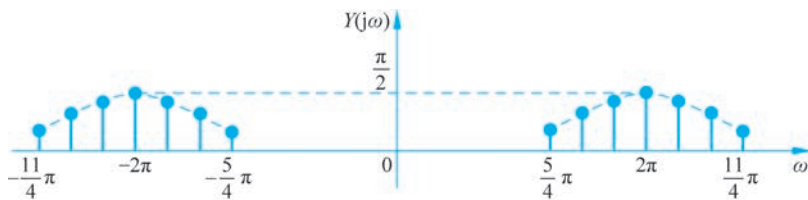


图 3-6-9

因此

$$y(t) = 2y_1(t) \cos(2\pi t)$$

【题 3-6-4】 计算题

周期矩形脉冲信号 $x(t)$ 的波形如图 3-6-10(a) 所示, 参数 $\tau=0.5\text{s}, T=1\text{s}$ 。

(1) 写出 $x(t)$ 的指数形式的傅里叶级数展开式。

(2) $x(t)$ 的基波频率为多少?

(3) $x(t)$ 的基波幅度与三次谐波幅度之比为多少?

(4) 如图 3-6-10(b) 所示的 RL 电路, 其输入电压为图所示的周期矩形脉冲信号 $x(t)$, 求电流 $i(t)$ 。

【分析】 本题前 3 问考查矩形脉冲串的傅里叶级数展开。傅里叶级数展开提供了采用单频信号 $e^{jk\omega_0 t}$ 合成周期信号的方法, 而系统的频率特性又描述了单频信号通过系统后的幅度和相位变化, $e^{jk\omega_0 t} \rightarrow H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$, 由此可求解第(4)问。注意第(4)问只能通过傅里叶级数展开的形式描述输出信号, 不需要进一步化简。

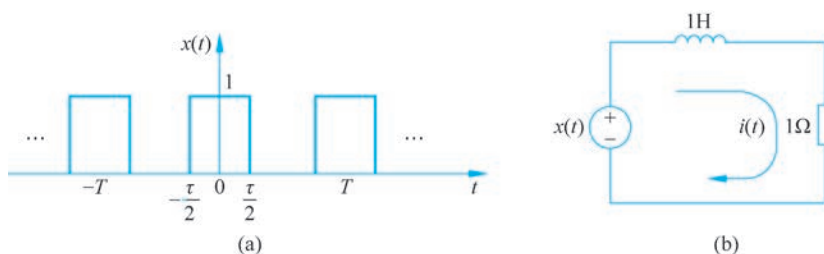


图 3-6-10

【解答】 (1) $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \text{ rad/s}$, $\frac{E\tau}{T} = \frac{1}{2}$, $\omega_0 \tau = \frac{2\pi}{T} \tau = \pi$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{E\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{k\omega_0\tau}{2}\right) e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{k\pi}{2}\right) e^{j2k\pi t}$$

(2) $f_0 = 1/T = 1 \text{ Hz}$

$$(3) X_k = \frac{1}{2} \text{Sa}\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \frac{1}{k\pi} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \Rightarrow X_1 = \frac{1}{\pi}, X_3 = -\frac{1}{3\pi} \Rightarrow \left| \frac{X_1}{X_3} \right| = 3$$

$$(4) H(j\omega) = \frac{1}{R+j\omega L} = \frac{1}{1+j\omega}, H(jk\omega_0) = \frac{1}{1+j2k\pi}$$

$$i(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{k\pi}{2}\right) \frac{1}{1+j2k\pi} e^{j2k\pi t}$$

【题 3-6-5】 计算及画图题

如图 3-6-11(a)所示的系统中,分系统 1 的单位冲激响应为 $h_1(t) = 3 \left[\frac{\sin(1.5\pi t)}{1.5\pi t} \right]^2$,

分系统 2 的单位冲激响应为 $h_2(t) = \frac{\sin(4\pi t)}{\pi t}$ 。

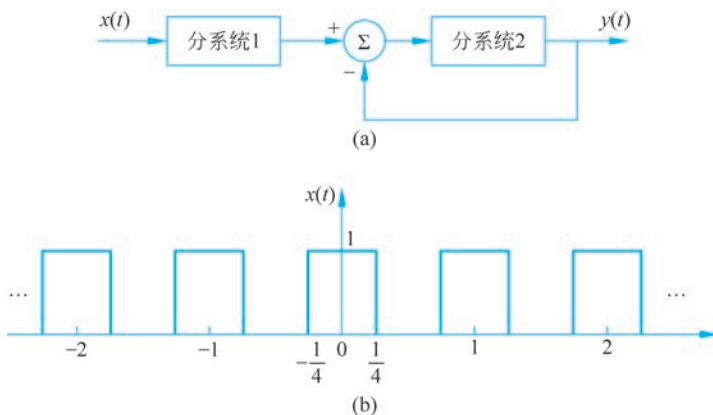


图 3-6-11

(1) 求系统的频率响应 $H(j\omega)$ 并画出简图。

(2) 当输入为图 3-6-11(b)所示周期方波时,求输出信号 $y(t)$ 。

【分析】 本题第(1)问通过基本的傅里叶变换对性质、频域卷积定理、梅森公式等求

得系统的频率响应。第(2)问通过傅里叶级数展开分析输入信号的频率分量,通过系统的频率特性求得每个频率分量对应的输出,本题输入信号中只有直流和基波分量能通过系统,因此输出信号的形式较为简单。

【解答】 (1) $h_1(t) = 3 \left[\frac{\sin(1.5\pi t)}{1.5\pi t} \right]^2 = 3\text{Sa}^2(1.5\pi t)$

$$\leftrightarrow H_1(j\omega) = \frac{3}{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{1.5} G_{3\pi}(\omega) \right) * \left(\frac{1}{1.5} G_{3\pi}(\omega) \right) = 2\Lambda_{6\pi}(\omega)$$

$$h_2(t) = 4\text{Sa}(4\pi t) \leftrightarrow H_2(j\omega) = G_{8\pi}(\omega)$$

$$H_2(j\omega) = G_{8\pi}(\omega) \Rightarrow \frac{H_2(j\omega)}{1 + H_2(j\omega)} = \frac{1}{2} G_{8\pi}(\omega)$$

$$H(j\omega) = H_1(j\omega) \frac{H_2(j\omega)}{1 + H_2(j\omega)} = 2\Lambda_{6\pi}(\omega) \cdot \frac{1}{2} G_{8\pi}(\omega) = \Lambda_{6\pi}(\omega)$$

频率响应如图 3-6-12 所示。

(2) 输入信号的周期为 1, 则 $\omega_0 = 2\pi$, 且为偶对称信号,

$$b_k = 0$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt = \frac{1}{2}$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cos(k\omega_0 t) dt = \text{Sa}\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

故有

$$x(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{k\pi}{2}\right) \cos(2k\pi t)$$

因 $\omega_0 = 2\pi$, 故信号通过如图 3-6-12 所示的滤波器后, 输出只有直流分量和基波分量, 且有

$$H(j\omega) \big|_{\omega_0=0} = 1, H(j\omega) \big|_{\omega_0=2\pi} = \frac{1}{3}$$

因而输出为

$$x(t) = 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \text{Sa}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos 2\pi t = \frac{1}{2} + \frac{2}{3\pi} \cos 2\pi t$$

【题 3-6-6】 计算及画图题

某抽样及恢复系统如图 3-6-13(a) 所示, 参数 $T=1$, 信号 $x(t)$ 的频谱如图 3-6-13(b) 所示。

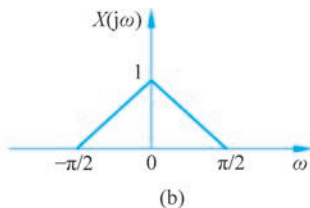
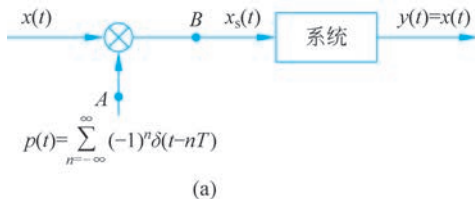


图 3-6-13

(1) 求 A 、 B 两处信号的频谱并画出频谱图。

(2) 设计合适的系统,使 $x_s(t)$ 通过该系统后能恢复原来的信号 $x(t)$ 。

【分析】 本题所用的抽样信号可以视为两个周期冲激串的线性叠加:以 $2T$ 为周期的周期冲激串和该冲激串时延 T 并且幅度取反。这两个周期冲激串的基波频率都是 π/T ,其叠加后偶次谐波被抵消。因此被该抽样信号抽样后,原信号的频谱被搬移到 π/T 的奇数倍频率处。为恢复原信号,首先要进行频谱搬移,再进行低通滤波。

【解答】 (1) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) \leftrightarrow \omega_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s)$, 其中 $T_0 = 2T, \omega_s = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{\pi}{T}$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0 - T) \leftrightarrow \omega_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s) e^{-jk\omega T}$$

其中, $\delta(\omega - k\omega_s) e^{-jk\omega T} = \delta(\omega - k\omega_s) e^{-jk\omega_s T} = \delta(\omega - k\omega_s) e^{-jk\pi} = (-1)^k \delta(\omega - k\omega_s)$

$$(-1)^n \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \leftrightarrow 2\omega_s \sum_{k \text{ 为奇数}} \delta(\omega - k\omega_s), \omega_s = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{\pi}{T}, T = 1$$

$$(-1)^n \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n) \leftrightarrow 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[\omega - (2k+1)\pi]$$

$$X_s(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[\omega - (2k+1)\pi] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[j\omega - j(2k+1)\pi]$$

频谱图如图 3-6-14 所示。

(2) $y(t) = [x_s(t) \cos \pi t] * h(t) = x(t)$

系统框图如图 3-6-15 所示。

其中, $\omega_0 = \pi, H(j\omega) = G_{\omega_c}(\omega), \frac{\pi}{2} < \omega_c < \frac{3\pi}{2}$ 。

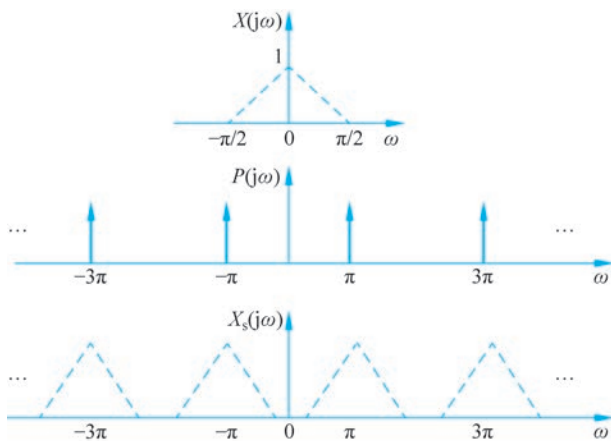


图 3-6-14



图 3-6-15

【题 3-6-7】 计算及画图题

在图 3-6-16(a) 所示系统中, 抽样脉冲 $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \delta(t - \frac{1}{2}n)$, 输入信号

$x(t)$ 的频谱 $X(j\omega)$ 及理想带通滤波器的频率响应 $H(j\omega)$ 分别如图 3-6-16(b)、(c) 所示。

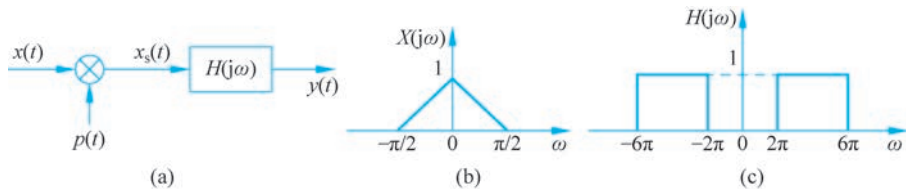


图 3-6-16

(1) 求抽样脉冲 $p(t)$ 的频谱 $P(j\omega)$, 并画出其频谱图。

(2) 分别画出图 3-6-16(a) 中 $x_s(t)$ 和 $y(t)$ 的频谱 $X_s(j\omega)$ 和 $Y(j\omega)$ 。

(3) 试确定一个能从 $y(t)$ 中恢复出原信号 $x(t)$ 的系统。

【分析】 本题与题 3-6-6 类似, 抽样信号也是正负交替的周期冲激串, 本题将提供另一种求正负交替的周期冲激串的频谱的思路。另外, 本题中抽样后的信号经过了带通滤波环节, 恢复原信号时, 需由两个半边频谱搬移拼接, 才能得到原信号的频谱。

【解答】 (1) 正负交替的周期冲激串可视为周期冲激串与余弦信号的乘积。

$$p(t) = \cos(2\pi t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{1}{2}n\right), \omega_s = \frac{2\pi}{T} = 4\pi$$

$$\begin{aligned} P(j\omega) &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 4\pi k - 2\pi) + 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 4\pi k + 2\pi) \\ &= 4\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[\omega - 2\pi(2k + 1)] \end{aligned}$$

频谱图如图 3-6-17 所示。

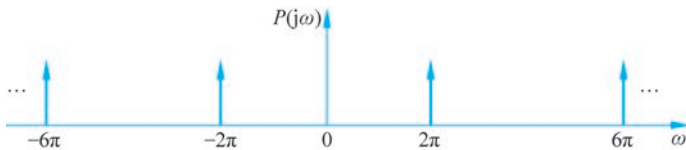


图 3-6-17

$$(2) X_s(j\omega) = \frac{1}{2\pi} P(j\omega) * X(j\omega) = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\{j[\omega - 2\pi(2k + 1)]\}$$

频谱图如图 3-6-18 所示。

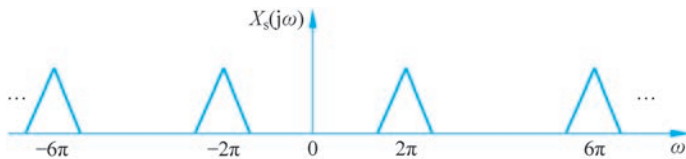


图 3-6-18

$$Y(j\omega) = X_s(j\omega) H(j\omega)$$

频谱图如图 3-6-19 所示。

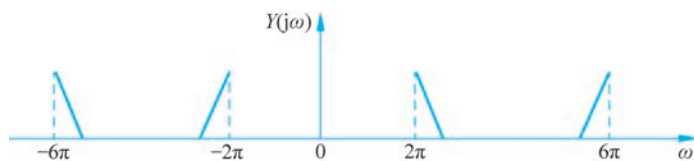


图 3-6-19

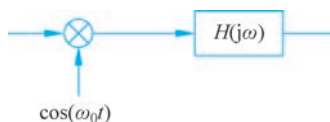


图 3-6-20

$$(3) x_2(t) = [y(t) \cos 2\pi t] * h(t)$$

系统框图如图 3-6-20 所示。

其中, $\omega_0 = 2\pi$, $H(j\omega) = G_{\omega_c}(\omega)$, $\frac{\pi}{2} < \omega_c < \frac{7\pi}{2}$ 。

【题 3-6-8】 计算题

如图 3-6-21(a) 所示系统, 输入 $x(t)$ 为带限信号, 即 $X(j\omega) = 0, |\omega| \geq \omega_m$, $x_T(t)$ 为如图 3-6-21(b) 所示的周期信号。令系统输出为 $y(t)$, 试求: 当 $\tau = \frac{T}{2}$ 时, 根据 ω_m 确定可由 $y(t)$ 恢复 $x(t)$ 的最大值 T 值, 并以此确定一个由 $y(t)$ 恢复 $x(t)$ 的系统。

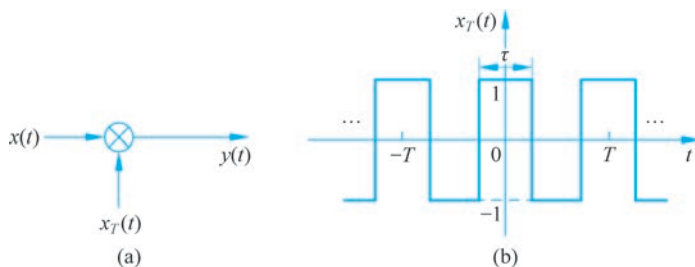


图 3-6-21

【分析】 $x_T(t)$ 是周期脉冲串, 具有离散的频谱, 其频谱包络具有辛格函数形式, 并且该信号的偶次谐波分量为 0。 $y(t)$ 是 $x(t)$ 被 $x_T(t)$ 抽样后的信号, 抽样造成其频谱的周期性搬移, 搬移到不同谐波频率上的频谱, 幅度有不同程度的缩放。由于 $x_T(t)$ 没有偶次谐波分量, 因此只要搬移到奇次谐波频率处的频谱不发生混叠, 原信号的频谱信息就被保留。但由于 $x_T(t)$ 没有直流分量, 调制后的信号没有基带分量, 因此不能通过线性时不变系统由 $y(t)$ 恢复 $x(t)$ 。

【解答】 $x_T(t)$ 的周期为 T , 基频为 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, 其谱线位于 $\omega = k\omega_0$ 处。注意, $x_T(t)$ 为半波像对称信号, 偶次谐波为 0, 只有奇次谐波分量, 因此相邻谱线的间隔为 $2\omega_0$ 。

当 $\omega_0 > \omega_m$ 时, 信号调制不会造成频谱混叠。因此

$$T < \frac{2\pi}{\omega_m}$$

$y(t)$ 不含 $x(t)$ 的频率分量, 不能通过线性时不变系统由 $y(t)$ 恢复 $x(t)$, 必须采用具有频谱搬移功能的非线性系统。例如, 采用

$$y_2(t) = y(t)x_T(t)$$

注意, $x_T(t)x_T(t)=1$, 于是, $y_2(t)=y(t)x_T(t)=x(t)x_T(t)x_T(t)=x(t)$ 。

说明: 本题还可采用 $\cos((2k+1)\omega_0 t)$ 作为调制信号, 将第 $2k+1$ 次谐波分量搬回基带, 并连接一个低通滤波器, 滤除其他谐波分量; 或者先通过带通滤波器选通需要的谐波分量, 再通过解调将其搬回基带。

【题 3-6-9】 计算及画图题

某因果 LTI 系统如图 3-6-22 所示, 已知输入信号 $x(t)=\frac{1}{8}\text{Sa}\left(\frac{\pi}{8}t\right)$, 抽样周期信号

$$\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT), T=4, \text{滤波器的单位冲激响应 } h(t)=4\Lambda_4(t)。$$

(1) 求抽样后信号 $x_s(t)$ 的频谱 $X_s(j\omega)$ 。

(2) 在 $-\pi<\omega<\pi$ 区间画出 $Y(j\omega)$ 。

(3) 设计一个合适的滤波器, 由 $y(t)$ 恢复原

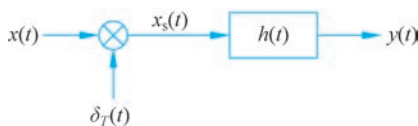


图 3-6-22

输入信号 $x(t)=\frac{1}{8}\text{Sa}\left(\frac{\pi}{8}t\right)$ 。

【分析】 本题采用理想冲激串抽样, 抽样信号的频谱是原信号频谱的周期延拓。滤波器的单位冲激响应具有门信号卷积的形式, 因此其频谱应为辛格函数的平方。在恢复原信号时, 需要补偿滤波器造成的幅度变化。

【解答】 (1) $x(t)=\frac{1}{8}\text{Sa}\left(\frac{\pi}{8}t\right)\leftrightarrow G_{\frac{\pi}{4}}(\omega)$

$$X_s(j\omega)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X[j(\omega-k\omega_s)], \quad T=4, \quad \omega_s=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{2}$$

(2) $h(t)=4\Lambda_4(t)=2G_2(t)*G_2(t); H(j\omega)=8\text{Sa}^2(\omega)$

$$Y(j\omega)=X_s(j\omega)H(j\omega)=2\sum_{k=-\infty}^{\infty}X[j(\omega-k\omega_s)]\text{Sa}^2(\omega)$$

频谱图如图 3-6-23 所示。

(3) 由第(2)问可知, 恢复原信号需要滤除 $y(t)$ 中 $|\omega|\geq\frac{3\pi}{8}$ 的频率分量, 并补偿 $|\omega|\leq\frac{\pi}{8}$ 频率范围内的幅度不平衡。

因此

$$H(j\omega)=\begin{cases} \frac{1}{2\text{Sa}^2(\omega)}, & |\omega|\leq\omega_c, \quad \frac{\pi}{8}<\omega_c<\frac{3\pi}{8} \\ 0, & |\omega|>\omega_c \end{cases}$$

【题 3-6-10】 计算题

如图 3-6-24 所示系统, 已知 $x(t)=\left(\frac{\sin 2\pi t}{2\pi t}\right)^2$, $\delta_T(t)$ 是周期为 T 的冲激串。

(1) 求 $X(j\omega)$ 和 $Y(j\omega)$ 。

(2) 为了由 $y(t)$ 恢复原信号 $x(t)$, 试确定 T 的最大值 $T_{\max}$ 。

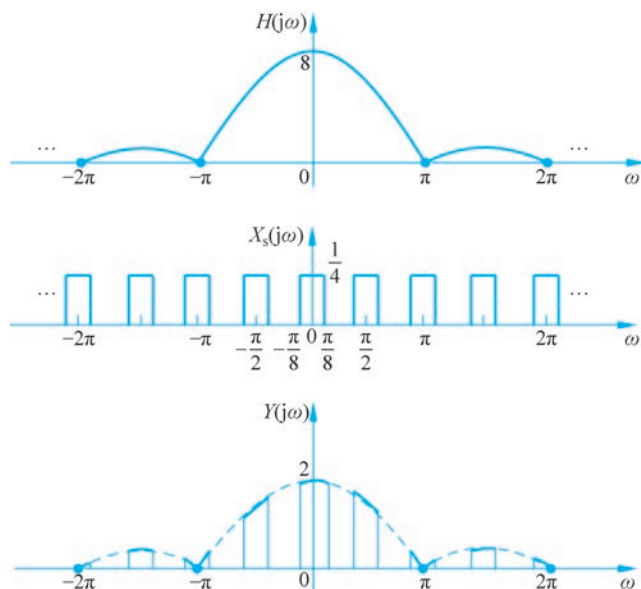


图 3-6-23

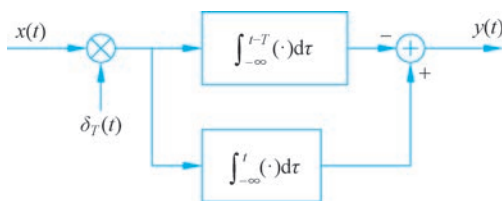


图 3-6-24

(3) 要恢复 $x(t)$, 需要将 $y(t)$ 通过怎样的滤波器 $H(j\omega)$ 。

【分析】 本题中乘法器之后的系统是一个线性时不变系统, 它由两个系统并联而成, 这两个系统的单位冲激响应分别为 $u(t)$ 和 $u(t-T)$, 因此该系统的单位冲激响应为 $h_a(t) = u(t) - u(t-T) = G_T(t - T/2)$ 。因此, 乘法器(抽样)与该系统级联, 形成了一个抽样-零阶保持系统。当抽样频率满足奈奎斯特抽样定理时, 可以将零阶保持器输出通过适当的低通滤波器恢复原信号。在第(1)问中, 由于没有确定是否满足抽样定理, 只能形式化地写出输出信号的频谱。

【解答】 (1) $x(t) = \text{Sa}^2(2\pi t) \leftrightarrow X(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2} G_{4\pi}(\omega) * \frac{1}{2} G_{4\pi}(\omega) = \frac{1}{2} \Lambda_{8\pi}(\omega)$

$$Y(j\omega) = X_s(j\omega) H_a(j\omega)$$

其中, $X_s(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[j(\omega - k\omega_s)]$, $X(j\omega) = \frac{1}{2} \Lambda_{8\pi}(\omega)$, $H_a(j\omega) = T \text{Sa}\left(\frac{T}{2}\omega\right) e^{-j\frac{T}{2}\omega}$

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= X_s(j\omega) H_a(j\omega) = \left\{ \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[j(\omega - k\omega_s)] \right\} \left[T \text{Sa}\left(\frac{T}{2}\omega\right) e^{-j\frac{T}{2}\omega} \right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[j(\omega - k\omega_s)] \text{Sa}\left(\frac{T}{2}\omega\right) e^{-j\frac{T}{2}\omega} \end{aligned}$$

(2) $x(t)$ 的最高频率为 4π , 故抽样频率 $\geq 4\text{Hz}$, 最大抽样间隔为 0.25s 。

(3) 当满足抽样定理时, $X_s(j\omega)$ 相对于 $X(j\omega)$ 没有混叠, 因此只需滤出 $X_s(j\omega)$ 中的基带分量, 并补偿 $H_a(j\omega)$ 引起的幅度变化, 即可恢复原信号频谱。线性相位延迟可不予处理, 此时输出相对于输入存在延时, 仍然满足无失真传输的要求。

$$H(j\omega) = \begin{cases} \frac{1}{\text{Sa}\left(\frac{T}{2}\omega\right)}, & |\omega| \leq \omega_c, \quad 4\pi < \omega_c < \frac{2\pi}{T} - 4\pi \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

【题 3-6-11】 计算及画图题

如图 3-6-25(a) 所示的系统中, 频带有限信号 $x(t)$ 的波形如图 3-6-25(b) 所示。

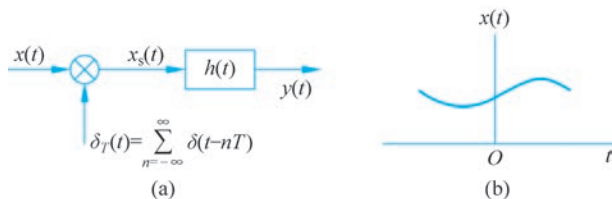


图 3-6-25

(1) 如果系统 $h(t)$ 的单位冲激响应为 $h(t) = u(t) - u(t - T_1)$, $T_1 < T$, 求输出 $y(t)$ 和 $Y(j\omega)$, 并画出 $y(t)$ 的波形图。

(2) 如果系统 $h(t)$ 的频率响应为 $H(j\omega) = \begin{cases} T, & \omega < |\omega_c| \\ 0, & \omega \geq |\omega_c| \end{cases}$, $\omega_c = \frac{\pi}{T}$, 求输出 $y(t)$ 。

【分析】 本题第(1)问中, 系统 $h(t)$ 是一个零阶保持器; 第(2)问中, 系统 $h(t)$ 是理想低通滤波器。因此, 在满足抽样定理的条件下, 第(1)问的系统只能近似地恢复原信号, 第(2)问的系统可以无失真地恢复原信号。

注意: 题干中没有给出是否满足抽样定理, 因此只能用抽样值合成输出信号, 不能判断其与原信号的关系。

$$\begin{aligned} \text{【解答】} \quad (1) \quad y(t) &= x(t) \cdot \delta_T(t) * h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT) * h(t) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) h(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) [u(t - nT) - u(t - nT - T_1)] \end{aligned}$$

波形图如图 3-6-26 所示。

$$(2) \quad h(t) = F^{-1}[H(\omega)] = \frac{T\omega_c}{\pi} \text{Sa}(\omega_c t) = \text{Sa}(\omega_c t)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT) \right] * h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) h(t - nT) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \cdot \text{Sa}\{\omega_c(t - nT)\} \end{aligned}$$

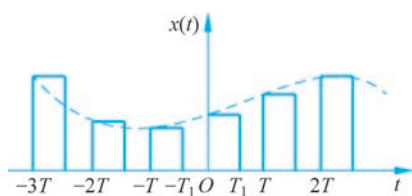


图 3-6-26

【题 3-6-12】 计算题

已知带限信号 $x(t)$ (频带为 $-\omega_m \sim \omega_m$), 用两种方式进行抽样, 抽样过程均满足时域抽样定理, 抽样信号 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 如图 3-6-27 所示。

- (1) 用数学模型描述抽样信号 $x_1(t)$ 与抽样信号 $x_2(t)$ 的关系。
- (2) 已知 $x_1(t) \leftrightarrow X_1(j\omega)$, 求 $x_2(t)$ 的频谱 $X_2(j\omega)$ 。
- (3) 若将 $x_2(t)$ 通过一个理想低通滤波器, 截止频率为 $\frac{\pi}{T}$, 试分析说明能否恢复信号 $x(t)$ 。
- (4) 试设计一个滤波器, 满足输入信号为抽样信号 $x_2(t)$, 输出信号为 $x(t)$ 。

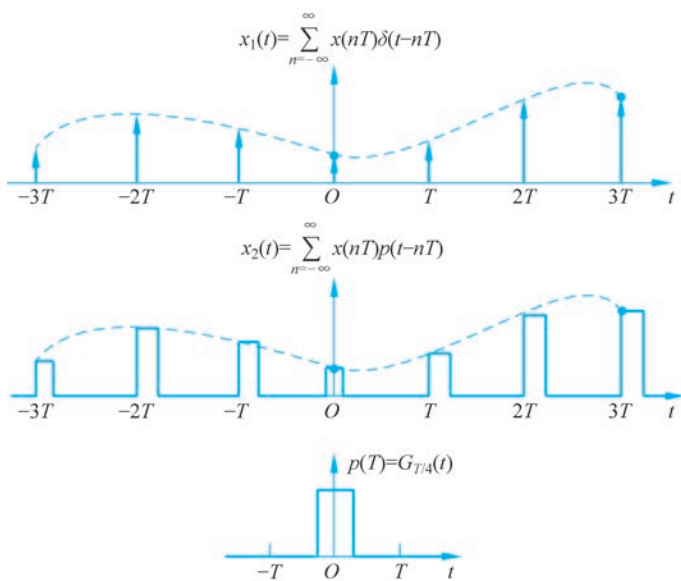


图 3-6-27

【分析】 本题比较两种不同的抽样方式: 理想冲激串抽样和抽样-保持抽样, 其中抽样-保持抽样可等效为理想冲激串抽样后卷积了一个窄脉冲, 因此 $x_2(t)$ 的频谱相对于 $x_1(t)$ 的频谱, 将被辛格函数加权。为从 $x_2(t)$ 中恢复 $x(t)$, 不仅要经过低通滤波, 还要平衡辛格函数加权造成的幅度变化。

【解答】 (1) $x_2(t) = x_1(t) * G_{T/4}(t)$

(2) $G_{T/4}(t) \leftrightarrow \frac{T}{4} \text{Sa}\left(\frac{T}{8}\omega\right)$

$$X_2(j\omega) = \frac{T}{4} \text{Sa}\left(\frac{T}{8}\omega\right) X_1(j\omega) = \frac{1}{4} \text{Sa}\left(\frac{T}{8}\omega\right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[j(\omega - k\omega_s)], \text{ 其中, } \omega_s = 2\pi/T.$$

(3) 由于 $X_2(j\omega)$ 中的基带分量相对于 $X(j\omega)$ 已经被加权, 因此不能仅通过理想低通滤波恢复 $x(t)$, 还要平衡加权引起的幅度变化。

$$(4) H(j\omega) = \begin{cases} \frac{4}{\text{Sa}\left(\frac{T}{8}\omega\right)}, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}, \text{ 其中 } \omega_m < \omega_c < \frac{2\pi}{T} - \omega_m.$$

【题 3-6-13】 计算及画图题

已知连续时间带限信号 $x(t)$ 的最高频率为 2kHz, 以抽样间隔 T 为 $250\mu\text{s}$ 对其抽样, 所得的已抽样信号 $x_s(t)$ 如图 3-6-28 所示, 试求:

(1) 从 $x_s(t)$ 中恢复出 $x(t)$ 的重构滤波器的频率响应 $H(j\omega)$, 并粗略画出其频谱图。

(2) 第(1)问中所求的重构滤波器为什么不是物理可实现滤波器? 为实现无失真恢复原信号 $x(t)$, 需对抽样频率和重构滤波器的频率响应做怎样的修改?

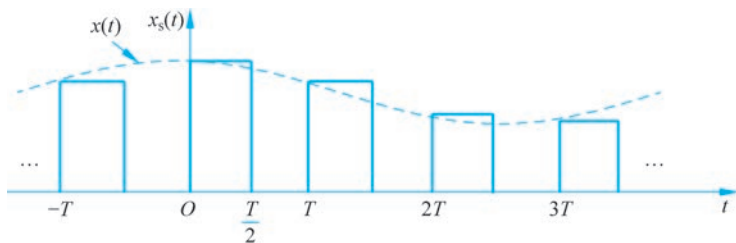


图 3-6-28

【分析】 由抽样后的波形可以看出, 本题采用的是抽样-保持抽样策略, 等效为理想冲激串抽样后卷积了一个窄脉冲, 因此 $x_s(t)$ 的频谱相对于理想冲激串抽样信号的频谱, 将被辛格函数加权。为从 $x_s(t)$ 中恢复 $x(t)$, 不仅要经过低通滤波, 还要平衡辛格函数加权造成的幅度变化。

【解答】 (1)
$$x_s(t) = \left[x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \right] * G_{T/2}\left(t - \frac{T}{4}\right)$$

$$x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \leftrightarrow \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[j(\omega - k\omega_s)], \omega_s = 2\pi/T$$

$$G_{T/2}\left(t - \frac{T}{4}\right) \leftrightarrow \frac{T}{2} \text{Sa}\left(\frac{T}{4}\omega\right) e^{-j\frac{T}{4}\omega}$$

$$X_s(j\omega) = \frac{1}{2} \text{Sa}\left(\frac{T}{4}\omega\right) e^{-j\frac{T}{4}\omega} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[j(\omega - k\omega_s)]$$

$$H(j\omega) = \begin{cases} \frac{2}{\text{Sa}\left(\frac{T}{4}\omega\right)} e^{j\frac{T}{4}\omega}, & |\omega| \leq 2\pi \times 2000 \\ 0, & |\omega| > 2\pi \times 2000 \end{cases}$$

频谱图如图 3-6-29 所示。

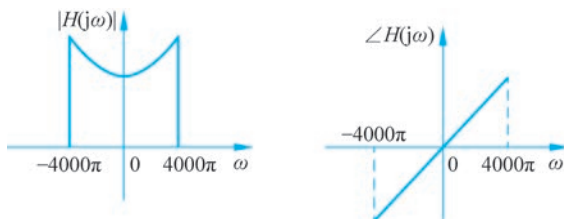


图 3-6-29

(2) 该滤波器对应的单位冲激响应是非因果信号,是物理不可实现的。并且,由于该滤波器具有锐截止特性和相位超前,难以用物理可实现的系统近似实现。为了近似实现该滤波器,需要增大抽样频率,从而提供较宽的过渡带,并引入负斜率的线性相位,允许输出相对于输入存在一定延时,从而使原理想滤波器单位冲激响应的大部分能量位于 $t=0$ 以后。

【题 3-6-14】 计算及画图题

在工程应用中,可以采用等效抽样的策略对周期信号进行抽样以降低抽样频率。已知周期信号 $x(t)$ 的频谱如图 3-6-30(a)所示,基频 $\omega_0 = 2\pi \times 10^6 \text{ rad/s}$ 。

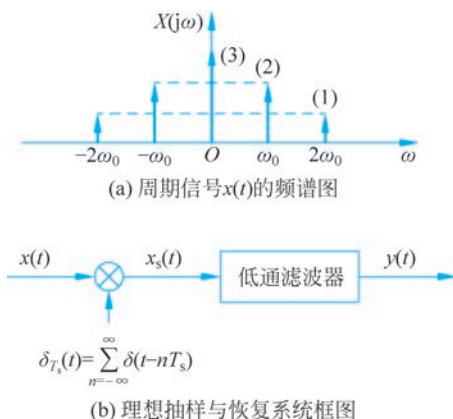


图 3-6-30

(1) 对 $x(t)$ 进行无失真抽样,最低抽样频率 f_s 应满足什么要求?

(2) 理想的抽样与恢复系统框图如图 3-6-30(b)所示。周期信号 $x(t)$ 作为输入,取抽样频率 $f_s = 0.9 \times 10^6 \text{ Hz}$,试绘出抽样后信号 $x_s(t)$ 的频谱图 $[-\omega_0, \omega_0]$ 区间即可。

(3) 在第(2)问的前提下,若低通滤波器的频率响应为 $H_{LP}(\omega) = H_0 G_{2\omega_c}(\omega)$,其中 $H_0 = T_s = \frac{1}{f_s} = \frac{10}{9} \times 10^{-6}$, $\omega_c = \frac{\omega_0}{2} = \pi \times 10^6 \text{ rad/s}$,试求此时输出 $y(t)$ 与输入 $x(t)$ 的关系。

【分析】 本题第(2)问的抽样频率不满足抽样定理要求,需具体分析抽样导致的频谱周期延拓情况。

【解答】 (1) 由 $x(t)$ 的频谱图可知, 其最高频率分量为 $2\omega_0$, 其中 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi \times 10^6 \text{ rad/s}$ 。根据奈奎斯特抽样定理, 对其进行无失真抽样的最低抽样频率应满足 $f_s \geq 2f_m = \frac{\omega_m}{\pi} = \frac{2\omega_0}{\pi} = \frac{4}{T_0} = 4 \times 10^6 \text{ Hz}$ 。

(2) 抽样造成频谱的周期延拓, 即

$$x(t)\delta_{T_s}(t) \leftrightarrow \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[j(\omega - k\omega_s)]$$

其中延拓周期

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = 2\pi f_s = 1.8\pi \times 10^6 \text{ rad/s} = 0.9\omega_0$$

故抽样后信号在 $[-\omega_0, \omega_0]$ 区间内的频谱图如图 3-6-31 所示。

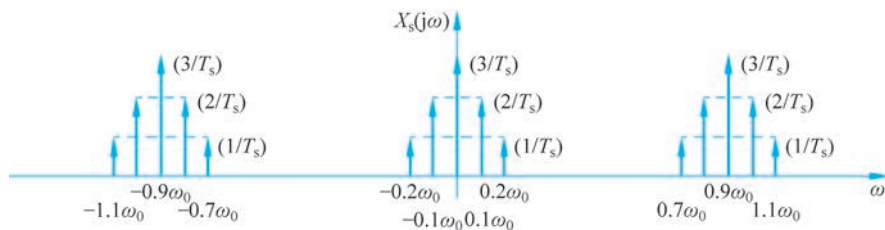


图 3-6-31

(3) 由于低通滤波器的截止频率 $\omega_c = \pi \times 10^6 \text{ Hz} = \frac{\omega_0}{2}$, 增益 $H_0 = T_s$, 比较 $x_s(t)$ 与 $x(t)$ 的频谱可知

$$Y(j\omega) = X_s(j\omega)H_{LP}(j\omega) = 10X(j10\omega) \left(\text{注意, } \delta(a\omega) = \frac{1}{|a|} \delta(\omega) \right)$$

故

$$y(t) = x(0.1t)$$