

第5章

连续时间信号与系统的复频域分析



视频讲解

5.0 引言

前面章节分别在时域和频域对信号与系统进行了分析。由于时域是真实的物理世界,所以时域分析求解很直观。频域属于变换域,侧重分析信号与系统的频率特性。在自然界,频率具有明确的物理意义,因此频域分析过程所体现出来的物理概念很强。

可以说,信号的时域描述和频域描述是从不同的角度观察同一事物,虽然看起来不同,本质却是一样的。而且对于现实中的很多信号,频域的表现比时域更加明了、易于解读。因此,傅里叶分析是信号与系统非常重要的分析方法。

但是,由于傅里叶变换的收敛条件比较严格,一些有用的信号无法进行傅里叶变换;而且傅里叶分析也只能针对稳定系统。法国数学家拉普拉斯(Pierre-Simon Laplace, 1749—1827),放宽了傅里叶被积函数的范围。在自然界,指数信号 $e^{-\sigma t}$ 是衰减最快的信号之一,将信号乘上 $e^{-\sigma t}$ 之后,很容易满足绝对可积条件,因此,原本无法进行傅里叶变换的信号也可以进行傅里叶积分了,这就是拉普拉斯变换。而且至关重要,拉普拉斯变换能将微分方程变成代数方程,在18世纪末、19世纪初计算机还远未发明的年代,其意义非常重大。原本在时域或频域非常烦琐的系统响应求解问题,通过拉普拉斯变换变得异常轻松。

拉普拉斯变换和傅里叶变换一样,是一个线性变换。在经典控制理论中,对控制系统的分析和综合,都是建立在拉普拉斯变换的基础上。而且拉普拉斯变换的另一个重要贡献是用系统函数代替常系数微分方程来描述系统的特性。

有意思的是,信号与系统中的两大变换——傅里叶变换和拉普拉斯变换的创立者傅里叶和拉普拉斯是同时代的法国人,当时正处拿破仑执政时代,国力昌盛,科技发达。拉普拉斯、拉格朗日、傅里叶是当时最著名的三位科学大师,他们的工作极大地推动了人类进步。

5.1 拉普拉斯变换公式推导

5.1.1 从傅里叶变换到拉普拉斯变换

傅里叶变换公式

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

其收敛条件是 $f(t)$ 绝对可积。但是,工程中一些很有用的信号,如直流 E 、 $u(t)$ 、 $e^{at}u(t)$ 等,它们的傅里叶积分并不收敛,但如果将信号 $f(t)$ 乘上一个衰减因子 $e^{-\sigma t}$ 后求傅里叶变换, $f(t)e^{-\sigma t}$ 的傅里叶积分就可能收敛。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-(\sigma+j\omega)t} dt = F(\sigma+j\omega) \quad (5-1)$$



视频讲解

作变量代换,令

$$s = \sigma + j\omega \quad (5-2)$$

则式(5-1)变成

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (5-3)$$

这就是双边拉普拉斯变换的公式,用符号 $\mathcal{L}_B[f(t)]$ 或 $F_B(s)$ 表示。

5.1.2 拉普拉斯变换与傅里叶变换的比较

由于拉普拉斯变换是原信号乘上衰减因子 $e^{-\sigma t}$ 后再作傅里叶变换,因此很多不存在傅里叶变换的信号存在拉普拉斯变换。例如单边指数增长信号

$$f(t) = e^{at}u(t), \quad a > 0$$

它不存在傅里叶变换,但存在拉普拉斯变换

$$F_B(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{at}u(t)e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{at}e^{-st} dt = \frac{1}{s-a}$$

当然,该积分收敛是有条件的,由积分表达式

$$\int_0^{+\infty} e^{at}e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{(a-\sigma)t} e^{-j\omega t} dt$$

如果上述积分收敛,要求 $a - \sigma < 0$, 即 $\sigma > a$, 或 $\text{Re}(s) > a$ 。这也称为 $f(t)$ 的拉普拉斯变换的收敛域。

另外,重要的是,傅里叶变换是时域到频域的变换,即 $t \rightarrow \omega$ 的变换, ω 是角频率,是实变量。拉普拉斯变换是 $t \rightarrow s$ 的变换, $s = \sigma + j\omega$ 是复变量,称为 s 平面,如图 5-1 所示。

需要注意的是, s 的虚部 $j\omega$ 就是傅里叶变换的 ω , 因此,拉普拉斯变换是时域到复频域的变换。

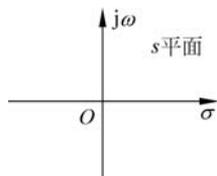


图 5-1 s 平面

5.2 单边拉普拉斯变换及其性质

5.2.1 单边拉普拉斯变换

对于连续时间域,工程中更多的是因果信号和因果系统,即

$$\text{当 } t < 0 \text{ 时, } f(t) = 0 \text{ 或 } h(t) = 0$$

由此,拉普拉斯变换变成单边积分,一般称为单边拉普拉斯变换,即

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

对于连续时间信号与系统,单边拉普拉斯具有更广泛的应用。

单边拉普拉斯变换的积分下限为 0,但是,取 0_+ 还是 0_- 呢? 对于大多数信号,两者没有差别,但对于 δ 函数的拉普拉斯变换,积分下限取 0_+ 还是 0_- 所得的结果完全不同。



视频讲解

$$F(s) = \int_{0_+}^{+\infty} \delta(t) e^{-st} dt = \int_{0_+}^{+\infty} \delta(t) dt = 0$$

$$F(s) = \int_{0_-}^{+\infty} \delta(t) e^{-st} dt = \int_{0_-}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

为了明确在 $t=0$ 具有跳变的信号的拉普拉斯变换的积分限,同时考虑到连续时间系统的起始条件,单边拉普拉斯变换积分下限选取 0_- ,并用符号 $\mathcal{L}[\]$ 表示单边拉普拉斯变换,即

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_{0_-}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (5-4)$$

提示: 单边拉普拉斯变换只能处理因果信号(单边信号)和因果系统,双边信号和非因果系统可用双边拉普拉斯变换分析处理。

本章在 5.12 节分析双边拉普拉斯变换,之前只对因果信号和因果系统进行单边拉普拉斯变换,得出的结论也都是基于因果信号和因果系统。因果信号拉普拉斯变换的收敛域都在收敛轴的右边平面(见 5.12 节),为简便起见,单边拉普拉斯变换略去收敛域。

5.2.2 典型信号的拉普拉斯变换

本节对一些典型信号求拉普拉斯变换,之后可以作为公式使用。

1. 单位冲激信号 $\delta(t)$

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1 \quad (5-5)$$

2. 单位阶跃信号 $u(t)$

$$\mathcal{L}[u(t)] = \int_0^{+\infty} u(t) e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s} \quad (5-6)$$

3. 单边指数信号 $e^{-at}u(t)$

$$\mathcal{L}[e^{-at}u(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s+a)t} dt = \frac{1}{s+a} \quad (5-7)$$

4. 单边正弦信号 $\sin(\omega_0 t)u(t)$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\sin(\omega_0 t)u(t)] &= \int_0^{+\infty} \sin(\omega_0 t) e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2j} (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}) e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{2j} \left[\frac{-1}{s-j\omega_0} e^{-(s-j\omega_0)t} \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{s+j\omega_0} e^{-(s+j\omega_0)t} \Big|_0^{+\infty} \right] \\ &= \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \end{aligned} \quad (5-8)$$

5. 单边余弦信号 $\cos(\omega_0 t)u(t)$

同样计算可得

$$\mathcal{L} [\cos(\omega_0 t)u(t)] = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \quad (5-9)$$



视频讲解

5.2.3 拉普拉斯变换的性质

1. 线性

拉普拉斯变换属于线性变换,若

$$\mathcal{L} [f_1(t)] = F_1(s), \quad \mathcal{L} [f_2(t)] = F_2(s)$$

则

$$\mathcal{L} [K_1 f_1(t) + K_2 f_2(t)] = K_1 F_1(s) + K_2 F_2(s) \quad (5-10)$$

其中, K_1 、 K_2 是常数。

例如,电阻元件, $v(t) = Ri(t)$, 则 $V(s) = RI(s)$ 。其 s 域模型见图 5-2。

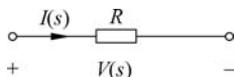


图 5-2 电阻元件的 s 域模型

2. 原函数微分

若 $\mathcal{L} [f(t)] = F(s)$, 则

$$\mathcal{L} \left[\frac{d}{dt} f(t) \right] = sF(s) - f(0_-) \quad (5-11)$$

证明: 应用分部积分法

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[\frac{d}{dt} f(t) \right] &= \int_{0_-}^{+\infty} \left[\frac{d}{dt} f(t) \right] e^{-st} dt \\ &= f(t)e^{-st} \Big|_{0_-}^{+\infty} - \int_{0_-}^{+\infty} f(t)(-se^{-st}) dt \\ &= -f(0_-) + sF(s) \end{aligned}$$

依次可证明高阶微分的拉普拉斯变换

$$\mathcal{L} [(f'(t))'] = s [sF(s) - f(0_-)] - f'(0_-)$$

即

$$\mathcal{L} \left[\frac{d^2}{dt^2} f(t) \right] = s^2 F(s) - sf(0_-) - f'(0_-) \quad (5-12)$$

$$\mathcal{L} \left[\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0_-) - s^{n-2} f'(0_-) - \dots - f^{(n-1)}(0_-) \quad (5-13)$$

通过拉普拉斯变换,时域中的微分关系变成了 s 域中的代数关系,除此之外,单边拉普拉斯变换的微分性质只需要起始条件 $f^{(k)}(0_-)$,不涉及 0_- 到 0_+ 的跳变,这将大大简

化系统的分析。通过拉普拉斯变换分析求解连续时间系统既简单又有效。

【例题 5.1】 求 $\delta'(t)$ 的拉普拉斯变换。

解：

$$\mathcal{L}[\delta'(t)] = s \times 1 - \delta(0_-) = s \quad (5-14)$$

同样,考虑到 $\delta^{(k)}(0_-) = 0$,可知

$$\mathcal{L}[\delta^{(k)}(t)] = s^k \quad (5-15)$$

单位冲激信号的高阶导数的拉普拉斯变换是 s 的多项式。

【例题 5.2】 建立电感和电容元件的 s 域等效模型。

解：对于电感元件

$$v_L(t) = L \frac{d}{dt} i_L(t)$$

两端进行拉普拉斯变换

$$V_L(s) = L[sI_L(s) - i_L(0_-)] = LsI_L(s) - Li_L(0_-)$$

画出电感元件的时域和 s 域模型,如图 5-3 所示。

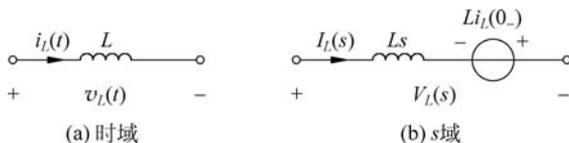


图 5-3 电感元件的 s 域等效模型

在 s 域的等效模型中,电感 L 变成了 Ls ,增加了由电感起始条件引起的恒压源 $-Li_L(0_-)$ 。电感元件的电压电流之间的微分关系变成了代数关系(可理解为阻抗),因此将大大简化分析计算。

同样的分析方法可以应用到电容元件,电容的电流和电压关系

$$i_C(t) = C \frac{d}{dt} v_C(t)$$

两端进行拉普拉斯变换

$$I_C(s) = C[sV_C(s) - v_C(0_-)] = CsV_C(s) - Cv_C(0_-)$$

画出电容元件的时域和 s 域模型,如图 5-4 所示。

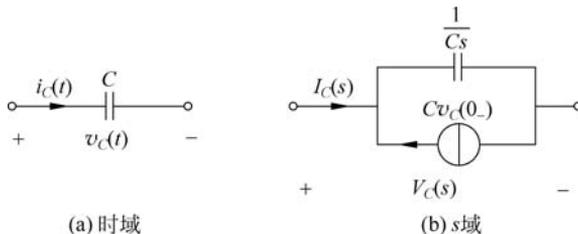


图 5-4 电容元件的 s 域等效模型

同样的,电容元件 C 在 s 域以 $\frac{1}{Cs}$ 的形式表现为“阻抗”,与一个反向的电流源 $-Cv_C(0_-)$ 并联构成 s 域等效模型,电流与电压之间的微分关系也变成了代数关系,将极大地简化电路的分析。

想一想:

在图 5-3(b)和图 5-4(b)中,对等效电压源 $-Li_L(0_-)$ 和等效电流源 $-Cv_C(0_-)$ 可能会产生困惑,为什么起始电流乘以电感变成了电压源 $-Li_L(0_-)$? 为什么起始电压乘以电容变成了电流源 $-Cv_C(0_-)$?

其实, s 域仅仅是一个数学架构,所谓的等效电流源或等效电压源也仅仅是一个数学模型,并不是真实的物理世界。有时可以将 s 等同于算子符号处理。

3. 积分的拉普拉斯变换

若 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, 则

$$\mathcal{L}\left[\int_{0_-}^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(s)}{s} \quad (5-16)$$

$$\mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{(-1)}(0)}{s} \quad (5-17)$$

其中,

$$f^{(-1)}(0) = \int_{-\infty}^{0_-} f(\tau) d\tau$$

证明:

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{0_-} f(\tau) d\tau + \int_{0_-}^t f(\tau) d\tau = f^{(-1)}(0) + \int_{0_-}^t f(\tau) d\tau$$

两边进行单边拉普拉斯变换

$$\mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right] = \mathcal{L}[f^{(-1)}(0)] + \mathcal{L}\left[\int_{0_-}^t f(\tau) d\tau\right]$$

而

$$\mathcal{L}[f^{(-1)}(0)] = \frac{f^{(-1)}(0)}{s}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\int_{0_-}^t f(\tau) d\tau\right] &= \int_{0_-}^{+\infty} \left[\int_{0_-}^t f(\tau) d\tau\right] e^{-st} dt \\ &= -\frac{e^{-st}}{s} \int_{0_-}^t f(\tau) d\tau \Big|_{0_-}^{+\infty} + \frac{1}{s} \int_{0_-}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt = \frac{F(s)}{s} \end{aligned}$$

【例题 5.3】 应用积分性质建立电感和电容元件的 s 域模型。

解: 对于电容,电压是电流的积分

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\tau) d\tau$$

两端进行拉普拉斯变换

$$V_C(s) = \frac{1}{C} \left(\frac{1}{s} I_C(s) + \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{0_-} i_C(\tau) d\tau \right) = \frac{1}{Cs} I_C(s) + \frac{1}{s} v_C(0_-)$$

画出 s 域模型,如图 5-5 所示。这是电容元件在 s 域的另一模型(串联形式)。

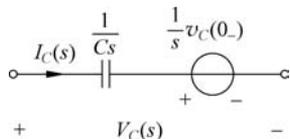


图 5-5 电容元件的 s 域模型

对于电感,电流是电压的积分

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v_L(\tau) d\tau$$

两端进行拉普拉斯变换,得

$$I_L(s) = \frac{1}{L} \left(\frac{1}{s} V_L(s) + \int_{-\infty}^{0^-} v_L(\tau) d\tau \right) = \frac{1}{Ls} V_L(s) + \frac{1}{s} i_L(0_-)$$

画出电感 s 域的另一模型,见图 5-6,“阻抗” Ls 与一个等效电流源并联。

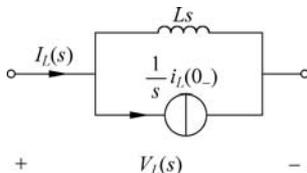


图 5-6 电感元件的 s 域模型

4. 时域延时

若 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, 则

$$\mathcal{L}[f(t-t_0)u(t-t_0)] = e^{-st_0} F(s) \quad (5-18)$$

证明:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t-t_0)u(t-t_0)] &= \int_{0_-}^{+\infty} f(t-t_0)u(t-t_0)e^{-st} dt \\ &= \int_{t_0}^{+\infty} f(t-t_0)e^{-st} dt \end{aligned}$$

令 $\tau = t - t_0$, 则

$$\mathcal{L}[f(t-t_0)u(t-t_0)] = e^{-st_0} \int_0^{+\infty} f(\tau)e^{-s\tau} d\tau = e^{-st_0} F(s)$$

该性质有两点需要注意,首先,式(5-18)是单边拉普拉斯变换的位移性质,因此要求 $t_0 > 0$ (在证明过程中已经体现),表示的是延时;如果 $t_0 < 0$,波形左移,那么将有 $[t_0, 0_-)$ 部分没有包含在积分区间内。其次,延时性质指的是 $f(t-t_0)u(t-t_0)$ 的拉普拉斯变换,不是 $f(t-t_0)u(t)$ 的拉普拉斯变换。如果 $f(t)$ 本身是单边的, $f(t-t_0)u(t)$ 和 $f(t-t_0)u(t-t_0)$ 一致,但如果 $f(t)$ 是双边信号, $f(t-t_0)u(t-t_0)$ 就不等同于 $f(t-t_0)u(t)$, 当然它们的单边拉普拉斯变换也不相等。

5. s 域平移

若 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, 则

$$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = F(s+a) \quad (5-19)$$

证明:

$$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = \int_{0_-}^{+\infty} e^{-at}f(t)e^{-st} dt = \int_{0_-}^{+\infty} f(t)e^{-(a+s)t} dt = F(s+a)$$

【例题 5.4】 应用性质求 $f(t) = e^{-at} \cos(\omega_0 t)u(t)$ 和 $f(t) = e^{-at} \sin(\omega_0 t)u(t)$ 的拉普拉斯变换。

解: 前已求得

$$\mathcal{L}[\cos(\omega_0 t)u(t)] = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}, \quad \mathcal{L}[\sin(\omega_0 t)u(t)] = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

则

$$\mathcal{L}[e^{-at} \cos(\omega_0 t)u(t)] = \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2} \quad (5-20)$$

$$\mathcal{L}[e^{-at} \sin(\omega_0 t)u(t)] = \frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2} \quad (5-21)$$

6. 展缩变换

若 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, 则

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right), \quad a > 0 \quad (5-22)$$

如果时域压缩或扩展, s 域将扩展或压缩。

证明:

$$\mathcal{L}[f(at)] = \int_{0_-}^{+\infty} f(at)e^{-st} dt = \int_{0_-}^{+\infty} f(\tau)e^{-(s/a)\tau} d(\tau/a) = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

考虑单边拉普拉斯变换, 因此在证明过程中, $a > 0$ 。

7. s 域中的微分和积分1) s 域微分

若 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, 则

$$\mathcal{L}[-tf(t)] = \frac{d}{ds}F(s) \quad (5-23)$$

$$\mathcal{L}[(-t)^n f(t)] = \frac{d^n}{ds^n}F(s) \quad (5-24)$$

【例题 5.5】 求 $tu(t)$ 的拉普拉斯变换。

解: $\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}$, 应用 s 域微分性质, 有

$$\mathcal{L}[-tu(t)] = \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\right) = -\frac{1}{s^2}$$



视频讲解

故

$$\mathcal{L}[tu(t)] = \frac{1}{s^2} \quad (5-25)$$

同样可得

$$\mathcal{L}[t^2u(t)] = \frac{2}{s^3} \quad (5-26)$$

一般,

$$\mathcal{L}[t^n u(t)] = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (5-27)$$

2) s 域积分

若 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, 且 $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{f(t)}{t} \right)$ 存在, 则

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^{+\infty} F(v) dv \quad (5-28)$$

证明:

$$\begin{aligned} \int_s^{+\infty} F(v) dv &= \int_s^{+\infty} \int_{0-}^{+\infty} f(t) e^{-vt} dt dv = \int_{0-}^{+\infty} f(t) \int_s^{+\infty} e^{-vt} dv dt \\ &= \int_{0-}^{+\infty} \frac{f(t)}{t} e^{-st} dt \end{aligned}$$

故

$$\int_s^{+\infty} F(v) dv = \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]$$

8. 初值定理

在时域求 $f(t)$ 的初值 $f(0_+)$, 往往是从 $f(0_-)$ 到 $f(0_+)$, 通过物理概念或数学演算找到 0_- 到 0_+ 的跳变量。应用拉普拉斯变换, 可以直接通过取极限得到信号的初值。

若 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, 且 $F(s)$ 是有理真分式, 则

$$f(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad (5-29)$$

证明: 应用微分性质, 有

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0_-)$$

而

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f'(t)] &= \int_{0-}^{+\infty} f'(t) e^{-st} dt = \int_{0-}^{0_+} f'(t) e^{-st} dt + \int_{0_+}^{+\infty} f'(t) e^{-st} dt \\ &= f(0_+) - f(0_-) + \int_{0_+}^{+\infty} f'(t) e^{-st} dt \end{aligned}$$

即

$$sF(s) - f(0_-) = f(0_+) - f(0_-) + \int_{0_+}^{+\infty} f'(t) e^{-st} dt$$

则

$$f(0_+) = sF(s) - \int_{0_+}^{+\infty} f'(t)e^{-st} dt$$

当 $s \rightarrow \infty$ 时, $\int_{0_+}^{+\infty} f'(t)e^{-st} dt = 0$, 故

$$f(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

需要注意的是, 如果 $F(s)$ 不是有理真分式, 需要先对 $F(s)$ 进行化简, 化成多项式和有理真分式之和, 对其中的有理真分式部分应用式(5-29), 求得的值才是 $f(t)$ 的初值 $f(0_+)$ 。

想一想:

为什么需要这么做呢?

由式(5-15)可知, $\delta^{(k)}(t)$ 的拉普拉斯变换为 s^k , 因此, 拉普拉斯变换的多项式部分对应的反变换应该为 $\delta^{(k)}(t)$, 而 $\delta^{(k)}(t)$ 在 $t=0_+$ 时为零, 因此, 这部分不会影响 $f(0_+)$ 。

【例题 5.6】 求下列拉普拉斯变换对应的时间函数 $f(t)$ 的初值。

$$(1) F(s) = \frac{s+2}{s^2+2s+1} \quad (2) F(s) = \frac{2s}{s+1}$$

解:

(1) $F(s)$ 是有理真分式, 可直接应用初值定理。

$$f(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2+2s}{s^2+2s+1} = 1$$

(2) $F(s)$ 不是真分式, 需要先化成真分式和多项式之和, 对真分式部分应用初值定理。

$$F(s) = \frac{2s}{s+1} = \frac{2(s+1)-2}{s+1} = 2 - \frac{2}{s+1}$$

则

$$f(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \left(-\frac{2}{s+1} \right) = -2$$

对于第(2)小题, 如果直接应用初值定理公式, 会得到如下结果

$$f(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{2s}{s+1} = \infty$$

这是错误的, 因为 $F(s) = \frac{2s}{s+1}$ 所对应的时间信号是

$$f(t) = 2\delta(t) - 2e^{-t}u(t)$$

由于 $\delta(t)|_{t=0_+} = 0$, 所以有 $f(0_+) = -2$, 如图 5-7 所示。

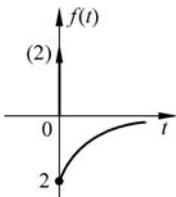


图 5-7 例题 5.6 (2) 所对应的时间信号

提示：当 $F(s)$ 不是有理真分式时，不能直接应用式(5-29)求解初值。

9. 终值定理

若 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ ，则

$$f(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (5-30)$$

证明：在初值定理的证明中，已得

$$f(0_+) = sF(s) - \int_{0_+}^{+\infty} f'(t)e^{-st} dt$$

两端取极限 $s \rightarrow 0$ ，有

$$f(0_+) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) - \lim_{s \rightarrow 0} \int_{0_+}^{+\infty} f'(t)e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) - \int_{0_+}^{+\infty} f'(t) dt$$

即

$$f(0_+) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) - f(+\infty) + f(0_+)$$

故有

$$f(+\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

注意： $sF(s)$ 在 $j\omega$ 轴上(除去坐标原点)或 s 右半平面解析，才可应用终值定理。否则， $F(s)$ 对应的时间函数为正弦振荡信号或增长信号，终值定理并不适用。

【例题 5.7】 已知 $F(s) = \frac{s}{s^2 + 1}$ ，求 $f(t)$ 的终值。

解：当 $s = \pm j$ 时， $F(s)$ 的分母等于零，因此 $F(s)$ 在 $j\omega$ 轴上不解析，此时不能应用终值定理求时间信号的终值；否则，将得到错误的结果。

事实上， $F(s)$ 对应的时间信号 $f(t) = \cos(t)u(t)$ ，其终值并不存在。

而如果 $F(s) = \frac{1}{s}$ ， $F(s)$ 只在坐标原点不收敛，此时可以应用终值定理，

$$f(+\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} = 1$$

又如， $F(s) = \frac{1}{s-1}$ ，其 $f(t) = e^t u(t)$ ，信号不断增长直至无穷大，不能应用终值定理。

10. 卷积定理

1) 时域卷积

若 $\mathcal{L}[f_1(t)] = F_1(s)$ ， $\mathcal{L}[f_2(t)] = F_2(s)$ ，则

$$\mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(s)F_2(s) \quad (5-31)$$

和傅里叶变换的时域卷积定理一样，时域卷积， s 域相乘。

证明：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] &= \int_0^{+\infty} [f_1(t) * f_2(t)] e^{-st} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right] e^{-st} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{+\infty} f_1(\tau) e^{-s\tau} \left[\int_0^{+\infty} f_2(t-\tau) e^{-s(t-\tau)} dt \right] d\tau \\
&= \int_0^{+\infty} f_1(\tau) e^{-s\tau} F_2(s) d\tau \\
&= F_2(s) \int_0^{+\infty} f_1(\tau) e^{-s\tau} d\tau \\
&= F_1(s) \cdot F_2(s)
\end{aligned}$$

【例题 5.8】 求单边周期信号的拉普拉斯变换。

解：先求单边周期性冲激信号的拉普拉斯变换

$$\mathcal{L} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \delta(t-nT) \right] = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{L} [\delta(t-nT)] = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-snT} = \frac{1}{1-e^{-sT}} \quad (5-32)$$

对于一般周期信号

$$f_{T_1}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_1(t-kT_1)$$

其中 $f_1(t)$ 是主周期, 周期信号与其主周期信号的关系为

$$f_{T_1}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_1(t-kT_1) = f_1(t) * \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(t-kT_1)$$

应用时域卷积定理, 可得单边周期信号的拉普拉斯变换

$$F_{T_1}(s) = F_1(s) \cdot \mathcal{L} \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \delta(t-kT_1) \right] = F_1(s) \frac{1}{1-e^{-sT_1}} \quad (5-33)$$

提示：一般信号的拉普拉斯变换是有理分式(或多项式), 当拉普拉斯变换的分母出现 $1-e^{-sT_1}$ 时, 一般表示这是一个单边周期信号。

时域卷积定理是信号与系统中最有力的分析工具, 其最重要的应用是系统的滤波分析以及求系统的零状态响应。

在时域求解零状态响应, 需要卷积积分运算, 即

$$r(t) = e(t) * h(t)$$

根据时域卷积定理, 有

$$R(s) = E(s)H(s)$$

因此, 在 s 域只需作乘法运算, 这将极大地简化分析过程。

2) s 域卷积

若 $\mathcal{L} [f_1(t)] = F_1(s)$, $\mathcal{L} [f_2(t)] = F_2(s)$, 则

$$\mathcal{L} [f_1(t)f_2(t)] = \frac{1}{2\pi j} F_1(s) * F_2(s) \quad (5-34)$$

这个性质表明, 时域相乘, s 域卷积。

在结束本节内容之前, 将常用的典型信号的拉普拉斯变换和拉普拉斯变换的性质列于表 5-1 和表 5-2 中。

表 5-1 典型信号的拉普拉斯变换

序号	信号 $f(t)$	拉普拉斯变换 $F(s)$
1	$\delta(t)$	1
2	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
3	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
4	$\cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$
5	$\sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$
6	$e^{-at} \cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$
7	$e^{-at} \sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$

表 5-2 单边拉普拉斯变换的性质

序号	时域 ($t > 0$)	s 域
1	$K_1 f_1(t) + K_2 f_2(t)$	$K_1 F_1(s) + K_2 F_2(s)$
2	$\frac{d}{dt} f(t)$ $\frac{d^2}{dt^2} f(t)$	$sF(s) - f(0_-)$ $s^2 F(s) - sf(0_-) - f'(0_-)$
3	$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F(s)}{s} + \frac{f^{(-1)}(0)}{s}$
4	$f(t-t_0)u(t-t_0)$	$e^{-st_0} F(s)$
5	$e^{-at} f(t)$	$F(s+a)$
6	$f(at), a > 0$	$(1/a)F(s/a), a > 0$
7	$(-t)^n f(t)$	$\frac{d^n}{ds^n} F(s)$
8	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^{+\infty} F(v) dv$
9	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(s)F_2(s)$
10	$\sum_{k=0}^{+\infty} f_1(t - kT_1)$	$F_1(s) \frac{1}{1 - e^{-sT_1}}$
11	初值定理	$f(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$
12	终值定理	$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$



视频讲解

5.3 拉普拉斯反变换

一般情况下,拉普拉斯反变换最简单有效的求解方法是“部分分式展开法”结合“典型信号的拉普拉斯变换”以及“拉普拉斯变换性质”,类似于一种比对的方法。求得的反变换 $f(t), t > 0$ 。

5.3.1 观察法

本方法适于一些简单的拉普拉斯变换形式,例如,分母是单因子、单阶,简单整理后只需比对一些典型信号的拉普拉斯变换,结合拉普拉斯变换的性质,就可以直接得到时间信号。

【例题 5.9】 已知 $F(s) = \frac{1 - 2e^{-a(s+1)}}{s+2}$, 求拉普拉斯反变换。

解: 先将 $F(s)$ 整理, 得

$$F(s) = \frac{1 - 2e^{-a(s+1)}}{s+2} = \frac{1}{s+2} - \frac{2e^{-a}}{s+2} e^{-as}$$

应用典型信号 $e^{-at}u(t)$ 的拉普拉斯变换, 以及拉普拉斯变换的延时性质, 可得

$$f(t) = e^{-2t}u(t) - 2e^{-a}e^{-2(t-a)}u(t-a) = e^{-2t}u(t) - 2e^a e^{-2t}u(t-a)$$

5.3.2 部分分式展开法

一般信号的拉普拉斯变换都是有理分式, 这从表 5-1 和表 5-2 中可以得到印证。

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m+1} s^{m+1} + \cdots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0} \quad (5-35)$$

这种情况下, 最简单的求解拉普拉斯反变换的方法是部分分式展开法, 将有理分式展开成单因子的部分分式, 再利用典型信号的拉普拉斯变换(见表 5-1)即可得到时间信号。对于重根的情况可以再利用 s 域微分性质。

在求解拉普拉斯反变换之前, 先介绍两个概念——零点和极点。

将 $F(s)$ 的分子、分母进行因式分解

$$F(s) = \frac{a_m (s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{b_n (s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}$$

令 $F(s) = 0$, 得 $s = z_1, z_2, \cdots, z_m$, 称为 $F(s)$ 的零点。所谓“零点”指的是在 s 平面上, 使 $F(s)$ 等于零的 s 点(s 值)。

同样地, 令 $F(s) \rightarrow \infty$, 得 $s = p_1, p_2, \cdots, p_n$, 称为 $F(s)$ 的极点, 所谓“极点”指的是在 s 平面上, 使 $F(s)$ 趋于 ∞ 的 s 点(s 值)。

提示: 用部分分式展开法求解拉普拉斯反变换时, 需要先判断分子、分母的阶次。对于有理真分式和非有理真分式的情况, 求解思路是有差异的。

1. $F(s)$ 是有理真分式

有理真分式,指的是 $F(s)$ 的分子阶次比分母阶次低。对于真分式,根据 $F(s)$ 的极点情况进一步划分。

1) $F(s)$ 的极点是实数,且为一阶

将 $F(s)$ 展开成单阶的部分分式

$$F(s) = \frac{K_1}{s-p_1} + \frac{K_2}{s-p_2} + \cdots + \frac{K_n}{s-p_n} \quad (5-36)$$

式中, K_1, K_2, \cdots, K_n 为待定系数。

将上式两端同乘以 $s-p_i$, 并令 $s=p_i$, 有

$$\begin{aligned} F(s)(s-p_i)|_{s=p_i} &= \frac{K_1}{s-p_1}(s-p_i)|_{s=p_i} + \frac{K_2}{s-p_2}(s-p_i)|_{s=p_i} + \cdots + \\ &\quad \frac{K_i}{s-p_i}(s-p_i)|_{s=p_i} + \cdots + \frac{K_n}{s-p_n}(s-p_i)|_{s=p_i} \\ &= K_i \end{aligned}$$

因此

$$K_i = (s-p_i)F(s)|_{s=p_i} \quad (5-37)$$

这就是部分分式 $\frac{K_i}{s-p_i}$ 的系数 K_i 的求解公式。实际上, $K_i (i=1, 2, \cdots, n)$ 是极点 p_i 处的留数。

系数 K_i 确定后,根据典型信号(指数信号)的拉普拉斯变换,可以直接写出时间信号的表达式

$$f(t) = (K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t} + \cdots + K_n e^{p_n t})u(t) \quad (5-38)$$

2) $F(s)$ 极点为共轭复数且无重根的情况

如果 $F(s)$ 的分母因式分解时出现如下形式

$$F(s) = \frac{A(s)}{[(s+\alpha)^2 + \beta^2](s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_{n-2})}$$

式中, $p_1, p_2, \cdots, p_{n-2}$ 为单实根, $-\alpha \pm j\beta$ 为共轭复数根。

将 $F(s)$ 部分分式展开,共轭复数根部分不再进一步分解,得到下式

$$F(s) = \frac{K_1}{s-p_1} + \frac{K_2}{s-p_2} + \cdots + \frac{K_{n-2}}{s-p_{n-2}} + \frac{Cs+D}{(s+\alpha)^2 + \beta^2} \quad (5-39)$$

式中, $K_1, K_2, \cdots, K_{n-2}$ 以及 C 和 D 为待定系数,其中单实根部分的系数

$$K_i = (s-p_i)F(s)|_{s=p_i}, \quad i=1, 2, \cdots, n-2$$

对应的反变换参见情况 1)。

下面求共轭复数极点部分的反变换。

将 K_i 代入式(5-39),通分可得系数 C 和 D 。对于复数根部分,设

$$F_1(s) = \frac{Cs+D}{(s+\alpha)^2 + \beta^2}$$

利用式(5-20)和式(5-21),经过匹配整理

$$\begin{aligned} F_1(s) &= \frac{Cs + D}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} = \frac{C(s + \alpha) + \beta\left(\frac{D - C\alpha}{\beta}\right)}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} \\ &= C \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} + \left(\frac{D - C\alpha}{\beta}\right) \frac{\beta}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} \end{aligned} \quad (5-40)$$

即得 $F_1(s)$ 的反变换

$$f_1(t) = \left[C e^{-\alpha t} \cos(\beta t) + \left(\frac{D - C\alpha}{\beta}\right) e^{-\alpha t} \sin(\beta t) \right] u(t)$$

【例题 5.10】 已知 $F(s) = \frac{s^2 + 3}{(s^2 + 2s + 5)(s + 2)}$, 求 $f(t)$ 。

解: 进行部分分式展开

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{K_0}{s + 2} + \frac{K_1 s + K_2}{s^2 + 2s + 5} \\ K_0 &= (s + 2) \frac{s^2 + 3}{(s^2 + 2s + 5)(s + 2)} \Big|_{s=-2} = \frac{7}{5} \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{7/5}{s + 2} + \frac{K_1 s + K_2}{s^2 + 2s + 5} = \frac{7/5}{s + 2} + \frac{(-2/5)s - 2}{s^2 + 2s + 5} \\ &= \frac{7/5}{s + 2} + \frac{(-2/5)(s + 1)}{(s + 1)^2 + 2^2} + \frac{(-4/5) \cdot 2}{(s + 1)^2 + 2^2} \end{aligned}$$

故

$$f(t) = \frac{7}{5} e^{-2t} u(t) + \left[-\frac{2}{5} e^{-t} \cos(2t) - \frac{4}{5} e^{-t} \sin(2t) \right] u(t)$$

3) $F(s)$ 为有理真分式且极点为高阶(重极点)情况

设

$$F(s) = \frac{A(s)}{(s - p_1)^r D(s)}$$

其中 $D(s)$ 可分解成单阶因子。对于 $F(s)$ 的重根部分, 进行部分分式展开时, 要展开成 r 项。

$$F(s) = \frac{A_{11}}{(s - p_1)^r} + \frac{A_{12}}{(s - p_1)^{r-1}} + \cdots + \frac{A_{1r}}{s - p_1} + \frac{E(s)}{D(s)} \quad (5-41)$$

式(5-41)两端乘以 $(s - p_1)^r$, 有

$$(s - p_1)^r F(s) = A_{11} + A_{12}(s - p_1) + \cdots + A_{1r}(s - p_1)^{r-1} + (s - p_1)^r \frac{E(s)}{D(s)} \quad (5-42)$$

令 $s = p_1$, 得

$$A_{11} = (s - p_1)^r F(s) \Big|_{s=p_1}$$

对式(5-42)求一阶导数,并令 $s = p_1$, 得

$$A_{12} = \frac{d}{ds} [(s - p_1)^r F(s)] \Big|_{s=p_1}$$

一般系数

$$A_{1i} = \frac{1}{(i-1)!} \frac{d^{i-1}}{ds^{i-1}} [(s - p_1)^r F(s)] \Big|_{s=p_1} \quad (5-43)$$

【例题 5.11】 已知 $F(s) = \frac{s-2}{s(s+1)^2}$, 求 $f(t)$ 。

解: 先进行部分分式展开

$$F(s) = \frac{K_0}{s} + \frac{A_{11}}{(s+1)^2} + \frac{A_{12}}{s+1}$$

$$K_0 = s \frac{s-2}{s(s+1)^2} \Big|_{s=0} = -2$$

$$A_{11} = (s+1)^2 \frac{s-2}{s(s+1)^2} \Big|_{s=-1} = 3$$

$$A_{12} = \frac{d}{ds} \left[(s+1)^2 \frac{s-2}{s(s+1)^2} \right] \Big|_{s=-1} = 2$$

所以

$$F(s) = \frac{-2}{s} + \frac{3}{(s+1)^2} + \frac{2}{s+1}$$

设 $F_1(s) = \frac{1}{s+1}$, 即 $f_1(t) = e^{-t}u(t)$ 。由于

$$\frac{d}{ds} F_1(s) = \frac{-1}{(s+1)^2}$$

故

$$\frac{3}{(s+1)^2} = -3 \frac{d}{ds} F_1(s)$$

即

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{3}{(s+1)^2} \right] = 3t f_1(t) = 3t e^{-t} u(t)$$

则

$$f(t) = (-2 + 3t e^{-t} + 2e^{-t}) u(t)$$

2. 当 $m \geq n$ 时, $F(s)$ 分子多项式阶次等于或大于分母多项式阶次

这种情况下需要先将 $F(s)$ 分解成有理多项式和有理真分式之和, 即

$$F(s) = R(s) + \frac{P(s)}{Q(s)}$$

其中 $R(s)$ 为多项式, $\frac{P(s)}{Q(s)}$ 是有理真分式。有理真分式部分的反变换同 1. 中所述方法。

而对于多项式部分的反变换,考虑公式

$$\mathcal{L}[A\delta(t)] = A$$

$$\mathcal{L}[A\delta^{(k)}(t)] = As^k$$

【例题 5.12】 求 $F(s) = \frac{s^2 + 3s + 1}{s + 1}$ 的拉普拉斯反变换。

解: $F(s)$ 的分子阶次大于分母阶次,需要将 $F(s)$ 展开成多项式和有理真分式之和。

$$F(s) = \frac{s(s+1) + 2(s+1) - 1}{s+1} = s + 2 - \frac{1}{s+1}$$

则

$$f(t) = \delta'(t) + 2\delta(t) - e^{-t}u(t)$$

5.4 用拉普拉斯变换求解微分方程和分析电路

本章前3节的内容是信号的 s 域分析,实际上属于基础部分。从本节开始,进入本章的核心内容——在 s 域分析求解连续时间系统。包括两方面的内容,一是作为工具,利用拉普拉斯变换求解微分方程和电路的响应;二是在 s 域分析系统的特性。

拉普拉斯变换的微分性质显示,时域的求导运算在 s 域变成了代数运算。因此,在时域曾经非常困难的微分方程和电路的求解问题,在 s 域将变得异常简单。

5.4.1 用拉普拉斯变换求解微分方程

在用拉普拉斯变换求解微分方程时,需要用到微分性质

$$\begin{cases} \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = sF(s) - f(0_-) \\ \mathcal{L}\left[\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right] = s^2F(s) - sf(0_-) - f'(0_-) \end{cases}$$

【例题 5.13】 连续时间系统的微分方程 $\frac{d^2}{dt^2}r(t) + 3\frac{d}{dt}r(t) + 2r(t) = \frac{d}{dt}e(t) + 3e(t)$, $e(t) = u(t)$, $r(0_-) = 1$, $r'(0_-) = 2$, 用拉普拉斯变换求系统的响应 $r(t)$ 。

解: 微分方程两端进行拉普拉斯变换,根据微分性质,得

$$\begin{aligned} [s^2R(s) - sr(0_-) - r'(0_-)] + 3[sR(s) - r(0_-)] + 2R(s) \\ = [sE(s) - e(0_-)] + 3E(s) \end{aligned}$$

其中, $e(0_-) = u(t)|_{t=0_-} = 0$ 。整理得

$$(s^2 + 3s + 2)R(s) = [sr(0_-) + r'(0_-) + 3r(0_-)] + (s + 3)E(s)$$

代入 $r(0_-)$ 和 $r'(0_-)$ 的值,并将 $e(t)$ 进行拉普拉斯变换

$$E(s) = \frac{1}{s}$$



视频讲解

得

$$R(s) = \frac{s^2 + 6s + 3}{s(s^2 + 3s + 2)} = \frac{2}{s+1} - \frac{5/2}{s+2} + \frac{3/2}{s}$$

则系统响应

$$r(t) = \left(2e^{-t} - \frac{5}{2}e^{-2t} + \frac{3}{2} \right) u(t)$$

显然,拉普拉斯变换将微分方程变成了代数方程,因此求解微分方程的响应变得非常简单。

另外,根据零输入响应和零状态响应的概念,在 s 域求解 ZIR 和 ZSR 也变得非常容易。

对于一般的微分方程

$$\frac{d^n}{dt^n}r(t) + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}r(t) + \cdots + a_n r(t) = b_0 \frac{d^m}{dt^m}e(t) + b_1 \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}e(t) + \cdots + b_m e(t)$$

两端进行拉普拉斯变换

$$\begin{aligned} & \left[s^n R(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} r^{(k)}(0_-) \right] + a_1 \left[s^{n-1} R(s) - \sum_{k=0}^{n-2} s^{n-k-2} r^{(k)}(0_-) \right] + \cdots + a_n R(s) \\ & = b_0 s^m E(s) + b_1 s^{m-1} E(s) + \cdots + b_m E(s) \end{aligned}$$

整理得

$$\begin{aligned} R(s) = & \frac{\sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} r^{(k)}(0_-) + a_1 \sum_{k=0}^{n-2} s^{n-k-2} r^{(k)}(0_-) + \cdots + a_{n-1} r(0_-)}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_n} + \\ & \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_n} E(s) \end{aligned}$$

式中,等号右端第一项与输入信号 $E(s)$ 无关,仅仅由起始条件 $\{r^{(k)}(0_-)\}$ 决定,因此,这部分属于零输入响应;第二项由 $E(s)$ 决定,与起始条件无关,因此属于零状态响应。

因此有

$$R_{zi}(s) = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} r^{(k)}(0_-) + a_1 \sum_{k=0}^{n-2} s^{n-k-2} r^{(k)}(0_-) + \cdots + a_{n-1} r(0_-)}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_n} \quad (5-44)$$

$$R_{zs}(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_n} E(s) \quad (5-45)$$

分别经过拉普拉斯反变换,即可得到零输入响应和零状态响应。

【例题 5.14】 求例题 5.13 的微分方程的零输入响应和零状态响应。

解:微分方程两端进行拉普拉斯变换

$$[s^2 R(s) - s r(0_-) - r'(0_-)] + 3[sR(s) - r(0_-)] + 2R(s) = sE(s) + 3E(s)$$

整理得

$$R(s) = \frac{s r(0_-) + r'(0_-) + 3r(0_-)}{s^2 + 3s + 2} + \frac{s + 3}{s^2 + 3s + 2} E(s)$$

所以,

$$R_{zi}(s) = \frac{sr(0_-) + r'(0_-) + 3r(0_-)}{s^2 + 3s + 2}$$

$$R_{zs}(s) = \frac{s + 3}{s^2 + 3s + 2}E(s)$$

代入 $r(0_-)$ 和 $r'(0_-)$ 的值,得零输入响应

$$R_{zi}(s) = \frac{s + 5}{s^2 + 3s + 2} = \frac{4}{s + 1} - \frac{3}{s + 2}$$

$$r_{zi}(t) = (4e^{-t} - 3e^{-2t})u(t)$$

代入 $E(s) = \frac{1}{s}$,得零状态响应

$$R_{zs}(s) = \frac{s + 3}{s^2 + 3s + 2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{3/2}{s} + \frac{-2}{s + 1} + \frac{1/2}{s + 2}$$

$$r_{zs}(t) = \left(\frac{3}{2} - 2e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}\right)u(t)$$

因此,完全响应

$$r(t) = r_{zi}(t) + r_{zs}(t) = \left(\frac{3}{2} + 2e^{-t} - \frac{5}{2}e^{-2t}\right)u(t)$$

最终结果与例题 5.13 的结果一致。

本题在第 2 章曾用时域方法求解(见例题 2.29),相比于时域解法,拉普拉斯变换求解微分方程要简单得多。尤其是零状态响应的求解,在时域是最烦琐的,而在 s 域却是最简单的。



视频讲解

5.4.2 用拉普拉斯变换分析电路

拉普拉斯变换作为一种非常强大的线性系统分析工具,不仅求解微分方程异常简单,对于电路,在 s 域分析也很容易。

在 5.2 节拉普拉斯变换的性质中,根据线性性质、微分性质和积分性质,已经推导出电阻、电容、电感等电路元件的 s 域模型,时域里动态元件的电压、电流之间的微分、积分关系在 s 域中变成了代数关系,电路元件在 s 域可作为“阻抗”处理。

图 5-8 表示的是三个电路元件的 s 域模型。

【例题 5.15】 电路如图 5-9 所示, $e_1(t) = 2V$, $e_2(t) = e^{-2t}$, $C = 1/2F$, $R = 2/5\Omega$, $L = 1/2H$ 。 $t < 0$ 时开关位于 1, 电路达到稳态。 $t = 0$ 时开关由 1 转到 2 的位置, 求电感两端的电压。

解:

(1) 确定开关转换前 $t = 0_-$ 时刻储能元件的起始状态。 $t \leq 0_-$ 时电源 $e_1(t) = 2V$, 电路达到稳态, 因此, $i_L(0_-) = 0A$, $v_C(0_-) = 2V$ 。

(2) 将 $t > 0$ 的激励源 $e_2(t) = e^{-2t}u(t)$ 进行拉普拉斯变换, 得

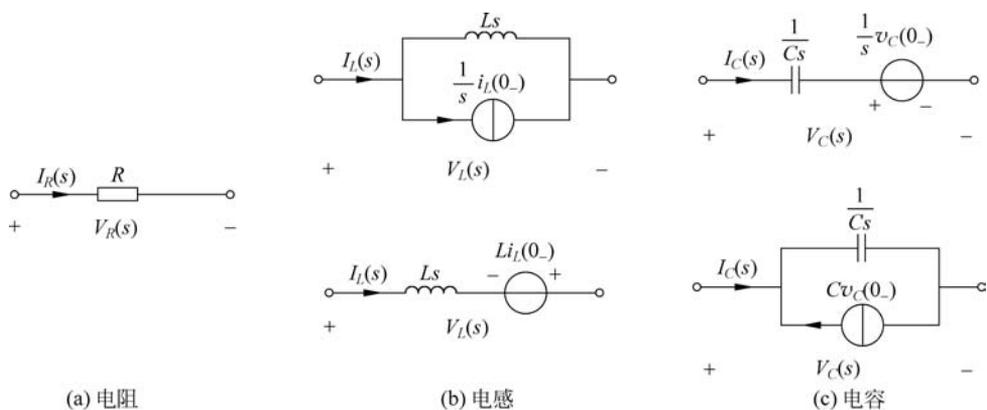
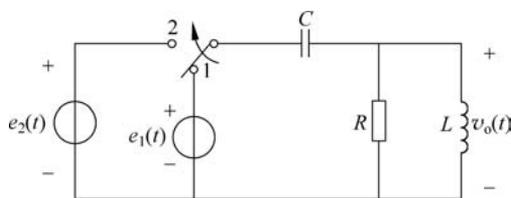
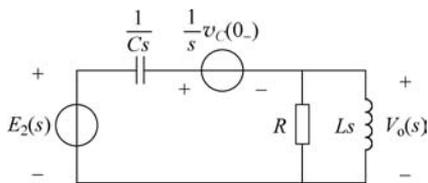

 图 5-8 电路元件的 s 域等效模型


图 5-9 例题 5.15 图

$$E_2(s) = \frac{1}{s+2}$$

(3) 画出 $t \geq 0_+$ 时电路的 s 域等效模型(见图 5-10), 在 s 域中电路元件等同于阻抗, 通过“阻抗”元件的分压、分流关系可以得到关于输出 $V_o(s)$ 的方程。


 图 5-10 电路的 s 域等效模型

(4) 根据 s 域等效电路, 列写节点电流方程

$$\frac{V_o(s)}{Ls} + \frac{V_o(s)}{R} = \frac{E_2(s) - \frac{1}{s}v_C(0_-) - V_o(s)}{\frac{1}{Cs}}$$

代入参数, 得

$$\frac{V_o(s)}{s/2} + \frac{V_o(s)}{2/5} = \frac{\frac{1}{s+2} - 2/s - V_o(s)}{2/s}$$

整理得

$$V_o(s) = \frac{2s}{s^2 + 5s + 4} \cdot \frac{-(s+4)}{2(s+2)} = \frac{-s}{(s+1)(s+2)}$$

(5) 求拉普拉斯反变换

将 $V_o(s)$ 部分分式展开

$$V_o(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{-2}{s+2}$$

得

$$v_o(t) = (e^{-t} - 2e^{-2t})u(t)$$

本题就是例题 2.27 的电路系统,在第 2 章曾用时域方法分析求解,本章在 s 域求解,解题过程明显简单很多。

5.5 系统函数及零极点

拉普拉斯变换作为连续时间系统分析和设计的一种强大工具,不仅用于求解微分方程和电路的响应,更重要的是对系统进行分析。通过系统函数的零极点分布,分析系统的内在特性。

连续时间系统有三种描述方式,一是系统的数学模型——微分方程;二是系统的物理模型——框图。当然,电路是真实的物理系统。除了上述描述方式,还有第三种,就是本节阐述的系统函数,这也是拉普拉斯变换的重要贡献之一——用系统函数代替时域的微分方程来表示系统。

实际上,第 2 章的单位冲激响应 $h(t)$ 和系统函数是同一种描述方式,一个是系统的时域表征,一个是系统的 s 域表征,是同一概念在不同域的不同表示。

从本节开始,通过系统函数对系统进行分析。在控制系统中,系统函数也称为传递函数。

5.5.1 系统函数

对于 LTI 系统,系统函数定义为单位冲激响应的拉普拉斯变换,图 5-11 描述了系统函数与单位冲激响应之间以及任意输入与其输出之间的关系。

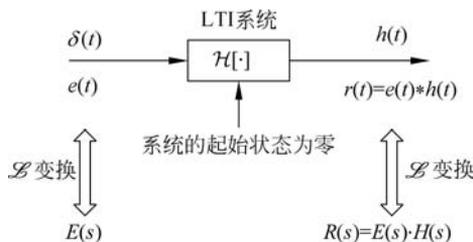


图 5-11 LTI 系统的时域和 s 域

由图 5-11 可得

$$H(s) = \mathcal{L}[h(t)] = \frac{R(s)}{E(s)} \quad (5-46)$$



视频讲解

$H(s)$ 称为系统函数,等于零状态条件下输出的拉普拉斯变换与输入的拉普拉斯变换之比。系统函数是系统的 s 域表征,是系统固有的,与外加激励无关,与系统的状态无关。

【例题 5.16】 系统微分方程 $\frac{d^2}{dt^2}r(t) + 3\frac{d}{dt}r(t) + 2r(t) = \frac{d}{dt}e(t) + 3e(t)$, 求系统函数和单位冲激响应。

解: 微分方程两端进行拉普拉斯变换, 注意零状态条件下, $r(0_-) = 0, r'(0_-) = 0$, 则

$$s^2R(s) + 3sR(s) + 2R(s) = sE(s) + 3E(s)$$

得系统函数

$$H(s) = \frac{R(s)}{E(s)} = \frac{s+3}{s^2+3s+2}$$

将 $H(s)$ 进行部分分式展开

$$H(s) = \frac{2}{s+1} + \frac{-1}{s+2}$$

则

$$h(t) = (2e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

系统函数和微分方程都是系统的描述, 它们之间有着唯一互相对应的关系。

对于 n 阶微分方程

$$\frac{d^n}{dt^n}r(t) + a_1\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}r(t) + \cdots + a_n r(t) = b_0\frac{d^m}{dt^m}e(t) + b_1\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}e(t) + \cdots + b_m e(t) \quad (5-47)$$

两端进行拉普拉斯变换(零状态条件下), 有

$$s^n R(s) + a_1 s^{n-1} R(s) + \cdots + a_n R(s) = b_0 s^m E(s) + b_1 s^{m-1} E(s) + \cdots + b_m E(s)$$

则系统函数

$$H(s) = \frac{R(s)}{E(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n} \quad (5-48)$$

观察式(5-47)和式(5-48), $H(s)$ 与微分方程系数之间的对应关系一目了然。

提示: 系统函数作为系统的重要描述, 是连接微分方程、物理系统、单位冲激响应之间的桥梁。实际上, 系统的单位冲激响应最简单的解法是先求系统函数 $H(s)$, 再进行拉普拉斯反变换。

【例题 5.17】 求例题 5.15 所示电路(见图 5-9)的系统函数, 在 s 域建立电路的微分方程。

解: 画出零状态条件下电路的 s 域模型, 如图 5-12 所示。

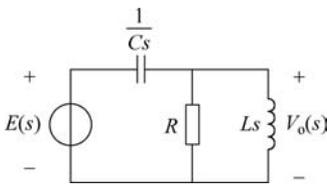


图 5-12 零状态条件下电路的 s 域模型

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{E(s)} = \frac{\frac{R \cdot Ls}{R + Ls}}{\frac{1}{Cs} + \frac{R \cdot Ls}{R + Ls}}$$

代入参数,得

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{E(s)} = \frac{s^2}{s^2 + 5s + 4}$$

故

$$(s^2 + 5s + 4)V_o(s) = s^2 E(s)$$

可得电路的微分方程

$$\frac{d^2}{dt^2}v_o(t) + 5 \frac{d}{dt}v_o(t) + 4v_o(t) = \frac{d^2}{dt^2}e(t)$$

结果与第 2 章求得的结果一致,但通过系统函数建立微分方程既简单又有效。

可以进一步得到图 5-9 所示电路的单位冲激响应。

$$H(s) = \frac{s^2}{s^2 + 5s + 4} = 1 + \frac{1/3}{s + 1} - \frac{16/3}{s + 4}$$

则

$$h(t) = \delta(t) + \left(\frac{1}{3}e^{-t} - \frac{16}{3}e^{-4t} \right) u(t)$$

另外,由系统函数求解零状态解也非常简单,由

$$r_{zs}(t) = e(t) * h(t)$$

则

$$R(s) = E(s) \cdot H(s)$$

【例题 5.18】 系统微分方程 $\frac{d^2}{dt^2}r(t) + 3 \frac{d}{dt}r(t) + 2r(t) = \frac{d}{dt}e(t) + 3e(t)$, $e(t) =$

$u(t)$,求系统的零状态响应。

解: 由微分方程直接写出系统函数

$$H(s) = \frac{s + 3}{s^2 + 3s + 2}$$

激励信号的拉普拉斯变换

$$E(s) = \frac{1}{s}$$

则

$$R_{zs}(s) = E(s) \cdot H(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{s + 3}{s^2 + 3s + 2} = \frac{3/2}{s} + \frac{-2}{s + 1} + \frac{1/2}{s + 2}$$

因此,零状态响应



视频讲解

$$r_{zs}(t) = \left(\frac{3}{2} - 2e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \right) u(t)$$

5.5.2 系统的零极点分布图

系统的零点和极点是指系统函数的零点和极点。在 s 平面上,将系统的零点和极点标示出来,这样的图形就是系统的零极点分布图。

对于 n 阶 LTI 系统,系统函数一般是有理分式,将分子分母因式分解,得

$$H(s) = \frac{a_m(s - z_1)(s - z_2)\cdots(s - z_m)}{b_m(s - p_1)(s - p_2)\cdots(s - p_n)} \quad (5-49)$$

令 $H(s) = 0$, 得 $s = z_1, z_2, \dots, z_m$, 即系统的零点; 令 $H(s) \rightarrow \infty$, 得 $s = p_1, p_2, \dots, p_n$, 即系统的极点。将 $s = z_1, z_2, \dots, z_m$ 和 $s = p_1, p_2, \dots, p_n$ 标示在 s 平面上, 零点用“○”表示, 极点用“×”表示, 得到的就是系统的零极点分布图。

【例题 5.19】 系统函数 $H(s) = \frac{s^2 - 2s + 2}{s^2(s + 1)}$, 画出系统的零极点分布图。

解: 令 $H(s) = 0$, 即 $s^2 - 2s + 2 = 0$, 得到系统的零点 $z_1 = 1 + j, z_2 = 1 - j$ 。

令 $H(s) \rightarrow \infty$, 即 $s^2(s + 1) = 0$, 得到系统的极点 $p_{1,2} = 0$ (二阶), $p_3 = -1$ 。

在 s 平面上画出系统的零极点分布图, 如图 5-13 所示。

实际上,用零极点分布图可以直接表示系统(等同于系统函数的图形描述),再限定一些其他条件,就可以唯一确定系统函数,也即确定了系统。

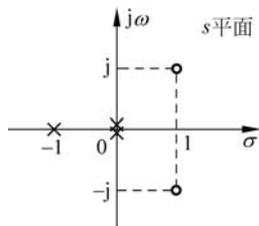


图 5-13 零极点分布

【例题 5.20】 系统的零极点分布如图 5-14 所示,且 $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = 10$, 求 $H(s)$ 。

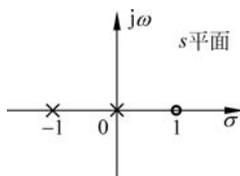


图 5-14 例题 5.20 图

解: 根据零极点分布, 写出系统函数

$$H(s) = K \frac{s - 1}{s(s + 1)}$$

由终值定理, 得

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sH(s) = \lim_{s \rightarrow 0} K \frac{s(s - 1)}{s(s + 1)} = -K = 10$$

即 $K = -10$ 。故

$$H(s) = -10 \frac{s - 1}{s(s + 1)}$$

读者可以通过求 $h(t)$ 并计算 $h(+\infty)$ 自行验证。

对于 LTI 系统,由系统的零极点分布可以分析系统的很多特性,如时间特性、频率特性、稳定性等,还可以进一步确定系统的各种响应。因此,系统的零极点分析是 LTI 系统分析的重要内容。



视频讲解

5.6 系统的零极点分布与时间特性

本节分析系统的零极点分布与系统时间特性之间的关系,这里所说的时间特性指的是系统的时域表征 $h(t)$ 。因此,本节的内容实际上是分析“系统函数 $H(s)$ 的零极点分布与系统单位冲激响应 $h(t)$ 之间的关系”。

将系统函数表示为

$$H(s) = K \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

其中, p_i 为系统的极点; z_j 为系统的零点。当极点、零点位于 s 平面不同位置时, $h(t)$ 的波形形状、幅度或相位有着怎样的变化,这是本节要分析的内容。

5.6.1 极点分布与时域波形

下面通过一些实例,分析极点对 $h(t)$ 波形的影响。为了更有说服力,在分析过程中,系统一般只含有极点,不含有零点。

1. 极点位于 s 左半平面

1) 单阶极点

对于单阶实极点的情况,例如

$$H(s) = \frac{1}{s + a}, \quad a > 0$$

则

$$h(t) = e^{-at} u(t)$$

可知 $h(t)$ 是单调衰减的,如图 5-15(a) 所示。

对于单阶复极点的情况,例如

$$H(s) = \frac{\omega_0}{(s + a)^2 + \omega_0^2}, \quad a > 0$$

则

$$h(t) = e^{-at} \sin(\omega_0 t) u(t)$$

$h(t)$ 振荡衰减,如图 5-15(b) 所示。

2) 多阶极点

例如

$$H(s) = \frac{1}{(s + a)^2}, \quad a > 0$$

可知

$$h(t) = te^{-at}u(t)$$

$h(t)$ 的波形总体是衰减的,如图 5-15(c)所示。

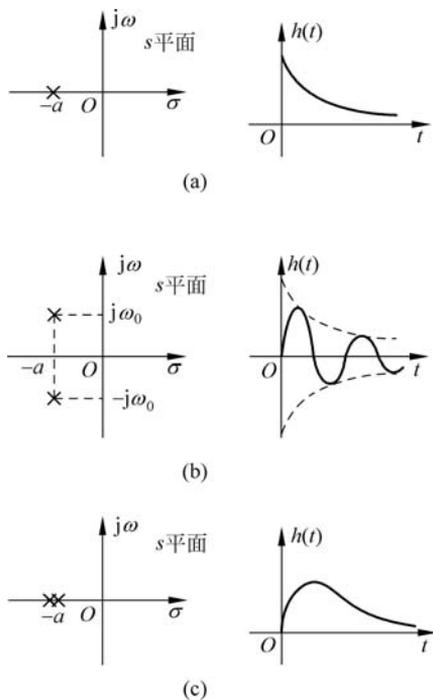


图 5-15 s 左半平面的极点

由此得出第一个结论,如果极点位于 s 左半平面, $h(t)$ 的波形是衰减的。

2. 极点位于右半平面

1) 单阶极点

对于单阶实极点的情况,例如

$$H(s) = \frac{1}{s-a}, \quad a > 0$$

则

$$h(t) = e^{at}u(t)$$

$h(t)$ 的波形单调增长,如图 5-16(a)所示。

对于单阶复极点的情况,例如

$$H(s) = \frac{\omega_0}{(s-a)^2 + \omega_0^2}, \quad a > 0$$

则

$$h(t) = e^{at} \sin(\omega_0 t) u(t)$$

$h(t)$ 的波形振荡增长,如图 5-16(b)所示。

2) 多阶极点

例如

$$H(s) = \frac{1}{(s - a)^2}$$

可知

$$h(t) = t e^{at} u(t)$$

$h(t)$ 的波形也是增长的,而且增长速度更快,如图 5-16(c)所示。

由此得出第二个结论,如果极点位于 s 右半平面, $h(t)$ 的波形是增长的。

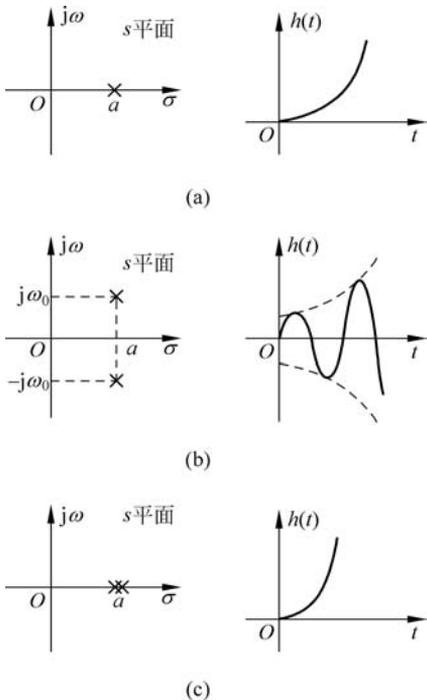


图 5-16 s 右半平面的极点

3. 极点位于 $j\omega$ 轴上

1) 单阶极点

对于单阶实极点,例如

$$H(s) = \frac{1}{s}$$

则

$$h(t) = u(t)$$

$h(t)$ 是阶跃函数, 波形单调等幅, 如图 5-17(a) 所示。

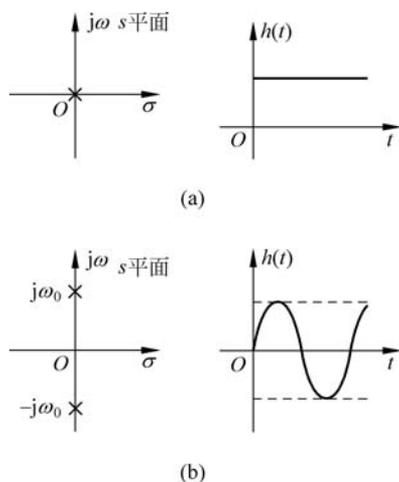


图 5-17 $j\omega$ 轴上的单阶极点

对于单阶复数极点, 例如

$$H(s) = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

则

$$h(t) = \sin(\omega_0 t) u(t)$$

$h(t)$ 的波形是振荡等幅的, 如图 5-17(b) 所示。

由此得出第三个结论, 如果单阶极点位于 $j\omega$ 轴上, $h(t)$ 的波形是等幅的。

2) $j\omega$ 轴上的高阶极点

对于 $j\omega$ 轴上的高阶实极点, 例如

$$H(s) = \frac{1}{s^2}$$

可知

$$h(t) = t u(t)$$

$h(t)$ 的波形单调增长, 如图 5-18(a) 所示。

对于 $j\omega$ 轴上的高阶复数极点, 例如

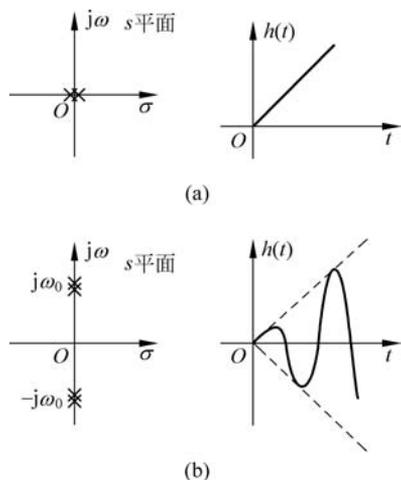
$$H(s) = \frac{2\omega_0 s}{(s^2 + \omega_0^2)^2}$$

则

$$h(t) = t \sin(\omega_0 t) u(t)$$

$h(t)$ 的波形振荡增长, 如图 5-18(b) 所示。

由此得出第四个结论, 位于 $j\omega$ 轴上的高阶极点, $h(t)$ 的波形是增长的。

图 5-18 $j\omega$ 轴上的高阶极点

实际上,系统的极点决定 $h(t)$ 的波形形状。左半平面的极点,波形衰减;右半平面的极点,波形增长; $j\omega$ 轴上的单阶极点,波形等幅; $j\omega$ 轴上的高阶极点,波形增长。而实数极点对应的波形是单调变化的,复数极点对应的波形是振荡变化的。

5.6.2 零点影响波形的幅度和相位

为了证明这个结论,考虑两个具有相同极点而零点不同的系统

$$H_i(s) = \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$$

$$H_j(s) = \frac{s+b}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$$

系统 $H_i(s)$ 和系统 $H_j(s)$ 具有相同的极点 $-a \pm j\omega_0$, 根据前面的分析可知,这两个系统的 $h(t)$ 具有相同的波形形状——振荡衰减。不同的是,两个系统的零点不同,分别是 $z_i = -a$ 和 $z_j = -b$ 。不同的零点会导致什么不同呢? 下面分别求两个系统的 $h(t)$ 。

$$h_i(t) = e^{-at} \cos(\omega_0 t) u(t)$$

而

$$\begin{aligned} h_j(t) &= \left[e^{-at} \cos(\omega_0 t) + \frac{b-a}{\omega_0} e^{-at} \sin(\omega_0 t) \right] u(t) \\ &= \sqrt{\frac{\omega_0^2 + (b-a)^2}{\omega_0^2}} e^{-at} \cos(\omega_0 t + \varphi) u(t) \end{aligned}$$

对比 $h_i(t)$ 和 $h_j(t)$, 可以发现,二者的幅度和相位不同。因此,零点影响 $h(t)$ 波形的幅度和相位。



视频讲解

5.7 因果系统的稳定性

本节所讨论的系统稳定性指的是因果系统的稳定性,对于非因果系统,在 5.12 节进行分析。

5.7.1 因果稳定系统的 s 域特征

在第 2 章,已经分析过 BIBO 系统稳定性的时域特征,即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < \infty$$

对于因果稳定系统,有

$$\int_0^{+\infty} |h(t)| dt < \infty$$

由此可知

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = 0$$

因果稳定系统要求 $h(t)$ 的波形总的趋势是衰减的。根据 5.6 节 $H(s)$ 的极点与时域波形的关系可知,极点只有位于 s 左半平面,波形才是衰减的。因此,LTI 因果稳定系统的 s 域特征是系统的极点全部位于 s 左半平面。这是判断因果连续系统是否稳定的一个准则。需要注意的是,如果有零极点相消,在利用系统函数进行稳定性分析之前消去零极点对,但可能存在潜在不稳定的状况。

5.7.2 稳定性的分类

根据因果系统是否具有稳定性,将系统分为三类。第一种是稳定系统,系统函数的所有极点都位于 s 左半平面, $h(t)$ 的波形衰减。第二种是临界稳定系统,系统的一个或多个极点位于 $j\omega$ 轴上且为单阶,此时 $h(t)$ 的波形不随时间衰减,也不随波形增长,而是等幅变化,这种系统称为临界稳定系统。第三种是不稳定系统,系统有多重极点位于 $j\omega$ 轴上或有极点位于 s 右半平面,此时 $h(t)$ 的波形随着时间增长而增长,当 $t \rightarrow \infty$ 时, $h(t) \rightarrow \infty$,系统不稳定。临界稳定系统是不稳定系统的一种特例。

【例题 5.21】 电路如图 5-19 所示,假设图中运算放大器的输入阻抗为 ∞ ,输出阻抗为零。为使系统稳定,求 A 的取值范围。如果要求电路处于临界稳定状态,求电路的单位冲激响应。

解: 为了便于分析,设 $v_1(t)$,如图 5-19 所示。由于运算放大器的输入阻抗无穷大而输出阻抗为零,故有

$$V_o(s) = -A [V_i(s) - V_1(s)]$$

$$V_1(s) = \frac{1/Cs}{1/Cs + R} V_o(s)$$

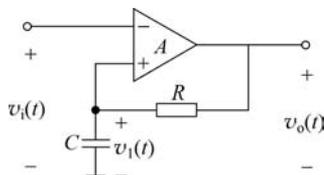


图 5-19 例题 5.21 图

消去中间变量 $V_1(s)$, 得系统函数

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{-(s + 1/RC)A}{s + \frac{1-A}{RC}}$$

极点 $p_1 = -\frac{1-A}{RC}$, 极点为实数, 为使系统稳定, 极点需要落在 s 左半平面, 故

$$-\frac{1-A}{RC} < 0$$

即 $A < 1$ 。

实际上, 该电路中的电阻 R 反馈到了放大器正端, $A < 1$ 使系统稳定就易于理解了; 反之, 如果 $A > 1$, 会导致信号不断增强, 系统不稳定。

临界稳定要求极点落在 $j\omega$ 轴上且为单阶, 因此

$$p_1 = -\frac{1-A}{RC} = 0$$

即 $A = 1$, 此时

$$H(s) = -\frac{s + 1/RC}{s} = -1 - \frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{s}$$

此时电路的单位冲激响应为

$$h(t) = -\delta(t) - \frac{1}{RC}u(t)$$



视频讲解

5.8 由零极点分析系统的响应

5.8.1 自由响应与强迫响应

对于 n 阶系统, 微分方程

$$\frac{d^n}{dt^n}r(t) + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}r(t) + \cdots + a_n r(t) = b_0 \frac{d^m}{dt^m}e(t) + b_1 \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}e(t) + \cdots + b_m e(t)$$

特征方程

$$\alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + a_2 \alpha^{n-2} + \cdots + a_n = 0 \quad (5-50)$$

因式分解

$$(\alpha - \alpha_1)(\alpha - \alpha_2) \cdots (\alpha - \alpha_n) = 0$$

可得特征根 $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 。

另一方面, 由微分方程可得系统函数

$$H(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_n}$$

令

$$s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_n = 0 \quad (5-51)$$

因式分解

$$(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n) = 0$$

可得极点 $s = p_1, p_2, \cdots, p_n$ 。

事实上,式(5-50)和式(5-51)的方程相同,因此有

$$p_1 = \alpha_1, \quad p_2 = \alpha_2, \quad p_3 = \alpha_3, \quad \cdots, \quad p_n = \alpha_n$$

一个有意思的现象出现了,微分方程的特征根就是系统函数的极点。明白“极点”的含义了吧?对,极点就是特征根。

明确了系统极点就是微分方程的特征根之后,就可以在 s 域根据极点分布确定自由响应和强迫响应。

微分方程两边进行拉普拉斯变换

$$\begin{aligned} & \left[s^n R(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} r^{(k)}(0_-) \right] + a_1 \left[s^{n-1} R(s) - \sum_{k=0}^{n-2} s^{n-k-2} r^{(k)}(0_-) \right] + \cdots + a_n R(s) \\ &= b_0 s^m E(s) + b_1 s^{m-1} E(s) + \cdots + b_m E(s) \end{aligned}$$

整理得

$$\begin{aligned} R(s) &= \frac{\sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} r^{(k)}(0_-) + a_1 \sum_{k=0}^{n-2} s^{n-k-2} r^{(k)}(0_-) + \cdots + a_{n-1} r(0_-)}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_n} + \\ & \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_n} E(s) \end{aligned}$$

令

$$A(s) = \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} r^{(k)}(0_-) + a_1 \sum_{k=0}^{n-2} s^{n-k-2} r^{(k)}(0_-) + \cdots + a_{n-1} r(0_-)$$

$$H(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_n} = \frac{B(s)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

$$E(s) = \frac{C(s)}{\prod_{j=1}^v (s - p_j)}$$

其中, p_i 是 $H(s)$ 的极点; p_j 是 $E(s)$ 的极点。

则

$$\begin{aligned} R(s) &= \frac{A(s)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} + \frac{B(s)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} \cdot \frac{C(s)}{\prod_{j=1}^v (s - p_j)} \\ &= \frac{D(s)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i) \prod_{j=1}^v (s - p_j)} \end{aligned} \quad (5-52)$$

在有理真分式的情况下, $R(s)$ 部分分式展开为

$$R(s) = \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{A_i}{s-p_i}}_{\text{自由响应}} + \underbrace{\sum_{j=1}^v \frac{B_j}{s-p_j}}_{\text{强迫响应}} \quad (5-53)$$

由于 p_i 是系统函数的极点, 也即微分方程的特征根, 因此, $\sum_{i=1}^n \frac{A_i}{s-p_i}$ 对应的是齐次解,

即自由响应; 而 p_j 是激励信号的拉普拉斯变换的极点, 因此, $\sum_{j=1}^v \frac{B_j}{s-p_j}$ 对应的是特解, 即强迫响应。

因此, 自由响应

$$r_h(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{p_i t}, \quad t > 0$$

强迫响应

$$r_p(t) = \sum_{j=1}^v B_j e^{p_j t}, \quad t > 0$$

提示: $H(s)$ 的极点形成自由响应部分, $E(s)$ 的极点形成强迫响应部分。

【例题 5.22】 系统微分方程 $\frac{d^2}{dt^2}r(t) + 3\frac{d}{dt}r(t) + 2r(t) = \frac{d}{dt}e(t) + 3e(t)$, $r(0_-) = 1$, $r'(0_-) = 2$, $e(t) = u(t)$, 用拉普拉斯变换求自由响应和强迫响应。

解: 由微分方程, 得

$$H(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2}$$

系统极点为 $p_1 = -1$, $p_2 = -2$ 。

输入信号的拉普拉斯变换 $E(s) = \frac{1}{s}$, 输入信号的极点为 $p_3 = 0$ 。

微分方程两端拉普拉斯变换, 有

$$[s^2R(s) - sr(0_-) - r'(0_-)] + 3[sR(s) - r(0_-)] + 2R(s) = sE(s) + 3E(s)$$

代入参数并整理得

$$R(s) = \frac{s^2 + 6s + 3}{s(s^2 + 3s + 2)} = \frac{2}{s+1} - \frac{5/2}{s+2} + \frac{3/2}{s}$$

前两项对应 $H(s)$ 的极点, 属于自由响应部分; 第三项对应激励信号的极点, 属于强迫响应部分。

因此, 自由响应

$$R_h(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{5/2}{s+2}$$

$$r_h(t) = \left(2e^{-t} - \frac{5}{2}e^{-2t}\right)u(t)$$

强迫响应

$$R_p(s) = \frac{3/2}{s}$$

$$r_p(t) = \frac{3}{2}u(t)$$

读者可自行用时域方法求解本题的自由响应和强迫响应进行验证。

【例题 5.23】 系统的零极点分布如图 5-20 所示, $h(0_+) = -4$, 求 $e(t) = u(t)$ 时的自由响应和强迫响应。

解: 由零极点写出系统函数

$$H(s) = K \frac{s(s-2)}{(s+1)^2+4} = K - \frac{K(4s+5)}{(s+1)^2+4}$$

根据初值定理

$$h(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot \frac{-K(4s+5)}{(s+1)^2+4} = -4K = -4$$

得 $K=1$ 。所以,

$$H(s) = \frac{s(s-2)}{(s+1)^2+4}$$

由 $e(t) = u(t)$ 得 $E(s) = \frac{1}{s}$, 故

$$R(s) = E(s)H(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{s(s-2)}{(s+1)^2+4} = \frac{s-2}{(s+1)^2+4}$$

$$= \frac{s+1}{(s+1)^2+4} - (3/2) \frac{2}{(s+1)^2+4}$$

$$r(t) = e^{-t} \left[\cos(2t) - \frac{3}{2} \sin(2t) \right] u(t)$$

本题由于 $E(s)$ 的极点被 $H(s)$ 的零点抵消掉, $R(s)$ 中的极点只剩下 $H(s)$ 的极点, 故没有强迫响应, 只有自由响应。即

$$r_h(t) = e^{-t} \left[\cos(2t) - \frac{3}{2} \sin(2t) \right] u(t)$$

$$r_p(t) = 0$$

5.8.2 暂态响应和稳态响应

在系统的响应中, 暂态响应指的是当 $t \rightarrow \infty$ 时, 响应 $r(t)$ 中消失的部分。而稳态响应指的是当 $t \rightarrow \infty$ 时, 响应 $r(t)$ 中依然稳定存在的部分。因此, 暂态响应的时函数必是随着时间而衰减, 工程中有意义的稳态响应的时函数应该是随着时间的延续最后趋于恒定。

考虑极点的影响, 由于左半平面的极点对应的波形是衰减的, 因此 $R(s)$ 中由左半平面的极点决定的响应属于暂态响应, 表示为 $R_{ts}(s)$; 位于 $j\omega$ 轴上的单阶极点, 对应的波形等幅, 当 $t \rightarrow \infty$ 时不会消失, 属于稳态响应, 表示为 $R_{ss}(s)$ 。

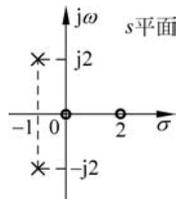


图 5-20 例题 5.23 图

完全响应

$$R(s) = R_{ts}(s) + R_{ss}(s)$$

在例题 5.22 中, 可知

$$R(s) = \underbrace{\frac{2}{s+1} - \frac{5/2}{s+2}}_{\text{暂态响应}} + \underbrace{\frac{3/2}{s}}_{\text{稳态响应}}$$

暂态响应

$$r_{ts}(t) = \left(2e^{-t} - \frac{5}{2}e^{-2t} \right) u(t)$$

稳态响应

$$r_{ss}(t) = \frac{3}{2}u(t)$$

由于该因果系统 $H(s)$ 的极点 $p_1 = -1$ 和 $p_2 = -2$ 位于 s 左半平面, 因此, 该系统是稳定系统。对于因果稳定系统, 单位阶跃信号产生的稳态响应依然是阶跃信号, 其终值将趋于常数。

而例题 5.23 中, 虽然输入信号也是单位阶跃信号 $u(t)$, 但由于零极点相抵消, 输入信号的极点被 $H(s)$ 的零点抵消掉, 因此没有剩下稳态响应, 只有暂态响应过程。

$$r_{ts}(t) = e^{-t} \left[\cos(2t) - \frac{3}{2}\sin(2t) \right] u(t)$$

$$r_{ss}(t) = 0$$

【例题 5.24】 系统微分方程 $\frac{d^2}{dt^2}r(t) + 4r(t) = \frac{d}{dt}e(t)$, $r(0_-) = 1$, $r'(0_-) = 2$, $e(t) = e^{-t}u(t)$, 求暂态响应和稳态响应。

解: 微分方程两端作拉普拉斯变换

$$[s^2R(s) - sr(0_-) - r'(0_-)] + 4R(s) = sE(s)$$

$$E(s) = \frac{1}{s+1}$$

代入起始条件及 $E(s)$, 并整理得

$$R(s) = \frac{s^2 + 4s + 2}{(s^2 + 4)(s + 1)} = \frac{-1/5}{s+1} + \frac{6/5s + 14/5}{s^2 + 4}$$

式中, 第一项的极点在左半平面, 属于暂态响应, 第二项的极点位于 $j\omega$ 轴上且为一阶, 对应稳态响应。故

$$R_{ts}(s) = \frac{-1/5}{s+1}$$

即暂态响应 $r_{ts}(t) = -\frac{1}{5}e^{-t}u(t)$ 。

而稳态响应

$$R_{ss}(s) = \frac{(6/5)s + 14/5}{s^2 + 4}$$

$$\text{即 } r_{ss}(t) = \left[\frac{6}{5} \cos(2t) + \frac{7}{5} \sin(2t) \right] u(t)。$$

与例题 5.22 和例题 5.23 不同的是, 本题的稳态响应是由于系统的一阶极点位于 $j\omega$ 轴上引起的。这是一个临界稳定系统。

思考一下, 本题的自由响应是什么?

5.8.3 正弦信号和单边正弦信号通过稳定系统的响应

单边正弦信号指的是在 $t=0$ 开始加入的正弦信号, 即

$$e(t) = A \cos(\omega_0 t) u(t)$$

而正弦信号存在于整个时间域 ($-\infty < t < +\infty$), 即

$$e(t) = A \cos(\omega_0 t)$$

下面分析这两种信号通过稳定系统的响应。

1. 单边正弦信号通过稳定系统

激励信号为单边正弦信号

$$e(t) = A \cos(\omega_0 t) u(t)$$

其拉普拉斯变换为

$$E(s) = \frac{As}{s^2 + \omega_0^2} = \frac{As}{(s + j\omega_0)(s - j\omega_0)}$$

设稳定系统的系统函数为

$$H(s) = \frac{\prod_{j=1}^m b_0(s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

由于系统稳定, 故极点 p_i 落在 s 左半平面。

那么, $e(t)$ 通过稳定系统 $H(s)$ 的响应为

$$\begin{aligned} R(s) &= E(s) \cdot H(s) = \frac{As}{(s + j\omega_0)(s - j\omega_0)} \cdot H(s) \\ &= \frac{As}{(s + j\omega_0)(s - j\omega_0)} \cdot \frac{\prod_{j=1}^m b_0(s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} \end{aligned} \quad (5-54)$$

部分分式展开

$$R(s) = \frac{K_1}{s + j\omega_0} + \frac{K_2}{s - j\omega_0} + \sum_{i=1}^n \frac{B_i}{s - p_i} \quad (5-55)$$

式(5-55)前两项的极点 $\pm j\omega_0$ 是输入信号 $E(s)$ 的极点, 位于 $j\omega$ 轴上, 且为单阶极



视频讲解

点,故对应的波形是等幅振荡的,属于稳态响应。而后面的 \sum 项的极点 p_i 是系统函数 $H(s)$ 的极点,由于系统稳定, p_i 落在 s 左半平面,对应的波形是衰减的,属于暂态响应。

因此,暂态响应

$$R_{ts}(s) = \sum_{i=1}^n \frac{B_i}{s - p_i}$$

即

$$r_{ts}(t) = \sum_{i=1}^n B_i e^{p_i t}, \quad t > 0$$

稳态响应

$$R_{ss}(s) = \frac{K_1}{s + j\omega_0} + \frac{K_2}{s - j\omega_0}$$

下面确定系数 K_1 和 K_2 , 根据式(5-54)

$$K_1 = (s + j\omega_0)R(s) \Big|_{s = -j\omega_0} = \frac{A}{2}H(-j\omega_0)$$

$$K_2 = (s - j\omega_0)R(s) \Big|_{s = j\omega_0} = \frac{A}{2}H(j\omega_0)$$

则

$$R_{ss}(s) = \frac{\frac{A}{2}H(-j\omega_0)}{s + j\omega_0} + \frac{\frac{A}{2}H(j\omega_0)}{s - j\omega_0}$$

反变换得到稳态响应

$$r_{ss}(t) = \frac{A}{2}H(-j\omega_0)e^{-j\omega_0 t} + \frac{A}{2}H(j\omega_0)e^{j\omega_0 t}, \quad t > 0 \quad (5-56)$$

将 $H(j\omega_0)$ 表示成幅度、相位形式

$$H(j\omega_0) = |H(j\omega_0)| e^{j\arg H(j\omega_0)}$$

根据傅里叶变换的共轭对称性,有

$$H(-j\omega_0) = |H(j\omega_0)| e^{-j\arg H(j\omega_0)}$$

则式(5-56)成为

$$\begin{aligned} r_{ss}(t) &= \frac{A}{2} |H(j\omega_0)| e^{-j\arg H(j\omega_0)} e^{-j\omega_0 t} + \frac{A}{2} |H(j\omega_0)| e^{j\arg H(j\omega_0)} e^{j\omega_0 t} \\ &= \frac{A}{2} |H(j\omega_0)| [e^{-j(\omega_0 t + \arg H(j\omega_0))} + e^{j(\omega_0 t + \arg H(j\omega_0))}] \\ &= A |H(j\omega_0)| \cos[\omega_0 t + \arg H(j\omega_0)], \quad t > 0 \end{aligned}$$

因此,当输入信号为单边正弦信号

$$e(t) = A \cos(\omega_0 t) u(t)$$

经过稳定系统,得到的稳态响应为

$$r_{ss}(t) = A |H(j\omega_0)| \cos[\omega_0 t + \arg H(j\omega_0)] u(t) \quad (5-57)$$

其中

$$H(j\omega_0) = H(s) \Big|_{s=j\omega_0} \quad (5-58)$$

单边正弦信号通过稳定系统的响应包括两部分,一部分属于暂态响应,由 $H(s)$ 的极点决定衰减速度;另一部分是稳态响应,由激励信号(单边正弦信号)的极点引起,并且是与激励信号同频率的正弦信号,其幅度和相位由系统在正弦信号频率点的频率响应加权。幅频 $|H(j\omega_0)|$ 加权于正弦输出的幅度,相频 $\arg H(j\omega_0)$ 加权于正弦输出的相角。

【例题 5.25】 输入信号 $e(t) = \cos(100t)u(t)$, 通过系统 $h(t) = 2e^{-100t}u(t)$, 求稳态响应和暂态响应。

解:

$$H(s) = \frac{2}{s+100}$$

极点 $p = -100$ 落于 s 左半平面, 系统稳定。

输入信号的频率 $\omega_0 = 100$, 则

$$H(j\omega_0) = H(j100) = \frac{2}{j100+100} = \frac{\sqrt{2}}{100} e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

根据式(5-58), 得稳态响应

$$r_{ss}(t) = \frac{\sqrt{2}}{100} \cos\left(100t - \frac{\pi}{4}\right) u(t)$$

下面求暂态响应。

输入信号的拉普拉斯变换

$$E(s) = \frac{s}{s^2+100^2}$$

则

$$R(s) = E(s) \cdot H(s) = \frac{s}{s^2+100^2} \cdot \frac{2}{s+100} = \frac{K_1}{s+100} + \frac{K_2s+K_3}{s^2+100^2}$$

$$K_1 = (s+100) \frac{s}{s^2+100^2} \cdot \frac{2}{s+100} \Big|_{s=-100} = -\frac{1}{100}$$

故暂态响应

$$R_{ts}(s) = \frac{-1/100}{s+100}$$

$$r_{ts}(t) = -\frac{1}{100} e^{-100t} u(t)$$

稳态响应与输入信号同频率, 暂态响应由系统的极点决定衰减速度。

对于任意角频率 ω , 式(5-58)可以表示为

$$H(j\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega} \quad (5-59)$$

式(5-59)是系统频率响应的另一种表示, 对于 BIBO 稳定系统, 系统的频率响应 $H(j\omega)$ 等于系统函数 $H(s)$ 在 $j\omega$ 轴上的取值。例题 5.25 的系统的频率响应

$$H(j\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{2}{j\omega+100}$$

实际上,在傅里叶积分收敛的情况下, $j\omega$ 轴上的拉普拉斯变换等于傅里叶变换。因此,一般也将 s 平面的 $j\omega$ 轴称为频率轴,将 s 域分析称为复频域分析。

提示:对于因果稳定信号或系统, $j\omega$ 轴上的拉普拉斯变换就是其傅里叶变换。

2. 正弦信号通过稳定系统

如果激励信号为正弦信号

$$e(t) = A\cos(\omega_0 t)$$

这是双边信号,不能用单边拉普拉斯变换求解。下面用傅里叶分析方法求解正弦信号通过稳定系统的响应。

激励信号的傅里叶变换为

$$E(j\omega) = A [\pi\delta(\omega + \omega_0) + \pi\delta(\omega - \omega_0)]$$

对于 BIBO 稳定系统

$$H(j\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega}$$

故

$$\begin{aligned} R(j\omega) &= E(j\omega) \cdot H(j\omega) \\ &= A [\pi\delta(\omega + \omega_0) + \pi\delta(\omega - \omega_0)] \cdot H(j\omega) \\ &= A [\pi H(-j\omega_0)\delta(\omega + \omega_0) + \pi H(j\omega_0)\delta(\omega - \omega_0)] \end{aligned} \quad (5-60)$$

令

$$\begin{aligned} H(j\omega_0) &= |H(j\omega_0)| e^{j\arg H(j\omega_0)} \\ H(-j\omega_0) &= |H(j\omega_0)| e^{-j\arg H(j\omega_0)} \end{aligned}$$

代入式(5-60),得

$$\begin{aligned} R(j\omega) &= A [\pi |H(j\omega_0)| e^{-j\arg H(j\omega_0)} \delta(\omega + \omega_0) + \pi |H(j\omega_0)| e^{j\arg H(j\omega_0)} \delta(\omega - \omega_0)] \\ &= A |H(j\omega_0)| [\pi e^{-j\arg H(j\omega_0)} \delta(\omega + \omega_0) + \pi e^{j\arg H(j\omega_0)} \delta(\omega - \omega_0)] \end{aligned}$$

对上式进行傅里叶反变换,考虑

$$\begin{cases} \mathcal{F}^{-1} [2\pi\delta(\omega + \omega_0)] = e^{-j\omega_0 t} \\ \mathcal{F}^{-1} [2\pi\delta(\omega - \omega_0)] = e^{j\omega_0 t} \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned} r(t) &= A |H(j\omega_0)| \left[e^{-j\arg H(j\omega_0)} \cdot \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t} + e^{j\arg H(j\omega_0)} \cdot \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} \right] \\ &= \frac{1}{2} A |H(j\omega_0)| [e^{-j(\omega_0 t + \arg H(j\omega_0))} + e^{j(\omega_0 t + \arg H(j\omega_0))}] \\ &= A |H(j\omega_0)| \cos(\omega_0 t + \arg H(j\omega_0)) \end{aligned} \quad (5-61)$$

这就是正弦信号 $A\cos(\omega_0 t)$ 通过 BIBO 稳定系统的响应,这是一个稳态解,输出依然是同频率的正弦信号,只是幅度和相位被正弦信号的频率点处的频率响应加权。

深层分析:

有趣的是,正弦信号 $A\cos(\omega_0 t)$ 通过稳定系统的响应与单边正弦信号 $A\cos(\omega_0 t)u(t)$



视频讲解

通过稳定系统的稳态响应完全一样,这是为什么?

因为 $A \cos(\omega_0 t)$ 从 $t = -\infty$ 开始加入并作用于系统,那么,到任何有限时刻 t_0 时暂态分量已经消失(从 $t = -\infty$ 到 t_0 经历了无限长时间),留下的当然仅仅是稳态分量了。

5.9 系统的零极点分布与频率特性

本节分析系统的零极点分布与系统的频率响应之间的关系,即 $H(s)$ 的零极点怎样决定 $H(j\omega)$ 。

对于因果稳定系统, $H(s)$ 的极点全部位于 s 左半平面,其单位冲激响应 $h(t)$ 随着 t 的增大而衰减,系统函数

$$H(s) = \int_0^{+\infty} h(t) e^{-st} dt$$

以及频率响应

$$H(j\omega) = \int_0^{+\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt$$

都是存在的(积分收敛),而且满足

$$H(j\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega}$$

因此,稳定系统的频率响应 $H(j\omega)$ 可以通过系统函数 $H(s)$ 得到,只要令 $s = j\omega$ 即可。这就是系统频率响应的零极点确定法的缘由所在。

5.9.1 稳定系统频率响应的几何确定法

将 $H(s)$ 表示成零极点形式

$$H(s) = K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}$$

令 $s = j\omega$, 得到系统的频率响应

$$H(j\omega) = K \frac{(j\omega - z_1)(j\omega - z_2) \cdots (j\omega - z_m)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \cdots (j\omega - p_n)} \quad (5-62)$$

实际上, s 平面 ($s = \sigma + j\omega$) 的虚轴 $j\omega$ 就是傅里叶变换的自变量频率 ω 。为了画出系统的频率响应特性曲线,在具有零极点分布的 s 平面上,将 s 限制为 $j\omega$, 即 s 的取值范围仅仅在 s 平面的虚轴上。

对于任意的 ω , 式(5-62)的分子、分母的每个因子都可看作 s 平面的矢量。当频率 ω 改变时, 矢量也随之改变, 自然, 矢量的长度和相角也随之在变, 如图 5-21 所示。

将矢量表示成幅度和相角

$$j\omega - z_k = |j\omega - z_k| e^{j\psi_k}$$

$$j\omega - p_i = |j\omega - p_i| e^{j\theta_i}$$

则系统频率响应的幅度, 即幅频特性为

$$|H(j\omega)| = |K| \frac{|j\omega - z_1| |j\omega - z_2| \cdots |j\omega - z_m|}{|j\omega - p_1| |j\omega - p_2| \cdots |j\omega - p_n|} \quad (5-63)$$

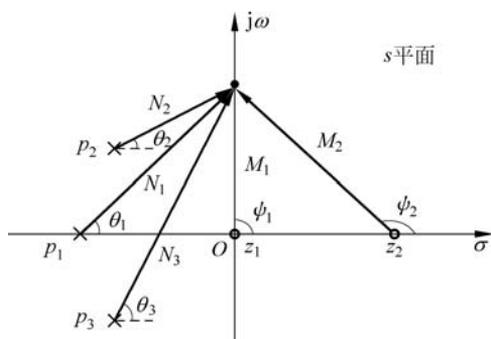


图 5-21 几何法确定系统的频率响应

式(5-63)表明, $|H(j\omega)|$ 由“每个零点的矢量长度之积”除以“每个极点的矢量长度之积”并乘以系数 $|K|$ 得到。

系统频率响应的相位, 即相频特性

$$\angle H(j\omega) = \angle K + [\angle(j\omega - z_1) + \angle(j\omega - z_2) + \cdots + \angle(j\omega - z_m)] - [\angle(j\omega - p_1) + \angle(j\omega - p_2) + \cdots + \angle(j\omega - p_n)] \quad (5-64)$$

$\angle H(j\omega)$ 由系数 K 的相位加上“每个零点的矢量的相角之和”再减去“每个极点的矢量的相角之和”得到。 K 是常数, 其相位

$$\angle K = \begin{cases} 0, & K > 0 \\ \pm \pi, & K < 0 \end{cases} \quad (5-65)$$

当频率从直流开始增大直至无穷大频率时, 相当于 ω 从 $\omega=0$ 开始增大直至 $\omega \rightarrow \infty$, 各个矢量的终点将从坐标原点沿着 $j\omega$ 轴向上移动直至无穷远点。那么, 各个矢量的长度和相角都将发生变化。画出 $|H(j\omega)|-\omega$ 的关系曲线就是系统的幅频特性, $\angle H(j\omega)-\omega$ 的关系曲线就是系统的相频特性。

将 $H(j\omega)$ 表示成

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

用 M_k 表示分子矢量的长度, ψ_k 为分子矢量的相角; N_i 表示分母矢量的长度, θ_i 是分母矢量的相角, 则根据式(5-62), 有

$$|H(j\omega)| = |K| \frac{M_1 M_2 \cdots M_m}{N_1 N_2 \cdots N_n} \quad (5-66)$$

$$\varphi(\omega) = \angle K + (\psi_1 + \psi_2 + \cdots + \psi_m) - (\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) \quad (5-67)$$

5.9.2 系统的频率响应分析举例

【例题 5.26】 RC 电路如图 5-22 所示, 分析该电路的频率响应特性。

解:

$$H(s) = \frac{R}{R + 1/(Cs)} = \frac{s}{s + 1/RC}$$

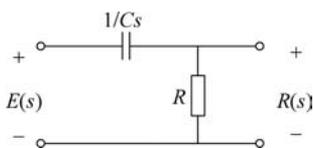


图 5-22 例题 5.26 图

零点 $z=0$, 极点 $p=-1/RC$, 系统稳定, 画出零极点分布图, 如图 5-23 所示。

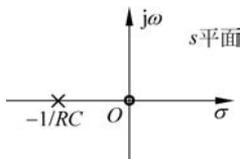


图 5-23 电路的零极点分布

$$|H(j\omega)| = \frac{M_1}{N_1}, \quad \varphi(\omega) = \psi_1 - \theta_1$$

当 $\omega=0$ 时, $j\omega$ 位于坐标原点, 与零点重合, 见图 5-24(a), 此时 $H(j\omega)$ 的分子等于零, 即 $M_1=0$; 分母矢量长度 $N_1=1/RC$, 则

$$|H(j\omega)| = \frac{M_1}{N_1} = 0$$

当频率从正的一侧趋近于零时, 分子矢量的相角为 $\pi/2$, 而分母矢量的相角趋近于零, 即 $\psi_1=\pi/2, \theta_1=0$, 故

$$\varphi(\omega) = \psi_1 - \theta_1 = \pi/2$$

当频率 ω 增大时, 矢量终点沿着 $j\omega$ 轴向上移动, 见图 5-24(b), M_1 增大, N_1 也增大, 但 M_1 的增大速度大于 N_1 的增大速度, 因此, 随着 ω 的增大, 幅频特性 $|H(j\omega)|$ 将增大。另外, 随着 ω 的增大, 分子矢量的相角为 $\pi/2$ 不变, 但分母矢量的相角增大, 因此, 相频特性 $\varphi(\omega) = \psi_1 - \theta_1$ 将变小。

当 $\omega=1/RC$ 时, $M_1=1/RC, N_1=\sqrt{2}(1/RC), \psi_1=\pi/2, \theta_1=\pi/4$, 因此

$$|H(j\omega)| = 1/\sqrt{2}, \quad \varphi(\omega) = \psi_1 - \theta_1 = \pi/4$$

当频率 ω 趋于正无穷大时, 见图 5.24(c), 此时, 分子、分母的矢量长度都趋于无穷大, 幅频特性

$$|H(j\omega)| = \frac{M_1}{N_1} \rightarrow 1$$

此时, 分子矢量的相角为 $\pi/2$, 分母矢量的相角也趋于 $\pi/2$, 因此, 相频特性 $\varphi(\omega) = \psi_1 - \theta_1$ 趋于 0。

画出幅频特性曲线和相频特性曲线, 如图 5-25 所示。

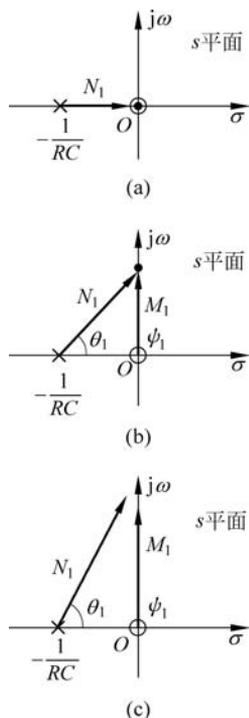


图 5-24 频率响应的几何确定法

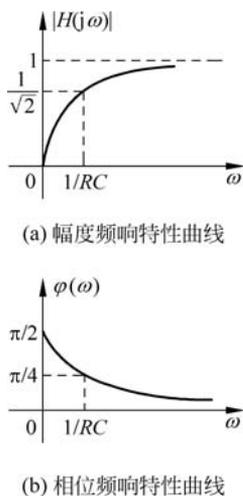


图 5-25 例题 5.26 电路的频响特性曲线

由此判断,该电路系统是一个高通滤波器。实际上,从电路结构以及输入输出关系也容易判断该 RC 电路具有高通特性。

问题思考,如果系统的输出不是电阻 R 两端的电压,而是电容 C 两端的电压,该电路具有什么滤波特性? 系统函数以及零极点又是怎样的?

【例题 5.27】 系统的零极点分布如图 5-26 所示,画出系统的幅度频响特性和相位频响特性,指出该系统是哪种滤波器。

解: 系统稳定,用几何确定法分析频响特性,如图 5-27 所示。

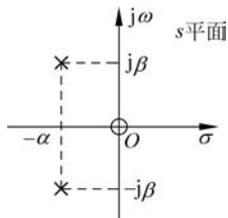


图 5-26 例题 5.27 图

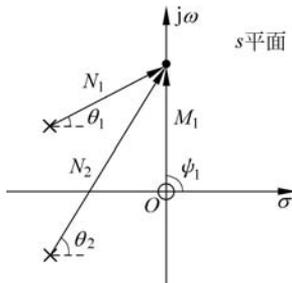


图 5-27 频率响应的几何确定法

幅度频响特性

$$|H(j\omega)| = |K| \frac{M_1}{N_1 N_2}$$

对于相位频响特性,由于系统没有给出其他条件确定系数 K ,为简单起见,这里假设 $K > 0$ 。因此,相频特性

$$\varphi(\omega) = \psi_1 - (\theta_1 + \theta_2)$$

(1) 当 $\omega = 0$ 时, $M_1 = 0, N_1 = N_2 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \psi_1 = \pi/2, \theta_1 = -\theta_2$, 故有

$$|H(j\omega)| = 0, \quad \varphi(\omega) = \pi/2$$

(2) 当 ω 从 0 开始增大时, M_1 增大, N_1 减小, N_2 增大, 而且 M_1 的增长速度很快, 因此, $|H(j\omega)|$ 将增大。 $\psi_1 = \pi/2$ 不变, $|\theta_1|$ 减小, θ_2 增大, 故 $\varphi(\omega) = \psi_1 - (\theta_1 + \theta_2)$ 将变小。

(3) 当 $\omega \rightarrow \infty$ 时, $M_1 \rightarrow \infty, N_1 \rightarrow \infty, N_2 \rightarrow \infty$, 因此 $|H(j\omega)| = K \frac{M_1}{N_1 N_2} \rightarrow 0; \psi_1 = \pi/2$ 不变, $\theta_1 \rightarrow \pi/2, \theta_2 \rightarrow \pi/2$, 故 $\varphi(\omega) = \psi_1 - (\theta_1 + \theta_2) \rightarrow -\pi/2$ 。

画出幅度频响特性和相位频响特性,如图 5-28 所示。

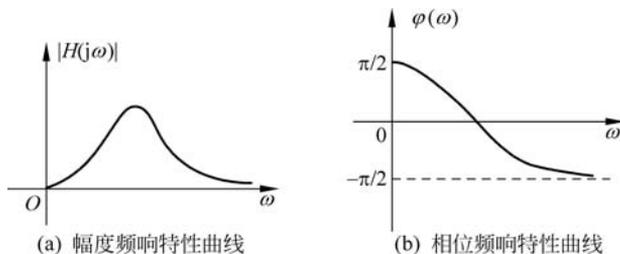


图 5-28 系统的频响特性曲线

由幅频特性可知,这是一个带通滤波器。

小结:

(1) 由零极点确定系统的频率响应,采用几何确定法既简单又有效。但是,需要注意的是,此方法只适于 BIBO 稳定系统。因为,只有 BIBO 稳定系统才满足

$$H(j\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega}$$

(2) 上述例题中,只画出了正频率部分的频率响应,这是系统真实的频响特性。当然,也可以根据幅频偶对称、相频奇对称的特点,画出完整的频率响应特性。

(3) 不难总结出零极点分布与系统频率响应的一些特点,例如,如果坐标原点处有零点,则 $|H(j0)| = 0$, 系统会滤除直流成分。又如,对于一阶系统(只有一个极点),低通滤波器只能在负实轴上有一个极点,没有零点;高通滤波器在负实轴上有一个极点,在坐标原点处有一个零点。而一阶系统无法实现带通或带阻滤波器,等等,读者可自己加以分析总结。



视频讲解

5.10 全通系统和最小相位系统

5.10.1 全通系统

一般的实际系统,幅频特性 $|H(j\omega)|$ 是 ω 的函数,或具有低通滤波特性,或具有高通、带通等其他滤波性能,信号通过系统后频率成分将被改变。

$$R(j\omega) = E(j\omega)H(j\omega)$$

但是,如果系统的幅频特性是常数,即

$$|H(j\omega)| = K \quad (5-68)$$

则

$$|R(j\omega)| = K |E(j\omega)|$$

这种系统允许信号的频率成分全部等量地通过,这种系统即全通系统。

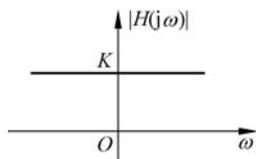


图 5-29 全通系统的幅频特性曲线

全通系统的幅频特性如图 5-29 所示。

那么,什么样的零极点分布会使得幅频特性是常数呢? 首先要保证系统是稳定的,因此,极点全部位于 s 左半平面,如果零点全部位于 s 右半平面,且与极点关于 $j\omega$ 轴镜像对称,如图 5-30 所示,那么根据几何确定法,由于 $N_1 = M_1, N_2 = M_2, N_3 = M_3$, 有

$$|H(j\omega)| = K \frac{N_1 N_2 N_3}{M_1 M_2 M_3} = K$$

系统的幅频特性为常数,即全通系统。

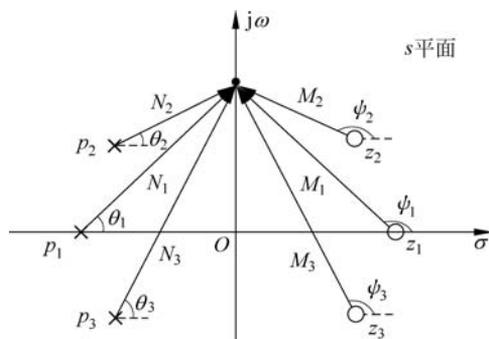


图 5-30 全通系统的零极点分布

因此,全通系统的零极点分布特征是,系统函数的极点全部位于 s 左半平面,零点全部位于 s 右半平面,且零极点关于 $j\omega$ 轴呈镜像对称分布。

这样分布的零极点,其相频特性

$$\varphi(\omega) = (\psi_1 + \psi_2 + \psi_3) - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

随着 ω 的变化,相频特性呈现单调衰减的变化趋势。零极点的位置不同(实数零极点或复数零极点),相频特性曲线会有所不同,但随着 ω 增加单调下降是全通系统相频特性一致的规律。

5.10.2 最小相位系统

在实际应用中,很多时候希望信号通过某个系统的延时最小。在信号与系统的频域分析中,时域的延时在频域中体现的是相位特性。最小相位系统具有最小的延时;反之,最大相位系统对信号的延时最大。

在 5.6 节零极点与时间特性的关系中,零点影响波形的幅度和相位,因此,对于具有一致的时间特性和滤波特性的系统来讲,最小相位系统或最大相位系统应该考虑的是零点。

下面考虑三个系统,如图 5-31 所示,它们的极点完全相同,因此这三个系统的波形是一致的。零点分别处于三种情况,全部位于 s 左半平面、分别位于 s 左右平面以及全部位于 s 右半平面。虽然位置不同,但它们相对应的零点的矢量长度是相等的。因此三个系统的幅频特性也相同,即它们具有相同的滤波特性。

相频特性

$$\varphi(\omega) = (\psi_1 + \psi_2 + \psi_3) - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

由于极点相同,所以三个系统的 $(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$ 相同,不同的是 $(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3)$ 。不难发现,图 5-31(a)的 $(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3)$ 最小,图 5-31(b)次之,图 5-31(c)的 $(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3)$ 最大。因此,三个系统的相位特性关系是 $\varphi_a(\omega) < \varphi_b(\omega) < \varphi_c(\omega)$ 。也就是说,具有同样的波形形状、同样的滤波特性的三个系统,图 5-31(a)系统具有最小的相位,图 5-31(c)系统具有最大的相位,图 5-31(b)系统介于二者之间。

一般将图 5-31(a)系统称为最小相位系统,这种系统对信号产生最小的延时;将图 5-31(c)系统称为最大相位系统,对信号产生最大的延时,图 5-31(b)系统称为非最小相位系统。或者将图 5-31(b)和图 5-31(c)系统统称为非最小相位系统。因此,当系统的零点仅仅位于 s 左半平面或 $j\omega$ 轴上时,该系统是最小相位系统。

对于一个非最小相位系统,可以表示成最小相位系统与全通系统的级联,如图 5-32 所示。

$$H(s) = H_{\min}(s) \cdot H_{\text{all}}(s) \quad (5-69)$$

【例题 5.28】 系统零极点分布如图 5-33 所示,分析系统是否是最小相位系统? 如果不是,将其化成最小相位系统和全通系统的级联。

解: 由于右半平面有零点,所以不是最小相位系统。

将右半平面的零点镜像移到左半平面,为了保持原系统的系统函数不变,需要级联一个全通系统。

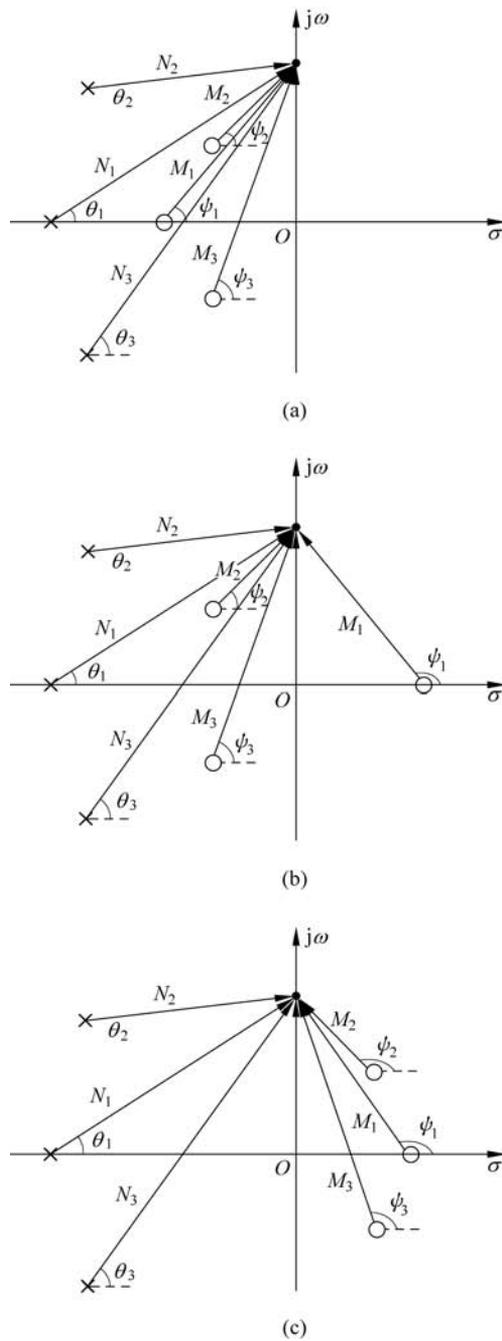


图 5-31 最小相位系统以及非最小相位系统的零极点分布

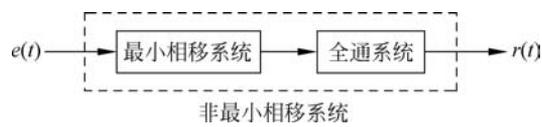


图 5-32 非最小相位系统

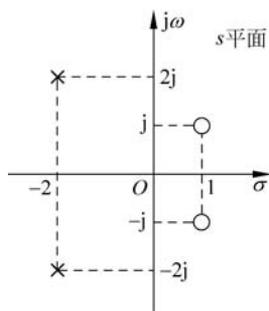


图 5-33 例题 5.28 图

$$\begin{aligned}
 H(s) &= K \frac{[s - (1 + j)][s - (1 - j)]}{[s - (-2 + j2)][s - (-2 - j2)]} \\
 &= K \frac{[s - (1 + j)][s - (1 - j)]}{[s - (-2 + j2)][s - (-2 - j2)]} \cdot \frac{[s - (-1 + j)][s - (-1 - j)]}{[s - (-1 + j)][s - (-1 - j)]} \\
 &= K \underbrace{\frac{[s - (-1 + j)][s - (-1 - j)]}{[s - (-2 + j2)][s - (-2 - j2)]}}_{\text{最小相位系统}} \cdot \underbrace{\frac{[s - (1 + j)][s - (1 - j)]}{[s - (-1 + j)][s - (-1 - j)]}}_{\text{全通系统}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_{\min}(s) &= K \frac{[s - (-1 + j)][s - (-1 - j)]}{[s - (-2 + j2)][s - (-2 - j2)]} \\
 &= K \frac{s^2 + 2s + 2}{s^2 + 4s + 8}
 \end{aligned}$$

最小相位系统在右半平面没有零点,如图 5-34(a)所示。

$$H_{\text{all}}(s) = \frac{[s - (1 + j)][s - (1 - j)]}{[s - (-1 + j)][s - (-1 - j)]} = \frac{s^2 - 2s + 2}{s^2 + 2s + 2}$$

全通系统的零极点关于 $j\omega$ 轴镜像对称,如图 5-34(b)所示。

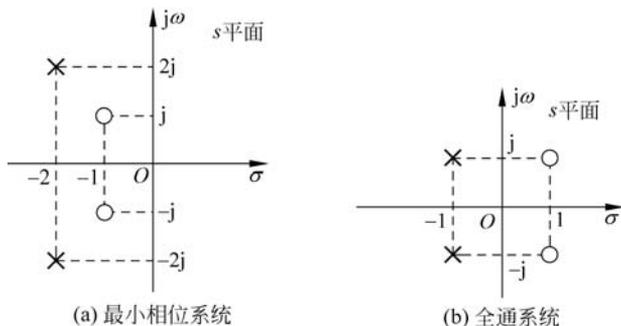


图 5-34 最小相位系统和全通系统

需要注意的是,在将非最小相位系统化成最小相位系统与全通系统的级联时, $j\omega$ 轴上的零点无须处理。



视频讲解

5.11 连续时间系统的物理模型

在系统分析中,除电路等实际物理系统外,很多时候是以框图的形式来表示系统,这就是系统的物理模型。本节介绍系统的基本结构形式,以及怎样由系统的数学模型得到其物理模型。

5.11.1 系统的基本结构

1. 系统的级联

在时域,级联系统的单位冲激响应等于子系统单位冲激响应作“卷积”运算。而且,交换子系统的前后顺序不影响系统总的单位冲激响应。

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t)$$

根据时域卷积定理,在 s 域,级联子系统的系统函数等于子系统的系统函数作“乘法”运算,即

$$\begin{cases} H(s) = H_1(s)H_2(s) \\ R(s) = E(s)H_1(s)H_2(s) \end{cases} \quad (5-70)$$

级联结构如图 5-35 所示。

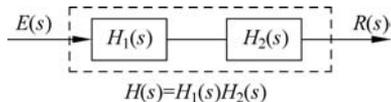


图 5-35 系统的级联结构

2. 系统的并联

并联系统的单位冲激响应等于子系统单位冲激响应作“加法”运算,即

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t)$$

两端拉普拉斯变换,可知在 s 域,并联系统的系统函数等于子系统的系统函数相加。

$$\begin{cases} H(s) = H_1(s) + H_2(s) \\ R(s) = E(s)[H_1(s) + H_2(s)] \end{cases} \quad (5-71)$$

并联结构如图 5-36 所示。

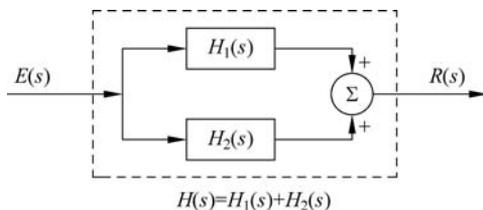


图 5-36 系统的并联结构

3. 反馈系统

图 5-37 所示为反馈系统的结构,其中, $G(s)$ 为前向通路的转移函数, $Q(s)$ 为反向通路的转移函数, $\varepsilon(s)$ 为误差函数。

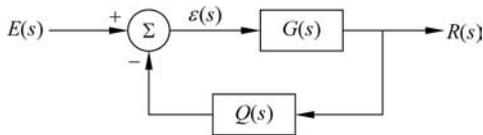


图 5-37 反馈系统的结构

根据结构图可以写出

$$\begin{cases} \varepsilon(s) = E(s) - Q(s) \cdot R(s) \\ R(s) = \varepsilon(s) \cdot G(s) \end{cases}$$

消去 $\varepsilon(s)$, 得

$$H(s) = \frac{R(s)}{E(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)Q(s)} \quad (5-72)$$

反馈系统是一种非常有用而且常见的系统结构,反馈系统的作用很多,可以通过反馈系统求系统的逆系统;反馈系统还可以改善系统的非线性、拓宽系统的通频带、改善系统的稳定性等。

【例题 5.29】 如图 5-38 所示的系统结构, a 和 b 都大于零,如果系统稳定,求 K 的取值范围。

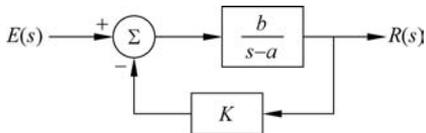


图 5-38 例题 5.29 图

解:

$$H(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)Q(s)} = \frac{\frac{b}{s-a}}{1 + \frac{b}{s-a}K} = \frac{b}{s-a+bK}$$

极点 $p = a - bK$ 。如果系统稳定,则 $a - bK < 0$, 即 $K > a/b$ 。

实际上,如果没有反馈,由于 $\frac{b}{s-a}$ 的极点在 s 右半平面 ($p_1 = a, a > 0$), 系统本来不稳定,加入一个负反馈,使得不稳定系统变成稳定系统。

在实际工程中,一个系统往往是既有级联、并联又有反馈等的复合结构。

* 5.11.2 连续时间系统的模拟

为什么要进行系统模拟?

在系统分析中,对系统进行数学描述和分析无疑是非常重要的,但是,在实际中,一个庞大而复杂的系统如果遵循“建立数学模型,然后求解”这样的分析思路,难度可能很大。如果将系统分解成一些基本单元,由基本单元再组成复杂系统,通过对基本单元的分析进而对系统整体分析,就可以大大简化分析过程。因此,建立系统的物理模型是必要的。另外,有时也需要对系统进行模拟实验,通过显示设备将结果显示出来。这样,当系统的参数或输入信号改变时,系统响应的变化就能通过实验来进行观察,从而便于确定最佳的系统参数和工作条件。这里所说的系统模拟,并不是指在实验室里仿制该系统,而是数学意义上的模拟,用来模拟的装置和原系统在输入输出的关系上可以用同样的微分方程来描述。

因此,系统的模拟是指根据系统的数学模型用一定的元件来仿真实际系统,进而可以通过实验手段进行参数分析,达到优化系统的目的。在系统的数学描述中,微分方程是系统的数学模型,系统函数是系统的 s 域表征;而系统模拟得到的就是系统的物理模型——框图。本节的内容是由微分方程或系统函数画出系统的框图,即根据系统的数学描述得到物理模型。

连续 LTI 系统的数学模型是微分方程,一个线性常系数微分方程包括加法运算、乘法运算和微分运算,因此,系统模拟需要的元件应该包括加法器、标量乘法器和微分器。但在实际应用中,微分器对噪声和误差较为敏感,因此一般使用积分器。图 5-39 示出了连续时间系统模拟所需要的元件。

为了简化表示,标量乘法器也可以简化成图 5-40。

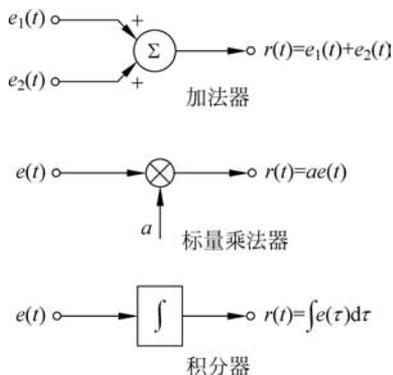


图 5-39 连续时间系统的元件模型

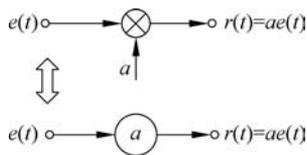


图 5-40 标量乘法器

下面以一个例子来说明用积分器、标量乘法器和加法器来模拟连续时间 LTI 系统的过程及方法。

假设某系统的数学模型为

$$\frac{d^2}{dt^2}r(t) + a_1 \frac{d}{dt}r(t) + a_2 r(t) = b_1 \frac{d}{dt}e(t) + b_2 e(t) \quad (5-73)$$

为了用积分器模拟,对上式进行两次积分,得

$$r(t) + a_1 \int r(\tau) d\tau + a_2 \iint r(\tau) d\tau = b_1 \int e(\tau) d\tau + b_2 \iint e(\tau) d\tau$$

设中间变量 $x(t)$, 即

$$b_1 \int e(\tau) d\tau + b_2 \iint e(\tau) d\tau = x(t) \quad (5-74)$$

以及

$$r(t) + a_1 \int r(\tau) d\tau + a_2 \iint r(\tau) d\tau = x(t) \quad (5-75)$$

先模拟式(5-74),得到如图 5-41 所示的框图。接下来模拟式(5-75),将其整理成

$$r(t) = x(t) - a_1 \int r(\tau) d\tau - a_2 \iint r(\tau) d\tau$$

得到图 5-42 所示的框图。

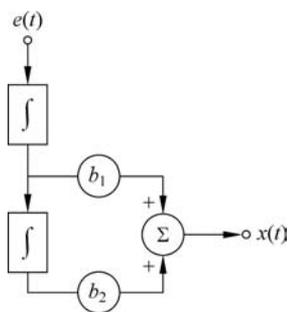


图 5-41 式(5-74)的物理模型

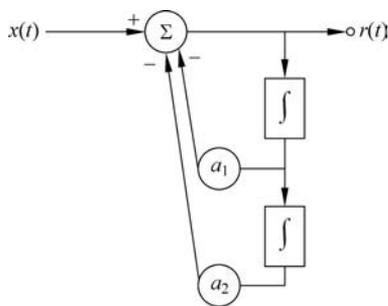


图 5-42 式(5-75)的物理模型

将两个子系统合到一起,如图 5-43 所示。

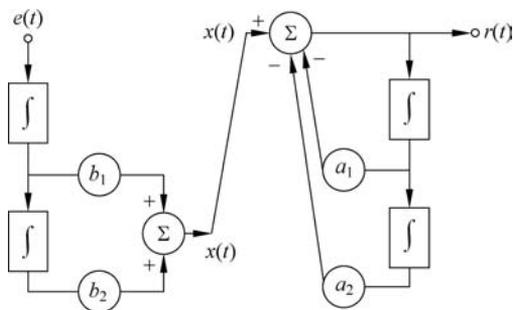


图 5-43 总的物理模型

实际上,对于二阶微分方程,一般只需两个动态元件(积分器)就可以了。而且对于 LTI 系统,可以交换级联子系统的次序,系统函数不变,即系统的输入输出关系不变。为此将左右两个子系统交换顺序,得到如图 5-44 所示的结构。

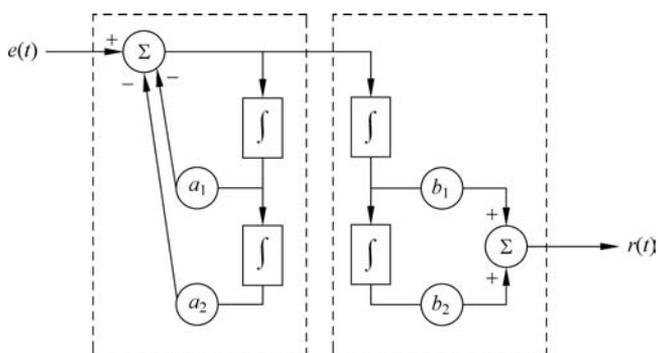


图 5-44 交换子系统的顺序

省却其中一套背靠背的积分器,就得到如图 5-45 所示的系统结构。

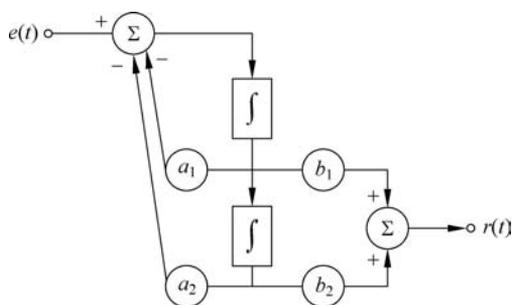


图 5-45 省却一对积分器

将图形逆时针旋转 90°,画成习惯画法,如图 5-46 所示。

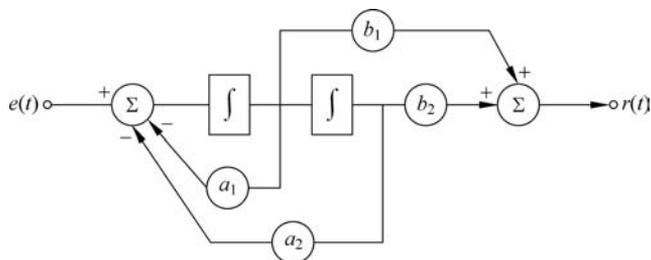


图 5-46 微分方程的物理模型

这就是式(5-73)微分方程表示的系统的模拟框图,也即该系统的物理模型。

其实,微分方程和其模拟框图之间有着内在的对应关系,找到对应关系,就可以由微分方程直接画出系统的框图。

首先根据微分方程写出系统函数

$$H(s) = \frac{b_1 s + b_2}{s^2 + a_1 s + a_2}$$

将 $H(s)$ 写成积分器($1/s$)的形式

$$H(s) = \frac{b_1/s + b_2/s^2}{1 + a_1/s + a_2/s^2} \quad (5-76)$$

其对应的模拟框图如图 5-47 所示, $1/s$ 表示积分器。

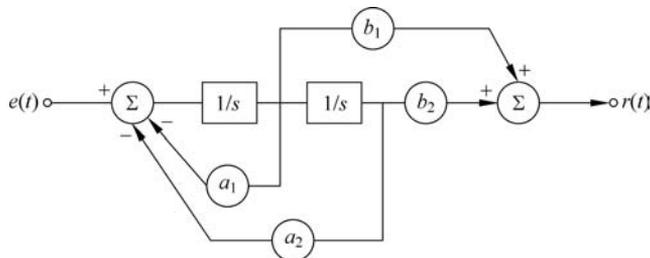


图 5-47 物理模型

对比积分器形式的系统函数与系统框图之间的关系,不难发现,当系统函数 $H(s)$ 的分母常数项归一化后, $H(s)$ 的分母对应框图的反馈回路部分,正负号相反; $H(s)$ 的分子对应框图的前向通路部分,正负号一致。按此规律,就可以画出任意阶微分方程的模拟框图。

例如,

$$\begin{aligned} & \frac{d^n}{dt^n} r(t) + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} r(t) + \cdots + a_n r(t) \\ &= b_0 \frac{d^m}{dt^m} e(t) + b_1 \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} e(t) + \cdots + b_m e(t) \end{aligned} \quad (5-77)$$

则

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_n} \\ &= \frac{b_0/s^{n-m} + b_1/s^{n-m+1} + b_2/s^{n-m+2} + \cdots + b_{m-1}/s^{n-1} + b_m/s^n}{1 + a_1/s + a_2/s^2 + \cdots + a_{n-1}/s^{n-1} + a_n/s^n} \end{aligned} \quad (5-78)$$

其模拟框图如图 5-48 所示。

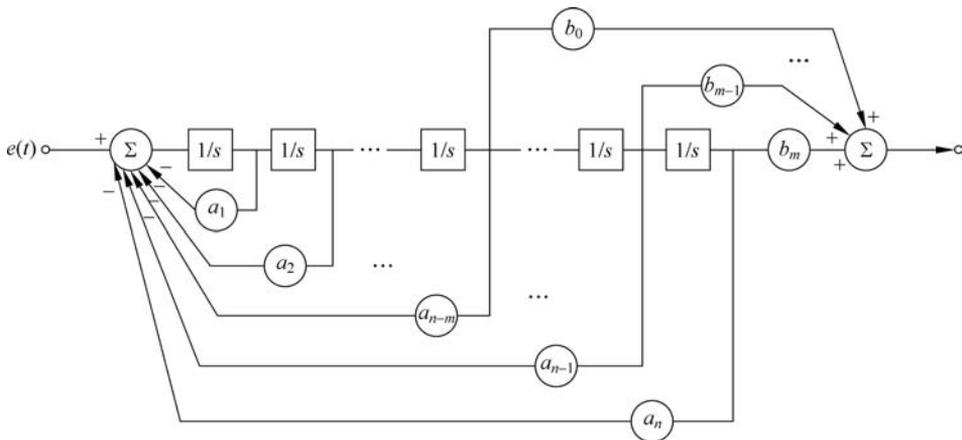


图 5-48 微分方程的模拟框图

需要说明的是,对于一个 LTI 系统,其数学描述(微分方程、系统函数)是唯一确定的,但其物理模型(系统的结构框图)却不是唯一的。改变系统的内部结构,只要保证端口的输入输出关系不变,都是该系统的模拟框图。实际上,微分方程和系统函数属于系统的端口分析。

【例题 5.30】 系统的微分方程为

$$\frac{d^2}{dt^2}r(t) + 3 \frac{d}{dt}r(t) + 2r(t) = \frac{d^2}{dt^2}e(t) + \frac{d}{dt}e(t)$$

至少画出系统的两种结构。

解: 由微分方程得到系统函数

$$H(s) = \frac{s^2 + s}{s^2 + 3s + 2} = \frac{1 + 1/s}{1 + 3/s + 2/s^2}$$

按照前述规律直接画出系统的一种结构,如图 5-49(a)所示。

其实,可以将 $H(s)$ 整理成另外一种表达形式,如

$$H(s) = \frac{s(s+1)}{(s+1)(s+2)} = \frac{s}{s+1} \cdot \frac{s+1}{s+2} = \frac{1}{1+1/s} \cdot \frac{1+1/s}{1+2/s}$$

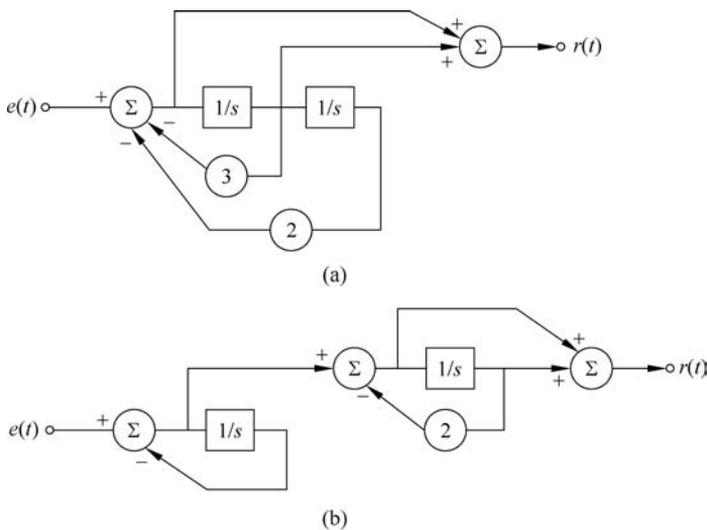


图 5-49 例题 5.30 图

据此画出另一种结构,如图 5-49(b)所示。

这两种结构具有相同的微分方程和相同的系统函数。

读者可自行思考一些其他的结构。

* 5.12 双边拉普拉斯变换

5.12.1 拉普拉斯变换的收敛域

双边拉普拉斯变换的公式为

$$F_B(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

拉普拉斯变换的收敛域指的是在 s 平面上使拉普拉斯变换积分存在的那些 s 域的集合。当信号的时间取值范围不同时,其拉普拉斯变换的收敛域不同。

1. $f(t)$ 是因果信号

因果信号满足

$$f(t) = 0, \quad t < 0 \quad (5-79)$$

例如, $f(t) = e^{at}u(t)$, 其拉普拉斯积分

$$F_B(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{(a-\sigma)t} e^{-j\omega t} dt$$

如果积分收敛,要求 $a - \sigma < 0$, 即 $\sigma > a$, 或 $\text{Re}(s) > a$ 。

而 $f(t)$ 的拉普拉斯变换为

$$F_B(s) = \frac{1}{s - a}$$

极点为 $p = a$ 。

因此,收敛域是最右边极点 ($p = \sigma_0$) 所在的收敛轴的右半平面,这就是因果信号的拉普拉斯变换的收敛域,如图 5-50 所示。

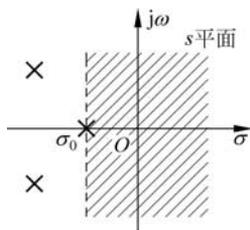


图 5-50 因果信号的拉普拉斯变换的收敛域

2. $f(t)$ 是反因果信号

$$f(t) = 0, \quad t > 0 \quad (5-80)$$

例如, $f(t) = e^{at}u(-t)$, 其拉普拉斯积分

$$F_B(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-st} dt = -\frac{1}{s - a}$$

极点为 $p=a$ 。

如果积分收敛,要求 $a-\sigma>0$,即 $\sigma<a$,或 $\text{Re}(s)<a$ 。

因此反因果信号的双边拉普拉斯变换的收敛域为最左边极点($p=\sigma_0$)所在的收敛轴的左半平面,如图 5-51 所示。

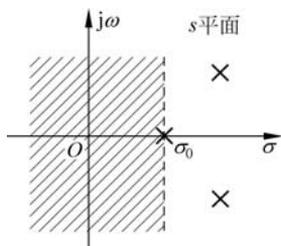


图 5-51 反因果信号的拉普拉斯变换的收敛域

3. $f(t)$ 是双边(非因果)信号

可以将信号表示成因果信号和反因果信号之和,即

$$f(t) = f_1(t)u(t) + f_2(t)u(-t) \quad (5-81)$$

其中, $f_1(t)u(t)$ 的收敛域为某个收敛轴的右半平面($\sigma>\sigma_1$),而 $f_2(t)u(-t)$ 的收敛域为某个收敛轴的左半平面($\sigma<\sigma_2$)。此时会出现两种情况,当 $\sigma_1<\sigma_2$ 时,存在拉普拉斯变换,收敛域为 $\sigma_1<\sigma<\sigma_2$,是带状收敛域。而当 $\sigma_1<0$ 且 $\sigma_2>0$ 时,收敛域包含 $j\omega$ 轴,如图 5-52 所示。当 $\sigma_1>\sigma_2$ 时,没有公共的收敛域,此时拉普拉斯变换不存在。

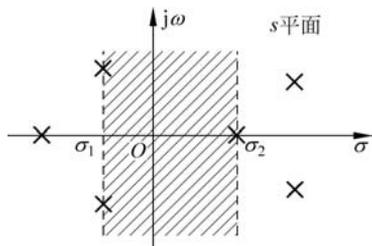


图 5-52 双边信号拉普拉斯变换的收敛域

4. $f(t)$ 是时限信号

拉普拉斯变换为

$$F_B(s) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(t)e^{-st} dt$$

此时, $f(t)$ 的收敛域为全 s 平面,即全平面收敛,如图 5-53 所示。

当然,还有一些信号属于永远不收敛的情况,如 $f(t)=e^{t^2}$ 或 $f(t)=e^{e^t}$,它们不存在拉普拉斯变换。实际上,这些信号几乎没有工程上的意义。

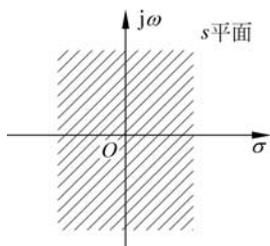


图 5-53 时限信号拉普拉斯变换的收敛域

5.12.2 因果系统、稳定系统的 s 域特征

对于 LTI 系统,系统函数的收敛域也会因系统的因果与否而分三种情况。因果系统 ($h(t)=0, t<0$) 的收敛域为收敛轴的右半平面;反因果系统 ($h(t)=0, t>0$) 的收敛域为收敛轴的左半平面;非因果系统 ($h(t)$ 为双边函数) 的收敛域为带状收敛域。

对于稳定系统,其时域特征为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < \infty$$

如果系统稳定,则在 $j\omega$ 轴上的拉普拉斯变换

$$H(s) \Big|_{s=j\omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt < \infty$$

即在 $j\omega$ 轴上收敛。

因此,对于稳定系统,不论是因果的还是非因果的,其收敛域包含 $j\omega$ 轴, $j\omega$ 轴上不能有极点。

对于因果稳定系统,同时考虑因果性和稳定性。因果性要求收敛域在收敛轴的右半平面,而稳定性又要求收敛域包含 $j\omega$ 轴,因此,因果稳定系统的 s 域特征是所有极点全部位于 s 左半平面,这与前面 5.7 节是吻合的。

5.12.3 双边拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系

傅里叶变换公式

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

双边拉普拉斯变换公式

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

如果令 $s=j\omega$,两个积分表达式是一致的。因此,对于绝对可积信号或稳定系统,由于收敛域包含 $j\omega$ 轴,傅里叶积分和拉普拉斯积分都收敛,即傅里叶变换和拉普拉斯变换都存在,且

$$F(j\omega) = F(s) \Big|_{s=j\omega} \quad (5-82)$$

也就是说,对于绝对可积信号或稳定系统,傅里叶变换是 $j\omega$ 轴上的拉普拉斯变换。

本章知识 MAP 见图 5-54。

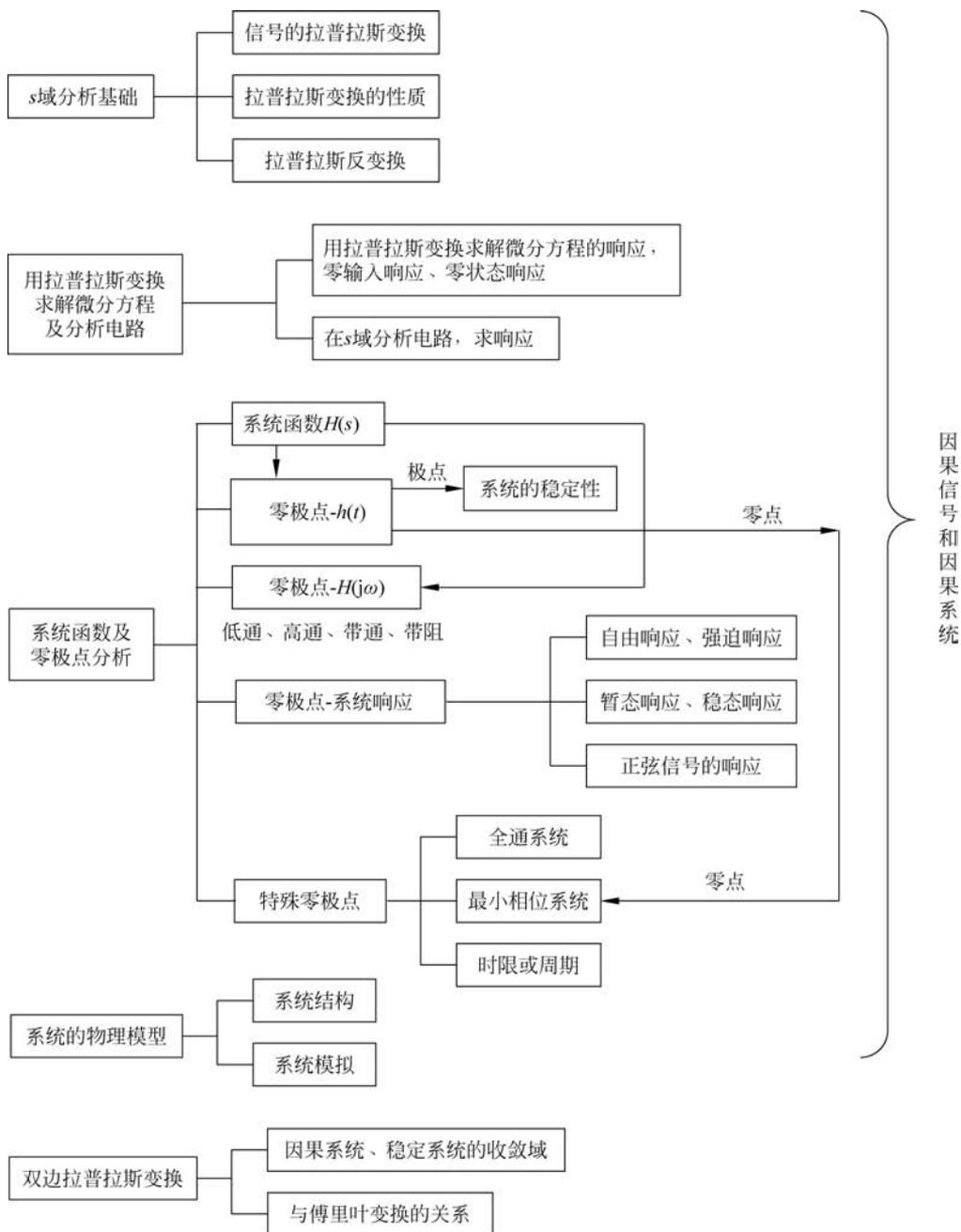


图 5-54 连续时间信号与系统的 s 域分析框图



视频讲解

本章结语

时域是真实世界,拉普拉斯变换仅仅是一个数学架构。有些在时域难以分析求解的问题,例如微分方程和电路,在 s 域变得异常简单。除此之外,拉普拉斯变换的另一个重要贡献是,用系统函数代替时域的微分方程来表示系统,通过系统函数或零极点来分析、设计系统。

本章的核心内容包括三大部分,第一部分为基础,也是信号的 s 域分析,包括拉普拉斯变换、拉普拉斯变换的性质以及拉普拉斯反变换。第二部分是讲拉普拉斯变换作为工具求解电路或微分方程的响应。第三部分是系统函数及零极点分析,通过系统函数及零极点分析系统的时域特性、频域特性、因果稳定性以及分析系统的各种响应。

除此之外,借助于系统函数,可以建立系统的物理模型——框图。

实际上,系统函数作为系统分析的重要函数,是连接微分方程、单位冲激响应、系统结构框图之间的桥梁。而连续时间系统的 s 域分析方法更多的是“套数”,按照分析“路数”分析即可,无须考虑太多的物理概念。

至此,信号与系统的端口分析方法和理论建立完毕。系统的描述方法有三种,一是系统的数学模型;二是系统的物理模型;三是系统的表征函数——单位冲激响应和系统函数。实际上,单位冲激响应和系统函数是同一概念在不同域的不同表示,一个是系统的时域表征,一个是系统的变换域表征。

本章知识解析



知识解析

习题

5-1 求下列信号的拉普拉斯变换。

$$(1) f(t) = 2\delta(t) + 3e^{-2t}u(t)$$

$$(2) f(t) = e^{-t}\cos(2t)u(t)$$

$$(3) f(t) = te^{-2t}u(t)$$

$$(4) f(t) = \sin(2t)u(t-1)$$

5-2 求下列拉普拉斯变换所对应的时间函数的初值与终值。

$$(1) F(s) = \frac{s-1}{s+2}$$

$$(2) F(s) = \frac{3s+2}{s(s^2+4)}$$

5-3 求下列信号的拉普拉斯反变换。

$$(1) F(s) = \frac{4s+5}{s^2+5s+6}$$

$$(2) F(s) = \frac{1}{s(s^2+5)}$$

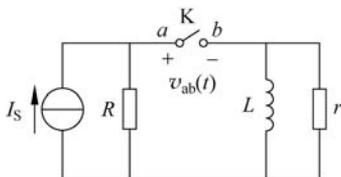
$$(3) F(s) = \frac{2s^2+6s}{s^2+3s+2}$$

$$(4) F(s) = \frac{s}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$$

5-4 系统微分方程 $\frac{d}{dt}r(t) + 2r(t) = e(t)$, 已知 $r(0_-) = 0, e(t) = u(t)$ 。求零输入响应、零状态响应、自由响应、强迫响应以及完全响应。

5-5 LTI 系统的微分方程为 $\frac{d}{dt}r(t) + 3r(t) = 3u(t)$, 当完全响应为 $r(t) = (\frac{1}{2}e^{-3t} + 1)u(t)$ 时, 求系统的零输入响应。

5-6 电路如题图 5-6 所示, $t < 0$ 时, 开关 K 闭合, 且电路达到稳态; $t = 0$, 开关 K 断开。求 $t > 0$ 时, 开关 K 两端的电压 $v_{ab}(t)$ 。



题图 5-6

5-7 LTI 系统的系统函数 $H(s) = \frac{s+2}{s^2+5s+6}$, 求下列各项。

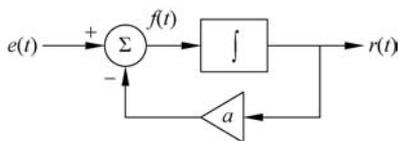
- (1) 系统的单位冲激响应。
- (2) 输入信号为 $e(t) = e^{-2t}u(t)$ 的零状态响应。
- (3) 列写系统的微分方程。

5-8 求下列微分方程所描述系统的单位冲激响应 $h(t)$ 和阶跃响应 $g(t)$ 。

$$(1) \frac{d^2}{dt^2}r(t) + 3 \frac{d}{dt}r(t) + 2r(t) = \frac{d}{dt}e(t) + 3e(t)$$

$$(2) \frac{d^2}{dt^2}r(t) + 2 \frac{d}{dt}r(t) + 2r(t) = \frac{d^2}{dt^2}e(t) + 3 \frac{d}{dt}e(t)$$

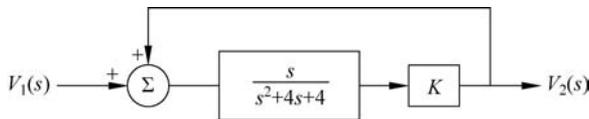
5-9 题图 5-9 所示的是一个反馈系统, 建立该系统的微分方程。



题图 5-9

5-10 根据题图 5-10 所示的反馈系统分析下列问题:

- (1) 写出 $H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)}$ 。
- (2) K 满足什么条件时系统稳定？
- (3) 在临界稳定条件下, 求系统的冲激响应 $h(t)$ 。



题图 5-10

5-11 系统的零点 $z_1=0, z_2=1$, 极点 $p_{1,2}=-1 \pm j2$, 且 $h(0_+)=3$ 。

- (1) 求系统函数。
- (2) 建立系统的微分方程。
- (3) 分析系统的滤波特性。

5-12 LTI 系统的微分方程为 $\frac{d^2}{dt^2}r(t) + 3 \frac{d}{dt}r(t) + 2r(t) = \frac{d^2}{dt^2}e(t) - \frac{d}{dt}e(t)$ 。

- (1) 求系统函数, 画出系统的零极点图。
- (2) 分析系统的滤波特性。
- (3) 判断系统是否是最小相位系统? 如果是, 说明原因; 如果不是, 将它化成最小相位系统与全通系统的级联形式。

5-13 系统的微分方程为 $\frac{d^2}{dt^2}r(t) + 5 \frac{d}{dt}r(t) + 4r(t) = \frac{d}{dt}e(t) - 2e(t)$ 。

- (1) 画出系统的一种模拟框图。
- (2) 分析系统是否是最小相位系统? 如果不是, 用数学表达式将其表示成最小相位系统和全通系统的级联。
- (3) 画出最小相位系统的结构。
- (4) 分别画出结构(1)和结构(3)的幅频特性和相频特性。