第3章

线性控制系统的能控性和能观测性

能控性和能观测性是系统的两个基本结构特性。随着状态空间描述的引入，Kalman在20世纪60年代初首先提出并研究了能控性和能观测性这两个基本概念。系统和控制理论的发展表明，这两个概念对于控制和估计问题的研究意义重大：在理论层面，它们为线性控制系统理论建立了严谨的理论基础；在应用层面，在系统设计阶段，它们为关键信号的获取方式和调节方式、关键振型的配置或对消等问题，进行宏观的预判和布局，是系统设计的前提。

本章首先明确能控性和能观测性的目的，给出能控性和能观测性的严格数学定义；其次针对线性控制系统，包括时变和定常的情形讨论能控性和能观测性的判别方法；最后讨论基于能控性和能观测性讨论系统标准型和结构分解等内容。

非线性控制系统自然有能控性和能观测性的问题，但无法建立统一的判别方法。因而，本章对于能控性和能观测性的判别仅针对线性控制系统。

对于离散控制系统的能控性和能观测性与连续系统基本是平行的，但有区别，本章只做概要介绍，详细内容可参考《计算机控制》或《离散控制系统》等教材。

能控性和能观测性属于控制系统的定性描述，而非定量描述。学习本章，要注意体会概念中蕴涵的时间和空间变化特性；另外，能控和能观测本来是针对状态变量的概念，但各种判据都是依据系统的结构和参数给出的，这恰好体现了系统结构决定系统功能这一基本思想。

重要知识点

1. 能控性的一般概念：考虑连续的 n 阶非线性时变控制系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=f[\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),t],\quad \boldsymbol{x}(t_0)=[\xi_1\quad \xi_2\quad \cdots\quad \xi_n]^{\mathrm{T}}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t)$为状态向量，$\boldsymbol{u}(t)$为控制输入向量，t_0 是某个被关注的时刻，未必是初始时刻，ξ_1，ξ_2，…，ξ_n 为不全为零的常数。状态的能控性与系统输出无关，所以这里不考虑输出方程。

状态的能控性问题包括以下几条。

(1) 待处理对象：$\boldsymbol{x}(t_0)$，包括时刻 t_0，以及这一时刻的已知常值状态分量 ξ_1，ξ_2，…，ξ_n，即在状态空间中的一个具体位置。

(2) 目标：$\boldsymbol{x}(t_f)=\boldsymbol{0}$，$t_f$ 为 t_0 之后的某个有限时刻。这里选择零向量作为目标状态，是因为任何一个非零的目标状态都可以通过坐标平移转换为零向量。

(3) 工具：

① 状态方程的结构和参数；

② 时刻 t_0 和常值状态分量 ξ_1，ξ_2，…，ξ_n；

(4) 手段：选取时刻 t_f，以及控制输入 $\boldsymbol{u}(t)$，$t\in[t_0,t_f)$。可以想见，t_f 和 $\boldsymbol{u}(t)$一般说来要依赖(3)中的①和②。

(5) 关键：上述控制输入 $\boldsymbol{u}(t)$存在的条件是什么？

以上第(5)属于能控性判别条件或方法；总结以上(1)～(4)，有如下的状态能控性定义：

定义　对于 t_0 时刻和这一时刻不全为零的已知常值状态分量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$，若存在时刻 $t_f>t_0$ 和控制输入 $\boldsymbol{u}(t)$，$t\in[t_0,t_f)$，使得 $\boldsymbol{x}(t_f)=\boldsymbol{0}$，则称 t_0 时刻的状态 $\boldsymbol{x}(t_0)=[\xi_1\quad\xi_2\quad\cdots\quad\xi_n]^{\mathrm{T}}$ 是能控的。

对于上述定义，有以下几点解读：

① $\boldsymbol{x}(t_0)$是否能控和时刻 t_0 有关，即相同的状态分量、不同的时刻 t_0 可能导致不同的能控性；

② $\boldsymbol{x}(t_0)$是否能控和状态分量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 有关，即不同的状态分量、相同的时刻 t_0 可能导致不同的能控性；

③ 能控性实际上是探讨能否用低维的控制输入向量调节高维的状态向量。控制输入 $\boldsymbol{u}(t)$使系统状态从 $\boldsymbol{x}(t_0)\neq\boldsymbol{0}$ 到 $\boldsymbol{x}(t_f)=\boldsymbol{0}$，这种转移不是立竿见影、一蹴而就的，而是依托时间区间$[t_0,t_f)$的。形象地说，是用时间来换取空间位置的转移。

研究表明，对于时变系统，状态能控性往往和时刻 t_0 有关；对于非线性系统，状态能控性通常和状态分量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 即空间中的具体位置有关。

2. 时变控制系统的能控性：考虑 n 阶时变线性控制系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t),\quad \boldsymbol{x}(t_0)=[\xi_1\quad\xi_2\quad\cdots\quad\xi_n]^{\mathrm{T}}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t)$为状态向量，$\boldsymbol{u}(t)$为控制输入向量，t_0 是某个被关注的时刻，未必是初始时刻，状态分量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 是不全为零的已知常数。对于该系统，有如下定义：

定义　对于 t_0 时刻和这一时刻不全为零的已知常值状态分量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$，

(1) 若存在时刻 $t_f>t_0$ 和控制输入 $\boldsymbol{u}(t)$，$t\in[t_0,t_f)$，使得 $\boldsymbol{x}(t_f)=\boldsymbol{0}$，则称 t_0 时刻的状态 $\boldsymbol{x}(t_0)=[\xi_1\quad\xi_2\quad\cdots\quad\xi_n]^{\mathrm{T}}$ 是能控的；

(2) 若对状态分量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 的任意取值，存在时刻 $t_f>t_0$ 和控制输入 $\boldsymbol{u}(t)$，$t\in[t_0,t_f)$，使得 $\boldsymbol{x}(t_f)=\boldsymbol{0}$，则称在 t_0 时刻状态完全能控，或称系统在 t_0 时刻完全能控，简称系统在 t_0 时刻能控。

对上述定义有两点解读：

① 由于系统是时变的，能控性概念始终依赖具体的 t_0 时刻。t_0 取值的改变通常会带来能控性的改变；

② 定义中有从单个状态能控到全体状态能控的过渡；

③ 定义中有从状态能控到系统能控的过渡。

其合理性在于，状态空间的基础概念部分曾提到，状态变量可以用来代表整个系统。

在系统运行过程中，状态总是不断变化的。因此，相对于单个状态能控，人们显然更加关注全体状态是否能控，即系统是否能控。

3. 线性时变控制系统能控性的 Gram 矩阵判据：时变线性控制系统在 t_0 时刻能控的充分必要条件是：存在有限时刻 $t_f>t_0$，使得如下的 Gram 矩阵

$$\boldsymbol{W}(t_0,t_f)=\int_{t_0}^{t_f}[\boldsymbol{\Phi}(t_0,t)\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(t_0,t)]\mathrm{d}t$$

可逆。这里用$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$表示系统的状态转移矩阵；对于矩阵的积分就是每个元素分别积分。

注意式状态转移矩阵中两个时间变量的顺序。

对 Gram 矩阵判据有以下几点说明：

① 若 $\boldsymbol{W}(t_0,t_{f_1})$ 可逆，$t_{f_1}<t_{f_2}$，则 $\boldsymbol{W}(t_0,t_{f_2})$ 可逆；若 $\boldsymbol{W}(t_0,t_{f_2})$ 不可逆，$t_{f_1}<t_{f_2}$，则 $\boldsymbol{W}(t_0,t_{f_1})$ 不可逆。

② 在 $\boldsymbol{W}(t_0,t_f)$ 表达式中，被积对象是 n 阶方阵。控制输入的维数一般远小于状态空间的维数 n。如单输入的情形，输入矩阵 $\boldsymbol{B}(t)$ 的秩是 1，因此整个被积矩阵的秩也是 1，当 $n>1$ 时，被积矩阵一定不可逆。但 $\boldsymbol{W}(t_0,t_f)$ 作为积分、作为对时间的累加却有可能可逆，从而保证系统能控。这里再次体现了以时间换取空间位置转移的思想。

③ 由于时变线性系统的状态转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$ 一般难以求解，Gram 矩阵 $\boldsymbol{W}(t_0,t_f)$ 因此也难以求解。因此，时变线性控制系统的 Gram 矩阵难以直接用于判断系统能控性，通常只具有理论意义。

4. 定常线性控制系统 $\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$ 的能控性定义：对于 t_0 时刻不全为 0 的已知常值状态分量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$，

(1) 若存在时刻 $t_f>t_0$ 和控制输入 $\boldsymbol{u}(t),t\in[t_0,t_f)$，使得 $\boldsymbol{x}(t_f)=\boldsymbol{0}$，则称状态 $\boldsymbol{x}(t_0)=[\xi_1\quad \xi_2\quad \cdots\quad \xi_n]^{\mathrm{T}}$ 是能控的；

(2) 若对状态分量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 的任意取值，存在时刻 $t_f>t_0$ 和控制输入 $\boldsymbol{u}(t),t\in[t_0,t_f)$，使得 $\boldsymbol{x}(t_f)=\boldsymbol{0}$，则称状态完全能控，或称系统完全能控，简称系统能控。

5. (Gram 矩阵判据)定常系统能控的充分必要条件是，存在 $t_L>0$，使得如下的 Gram 矩阵

$$\boldsymbol{W}(t_L)=\int_0^{t_L}[e^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}t}]\mathrm{d}t$$

可逆。

事实上，Gram 矩阵 $\boldsymbol{W}(t_L)$ 的可逆性由系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和控制矩阵 $\boldsymbol{B}$ 决定，形式上与 t_L 有关，但本质上与 t_L 的取值无关(包括负值)，只要 $t_L\neq 0$。

矩阵指数 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$ 可以得到解析表达式，但当系统阶次较高时，获取 Gram 矩阵 $\boldsymbol{W}(t_L)$ 的计算量复杂度仍然很高。

6. (秩判据)定常线性系统 $\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$ 能控的充分必要条件是，如下能控性判别矩阵

$$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{C}}(n)=[\boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\quad \cdots\quad \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}]$$

行满秩，即 $\mathrm{rank}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{C}}(n)=n$，而 n 就是 $\boldsymbol{Q}_{\mathrm{C}}(n)$ 的行数。

7. (PBH 秩判据，振型判据)定常线性系统 $\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$ 能控的充分必要条件是，对系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任意特征值(振型)λ，有

$$\mathrm{rank}[\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}\quad \boldsymbol{B}]=n$$

即 $[\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}\quad \boldsymbol{B}]$ 行满秩。

8. (PBH 特征向量判据)定常线性系统 $\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$ 能控的充分必要条件是，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的任意特征向量 $\boldsymbol{h}$ 均满足 $\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\neq 0$。

9. (若当标准型判据，实根情形)考虑如下的系统矩阵为上三角若当型矩阵的 10 阶线性定常控制系统

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_{31}\\\dot{x}_{32}\\\dot{x}_{411}\\\dot{x}_{421}\\\dot{x}_{422}\\\dot{x}_{431}\\\dot{x}_{432}\\\dot{x}_{433}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1&&&&&&&&&\\&a_2&&&&&&&&\\&&a_3&1&&&&&&\\&&&a_3&&&&&&\\&&&&a_4&&&&&\\&&&&&a_4&1&&&\\&&&&&&a_4&&&\\&&&&&&&a_4&1&0\\&&&&&&&&a_4&1\\&&&&&&&&&a_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_{31}\\x_{32}\\x_{411}\\x_{421}\\x_{422}\\x_{431}\\x_{432}\\x_{433}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\*\\b_3\\b_{41}\\*\\b_{42}\\*\\*\\b_{43}\end{bmatrix}u$$

其中，特征值 a_1,a_2,a_3,a_4 两两互异；控制矩阵拆分为 10 个行向量。

由于系统矩阵为上三角形式，因此只需关注每个若当块最后一行所对应的控制矩阵的行，例如，如控制矩阵的最后一行 b_{43} 需要列出，因为对应最后一个三阶若当块的最后一行即$[0\quad\cdots\quad 0\quad a_4]$。* 表示的行对于判断系统能控性不起作用。

根据若当标准型判据，系统能控的充分必要条件是，4 个向量组$\{b_1\}$、$\{b_2\}$、$\{b_3\}$、$\{b_{41},b_{42},b_{43}\}$均为线性无关；或者说，b_1、b_2、b_3 均非零，且向量 $\boldsymbol{b}_{41}$、$\boldsymbol{b}_{42}$、$\boldsymbol{b}_{43}$ 线性无关。

10.（若当标准型判据，共轭复根情形）考虑如下的系统矩阵为实若当型矩阵的 10 阶线性定常控制系统

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_{111}\\\dot{x}_{112}\\\dot{x}_{113}\\\dot{x}_{114}\\\dot{x}_{121}\\\dot{x}_{122}\\\dot{x}_{21}\\\dot{x}_{22}\\\dot{x}_3\\\dot{x}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1&\beta_1&1&0&&&&&&\\-\beta_1&\alpha_1&0&1&&&&&&\\&&\alpha_1&\beta_1&&&&&&\\&&-\beta_1&\alpha_1&&&&&&\\&&&&\alpha_1&\beta_1&&&&\\&&&&-\beta_1&\alpha_1&&&&\\&&&&&&\alpha_2&\beta_2&&\\&&&&&&-\beta_2&\alpha_2&&\\&&&&&&&&\alpha_3&\\&&&&&&&&&\alpha_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{111}\\x_{112}\\x_{113}\\x_{114}\\x_{121}\\x_{122}\\x_{21}\\x_{22}\\x_3\\x_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}*\\*\\b_1\\b_2\\b_3\\b_4\\b_5\\b_6\\b_7\\b_8\end{bmatrix}u$$

其中，系统矩阵为分块上三角结构，代表特征值的(α_1,β_1)，(α_2,β_2)，$(\alpha_3,0)$，$(\alpha_4,0)$两两互异，代表特征值虚部的 β_1,β_2 均不为零；控制矩阵拆分为 10 个行向量。

系统完全能控的充分必要条件是：

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}b_1&b_2\\-b_2&b_1\\b_3&b_4\\-b_4&b_3\end{bmatrix}=4,\quad \operatorname{rank}\begin{bmatrix}b_5&b_6\\-b_6&b_5\end{bmatrix}=2,\quad b_7\neq 0,\quad b_8\neq 0$$

11. 能观测性的一般概念：考虑连续的 n 阶非线性时变控制系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),t],\quad \boldsymbol{x}(t_0)=[\xi_1\quad \xi_2\quad \cdots\quad \xi_n]^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{g}[\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),t]$$

其中 $\boldsymbol{x}(t)$为状态向量，$\boldsymbol{u}(t)$为控制输入向量，$\boldsymbol{y}(t)$为可测输出向量，t_0 是某个被关注的时刻，未必是初始时刻，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 为未知常数。

状态的能观测性问题包括以下几条。

(1) 待处理对象为 $\boldsymbol{x}(t_0)$，包括时刻 t_0，以及这一时刻的未知常值状态分量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$。

(2) 目标：$\xi_i=?$ 即要求确定状态在空间中的具体位置，而且必须是唯一解。

(3) 工具：①状态方程的结构和参数；②时刻 t_0；③输入 $\boldsymbol{u}(t)$和输出 $\boldsymbol{y}(t)$。

(4) 手段：选取有限时刻 $t_f>t_0$，利用 $\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{y}(t),t\in[t_0,t_f)$求解各个 ξ_i。

(5) 关键：能够求得 ξ_i 的条件是什么？

12. 状态能观测性定义：对于 t_0 时刻和这一时刻的未知常值状态分量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$，若存在时刻 $t_f>t_0$，利用输入 $\boldsymbol{u}(t)$和输出 $\boldsymbol{y}(t),t\in[t_0,t_f)$能够确定各个 ξ_i，则称 t_0 时刻的状态向量 $\boldsymbol{x}(t_0)$是能观测的。

对于上述定义，有以下几点解读：

① $\boldsymbol{x}(t_0)$是否能观测和时刻 t_0 有关，即相同的 ξ_i 真实值、不同的时刻 t_0 可能导致不同的能观测性；

② $\boldsymbol{x}(t_0)$是否能观测和 $\boldsymbol{x}(t_0)$在状态空间中的实际位置有关，即不同的 ξ_i 真实值、相同的时刻 t_0 可能导致不同的能观测性；

③ 确定各个 ξ_i 的真实值需要时间区间$[t_0,t_f)$上的输入 $\boldsymbol{u}(t)$输出 $\boldsymbol{y}(t)$，不会在 t_0 瞬时完成，必然是个时间过程，是用时间来换取空间位置的定位。

④ 与能控性类似，能观测性探讨由低维的输入和输出确定高维状态向量的可行性。

研究表明，对于时变系统，状态能观测性往往和时刻 t_0 有关；对于非线性系统，状态能观测性通常和 $\boldsymbol{x}(t_0)$在空间中的实际位置有关。

13. 对于 n 阶时变线性控制系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t),\quad \boldsymbol{x}(t_0)=[\xi_1\quad \xi_2\quad \cdots\quad \xi_n]^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x}(t)$$

其中 $\boldsymbol{x}(t)$为状态向量，$\boldsymbol{u}(t)$为控制输入向量，t_0 是某个被关注的时刻，未必是初始时刻，状态分量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 为未知常数。对于该系统，有如下定义：

对于 t_0 时刻和这一时刻的未知常值状态分量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$，

(1) 若存在时刻 $t_f>t_0$，利用输入 $\boldsymbol{u}(t)$和输出 $\boldsymbol{y}(t),t\in[t_0,t_f)$能够唯一确定各个 ξ_i，则称 t_0 时刻的状态向量 $\boldsymbol{x}(t_0)$是能观测的；

(2) 若对状态分量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 的任意未知实际值，总存在时刻 $t_f>t_0$，利用输入 $\boldsymbol{u}(t)$和输出 $\boldsymbol{y}(t),t\in[t_0,t_f)$能够唯一确定各个 ξ_i，则称在 t_0 时刻状态完全能观测，或称系统在 t_0 时刻完全能观测，简称系统在 t_0 时刻能观测。

对上述定义有几点解读：

① 对于时变系统，能观测性概念始终依赖具体的 t_0 时刻。t_0 取值的改变通常会带来能观测性的改变；

② 定义中有从单个状态能观测到全体状态能观测的过渡；

③ 与能控性类似，定义中有从状态能观测到系统能观测的过渡。

同样，其合理性在于状态变量可以用来代表整个系统。

因为系统状态总是不断变化的，所以，相对于单个状态能观测，研究全体状态是否能观测，即系统是否能观测显然更有意义。

14. 时变线性控制系统的能观测性的 Gram 矩阵判据：时变线性控制系统在 t_0 时刻能观测的充分必要条件是：存在有限时刻 $t_f>t_0$，使得如下的 Gram 矩阵

$$\boldsymbol{W}(t_0,t_f)=\int_{t_0}^{t_f}[\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(t,t_0)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)]\mathrm{d}t$$

可逆。这里用 $\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$ 表示系统的状态转移矩阵，矩阵的积分就是每个元素分别积分。

15. 两个时变控制系统

$$\Sigma_1:\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t)\\ \boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x}(t)\end{cases}$$

和

$$\Sigma_2:\begin{cases}\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}(t)=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(t)\bar{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(t)\bar{\boldsymbol{u}}(t)\\ \bar{\boldsymbol{y}}(t)=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(t)\bar{\boldsymbol{x}}(t)\end{cases}$$

称为对偶系统。

系统 Σ_1 的运动是从时刻 t_0 向时刻 t 的转移；而系统 Σ_2 的运动是从时刻 t 向时刻 t_0 的转移。

记系统 Σ_1 和系统 Σ_2 的状态转移矩阵分别为 $\boldsymbol{\Phi}_1(t,t_0)$ 和 $\boldsymbol{\Phi}_2(t,t_0)$，则 $\boldsymbol{\Phi}_2(t,t_0)=\boldsymbol{\Phi}_1^{\mathrm{T}}(t_0,t)$。

若系统 Σ_1 和系统 Σ_2 简化为定常的，且传递函数矩阵分别为 $\boldsymbol{G}_1(s)$ 和 $\boldsymbol{G}_2(s)$，则 $\boldsymbol{G}_2(s)=-\boldsymbol{G}_1^{\mathrm{T}}(-s)$。

系统 Σ_1 的能控性等同于系统 Σ_2 的能观测性；系统 Σ_1 的能观测性等同于系统 Σ_2 的能控性。对照定常控制系统的各种能控与能观测判据，这一点将尤为明显。

对偶现象实际上广泛存在，如电路中的对偶现象；几何学中两点确定一条直线、两条直线确定（交于）一点；三点确定一个平面、三个平面确定（交于）一点等。

16. 定常控制系统的能观测性：n 阶定常线性控制系统

$$\begin{aligned}&\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t),\quad \boldsymbol{x}(t_0)=[\xi_1\quad \xi_2\quad \cdots\quad \xi_n]^{\mathrm{T}}\\ &\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t)$ 为状态向量，$\boldsymbol{u}(t)$ 为控制输入向量，t_0 是某个被关注的时刻，未必是初始时刻，状态分量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 为未知常数。

与针对能控性的讨论类似，定常线性系统的能观测性与时刻 t_0 的取值无关，因而只需关注未知状态分量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$。

对于 t_0 时刻的未知常值状态分量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$，

(1) 若存在时刻 $t_f>t_0$，利用输入 $\boldsymbol{u}(t)$ 和输出 $\boldsymbol{y}(t)$，$t\in[t_0,t_f)$ 能够唯一确定各个 ξ_i，则称未知状态向量 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 是能观测的；

(2) 若对状态分量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 的任意实际值，总存在时刻 $t_f>t_0$，利用输入 $\boldsymbol{u}(t)$ 和输出 $\boldsymbol{y}(t)$，$t\in[t_0,t_f)$ 能够唯一确定各个 ξ_i，则称状态完全能观测，或称系统完全能观测，简称

系统能观测。

17.（Gram 矩阵判据）定常系统$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)\\ \boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)\end{cases}$能观测的充分必要条件是，存在 $t_L>0$，使得如下的 Gram 矩阵

$$\boldsymbol{W}(t_L)=\int_0^{t_L}[\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}t}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\mathrm{C}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}]\mathrm{d}t$$

可逆。

对于定常系统，Gram 矩阵 $\boldsymbol{W}(t_L)$的可逆性取决于系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和输出矩阵 $\boldsymbol{C}$，形式上与 t_L 有关，但本质上只要 $t_L\neq 0$ 即可。

18.（秩判据）定常系统$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)\\ \boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)\end{cases}$能观测的充分必要条件是，如下能观测性判别矩阵

$$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{O}}(n)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\\ \vdots\\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{n-1}\end{bmatrix}$$

列满秩，即 $\operatorname{rank}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{O}}(n)=n$，而 n 就是 $\boldsymbol{Q}_{\mathrm{O}}(n)$的列数。

19.（PBH 秩判据，振型判据）定常系统$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)\\ \boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)\end{cases}$能观测的充分必要条件是，对系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任意特征值 λ，有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{C}\end{bmatrix}=n$$

20.（PBH 特征向量判据）定常系统$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)\\ \boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)\end{cases}$能观测的充分必要条件是，$\boldsymbol{A}$ 的任意特征向量 $\boldsymbol{h}$ 均满足 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{h}\neq 0$。

21.（定常系统若当标准型判据，实根）：考虑如下的系统矩阵为上三角若当型矩阵的 10 阶定常线性控制系统

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_{31}\\ \dot{x}_{32}\\ \dot{x}_{411}\\ \dot{x}_{421}\\ \dot{x}_{422}\\ \dot{x}_{431}\\ \dot{x}_{432}\\ \dot{x}_{433}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1 &&&&&&&&& \\ & a_2 &&&&&&&& \\ && a_3 & 1 &&&&&& \\ &&& a_3 &&&&&& \\ &&&& a_4 &&&&& \\ &&&&& a_4 & 1 &&& \\ &&&&&& a_4 &&& \\ &&&&&&& a_4 & 1 & 0 \\ &&&&&&&& a_4 & 1 \\ &&&&&&&&& a_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_{31}\\ x_{32}\\ x_{411}\\ x_{421}\\ x_{422}\\ x_{431}\\ x_{432}\\ x_{433}\end{bmatrix}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y}=[\boldsymbol{c}_1 \quad \boldsymbol{c}_2 \quad \boldsymbol{c}_3 \quad * \quad \boldsymbol{c}_{41} \quad \boldsymbol{c}_{42} \quad * \quad \boldsymbol{c}_{43} \quad * \quad *]\,\boldsymbol{x}$$

其中，特征值 a_1,a_2,a_3,a_4 两两互异；输出矩阵拆分为 10 个列向量。

针对系统矩阵的上三角形式，这里只需关注每个若当块第一列所对应的输出矩阵的列，例如，如输出矩阵的倒数第三列 $\boldsymbol{c}_{43}$ 需要列出，因为对应最后一个三阶若当块的第一列即系统矩阵的倒数第三列。$*$ 表示的列不影响系统的能观测性。

根据若当标准型判据，系统能观测的充分必要条件是，4 个向量组 $\{\boldsymbol{c}_1\}$、$\{\boldsymbol{c}_2\}$、$\{\boldsymbol{c}_3\}$、$\{\boldsymbol{c}_{41},\boldsymbol{c}_{42},\boldsymbol{c}_{43}\}$ 均为线性无关；或者说，$\boldsymbol{c}_1$、$\boldsymbol{c}_2$、$\boldsymbol{c}_3$ 均非零，且向量 $\boldsymbol{c}_{41}$、$\boldsymbol{c}_{42}$、$\boldsymbol{c}_{43}$ 线性无关。

进行判别时，输出矩阵中对应同一特征值的列归入同一组，不同的组之间没有联系。

与能控性时类似：系统能观测的必要条件之一，是输出维数不低于特征值的几何重数。几何重数影响能观测性，而代数重数未必。

22.（定常系统若当标准型判据，共轭复根）：考虑如下的系统矩阵为实若当型矩阵的 10 阶定常线性控制系统

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_{111}\\ \dot{x}_{112}\\ \dot{x}_{113}\\ \dot{x}_{114}\\ \dot{x}_{121}\\ \dot{x}_{122}\\ \dot{x}_{21}\\ \dot{x}_{22}\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & 1 & 0 & & & & & & \\ -\beta_1 & \alpha_1 & 0 & 1 & & & & & & \\ & & \alpha_1 & \beta_1 & & & & & & \\ & & -\beta_1 & \alpha_1 & & & & & & \\ & & & & \alpha_1 & \beta_1 & & & & \\ & & & & -\beta_1 & \alpha_1 & & & & \\ & & & & & & \alpha_2 & \beta_2 & & \\ & & & & & & -\beta_2 & \alpha_2 & & \\ & & & & & & & & \alpha_3 & \\ & & & & & & & & & \alpha_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{111}\\ x_{112}\\ x_{113}\\ x_{114}\\ x_{121}\\ x_{122}\\ x_{21}\\ x_{22}\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}+\boldsymbol{Bu}$$

$$\boldsymbol{y}=[\boldsymbol{c}_1 \quad \boldsymbol{c}_2 \quad * \quad * \quad \boldsymbol{c}_3 \quad \boldsymbol{c}_4 \quad \boldsymbol{c}_5 \quad \boldsymbol{c}_6 \quad \boldsymbol{c}_7 \quad \boldsymbol{c}_8]\,\boldsymbol{x}$$

其中，系统矩阵为分块上三角结构，代表特征值的(α_1,β_1)，(α_2,β_2)，$(\alpha_3,0)$，$(\alpha_4,0)$两两互异，代表特征值虚部的 β_1，β_2 均不为零；输出矩阵拆分为 10 个列向量。

系统完全能观测的充分必要条件是：

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2 & \boldsymbol{c}_3 & \boldsymbol{c}_4\\ -\boldsymbol{c}_2 & \boldsymbol{c}_1 & -\boldsymbol{c}_4 & \boldsymbol{c}_3\end{bmatrix}=4,\quad \operatorname{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}_5 & \boldsymbol{c}_6\\ -\boldsymbol{c}_6 & \boldsymbol{c}_5\end{bmatrix}=2,\quad \boldsymbol{c}_7\neq 0,\quad \boldsymbol{c}_8\neq 0$$

23. 能观测性的时间顺序：能控问题是选取控制输入，把 t_0 时刻的已知状态 $\boldsymbol{x}(t_0)$在之后的某个时刻 t_f 精确转移到指定的目标状态如原点，从时间角度看是“面向未来”的。能观测问题是 t_0 时刻的状态 $\boldsymbol{x}(t_0)$未知，要利用 t_0 到之后某个时刻 t_f 期间的输入和输出来确定 $\boldsymbol{x}(t_0)$，从时间角度看是“回首往事”，因为时刻 t_0 在已经发生的输入和输出之前。

确定过去时刻 t_0 的状态 $\boldsymbol{x}(t_0)$，不能说没有意义；但不论从前馈控制还是反馈控制的角度讲，确定还未发生的、将来的状态显然更有意义，且意义重大。实际上，能观测性概念也可以做到“面向未来”，即确定还未发生的状态，见如下的能观测性定义：

定义　对于未来时刻 t_0 和这一时刻的未知常值状态分量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$，

(1) 若存在时刻 $t_f<t_0$，利用输入 $\boldsymbol{u}(t)$和输出 $\boldsymbol{y}(t)$，$t\in[t_f,t_0)$能够唯一确定各个 ξ_i，

则称 t_0 时刻的状态向量 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 是能观测的；

(2) 若对状态分量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 的任意实际值，总存在时刻 $t_f<t_0$，利用输入 $\boldsymbol{u}(t)$ 和输出 $\boldsymbol{y}(t)$，$t\in[t_f,t_0)$ 能够唯一确定各个 ξ_i，则称在 t_0 时刻状态完全能观测，或称系统在 t_0 时刻完全能观测，简称系统在 t_0 时刻能观测。

初学者可能难以理解 $t_f<t_0$，原因在于认为 t_0 是"初始"时刻。初始时刻是相对的，并不是一个绝对的、前无古人的时刻。

由高等数学知识，$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=-\int_b^a f(t)\mathrm{d}t$，即交换积分的上下限会导致积分值反号。根据这一结果，对于时变线性控制系统，为了判别定义所说的能观测性，只需在 Gram 矩阵定义中交换积分上下限 t_0 和 t_f，而这显然不会改变 Gram 矩阵的可逆性。

至此可以看出，这里的能观测性定义虽然在时间顺序上与通常的能观测性定义相反，但判别方法却完全一样。而前者恰为服务于应用的状态获取方法提供了必要的理论支撑，是能观测性概念的初衷。

24. 把单输入系统 $\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{b}u(t)\\ \boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)\end{cases}$ 通过状态的可逆变换 $\bar{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t)$ 化为能控标准型，可参照以下步骤进行：

① 计算能控性判别矩阵 $\boldsymbol{Q}_{\mathrm{C}}=[\boldsymbol{b}\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}\quad \cdots\quad \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b}]$。

② 计算 $\mathrm{rank}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{C}}$。若 $\mathrm{rank}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{C}}=n$，进行下一步；否则，不存在能控标准型，计算终止。

③ 按照式 $\boldsymbol{p}_1=[0\quad \cdots\quad 0\quad 1][\boldsymbol{b}\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}\quad \cdots\quad \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b}]^{-1}$ 计算得 $\boldsymbol{p}_1$。

④ 按照式 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{p}_1\\ \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{A}\\ \vdots\\ \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{A}^{n-1}\end{bmatrix}$ 计算得变换矩阵 $\boldsymbol{P}$。

⑤ 计算 $\boldsymbol{P}^{-1}$。

⑥ 按照式 $\bar{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1}$，$\bar{\boldsymbol{b}}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{b}$，$\bar{\boldsymbol{C}}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}^{-1}$ 计算得 $\bar{\boldsymbol{C}}$ 和伴侣矩阵 $\bar{\boldsymbol{A}}$ 的最后一行。

变换矩阵 $\boldsymbol{P}$，也可按照以下方法构造：

$$\bar{\boldsymbol{P}}=[\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b}\quad \cdots\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}\quad \boldsymbol{b}]\begin{bmatrix}1 & & & \\ a_{n-1} & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & 1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}=\bar{\boldsymbol{P}}^{-1}$$

与前一种方法相比，这里需要额外计算系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$\det(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0$$

但优点是可以直接得到伴侣矩阵 $\bar{\boldsymbol{A}}$ 的最后一行。

初学者可能会有这样的观点：既然能控标准型中 $\bar{\boldsymbol{A}}$ 的最后一行对应 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式系数，$\bar{\boldsymbol{b}}$ 仅由 0 和 1 组成，那么根据特征多项式直接就得到系统的能控标准型的状态方程，即只需计算 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式。这样处理的前提是系统必须能控，否则就出现不能控系统对应能控标准型的矛盾。

25. 单输出系统$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)\\ \boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t)\end{cases}$通过状态的可逆变换$\bar{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{x}(t)$转化为能观测标准型,可参照以下步骤进行:

① 计算能控性判别矩阵 $Q_{\mathrm{O}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{c}\boldsymbol{A}\\ \vdots\\ \boldsymbol{c}\boldsymbol{A}^{n-1}\end{bmatrix}$。

② 计算 $\mathrm{rank}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{O}}$。若 $\mathrm{rank}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{O}}=n$,进行下一步;否则,不存在能观测标准型,计算终止。

③ 按照式 $\boldsymbol{T}_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{c}\boldsymbol{A}\\ \vdots\\ \boldsymbol{c}\boldsymbol{A}^{n-1}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\1\end{bmatrix}$计算得 $\boldsymbol{T}_1$。

④ 按照式 $\boldsymbol{T}=[\boldsymbol{T}_1\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_1\quad \cdots\quad \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{T}_1]$计算得变换矩阵 $\boldsymbol{T}$。

⑤ 计算 $\boldsymbol{T}^{-1}$。

⑥ 按照式 $\bar{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$,$\bar{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}$,$\bar{\boldsymbol{c}}=\boldsymbol{c}\boldsymbol{T}$ 计算得$\bar{\boldsymbol{B}}$ 和$\bar{\boldsymbol{A}}$ 的最后一列。

把系统化为能观测标准型的变换矩阵 $\boldsymbol{T}$,也可按照以下方法构造:

$$\bar{\boldsymbol{T}}=\begin{bmatrix}1 & a_{n-1} & \cdots & a_1\\ & \ddots & \ddots & \vdots\\ & & \ddots & a_{n-1}\\ & & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}\boldsymbol{A}^{n-1}\\ \vdots\\ \boldsymbol{c}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{c}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{T}=\bar{\boldsymbol{T}}^{-1}$$

类似于能控标准型的情形,这里需要额外计算系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$\det(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0$$

26. 单输入-单输出系统的零极相消

(1) 在 $\boldsymbol{c}(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}$ 中的零极相消:考虑状态空间描述

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{bmatrix}a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y}(t)=[c_1\quad c_2\quad \cdots\quad c_n]\boldsymbol{x}(t)$$

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 两两互异,即几何重数都是 1。系统既能控又能观测的充分必要条件是,传递函数中没有零极相消。

再考虑状态空间描述

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{bmatrix}a_1 & 1 & 0 & \\ & a_1 & 1 & \\ & & a_1 & \\ & & & a_2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\\ b_4\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y}(t)=[c_1\quad c_2\quad c_3\quad c_4]\boldsymbol{x}(t)$$

其中 $a_1\neq a_2$，几何重数都是 1。根据若当标准型判据可知，该系统能控的充分必要条件是 $b_3\neq 0$，$b_4\neq 0$，能观测的充分必要条件是 $c_1\neq 0$，$c_4\neq 0$。系统既能控又能观测的充分必要条件依然是其传递函数没有零极相消。

根据若当标准型判据，对于单输入-单输出系统，若特征值的几何重数大于 1，则系统既不能控又不能观测。因此，以上两个例子限制特征值的几何重数为 1。

若在 $\boldsymbol{c}(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}$ 中发生零极相消，则相当于对消的零点堵塞了输入到输出的某种对应状态信息的传输通道，该零点称为输入-输出解耦零点，或传输零点，即使得

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} s_0\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & 0 \end{bmatrix}<n+1$$

的 s_0。

(2) 在预解矩阵 $(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}$ 中的零极相消：这种情况下，根据若当标准型判据，单输入-单输出系统必然既不能控又不能观测。

(3) 在 $(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}$ 中的零极相消：单输入系统能控的充分必要条件是，在 $(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}$ 中没有零极相消。

若在 $(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}$ 中发生零极相消，则相当于对消的零点堵塞了输入到某种对应状态信息的传输通道，该零点称为输入解耦零点，即使得

$$\operatorname{rank}[s_0\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}]<n$$

的 s_0。

(4) 在 $\boldsymbol{c}(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}$ 中的零极相消：单输出系统能观测的充分必要条件是，在 $\boldsymbol{c}(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}$ 中没有零极相消。

若在 $\boldsymbol{c}(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}$ 中发生零极相消，则相当于对消的零点堵塞了与之对应的状态信息传向输出的通道，该零点称为输出解耦零点，即使得

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} s_0\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{c} \end{bmatrix}<n$$

的 s_0。

传输零点、输入解耦零点和输出解耦零点的概念及涵义也适用于多输入-多输出系统。

27. 多输入-多输出系统的零极相消：传递函数矩阵没有零极相消，是多输入-多输出系统既能控又能观测的充分但不必要条件。必要性不成立的原因是，系统矩阵出现了几何重数大于 1 的特征值。若所有的特征值几何重数都是 1，即每个特征值只对应一个若当块，则必要性成立，即判别准则和单输入-单输出系统完全一致。

28. 能控性结构分解：考虑不能控的多输入-多输出 n 阶控制系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$$
$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)$$

能控性判别矩阵

$$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{C}}=[\boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{AB}\quad \cdots\quad \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}]$$

则必有 $\operatorname{rank}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{C}}=n_1<n$。在 $\boldsymbol{Q}_{\mathrm{C}}$ 的各个列向量中选取一个极大无关组，或与这个无关组等价的任意一个向量组 $\{\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2\cdots,\boldsymbol{q}_{n_1}\}$，在此基础上添加 $n-n_1$ 个向量 $\boldsymbol{q}_{n_1+1},\boldsymbol{q}_{n_1+2},\cdots,\boldsymbol{q}_n$，构成 n 维向量空间的一组基底。记

$$\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{q}_1,\cdots,\boldsymbol{q}_{n_1},\boldsymbol{q}_{n_1+1},\cdots,\boldsymbol{q}_n],\quad \boldsymbol{P}=\boldsymbol{Q}^{-1}$$

引入状态的可逆变换 $\bar{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t)$，则可得到

$$\begin{bmatrix}\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}_1(t)\\ \dot{\bar{\boldsymbol{x}}}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{A}}_{11} & \bar{\boldsymbol{A}}_{12}\\ \boldsymbol{0} & \bar{\boldsymbol{A}}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}_1(t)\\ \bar{\boldsymbol{x}}_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{B}}_1\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\boldsymbol{u}(t)$$

$$\boldsymbol{y}(t)=\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{C}}_1 & \bar{\boldsymbol{C}}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}_1(t)\\ \bar{\boldsymbol{x}}_2(t)\end{bmatrix}$$

或

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}_1(t)=\bar{\boldsymbol{A}}_{11}\bar{\boldsymbol{x}}_1(t)+\bar{\boldsymbol{A}}_{12}\bar{\boldsymbol{x}}_2(t)+\bar{\boldsymbol{B}}_1\boldsymbol{u}(t)$$

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}_2(t)=\bar{\boldsymbol{A}}_{22}\bar{\boldsymbol{x}}_2(t)$$

$$\boldsymbol{y}(t)=\bar{\boldsymbol{C}}_1\bar{\boldsymbol{x}}_1(t)+\bar{\boldsymbol{C}}_2\bar{\boldsymbol{x}}_2(t)$$

其中，

$$\operatorname{rank}[\bar{\boldsymbol{B}}_1\quad \bar{\boldsymbol{A}}_{11}\bar{\boldsymbol{B}}_1\quad \cdots\quad \bar{\boldsymbol{A}}_{11}^{n_1-1}\bar{\boldsymbol{B}}_1]=n_1$$

$\bar{\boldsymbol{x}}_1(t)$是 n_1 维的完全能控的子状态向量，$\bar{\boldsymbol{x}}_2(t)$是 $n-n_1$ 维的完全不能控的子状态向量。

29. 能观测性结构分解：考虑不能观测的多输入-多输出 n 阶控制系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$$

$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)$$

能控性判别矩阵

$$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{O}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\\ \vdots\\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{n-1}\end{bmatrix}$$

则必有 $\operatorname{rank}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{O}}=n_1<n$。在 $\boldsymbol{Q}_{\mathrm{O}}$ 的各个行向量中选取一个极大无关组，或与这个无关组等价的任意一个向量组$\{\boldsymbol{h}_1,\boldsymbol{h}_2,\cdots,\boldsymbol{h}_{n_1}\}$，在此基础上添加 $n-n_1$ 个向量 $\boldsymbol{h}_{n_1+1},\boldsymbol{h}_{n_1+2},\cdots,\boldsymbol{h}_n$，构成 n 维向量空间的一组基底。记

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{h}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{h}_{n_1}\\ \boldsymbol{h}_{n_1+1}\\ \vdots\\ \boldsymbol{h}_n\end{bmatrix}$$

引入状态的可逆变换 $\bar{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}(t)$，则可得到

$$\begin{bmatrix}\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}_1(t)\\ \dot{\bar{\boldsymbol{x}}}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{A}}_{11} & \boldsymbol{0}\\ \bar{\boldsymbol{A}}_{21} & \bar{\boldsymbol{A}}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}_1(t)\\ \bar{\boldsymbol{x}}_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{B}}_1\\ \bar{\boldsymbol{B}}_2\end{bmatrix}\boldsymbol{u}(t)$$

$$\boldsymbol{y}(t)=\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{C}}_1 & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}_1(t)\\ \bar{\boldsymbol{x}}_2(t)\end{bmatrix}$$

或

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}_1(t)=\bar{\boldsymbol{A}}_{11}\bar{\boldsymbol{x}}_1(t)+\bar{\boldsymbol{B}}_1\boldsymbol{u}(t)$$
$$\boldsymbol{y}(t)=\bar{\boldsymbol{C}}_1\bar{\boldsymbol{x}}_1(t)$$
$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}_2(t)=\bar{\boldsymbol{A}}_{21}\bar{\boldsymbol{x}}_1(t)+\bar{\boldsymbol{A}}_{22}\bar{\boldsymbol{x}}_2(t)+\bar{\boldsymbol{B}}_2\boldsymbol{u}(t)$$

其中，

$$\mathrm{rank}\boldsymbol{Q}_O=\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{C}}_1\\ \bar{\boldsymbol{C}}_1\bar{\boldsymbol{A}}_{11}\\ \vdots\\ \bar{\boldsymbol{C}}\bar{\boldsymbol{A}}_{11}^{n-1}\end{bmatrix}=n_1$$

$\bar{\boldsymbol{x}}_1(t)$是 n_1 维的完全能观测的子状态向量，$\bar{\boldsymbol{x}}_2(t)$是 $n-n_1$ 维的完全不能观测的子状态向量。

30. 能控性-能观测性结构分解：考虑不能控且不能观测的多输入-多输出 n 阶控制系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$$
$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)$$

对该系统先按照能控性分解的方法，得到相应的状态空间描述；再对能控子系统和不能控子系统分别进行能观测性分解，可得 Kalman 分解，即如下形式的状态空间描述：

$$\begin{bmatrix}\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}_1(t)\\ \dot{\bar{\boldsymbol{x}}}_2(t)\\ \dot{\bar{\boldsymbol{x}}}_3(t)\\ \dot{\bar{\boldsymbol{x}}}_4(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{A}}_{11} & \boldsymbol{0} & \bar{\boldsymbol{A}}_{13} & \boldsymbol{0}\\ \bar{\boldsymbol{A}}_{21} & \bar{\boldsymbol{A}}_{22} & \bar{\boldsymbol{A}}_{23} & \bar{\boldsymbol{A}}_{24}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \bar{\boldsymbol{A}}_{33} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \bar{\boldsymbol{A}}_{43} & \bar{\boldsymbol{A}}_{44}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}_1(t)\\ \bar{\boldsymbol{x}}_2(t)\\ \bar{\boldsymbol{x}}_3(t)\\ \bar{\boldsymbol{x}}_4(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{B}}_1\\ \bar{\boldsymbol{B}}_2\\ \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{y}(t)=[\bar{\boldsymbol{C}}_1\quad \boldsymbol{0}\quad \bar{\boldsymbol{C}}_3\quad \boldsymbol{0}]\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}_1(t)\\ \bar{\boldsymbol{x}}_2(t)\\ \bar{\boldsymbol{x}}_3(t)\\ \bar{\boldsymbol{x}}_4(t)\end{bmatrix}$$

其中，$\bar{\boldsymbol{x}}_1(t)$能控且能观测，$\bar{\boldsymbol{x}}_2(t)$能控但不能观测，$\bar{\boldsymbol{x}}_3(t)$不能控但能观测，$\bar{\boldsymbol{x}}_4(t)$不能控且不能观测。

习题、解答与评注

3.1　判断下列系统的能控性。

(1) $\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$

(2) $\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -2 & -4 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\\ 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}u$

(5) $\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 4 & 3\\ 0 & 20 & 16\\ 0 & -25 & -20\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\ 3\\ 0\end{bmatrix}u$

解　(1) 由于该系统控制矩阵 $\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$，系统矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，所以

$$\boldsymbol{Ab}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

从而系统的能控性矩阵为

$$\boldsymbol{U}_{\mathrm{C}}=[\boldsymbol{b}\quad \boldsymbol{Ab}]=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

显然有

$$\mathrm{rank}\boldsymbol{U}_{\mathrm{C}}=\mathrm{rank}\,[\boldsymbol{b}\quad \boldsymbol{Ab}]=2$$

满足能控性的充要条件，所以该系统能控。

(2) 由于该系统控制矩阵为

$$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

系统矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -2 & -4 & -3\end{bmatrix}$$

则有

$$\boldsymbol{Ab}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -2 & -4 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\\ 1 & -7\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -2 & -4 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\\ 1 & -7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -7\\ 1 & 15\end{bmatrix}$$

从而系统的能控性矩阵为

$$U_C = [b \quad Ab \quad A^2b] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -7 \\ -1 & 1 & 1 & -7 & 1 & 15 \end{bmatrix}$$

有

$$\mathrm{rank}\,U_C = 3$$

满足能控性的充要条件，所以该系统能控。

（3）由于该系统控制矩阵为

$$b = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

系统矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

则有

$$Ab = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2b = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -9 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

于是，系统的能控性矩阵为

$$U_C = [b \quad Ab \quad A^2b] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 3 & 9 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

可知

$$\mathrm{rank}\,U_C = 2 < n$$

不满足能控性的充要条件，所以该系统不完全能控。

（4）由于该系统控制矩阵为

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

系统矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

则有

$$\boldsymbol{Ab}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ -1\\ -1\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ -\lambda_1\\ -\lambda_1\\ -\lambda_1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ -\lambda_1\\ -\lambda_1\\ -\lambda_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\lambda_1\\ -\lambda_1^2\\ -\lambda_1^2\\ -\lambda_1^2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\lambda_1\\ -\lambda_1^2\\ -\lambda_1^2\\ -\lambda_1^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\lambda_1^2\\ -\lambda_1^3\\ -\lambda_1^3\\ -\lambda_1^3\end{bmatrix}$$

从而系统的能控性矩阵为

$$\boldsymbol{U}_{\mathrm{C}}=[\boldsymbol{b}\quad \boldsymbol{Ab}\quad \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b}\quad \boldsymbol{A}^3\boldsymbol{b}]=\begin{bmatrix}0 & -1 & -2\lambda_1 & -3\lambda_1^2\\ -1 & -\lambda_1 & -\lambda_1^2 & -\lambda_1^3\\ -1 & -\lambda_1 & -\lambda_1^2 & -\lambda_1^3\\ -1 & -\lambda_1 & -\lambda_1^2 & -\lambda_1^3\end{bmatrix}$$

易知

$$\mathrm{rank}\boldsymbol{U}_{\mathrm{C}}=2<n$$

不满足能控性的充要条件，所以该系统不能控。

（5）由于该系统控制矩阵为

$$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}-1\\ 3\\ 0\end{bmatrix}$$

系统矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 4 & 3\\ 0 & 20 & 16\\ 0 & -25 & -20\end{bmatrix}$$

则有

$$\boldsymbol{Ab}=\begin{bmatrix}0 & 4 & 3\\ 0 & 20 & 16\\ 0 & -25 & -20\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 3\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12\\ 60\\ -75\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0 & 4 & 3\\ 0 & 20 & 16\\ 0 & -25 & -20\end{bmatrix}\begin{bmatrix}12\\ 60\\ -75\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

从而系统的能控性矩阵为

$$\boldsymbol{U}_{\mathrm{C}}=[\boldsymbol{b}\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}\quad \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b}]=\begin{bmatrix}-1 & 12 & 15\\ 3 & 60 & 0\\ 0 & -75 & 0\end{bmatrix}$$

易知

$$\mathrm{rank}\boldsymbol{U}_{\mathrm{C}}=3$$

满足能控性的充要条件，所以该系统能控。

评注

（1）核心就是 $\mathrm{rank}\boldsymbol{U}_{\mathrm{C}}$ 是否等于系统阶次。实际上，$\mathrm{rank}\boldsymbol{U}_{\mathrm{C}}$ 等于几，就有几个状态变量是完全能控的，但系统能控要求全部状态变量都完全能控。

（2）$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{A}\boldsymbol{b})$，这个思路可以借用已有的 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}$。

3.2　判断下列系统的输出能控性。

（1）

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\\ 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

（2）

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=[1\quad 0\quad 0]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

解　（1）系统输出完全能控的充分必要条件是，判别矩阵

$$[\boldsymbol{CB}\ \vdots\ \boldsymbol{CAB}\ \vdots\ \boldsymbol{CA}^2\boldsymbol{B}\ \vdots\ \cdots\ \vdots\ \boldsymbol{CA}^{n-1}\boldsymbol{B}\ \vdots\ \boldsymbol{D}]$$

的秩等于输出维数即输出变量个数。由于

$$\boldsymbol{CB}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\\ 2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{CAB}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\\ 2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & 3\\ 3 & -3\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{CA}^2\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\\ 2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11 & -9\\ -9 & 9\end{bmatrix}$$

所以

$$[\boldsymbol{CB}\quad \boldsymbol{CAB}\quad \boldsymbol{CA}^2\boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{D}]=\begin{bmatrix}3 & -1 & -5 & 3 & 11 & -9\\ -1 & 1 & 3 & -3 & -9 & 9\end{bmatrix}$$

而

$$\mathrm{rank}\,[\boldsymbol{CB}\quad \boldsymbol{CAB}\quad \boldsymbol{CA}^2\boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{D}]=2$$

等于输出变量的数目,因此系统是输出能控的。

（2）由于

$$\boldsymbol{CB}=\boldsymbol{0}$$
$$\boldsymbol{CAB}=\boldsymbol{0}$$
$$\boldsymbol{CA}^2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$$

所以

$$[\boldsymbol{CB}\quad \boldsymbol{CAB}\quad \boldsymbol{CA}^2\boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{D}]=[\boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{1}\quad \boldsymbol{0}]$$

而

$$\mathrm{rank}\,[\boldsymbol{CB}\quad \boldsymbol{CAB}\quad \boldsymbol{CA}^2\boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{D}]=1$$

等于输出变量的数目,因此系统是输出能控的。

3.3　判断下列系统的能观测性。

（1）$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$

$y=[1\quad 1]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$

（2）$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -2 & -4 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$

（3）$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 4 & 3\\ 0 & 20 & 16\\ 0 & -25 & -20\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$

$y=[-1\quad 3\quad 0]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$

（4）$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$

$y=[0\quad 1\quad 1]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$

（5）$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&0&0\\0&-4&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$

$y=\begin{bmatrix}1&1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$

解　（1）系统的输出矩阵 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&1\end{bmatrix}$，系统矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}$，得

$$\boldsymbol{CA}=\begin{bmatrix}1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\end{bmatrix}$$

系统能观测性矩阵为

$$\boldsymbol{U}_{\mathrm{O}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{CA}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\2&1\end{bmatrix}$$

可知

$$\mathrm{rank}\boldsymbol{U}_{\mathrm{O}}=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{CA}\end{bmatrix}=2$$

满足能观测性的充要条件，所以该系统是能观测的。

（2）系统的输出矩阵 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&2&1\end{bmatrix}$，系统矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-2&-4&-3\end{bmatrix}$，于是

$$\boldsymbol{CA}=\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-2&-4&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&4&4\\-2&-3&-1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{CA}^2=\begin{bmatrix}2&4&4\\-2&-3&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-2&-4&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8&-14&-8\\2&2&0\end{bmatrix}$$

系统能观测性矩阵为

$$\boldsymbol{U}_{\mathrm{O}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{CA}\\\boldsymbol{CA}^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&2&1\\2&4&4\\-2&-3&-1\\-8&-14&-8\\2&2&0\end{bmatrix}$$

易知

$$\mathrm{rank}\boldsymbol{U}_{\mathrm{O}}=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{CA}\\\boldsymbol{CA}^2\end{bmatrix}=3$$

满足能观测性的充要条件，所以该系统是能观测的。

（3）系统的输出矩阵 $\boldsymbol{C}=[-1\quad 3\quad 0]$，系统矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 4 & 3\\0 & 20 & 16\\0 & -25 & -20\end{bmatrix}$，于是

$$\boldsymbol{CA}=[-1\quad 3\quad 0]\begin{bmatrix}0 & 4 & 3\\0 & 20 & 16\\0 & -25 & -20\end{bmatrix}=[0\quad 56\quad 45]$$

$$\boldsymbol{CA}^2=[0\quad 56\quad 45]\begin{bmatrix}0 & 4 & 3\\0 & 20 & 16\\0 & -25 & -20\end{bmatrix}=[0\quad -5\quad -4]$$

系统能观测性矩阵为

$$\boldsymbol{U}_{\mathrm{O}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{CA}\\\boldsymbol{CA}^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 0\\0 & 56 & 45\\0 & -5 & -4\end{bmatrix}$$

易知

$$\mathrm{rank}\boldsymbol{U}_{\mathrm{O}}=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{CA}\\\boldsymbol{CA}^2\end{bmatrix}=3$$

满足能观测性的充要条件，所以该系统是能观测的。

（4）系统的输出矩阵 $\boldsymbol{C}=[0\quad 1\quad 1]$，系统矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & -3\end{bmatrix}$，于是

$$\boldsymbol{CA}=[0\quad 1\quad 1]\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & -3\end{bmatrix}=[0\quad 2\quad -3]$$

$$\boldsymbol{CA}=[0\quad 2\quad -3]\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & -3\end{bmatrix}=[0\quad 4\quad 9]$$

系统能观测性矩阵为

$$\boldsymbol{U}_{\mathrm{O}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{CA}\\\boldsymbol{CA}^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\0 & 2 & -3\\0 & 4 & 9\end{bmatrix}$$

可知

$$\mathrm{rank}\boldsymbol{U}_{\mathrm{O}}=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{CA}\\\boldsymbol{CA}^2\end{bmatrix}=2<3$$

不满足能观测性的充要条件，所以该系统是不能观测的。

（5）系统的输出矩阵 $\boldsymbol{C}=[1\quad 1\quad 4]$，系统矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-4 & 0 & 0\\0 & -4 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，于是

$$\boldsymbol{CA}=[1\quad 1\quad 4]\begin{bmatrix}-4 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=[-4\quad -4\quad 4]$$

$$\boldsymbol{CA}^2=[-4\quad -4\quad 4]\begin{bmatrix}-4 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=[16\quad 16\quad 4]$$

系统能观测性矩阵为

$$\boldsymbol{U}_{\mathrm{O}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{CA}\\ \boldsymbol{CA}^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 4\\ -4 & -4 & 4\\ 16 & 16 & 4\end{bmatrix}$$

可知

$$\mathrm{rank}\boldsymbol{U}_{\mathrm{O}}=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{CA}\\ \boldsymbol{CA}^2\end{bmatrix}=2<3$$

不满足能观测性的充要条件,所以该系统是不能观测的。

评注 核心是 $\mathrm{rank}\boldsymbol{U}_{\mathrm{O}}$ 是否等于系统阶次。注意 $\boldsymbol{CA}^2=\boldsymbol{CA}\times\boldsymbol{A}$,而不是 $\boldsymbol{CA}^2=\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}^2$。前者可以借用已有的 $\boldsymbol{CA}$,简化计算。

3.4 试确定当 p 与 q 为何值时下列系统不能控,为何值时不能观测。

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 12\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}p\\ -1\end{bmatrix}u$$

$$y=[q\quad 1]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

解 系统的能控性矩阵为

$$\boldsymbol{U}_{\mathrm{C}}=[\boldsymbol{b}\quad \boldsymbol{Ab}]=\begin{bmatrix}p & p-12\\ -1 & p\end{bmatrix}$$

其行列式为

$$\det[\boldsymbol{b}\quad \boldsymbol{Ab}]=p^2+p-12$$

根据判定能控性的定理,若系统能控,则系统能控性矩阵的秩为 2,亦即 $\det[\boldsymbol{b}\quad \boldsymbol{Ab}]\neq 0$,可知 $p\neq -4$ 且 $p\neq 3$ 时系统能控。

系统能观测性矩阵为

$$\boldsymbol{U}_{\mathrm{O}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{CA}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}q & 1\\ q+1 & 12q\end{bmatrix}$$

其行列式为

$$\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{CA}\end{bmatrix}=12q^2-q-1$$

根据判定能观测性的定理,若系统能观测,则系统能观测性矩阵的秩为 2,亦即 $\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{CA}\end{bmatrix}\neq 0$,可知 $q\neq\frac{1}{3}$ 且 $q\neq -\frac{1}{4}$ 时系统能观测。

评注　对于函数矩阵，行列式的计算一般比秩的计算简明一些。

3.5　试证明如下系统：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20 & -1 & 0\\ 4 & 16 & 0\\ 12 & -6 & 18\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

不论 a,b,c 取何值都不能控。

证明：系统的特征方程为

$$|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-20 & 1 & 0\\ -4 & \lambda-16 & 0\\ -12 & 6 & \lambda-18\end{vmatrix}=0$$

解得特征值

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=18$$

分别将其代入特征方程得

$$\lambda \boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ -4 & 2 & 0\\ -12 & 6 & 0\end{bmatrix}$$

由于

$$\mathrm{rank}(\lambda \boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0 & a\\ -4 & 2 & 0 & b\\ -12 & 6 & 0 & c\end{bmatrix}<3$$

所以，根据 PBH 秩判据，不论 a,b,c 取何值系统都不能控。

另一方面，

$$\mathrm{rank}(\lambda \boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{A})=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ -4 & 2 & 0\\ -12 & 6 & 0\end{bmatrix}=1$$

基础解的个数是 $3-1=2$，所以存在着两个线性无关的向量 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2$，可将 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 转化为

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{vmatrix}18 & 0 & 0\\ 0 & 18 & 1\\ 0 & 0 & 18\end{vmatrix},\quad \bar{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{a}\\ \bar{b}\\ \bar{c}\end{bmatrix}$$

$\lambda=18$ 对应两个若当块（一个是退化的一阶若当块），因为 $\bar{a}$ 和 $\bar{c}$ 都是标量，作为向量的特殊情形，它们总是线性相关的，因此，根据标准型判据，无论 a,b,c 为何值，系统均不能控。

评注　判别线性定常系统的能控性和能观测性，有秩判据，若当标准型判据，PBH 特征向量判据，PBH 秩判据，其中只有秩判据不涉及特征值。

3.6　已知有两个单输入和单输出系统 ΣA 和 ΣB 的状态方程与输出方程分别为：

$$\Sigma A:\ \dot{\boldsymbol{x}}_A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & -4\end{bmatrix}\boldsymbol{x}_A+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y}_A=[2\quad 1]\,\boldsymbol{x}_A$$

$$\Sigma B:\dot{\boldsymbol{x}}_B=-\boldsymbol{x}_B+\boldsymbol{u}$$
$$\boldsymbol{y}_B=\boldsymbol{x}_B$$

分别将两个系统并联接成为图 3.1 所示系统。针对图 3.1 讨论下列问题：

(1) 写出各图示系统的状态方程及输出方程；

(2) 判别该系统的能控性与能观测性；

(3) 求出该系统的传递函数。

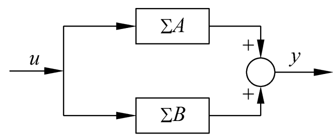

图 3.1　并联系统结构图

解　(1) 图 3.1 系统为并联结构。已知 $\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}0&1\\-3&-4\end{bmatrix}$，$A_2=-1$；$\boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$，$B_2=1$。则组合系统的状态空间表达式为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&A_2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_1\\B_2\end{bmatrix}\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}0&1&0\\-3&-4&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$
$$\boldsymbol{y}=[2\quad 1\quad 1]\boldsymbol{x}$$

(2) 该系统的能控性矩阵为

$$\boldsymbol{U}_{\mathrm{C}}=[\boldsymbol{b}\quad \boldsymbol{Ab}\quad \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b}]=\begin{bmatrix}0&1&-4\\1&-4&13\\1&-1&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&A_2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_1\\B_2\end{bmatrix}$$

该系统的能控性矩阵的秩为 3，所以该系统能控。

该系统的能观测性矩阵为

$$\boldsymbol{U}_{\mathrm{O}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{CA}\\\boldsymbol{CA}^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&1\\-3&-2&1\\6&5&1\end{bmatrix}$$

该系统的能观测性矩阵的秩为 3，所以该系统能观测。

(3) 图 3.1 系统的传递函数由图可得

$$\begin{aligned}G(s)&=\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}\\&=[2\quad 1\quad 1]\begin{bmatrix}\dfrac{s+4}{(s+1)(s+3)}&\dfrac{1}{(s+1)(s+3)}&0\\\dfrac{-3}{(s+1)(s+3)}&\dfrac{s}{(s+1)(s+3)}&0\\0&0&\dfrac{1}{s+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\\&=\frac{2s+5}{s^2+4s+3}\end{aligned}$$

评注　对于并联系统，子系统没有重合的特征值，有利于组合系统的能控性。

3.7　已知两个系统 S_1 和 S_2 的状态方程和输出方程分别为

$$S_1:\dot{\boldsymbol{x}}_1=\begin{bmatrix}0&1\\-3&-4\end{bmatrix}\boldsymbol{x}_1+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}_1$$
$$\boldsymbol{y}_1=[2\quad 1]\boldsymbol{x}_1$$

$$S_2:\ \dot{\boldsymbol{x}}_2 = -2\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{u}_2$$

$$\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{x}_2$$

若两个系统按如图 3.2 所示的方法串联，设串联后的系统为 S。

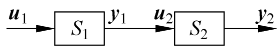

图 3.2　串联系统结构图

（1）求图示串联系统 S 的状态方程和输出方程。

（2）分析系统 S_1，S_2 和串联后系统 S 的能控性、可观测性。

解　（1）因为 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2=\boldsymbol{y}_1$，$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}_2$，因此

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{11} \\ \dot{x}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_2 = -2\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{y}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} - 2\boldsymbol{x}_2$$

$$\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{x}_2$$

串联组合系统的状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{11} \\ \dot{x}_{12} \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}$$

输出方程为

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_2 \end{bmatrix}$$

（2）串联后系统的能控性矩阵

$$\boldsymbol{U}_{\mathrm{C}} = \begin{bmatrix} b & \boldsymbol{A}b & \boldsymbol{A}^2 b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & -4 & 13 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

可见，

$$\det\boldsymbol{U}_{\mathrm{C}} = 0,\quad \mathrm{rank}\boldsymbol{U}_{\mathrm{C}} = 2 < 3$$

因此，系统不能控。

串联后系统的能观测性矩阵

$$\boldsymbol{U}_{\mathrm{O}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{CA} \\ \boldsymbol{CA}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -7 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

可见，

$$\det\boldsymbol{U}_{\mathrm{O}} = -1 \neq 0,\quad \mathrm{rank}\boldsymbol{U}_{\mathrm{O}} = 3$$

因此，系统能观测。

3.8 针对图 3.3 讨论下列问题：

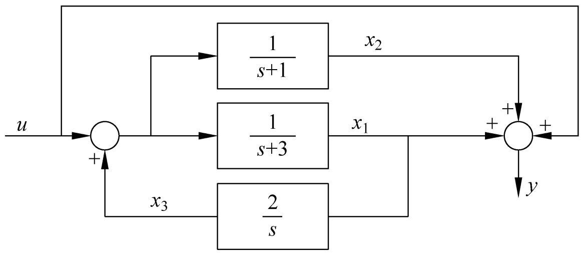

图 3.3 系统结构图

(1) 写出各图示系统的状态方程及输出方程；

(2) 判别该系统的能控性与能观测性；

(3) 求出该系统的传递函数。

解 (1) 由图 3.3 系统列写方程得：

$$\begin{cases}(u+x_3)\cdot\dfrac{1}{s+1}=x_2\\[2mm](u+x_3)\cdot\dfrac{1}{s+3}=x_1\\[2mm]\dfrac{2}{s}\cdot x_1=x_3\\[2mm]u+x_1+x_2=y\end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases}\dot{x}_1=u+x_3-3x_1\\\dot{x}_2=u+x_3-x_2\\\dot{x}_3=2x_1\\y=u+x_1+x_2\end{cases}$$

写成矩阵形式

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-3&0&1\\0&-1&1\\2&0&0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1&1&0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+u$$

(2) 该系统的能控性矩阵为

$$\boldsymbol{U}_{\mathrm{C}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}&\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}&\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-3&10\\1&-1&2\\0&1&-3\end{bmatrix}$$

该系统的能控性矩阵的秩为 3，所以该系统能控。

该系统的能观测性矩阵为

$$\boldsymbol{U}_{\mathrm{O}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{CA}\\\boldsymbol{CA}^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\-3&-1&2\\11&1&-4\end{bmatrix}$$

该系统的能观测性矩阵的秩为 3，所以该系统能观测。

（3）图 3.3 系统的传递函数由图可得

$$\boldsymbol{G}(s)=\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{s}{s^2+3s-2} & 0 & \dfrac{1}{s^2+3s-2}\\ \dfrac{2}{(s+1)(s^2+3s-2)} & \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{s+3}{(s+1)(s^2+3s-2)}\\ \dfrac{2}{s^2+3s-2} & 0 & \dfrac{s+3}{s^2+3s-2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+1$$

$$=\frac{s^3+6s^2+5s-2}{s^3+4s^2+s-2}$$

评注　注意到 $\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$，在计算 $G(s)$ 时，$(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}$ 的第三行和第三列实际上不必求出，因为这些位置的元素都要和 0 相乘。

3.9　设系统状态方程为 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{Bu}$。若 x_a 及 x_b 是系统的能控状态。试证状态 $\alpha x_a+\beta x_b$ 也是能控的。其中 α,β 为任意常数。

证明：由能控性定义可知，$\boldsymbol{x}_a$ 为系统的能控状态，是指在有限时间区域 $[t_0,t_f]$ 内，存在控制向量 $\boldsymbol{u}_a(t)$ 使得系统从初始状态 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 转移到任意终端状态 $\boldsymbol{x}(t_f)$。即

$$\boldsymbol{x}(t_f)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t_f}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{Bu}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

不失一般性，假设 $\boldsymbol{x}(t_f)=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_a$，$\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{u}_a(t)$，则有

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}_a+\int_{t_0}^{t_f}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{Bu}_a(\tau)\mathrm{d}\tau=0$$

解得

$$\boldsymbol{x}_a=-\int_{t_0}^{t_f}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t_0-\tau)}\boldsymbol{Bu}_a(\tau)\mathrm{d}\tau$$

同理，分析 $\boldsymbol{x}_b$，可得

$$\boldsymbol{x}_b=-\int_{t_0}^{t_f}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t_0-\tau)}\boldsymbol{Bu}_b(\tau)\mathrm{d}\tau$$

由此，将上式代入系统状态 $\boldsymbol{x}_{ab}=\alpha\boldsymbol{x}_a+\beta\boldsymbol{x}_b$，可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_{ab}&=\alpha\boldsymbol{x}_a+\beta\boldsymbol{x}_b\\&=\alpha\left(-\int_{t_0}^{t_f}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t_0-\tau)}\boldsymbol{Bu}_a(\tau)\mathrm{d}\tau\right)+\beta\left(-\int_{t_0}^{t_f}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t_0-\tau)}\boldsymbol{Bu}_b(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\\&=-\int_{t_0}^{t_f}\left[(\alpha\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t_0-\tau)}\boldsymbol{Bu}_a(\tau))+(\beta\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t_0-\tau)}\boldsymbol{Bu}_b(\tau))\right]\mathrm{d}\tau\\&=-\int_{t_0}^{t_f}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t_0-\tau)}B(\alpha\boldsymbol{u}_a(\tau)+\beta\boldsymbol{u}_b(\tau))\mathrm{d}\tau\\&=-\int_{t_0}^{t_f}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t_0-\tau)}\boldsymbol{Bu}_{ab}(\tau)\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

式中

$$\boldsymbol{u}_{ab}(t)=\alpha u_a(t)+\beta u_b(t)$$

由于 $\boldsymbol{u}_a(t)$ 及 $\boldsymbol{u}_b(t)$ 都是控制向量，则其线性组合 $\boldsymbol{u}_{ab}(t)=\alpha u_a(t)+\beta u_b(t)$ 也是系统控制向量。

由能控性定义可知，在有限时间区域 $[t_0,t_f]$ 内，存在控制向量 $\boldsymbol{u}_{ab}(t)$ 使得系统从初始状态 $x(t_0)$ 转移到任意终端状态 $x(t_f)$，因此该系统状态 $x_{ab}=\alpha x_a+\beta x_b$ 是能控的。得证。

评注 题目结论表明，全体可控的状态构成一个线性子空间。

3.10 将下列状态方程转化为能控标准型

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

解 该状态方程的能控性矩阵为

$$\boldsymbol{U}_{\mathrm{C}}=[\boldsymbol{b}\quad \boldsymbol{Ab}]=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 7\end{bmatrix}$$

知它是非奇异的。求得逆矩阵有

$$(\boldsymbol{U}_{\mathrm{C}})^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{7}{8} & \dfrac{1}{8}\\ -\dfrac{1}{8} & \dfrac{1}{8}\end{bmatrix}$$

由 $\boldsymbol{P}_1=[0\quad \cdots\quad 0\quad 1](\boldsymbol{b}\quad \boldsymbol{Ab}\quad \cdots\quad \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b}]^{-1}$，得

$$\boldsymbol{P}_1=[0\quad 1](\boldsymbol{U}_{\mathrm{C}})^{-1}=[0\quad 1]\begin{bmatrix}\dfrac{7}{8} & \dfrac{1}{8}\\ -\dfrac{1}{8} & \dfrac{1}{8}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{8} & \dfrac{1}{8}\end{bmatrix}$$

同理，由 $\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}$ 得

$$\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{4} & \dfrac{3}{4}\end{bmatrix}$$

从而得到 $\boldsymbol{P}$

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_1\\ \boldsymbol{P}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{8} & \dfrac{1}{8}\\ \dfrac{1}{4} & \dfrac{3}{4}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}^{-1}=-\frac{1}{8}\begin{bmatrix}\dfrac{3}{4} & -\dfrac{1}{8}\\ -\dfrac{1}{4} & -\dfrac{1}{8}\end{bmatrix}$$

由此可得

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{C}}=\boldsymbol{PAP}^{-1}=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{8} & \dfrac{1}{8}\\ \dfrac{1}{4} & \dfrac{3}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{-3}{32} & \dfrac{1}{64}\\ \dfrac{1}{32} & \dfrac{1}{64}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -10 & 5\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{b}_{\mathrm{C}}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{8} & \frac{1}{8}\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

所以

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -10 & 5\end{bmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u$$

此即为该状态方程的能控标准型。

评注 能控标准型的计算不涉及特征值,这一点很重要,使之成为系统分析与设计中的合理计算类型。转化为能控标准型的方法不唯一,本题方法较简明。注意 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{C}}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1}$,$\boldsymbol{b}_{\mathrm{C}}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{b}$ 中 $\boldsymbol{P}^{-1}$ 的位置,对应 $\bar{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$,而不是 $\bar{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}$。

3.11 将下列状态方程和输出方程转化为能观测标准型。

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

$$y=\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

解 给定系统的能观测性矩阵为

$$\boldsymbol{U}_{\mathrm{O}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

知它是非奇异的。求得逆矩阵有

$$(\boldsymbol{U}_{\mathrm{O}})^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

由此可得

$$\boldsymbol{T}_1=\begin{bmatrix}-1 & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

根据求变换矩阵 $\boldsymbol{T}$ 公式有

$$\boldsymbol{T}=[\boldsymbol{T}_1 \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_1]=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{T}^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

代入系统的状态表达式。分别得

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{O}}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{b}_{\mathrm{O}}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}2&0\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\-1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}_{\mathrm{O}}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\end{bmatrix}$$

所以该状态方程的能观测标准型为

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}=\begin{bmatrix}0&-2\\1&2\end{bmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}+\begin{bmatrix}4\\-1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}0&1\end{bmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}$$

评注　本题中 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{O}}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$，对应 $\bar{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{x}$，注意和转化为能控标准型时相区别。

3.12　系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}$$

式中，

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2&2&-1\\0&-2&0\\1&-4&0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}1&-1&1\end{bmatrix}$$

(1) 试判断系统能控性和能观测性。

(2) 若不能控或不能观测，试考查可控制的状态变量数、可观测的状态变量数有多少。

(3) 写出能控子空间系统及能观测子空间系统。

解　(1) 系统可控矩阵为

$$\boldsymbol{U}_{\mathrm{C}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}&\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}&\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1&2\\0&0&0\\1&0&-1\end{bmatrix}$$

可见

$$\det\boldsymbol{U}_{\mathrm{C}}=0,\quad \mathrm{rank}\boldsymbol{U}_{\mathrm{C}}=2<3$$

因此，系统不能控。

系统可观测矩阵为

$$\boldsymbol{U}_{\mathrm{O}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&0&-1\\1&2&1\end{bmatrix}$$

可见

$$\det\boldsymbol{U}_{\mathrm{O}}=0,\quad \mathrm{rank}\boldsymbol{U}_{\mathrm{O}}=2<3$$

因此，系统不能观测。

(2) 首先,由 $\det(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=0$ 求特征根。因为

$$\det(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix} s+2 & -2 & 1 \\ 0 & s+2 & 0 \\ -1 & 4 & s \end{vmatrix}$$
$$=s(s+2)^2+(s+2)$$
$$=(s+1)^2(s+2)$$

特征根 -1、-2 分别是重根和单根。因此,必须利用阶数 k 的广义特征向量的方法决定变换矩阵。由此得到变换矩阵 $\boldsymbol{P}$,

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

求其逆矩阵有

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

因此,

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$$
$$=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\boldsymbol{b}}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\boldsymbol{c}}=\boldsymbol{c}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

变换后的状态方程和输出方程为

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$
$$\bar{\boldsymbol{y}}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}$$

显然,系统有两个可控制的变量,分别是状态变量 $\bar{x}_1$、$\bar{x}_2$;而可观测的状态变量也有两个,分别是 $\bar{x}_2$、$\bar{x}_3$。

(3) 由 $\bar{x}_1$、$\bar{x}_2$ 构成的可控子空间系统为

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}} = \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}$$

$$\bar{\boldsymbol{y}} = [0 \quad 1]\,\bar{\boldsymbol{x}}$$

由 $\bar{x}_2$、$\bar{x}_3$ 构成的可观测子空间系统为

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}} = \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_2 \\ \dot{\bar{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}$$

$$\bar{\boldsymbol{y}} = [1 \quad 1]\,\bar{\boldsymbol{x}}$$

评注　(1) 要知道能控能观测的状态变量数目,看判别矩阵的秩就可以了。

(2) 至于能控能观测子空间,由于求解了特征值,这里的做法只是数学上的做法。合乎自动控制理念的做法是卡尔曼分解,不需要求解系统特征值。

3.13　在如下系统中

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}\boldsymbol{u}$$
$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}$$

若满足如下条件

$$\boldsymbol{cb} = \boldsymbol{cAb} = \boldsymbol{cA}^2\boldsymbol{b} = \cdots = \boldsymbol{cA}^{n-2}\boldsymbol{b} = 0, \quad \boldsymbol{cA}^{n-1}\boldsymbol{b} = k \neq 0$$

试证明系统总是能控能观测的。

证明:系统能控矩阵为

$$\boldsymbol{U}_{\mathrm{C}} = [\boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{Ab} \quad \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b} \quad \cdots \quad \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b}]$$

可观测性矩阵为

$$\boldsymbol{U}_{\mathrm{O}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{cA} \\ \boldsymbol{cA}^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{cA}^{n-1} \end{bmatrix}$$

将两矩阵相乘

$$\boldsymbol{U}_{\mathrm{O}}\boldsymbol{U}_{\mathrm{C}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{cA} \\ \boldsymbol{cA}^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{cA}^{n-1} \end{bmatrix} [\boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{Ab} \quad \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b} \quad \cdots \quad \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b}]$$

$$= \begin{bmatrix} \boldsymbol{cb} & \boldsymbol{cAb} & \boldsymbol{cA}^2\boldsymbol{b} & \cdots & \boldsymbol{cA}^{n-1}\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{cAb} & \boldsymbol{cA}^2\boldsymbol{b} & \boldsymbol{cA}^3\boldsymbol{b} & \cdots & \boldsymbol{cA}^n\boldsymbol{b} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{cA}^{n-1}\boldsymbol{b} & \boldsymbol{cA}^n\boldsymbol{b} & \boldsymbol{cA}^{n+1}\boldsymbol{b} & \cdots & \boldsymbol{cA}^{2(n-1)}\boldsymbol{b} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & k \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots \\ 0 & \iddots & \iddots & \iddots \\ k & \iddots & \iddots & \boldsymbol{c}\boldsymbol{A}^{2(n-1)}\boldsymbol{b} \end{bmatrix}$$

可见，$\det(\boldsymbol{U}_O\boldsymbol{U}_C)=k^n$ 或 $-k^n\neq 0$，即 $\boldsymbol{U}_O\boldsymbol{U}_C$ 满秩。根据矩阵理论有，$\det\boldsymbol{U}_C\neq 0$、$\det\boldsymbol{U}_O\neq 0$，即能控矩阵和能观测矩阵都满秩，则系统总是能控又能观测的。

3.14　已知系统状态空间表达式为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

考虑状态的可逆变换 $\bar{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}$，使系统中的 $\bar{x}_1$ 既可控又可观，$\bar{x}_2$ 既不可控也不可观，试确定 b_1、b_2 和 c_1、c_2 应满足的条件。

解　系统的特征方程为

$$\det(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix} s & -2 \\ 3 & s+5 \end{vmatrix}=s^2+5s+6=(s+2)(s+3)$$

系统具有两个相异特征根，由 $\lambda_i\boldsymbol{P}_i=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_i$，得非奇异矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

则其对角标准型为

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 3b_1+2b_2 \\ b_1+b_2 \end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

$$\bar{\boldsymbol{y}}=\begin{bmatrix} c_1-c_2 & -2c_1+3c_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}$$

根据对角标准型能控能观测判据可知，使 $\bar{x}_1$ 既能控又能观测、$\bar{x}_2$ 既不能控也不能观测必须满足的条件为

$$\begin{cases} 3b_1+2b_2\neq 0 \\ c_1-c_2\neq 0 \end{cases},\quad \begin{cases} b_1+b_2=0 \\ -2c_1+3c_2=0 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} b_1=-b_2\neq 0 \\ c_1=\dfrac{3}{2}c_2\neq 0 \end{cases}$$

评注　若当标准型(含对角标准型)判据的核心，就是去除状态变量或变量组之间的耦合关系，从而简化能控能观测的判别。但若涉及特征值计算(有些时候系统矩阵天然就是若当型)，就仅仅是个数学上的方法。这类题目还是应该利用卡尔曼分解来处理。

3.15　系统的状态方程：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

$$y = [d \quad e \quad f]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

试讨论下列问题：

（1）能否通过选择 a、b、c 使系统状态完全能控？

（2）能否通过选择 d、e、f 使系统状态完全能观测？

解　（1）能控性矩阵

$$\boldsymbol{U}_{\mathrm{C}} = \begin{bmatrix} a & \lambda a + b & \lambda^2 a + 2\lambda b \\ b & \lambda b & \lambda^2 b \\ c & \lambda c & \lambda^2 c \end{bmatrix}$$

显然，第二行与第三行成比例，因而不论怎样选择 a、b、c，均有 $\mathrm{rank}\boldsymbol{U}_{\mathrm{C}}<3$，系统状态不完全可控。

（2）可观性矩阵

$$\boldsymbol{U}_{\mathrm{O}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{cA} \\ \boldsymbol{cA}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & e & f \\ \lambda d & d + \lambda e & \lambda f \\ \lambda^2 d & 2\lambda d + \lambda^2 e & \lambda^2 f \end{bmatrix}$$

第一列和第三列显然线性相关，故不论怎样选择 d、e、f，总有 $\mathrm{rank}\boldsymbol{U}_{\mathrm{O}}<3$，系统均不完全可观。

评注　根据标准型判据，由于 b 和 c 线性相关，所以系统不可控。由于 d 和 f 线性相关，所以系统不能观测。题目是用秩判据来检验标准型判据。

3.16　鱼池中的鱼群生长过程是一个生物动态系统。鱼群个体的生长过程可分为 4 个阶段，即鱼卵、鱼苗、小鱼、大鱼。设系统的输入是每年放入池内的鱼卵数，输出是每年从鱼池中取出的小鱼数。第 k 年放入池内的鱼卵数记为 $u(k)$；第 k 年的鱼苗数记为 $x_1(k)$；第 k 年的小鱼数记为 $x_2(k)$；第 k 年的大鱼数记为 $x_3(k)$。已知第 $k+1$ 年的鱼苗数等于第 k 年内大鱼产卵所孵生的鱼苗数，加上外部供给的鱼苗有效数 $u(k)$，减去第 k 年中被鱼苗及小鱼吃掉的鱼卵数。试讨论该鱼群系统的能控性问题。

解　由题意，可将系统的动态过程用下式表示为

$$x_1(k+1) = a_1 x_3(k) - a_2 x_2(k) - a_3 x_1(k) + u(k)$$

其中，a_1 为大鱼产卵率，a_2 为小鱼食卵率，a_3 为鱼苗食卵率。

第 $k+1$ 年中长成的小鱼数等于第 k 年的鱼苗成长的小鱼数，即为

$$x_2(k+1) = a_4 x_1(k)$$

其中，a_4 为鱼苗成活率。

第 $k+1$ 年中长成的大鱼数等于第 k 年剩余的小鱼数，再加上第 k 年留在池内的小鱼成长的大鱼数，即有

$$x_3(k+1) = a_5 x_2(k) + a_6 x_3(k)$$

其中，$1-a_5$ 为第 $k+1$ 年的小鱼成长率，a_6 为第 k 年的小鱼成长率。

每年按确定比例从鱼池内取走的小鱼数为

$$y(k) = a_7 x_2(k)$$

其中，a_7 为小鱼捕捞率。

$x(0)$为鱼池的初始储备。把以上的关系式写成矩阵的形式为

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\begin{bmatrix}-a_3 & -a_2 & a_1\\ a_4 & 0 & 0\\ 0 & a_5 & a_6\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(k)+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}(k)$$

$$\boldsymbol{y}(k)=\begin{bmatrix}0 & a_7 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(k)$$

式中,$\boldsymbol{x}(k)=\begin{bmatrix}x_1(k) & x_2(k) & x_3(k)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$。

由能控性判据得到

$$\boldsymbol{U}_{\mathrm{C}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{b} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{b} & \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -a_3 & a_3^2-a_2a_4\\ 0 & a_4 & -a_3a_4\\ 0 & 0 & a_4a_5\end{bmatrix}$$

不难看出,只要 $a_4\neq 0$,$a_5\neq 0$,必有 $\det\boldsymbol{U}_{\mathrm{C}}\neq 0$,即 $\boldsymbol{U}_{\mathrm{C}}$ 为满秩矩阵,因此系统能控。

评注　建模的物质基础是描述变化中的等量关系。产品数量恒定是供应链建模的基础,种群数量的可计算性是生物系统建模的基础。

3.17　能控标准型状态方程式是

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}u$$

式中,

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_2 & -a_1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix}$$

试证系统总是完全能控的。

证明:要表示系统完全能控,只要说明能控性矩阵

$$\boldsymbol{U}_{\mathrm{C}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{b} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{b} & \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b} & \cdots & \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b}\end{bmatrix}$$

的秩数是 n 就行了。因此,计算 $\boldsymbol{U}_{\mathrm{C}}$ 的各列为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_2 & -a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\ \vdots\\1\\-a_1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_2 & -a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\ \vdots\\1\\-a_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\0\\1\\-a_1\\-a_2+a_1^2\end{bmatrix}$$

$$A^3b=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\0&0&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&1\\-a_n&-a_{n-1}&-a_{n-2}&\cdots&-a_2&-a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\\1\\-a_1\\-a_2+a_1^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\\vdots\\1\\-a_1\\-a_2+a_1^2\\-a_3+2a_1a_2-a_1^3\end{bmatrix}$$

从而得到

$$U_C=\begin{bmatrix}0&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&0&1\\\vdots&&&\iddots&\iddots&\iddots&-a_1\\\vdots&&\iddots&\iddots&\iddots&\iddots&\iddots\\\vdots&\iddots&1&\iddots&\iddots&\iddots&\iddots\\0&1&-a_1&\iddots&\iddots&\iddots&\iddots\\1&-a_1&-a_2+a_1^2&-a_3+2a_1a_2-a_1^3&\cdots&\cdots&\cdots\end{bmatrix}$$

矩阵 U_C 的副对角线元素都是 1，行列式 $\det U_C=-1$ 或者是 1，所以 $\mathrm{rank}U_C=n$，系统是完全能控的。

评注　题目使用秩判据来检验能控标准型。伴侣矩阵 A 中的元素 1，表示状态变量的串联关系。实际上，只要不是零，依然能控。

3.18　能观测标准型状态方程式是

$$\dot{x}=Ax+bu$$
$$y=cx$$

式中，

$$A=\begin{bmatrix}0&0&0&\cdots&0&-a_n\\1&0&0&\cdots&0&-a_{n-1}\\0&1&0&\cdots&0&-a_{n-2}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&-a_2\\0&0&0&\cdots&1&-a_1\end{bmatrix},\quad c=[0\quad 0\quad 0\quad \cdots\quad 0\quad 1]$$

试证明系统总是完全能观测的。

证明：要表示系统完全能观测，只要说明能观测性矩阵

$$U_O=\begin{bmatrix}c\\cA\\cA^2\\\vdots\\cA^{n-1}\end{bmatrix}$$

的秩数是 n 就行了。因此，计算 U_O 的各行为

$$\boldsymbol{cA}=[0\quad 0\quad 0\quad \cdots\quad 0]\begin{bmatrix}0&0&0&\cdots&0&-a_n\\1&0&0&\cdots&0&-a_{n-1}\\0&1&0&\cdots&0&-a_{n-2}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&-a_2\\0&0&0&\cdots&1&-a_1\end{bmatrix}$$

$$=[0\quad 0\quad 0\quad \cdots\quad 1\quad -a_1]$$

$$\boldsymbol{cA}^2=[0\quad 0\quad 0\quad \cdots\quad 1\quad -a_1]\begin{bmatrix}0&0&0&\cdots&0&-a_n\\1&0&0&\cdots&0&-a_{n-1}\\0&1&0&\cdots&0&-a_{n-2}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&-a_2\\0&0&0&\cdots&1&-a_1\end{bmatrix}$$

$$=[0\quad \cdots\quad 0\quad 1\quad -a_1\quad -a_2+a_1^2]$$

$$\boldsymbol{cA}^3=[0\quad \cdots\quad 0\quad 1\quad -a_1\quad -a_2+a_1^2]\begin{bmatrix}0&0&0&\cdots&0&-a_n\\1&0&0&\cdots&0&-a_{n-1}\\0&1&0&\cdots&0&-a_{n-2}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&-a_2\\0&0&0&\cdots&1&-a_1\end{bmatrix}$$

$$=[0\quad \cdots\quad 0\quad 1\quad -a_1\quad -a_2+a_1^2\quad -a_3+2a_1a_2-a_1^3]$$

从而得到

$$\boldsymbol{U}_{\mathrm{O}}=\begin{bmatrix}0&\cdots&\cdots&\cdots&0&1\\\vdots&&&\iddots&1&-a_1\\\vdots&&\iddots&1&-a_1&-a_2+a_1^2\\\vdots&\iddots&\iddots&\iddots&\iddots&-a_3+2a_1a_2-a_1^3\\0&\iddots&\iddots&\iddots&\iddots&\vdots\\1&-a_1&\iddots&\iddots&\iddots&\vdots\end{bmatrix}$$

矩阵 $\boldsymbol{U}_{\mathrm{O}}$ 的副对角线上都是 1，显然 $\det\boldsymbol{U}_{\mathrm{O}}=-1$ 或者是 1，故说明系统是完全能观测的。

3.19　已知控制系统如图 3.4 所示。

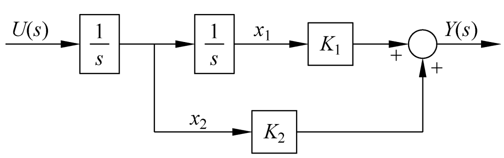

图 3.4　系统结构图

（1）写出以 x_1、x_2 为状态变量的系统状态方程与输出方程。

（2）试判断系统的能控性和能观测性。若不满足系统的能控性和能观测性条件，问当 K_1 与 K_2 取何值时，系统能控或能观测。

（3）求系统的极点。

解

（1）由图 3.4 可知，$sX_1=X_2$，$sX_2=U$，则有

$$\dot{x}_1=x_2$$

$$\dot{x}_2=u$$

$$y=K_1x_1+K_2x_2$$

将状态方程和输出方程写成矩阵形式，有

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=[K_1\quad K_2][x_1\quad x_2]$$

（2）系统能控能观测性判断。

能控性矩阵

$$\boldsymbol{U}_{\mathrm{C}}=[\boldsymbol{b}\quad \boldsymbol{Ab}]=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\quad \mathrm{rank}\boldsymbol{U}_{\mathrm{C}}=2$$

无论 K_1 与 K_2 取何值，系统均能控。

能观测性矩阵

$$\boldsymbol{U}_{\mathrm{O}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{CA}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}K_1 & K_2\\ 0 & K_1\end{bmatrix}$$

此时无法判断系统的能观测性。要使系统能观测，$\boldsymbol{U}_{\mathrm{O}}$ 应满秩，即 $\det\boldsymbol{U}_{\mathrm{O}}=K_1^2\neq 0$，$K_1\neq 0$。

（3）系统的特征方程为

$$\det(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}s & -1\\ 0 & s\end{vmatrix}=s^2=0$$

则系统的极点为 $s_1=s_2=0$。

3.20 已知连续系统状态方程和输出方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{bmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}\boldsymbol{u}(t)$$

$$\boldsymbol{y}(t)=[1\quad 0]\boldsymbol{x}(t)$$

（1）求状态转移矩阵 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$。

（2）判断该系统的能控性和能观测性。

（3）若在控制 $\boldsymbol{u}$ 前加入采样器-零阶保持器，设取样周期为 T，根据 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$ 求其离散化后状态变量表达式。

（4）分析系统在各采样时刻，周期 T 对能控性和能观测性的影响。

（5）比较（2）、（3）和（4），简要说明采样过程对能控性和能观测性的影响。

解

（1）状态转移矩阵为

$$e^{\boldsymbol{A}t}=L^{-1}(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=L^{-1}\begin{bmatrix} s & -2 \\ 2 & s \end{bmatrix}^{-1}$$

$$=L^{-1}\begin{bmatrix} \dfrac{s}{s^2+4} & \dfrac{2}{s^2+4} \\ \dfrac{-2}{s^2+4} & \dfrac{s}{s^2+4} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos 2t & \sin 2t \\ -\sin 2t & \cos 2t \end{bmatrix}$$

（2）该系统的能控性矩阵为

$$\boldsymbol{U}_{\mathrm{C}}=[\boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{Ab}]=\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{rank}\boldsymbol{U}_{\mathrm{C}}=2$$

故系统状态完全能控。

该系统的能观测性矩阵为

$$\boldsymbol{U}_{\mathrm{O}}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{CA} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{rank}\boldsymbol{U}_{\mathrm{O}}=2=n$$

故系统状态完全能观测。

（3）对系统离散化，有

$$\boldsymbol{G}(T)=e^{\boldsymbol{A}T}=\begin{bmatrix} \cos 2T & \sin 2T \\ -\sin 2T & \cos 2T \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}(T)=\int_0^T \boldsymbol{G}(\tau)b\,d\tau=\int_0^T \begin{bmatrix} \cos 2\tau & \sin 2\tau \\ -\sin 2\tau & \cos 2\tau \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} d\tau$$

$$=\int_0^T \begin{bmatrix} 2\sin 2\tau \\ 2\cos 2\tau \end{bmatrix} d\tau=\begin{bmatrix} 1-\cos 2T \\ \sin 2T \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}=[1 \quad 0]$$

离散化状态空间表达式为

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{G}(T)\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{H}(T)\boldsymbol{u}(k)$$

$$=\begin{bmatrix} \cos 2T & \sin 2T \\ -\sin 2T & \cos 2T \end{bmatrix}\boldsymbol{x}(k)+\begin{bmatrix} 1-\cos 2T \\ \sin 2T \end{bmatrix}\boldsymbol{u}(k)$$

$$\boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{Cx}(k)=[1 \quad 0]\boldsymbol{x}(k)$$

（4）对离散化系统，有能控性矩阵和能观测性矩阵分别为

$$\boldsymbol{U}_{\mathrm{C}}=[\boldsymbol{G} \quad \boldsymbol{\Phi G}]=\begin{bmatrix} \cos 2T-1 & \cos 2T+\sin^2 2T-\cos^2 2T \\ \sin 2T & 2\sin 2T\cos 2T-\sin 2T \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{U}_{\mathrm{O}}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{C\Phi} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos 2T & \sin 2T \end{bmatrix}$$

显然，$\boldsymbol{U}_{\mathrm{C}}$、$\boldsymbol{U}_{\mathrm{O}}$ 是否满秩，取决于采样周期 T 的选择，下面分两种情况予以讨论。

① 取 $T=\dfrac{k\pi}{2}, k=1,2,\cdots$，则有

$$\mathrm{rank}[\boldsymbol{U}_{\mathrm{C}}]=\mathrm{rank}\begin{bmatrix} \cos 2T-1 & \cos 2T+\sin^2 2T-\cos^2 2T \\ \sin 2T & 2\sin 2T\cos 2T-\sin 2T \end{bmatrix}$$

$$=\text{rank}\begin{bmatrix} * & * \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=1<2$$

$$\text{rank}[\boldsymbol{U}_\text{O}]=\text{rank}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos 2T & \sin 2T \end{bmatrix}=\text{rank}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ * & 0 \end{bmatrix}=1<2$$

由此可见，此时离散后的系统为状态不完全能控和不完全能观测的系统（$*$ 处表示不为 0）。

② 取 $T\neq\dfrac{k\pi}{2}$，$k=1,2,\cdots$，则有

$$\det[\boldsymbol{U}_\text{C}]=\begin{vmatrix} \cos 2T-1 & \cos 2T+\sin^2 2T-\cos^2 2T \\ \sin 2T & 2\sin 2T\cos 2T-\sin 2T \end{vmatrix}$$

$$=\sin 2T(4\cos^2 2T-4\cos 2T-2)\big|_{T\neq\frac{k\pi}{2}}\neq 0$$

$$\det[\boldsymbol{U}_\text{O}]=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos 2T & \sin 2T \end{vmatrix}=\sin 2T\big|_{T\neq\frac{k\pi}{2}}\neq 0$$

由此可见，当 $T\neq\dfrac{k\pi}{2}$ 时，$\boldsymbol{U}_\text{C}$ 和 $\boldsymbol{U}_\text{O}$ 均满秩，即有

$$\text{rank}[\boldsymbol{U}_\text{C}]=2,\quad \text{rank}[\boldsymbol{U}_\text{O}]=2$$

故离散化后的系统为状态完全能控和完全能观测的。

(5) 从上述计算可知，状态完全能控和完全能观测的连续系统经离散化处理后，不一定保持原系统的状态完全能控和完全能观测，其结果与采样周期 T 的选择有关。另外，当连续系统不完全能控和不完全能观测时，对应的离散化系统则一定是不能观测的。

评注　以 $\det[\boldsymbol{U}_\text{O}]=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos 2T & \sin 2T \end{vmatrix}=\sin 2T$ 为例，设想 T 的选取使得 $\det[\boldsymbol{U}_\text{O}]$不为零但接近零，此时，$\boldsymbol{U}_\text{O}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos 2T & \sin 2T \end{bmatrix}$的两行就接近线性相关，直觉就是接近于不能观测。所以系统离散化以后，还有能控性、能观测性好坏的问题。可以引入判别矩阵 $\boldsymbol{U}_\text{C}$、$\boldsymbol{U}_\text{O}$ 的奇异值来说明这个问题。

3.21　系统传递函数为

$$G(s)=\frac{2s+8}{2s^3+12s^2+22s+12}$$

(1) 建立系统能控标准型实现。

(2) 建立系统能观测标准型实现。

解

(1) 将 $G(s)$分子分母同时除以 2，可得 $G(s)$的首项为 1 的最小公分母为

$$\psi(s)=s^3+a_1s^2+a_2s+a_3=s^3+6s^2+11s+6$$

则

$$P(s)=\psi(s)G(s)=b_1s^2+b_2s+b_3=s+4$$

由于 $G(s)$的 $q>p$，可采用能控性实现为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{E}_p & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{E}_p \\ -a_i\boldsymbol{E}_p & -a_{i-1}\boldsymbol{E}_p & \cdots & -a_1\boldsymbol{E}_p \end{bmatrix}_{pl\times pl}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$$

$$
\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ \boldsymbol{E}_p\end{bmatrix}_{pl\times p}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{C}=[b_l\quad b_{l-1}\quad \cdots\quad b_1]_{q\times pl}=[4\quad 1\quad 0]
$$

验证由以上 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 构成的状态空间表达式，必有 $\boldsymbol{C}(s-\boldsymbol{EA})^{-1}\boldsymbol{B}=G(s)$，从而此为该系统的能控性实现。

(2) 将 $G(s)$分子分母同时除以 2，可得 $G(s)$的首项为 1 的最小公分母为

$$
\psi(s)=s^3+a_1s^2+a_2s+a_3=s^3+6s^2+11s+6
$$

则，

$$
P(s)=\psi(s)G(s)=b_1s^2+b_2s+b_3=s+4
$$

由于 $G(s)$的 $q>p$，可采用能观测性实现为

$$
\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & -a_i\boldsymbol{E}_q\\ \boldsymbol{E}_m & \cdots & 0 & -a_{i-1}\boldsymbol{E}_q\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & \boldsymbol{E}_m & -a_1\boldsymbol{E}_q\end{bmatrix}_{ql\times ql}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -6\\ 1 & 0 & -11\\ 0 & 1 & -6\end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}b_l\\ b_{l-1}\\ \vdots\\ b_1\end{bmatrix}_{ql\times p}=\begin{bmatrix}4\\1\\0\end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{C}=[0\quad 0\quad \cdots\quad I_q]_{q\times ql}=[0\quad 0\quad 1]
$$

验证由以上 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 构成的状态空间表达式，必有 $\boldsymbol{C}(s-\boldsymbol{EA})^{-1}\boldsymbol{B}=G(s)$，此为该系统的能观测性实现。