河南省普通高等教育“十四五”规划教材

高 等 院 校 计 算 机 应 用 系 列 教 材

离 散 数 学

主　编　薛占熬　张艳娜

副主编　于红斌　张立红

清華大学出版社

北　京

内 容 简 介

离散数学是计算机科学的理论基础，是计算机学科的核心课程，主要包括数理逻辑、集合论、代数结构和图论等四个部分。本书分为 7 章，分别介绍离散数学的命题逻辑、谓词逻辑、集合、关系、函数、图论和特殊图等的基本概念、基本理论和基本方法，并给出大量例题的讲解和练习的实操，有助于提高读者的概括抽象能力、逻辑思维能力、归纳构造能力和问题分析能力，从而培养读者严谨、完整、规范的科学态度。

本书内容阐述上力求严谨、翔实，论述严格，语言精练，通俗易懂，可以作为普通高等学校计算机类、电子信息类专业“离散数学”课程的教材，也可以供从事相关工作的人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学 / 薛占熬，张艳娜主编. —北京：清华大学出版社，2024.7
高等院校计算机应用系列教材
ISBN 978-7-302-65158-1

Ⅰ. ①离… Ⅱ. ①薛… ②张… Ⅲ. ①离散数学－高等学校－教材 Ⅳ. ①O158

中国国家版本馆 CIP 数据核字(2024)第 003188 号

责任编辑：王 定
版式设计：思创景点
封面设计：周晓亮
责任校对：马遥遥
责任印制：刘海龙

出版发行：清华大学出版社
网 址：https://www.tup.com.cn，https://www.wqxuetang.com
地 址：北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编：100084
社 总 机：010-83470000 邮 购：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：河北盛世彩捷印刷有限公司
经 销：全国新华书店
开 本：185mm×260mm **印 张：**13 **字 数：**325 千字
版 次：2024 年 8 月第 1 版 **印 次：**2024 年 8 月第 1 次印刷
定 价：59.80 元

产品编号：092649-01

前　　言

习近平总书记在党的二十大报告中指出：“教育、科技、人才是全面建设社会主义现代化国家的基础性、战略性支撑。必须坚持科技是第一生产力、人才是第一资源、创新是第一动力，深入实施科教兴国战略、人才强国战略、创新驱动发展战略，开辟发展新领域新赛道，不断塑造发展新动能新优势。”

计算机科学的发展反映了人类科技进步的历程。作为计算机科学理论基础之一的离散数学，以研究离散量的结构和相互间的关系为主要目标，其研究对象一般是有限个或可数个元素，它充分描述计算机离散性的特点，是现代数学的一个重要分支，是计算机类的核心、骨干课程，也是计算机类学生的必修课，可以为计算机专业学生学习后续课程提供重要的、扎实的理论基础。

离散数学主要包含数理逻辑、集合论、代数结构和图论等四部分基础内容，介绍离散数学各个分支的基本概念、基本理论和基本方法，这些概念、理论以及方法大量地应用在数字电路、编译原理、数据结构、操作系统、数据库系统、算法的分析与设计、人工智能、计算机网络等专业课程中，有助于提高学生的概括抽象能力、逻辑思维能力、归纳构造能力和问题分析能力，以及培养学生严谨、完整、规范的科学态度。

借助于河南省普通高等教育“十四五”规划教材建设之机，结合新工科，我们对离散数学课程进行了梳理，并编写出本书。本书具有以下主要特色：

(1) 从数理逻辑出发，将离散数学的主要内容(数理逻辑、集合与关系、图论)有机地整合在一起，数理逻辑贯彻始终，使内容前后呼应，且各部分内容又相对独立。

(2) 强化基本概念和基本性质的论述，在内容阐述中力求深入浅出、循序渐进、突出重点，介绍一系列抽象的概念、定义及定理证明，并每章配备适当数量的习题供读者练习。目的在于培养学生的抽象思维能力和逻辑推理能力，为学生夯实数学基础。

(3) 结合新工科的特点，采用“理论知识”+“算法”+“应用”的模式，增加一些算法和应用，使抽象的理论知识变得浅显易懂，目的在于提高学生自主学习的能力、分析和解决问题的能力，以便分析解决实际问题。

(4) 配备丰富的教学资源，方便教师授课，也便于学生自学。

本书由薛占熬、张艳娜任主编，于红斌、张立红任副主编，此外，参与编写的还有王川、

薛天宇等。在编写过程中参阅了大量离散数学的教材与相关资料，得到许多同行的悉心指导和帮助，在此向这些作者和同行表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，书中难免存在一些疏漏和不当之处，恳请同行专家与广大读者批评指正。

本书配套有教学课件、教学大纲、教学计划、模拟试卷和习题参考答案，读者可扫描下列二维码下载学习。

教学课件　教学大纲　教学计划　模拟试卷　习题参考答案

编　者

2024 年 5 月于河南师范大学

目　录

第 1 章 命题逻辑

数理逻辑又称符号逻辑。它是数学的一个分支，是用数学方法研究逻辑或形式逻辑的学科。所谓数学方法就是指数学采用的一般方法，包括使用符号和公式、已有的数学成果和方法，特别是使用形式的公理方法来描述和处理思维形式的逻辑结构及其规律，从而把对思维的研究转变为对符号的研究。它是现代计算机技术的基础。新的时代将是数学大发展的时代，而数理逻辑在其中将会起到很关键的作用。

数理逻辑最重要的两个基本组成部分是：命题逻辑和谓词逻辑。

【本章主要内容】

- 命题符合化和联结词
- 命题公式及等价公式
- 重言式和蕴含式
- 其他命题联结词与最小联结词组
- 对偶式与范式
- 命题逻辑的推理理论
- 命题的应用

1.1 命题符号化和联结词

在数理逻辑研究中，推理是重要的问题，而推理的前提和结论都是用能够判断的陈述句表达出来的。因而，称能够判断真假的陈述句为**命题**。能够判断真假的陈述句只有两种情况：正确的判断和错误的判断。因此，判断正确的命题的真值为**真**，记作“真”(Ture)，用 1 表示；判断错误的命题的真值为**假**，记作“假”(False)，用 0 表示。所有这些命题都应具有确定的真值。下面给出实例，以说明命题的概念。

【例题 1.1】判断下列语句是否是命题。

(1) 这朵花多好看啊！

(2) 我们要努力学习！

(3) 今天是星期天吗？

(4) 离散数学是计算机科学与技术的重要基础课。

(5) 雪是黑的。

(6) $x+y>0$。

(7) 明年 5 月 1 日是晴天。

(8) 我学英语，或者我学离散数学。

(9) 我正在说谎。

解：(1)是感叹句，(2)是祈使句，(3)是疑问句，这 3 句话都不是陈述句，它们都不是命题。(4)是能够判断的陈述句，它是命题且真值为真。(5)是能够判断的陈述句，是命题，但是它的真值为假。(6)可能成立，也可能不成立，无法判断它的真假，它不是命题。(7)是命题，真值现在不知道，到明年 5 月 1 日再判断。(8)是命题，是由两个命题组成的复合命题。(9)不是命题，无法判断它的真假，它是悖论，另当别论，本书不讨论，感兴趣的读者可参阅其他书籍。

从以上分析可知，判断一句话是否是命题分为两步：①判断该句是否陈述句，不是陈述句肯定不是命题；②如果是命题再判断它的真假。

命题有两种类型：若一个命题是一个简单的陈述句，则称为简单命题或原子命题。简单命题或原子命题是不能再分解成其他命题的命题；由若干个原子命题经过联结词复合而成的陈述句，称为复合命题。例如，(8)我学英语，或者我学离散数学。“我学英语”和“我学离散数学”是两个原子命题，通过联结词“或者”复合构成一个命题。又如，如果明天是晴天，那么我去锻炼身体。“明天是晴天”与“我去锻炼身体”是两个原子命题，通过联结词“如果……那么……”复合构成一个复合命题。

在数理逻辑中，通常用大写字母、带有下标的大写字母或[数字]表示命题，如 P，Q，A_1，[8]，…用来表示命题，而这些符号也称为命题的标识符。用符号表示命题，称为命题的符号化过程。例如

P：我是一名教师。[8]：她是一名学生。

P 和[8]分别表示“我是一名教师”和“她是一名学生”两个命题。

表示命题的符号称为命题标识符，P 和[8]就是标识符。

一个命题标识符如表示确定的命题，就称为命题常量(常元)；如果命题标识符只表示任意命题的位置标志，就称为命题变元(变项)。因为命题变元可以表示任意命题，所以它不能确定真值，故命题变元不是命题。当命题变元 P 用一个特定命题取代时才能确定真值，称对 P 进行指派，或者称为对 P 的赋值或解释。

在命题公式中，对各个命题变元的各种可能真值进行赋值，就确定了这个命题公式的各种真值情况，并将其汇列成表，此表称为命题公式的真值表。

在数理逻辑中，复合命题由原子命题与逻辑联结词组合而成，联结词是复合命题中的重要组成部分，为了便于书写和推演，必须对联结词作出明确规定并符号化。下面介绍各个联结词。

1.1.1 否定

定义 1.1 设 P 为一命题，P 的否定是一个新的命题，记作 $\neg P$。若 P 为 1，$\neg P$ 为 0；若 P 为 0，$\neg P$ 为 1(如表 1.1 所示)。联结词“$\neg$”表示命题的否定，亦可记为“—”。

表 1.1

P	$\neg P$
0	1
1	0

【例题 1.2】设 P：小张会开汽车。

$\neg P$：小张不会开汽车。

“否定”的意义仅是修改了命题的内容。

在自然语言中，否定用表示“不”“非”等，它是一个一元运算。

1.1.2　合取

定义 1.2　设 P 和 Q 是两个命题，“P 与 Q”是一个复合命题，称为 P 和 Q 的合取，记作 $P\wedge Q$。当且仅当 P，Q 同时为 1 时，$P\wedge Q$ 为 1；否则，$P\wedge Q$ 的真值都是 0(如表 1.2 所示)。

表 1.2

P	Q	$P\wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

“∧”是日常语言中“并且”“既……又……”“与”“和”“以及”等联结词的逻辑抽象，但不完全等同，需要根据语义来确定。一般情况下，如果没有联结词，而是由逗号隔开的两个简单陈述句，也采用合取词“∧”。

【例题 1.3】(1) 设 P：今天下雨；Q：明天下雨。

$P\wedge Q$：今天与明天都下雨。

(2) 设 A：张芳的成绩很好；B：张芳的品德很好。

$A\wedge B$：张芳的成绩很好并且品德很好。

【例题 1.4】设 P：今天是星期二；Q：302 教室有投影设备。

$P\wedge Q$：今天是星期二且 302 教室有投影设备。

由例 1.4 知，在日常生活中，一般情况合取词应用在两者之间有内在联系，但是数理逻辑中，仅关心复合命题与构成复合命题的各原子命题之间的真值关系，不关心它们之间是否有内在联系，因此，可以把两个毫不相干的命题合取运算在一起。

1.1.3　析取

定义 1.3　设 P 和 Q 是两个命题，“P 或 Q”是一个复合命题，称为 P 和 Q 的析取，记作 $P\vee Q$。当且仅当 P，Q 同时为 0 时，$P\vee Q$ 为 0；否则，$P\vee Q$ 的真值都是 1(如表 1.3 所示)。

表 1.3

P	Q	$P\vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

【例题 1.5】李名 2006 年出生或 2007 年出生。

【例题 1.6】薛芳是 100 米或 400 米赛跑的冠军。

例题 1.5 中的“或”是“排斥或”，例题 1.6 中的“或”是“可兼或”，而析取指的是“可兼或”。还有一些汉语中的“或”字，实际不是命题联结词。

【例题 1.7】他昨天做了二十或三十道习题。

此例子中的“或”只表示做习题的大概数目，不能用联结词“析取”表示，它只是个原子命题。

【例题 1.8】张三或李四都可以做这件事。

此例子中的“或”用联结词“合取”表示。

从析取的定义可知，联结词$\vee$与汉语中的“或”的意义也不全相同，因为汉语中的“或”可表示“排斥或”，也可表示“可兼或”，或者其他意义，所以，在符号化时，一定要根据语义进行。注意，析取指的是“可兼或”。

1.1.4　条件

定义 1.4　设 P 和 Q 是两个命题， 其条件命题是一个复合命题，记作 $P\rightarrow Q$，读作“如果 P，那么 Q”或“若 P，则 Q”。当且仅当 P 的真值为 1，Q 的真值为 0 时，$P\rightarrow Q$ 的真值为 0，否则 $P\rightarrow Q$ 的真值为 1(如表 1.4 所示)。我们称 P 为前件(前提)，Q 为后件(结论)。

表 1.4

P	Q	$P\rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

【例题 1.9】(1) 如果天气好，那么我去接你。

(2) 如果小明来了，那么 2+2=4。

(3) 如果雪是黑的，那么太阳从西方出来。

例题 1.9 中的三个命题都可以用条件命题 $P\rightarrow Q$ 表示。

在自然语言中，“如果……”与“那么……”之间常常是有因果联系的，否则就没有意义，但对条件命题 $P\rightarrow Q$ 来说，只要 P，Q 能够分别确定命题，$P\rightarrow Q$ 即成为命题。此外，自然语言中，“如果……，那么”这样的语句，当前提为假时，结论不管真假，这个语句的意义往往无法

判断。而在条件命题中，前件为假时，不管后件真或假，它的真值都为真，这是“善意的推定”。

也有些逻辑学的书中，条件命题 $P \rightarrow Q$ 亦可叫作 P 蕴含 Q，$\rightarrow$ 叫“蕴含联结词”，本书“蕴含”概念有另外定义。

1.1.5　双条件

定义 1.5　设 P 和 Q 是两个命题，其复合命题 $P \leftrightarrow Q$ 称作双条件命题，读作“P 当且仅当 Q”。当 P 和 Q 的真值相同时，$P \leftrightarrow Q$ 的真值为 1，否则 $P \leftrightarrow Q$ 的真值为 0，如表 1.5 所示。

表 1.5

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

【例题 1.10】(1) △ABC 是直角三角形当且仅当△ABC 中有一个角为 90°。

(2) 中国的首都在北京当且仅当 4+5=9。

(3) 燕子飞回南方，春天来了。

例题 1.10 中的三个命题都可用双条件命题 $P \leftrightarrow Q$ 表示。与条件联结词一样，对双条件命题也可以不顾其内在联系，而只根据联结词定义确定真值。

双条件联结词亦可记作“$\rightleftarrows$”或 iff。它亦是二元运算。

到此为止介绍了 5 个联结词：$\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$、$\leftrightarrow$，同时说明了 5 个联结词在符号化时的注意事项，我们要根据自然语言的真实含义进行符号化。$\neg$是一元运算，其他 4 个联结词都是二元运算。

习题 1-1

1. 说明下列语句哪些是命题，哪些不是。如果是命题，给出它的真值。

(1) 离散数学是计算机科学、人工智能专业的重要基础课。

(2) 5 月 1 日我想去旅游。

(3) 今天你有空吗？

(4) 请勿随地吐痰！

(5) 这个公园多好看啊！

(6) 我们要努力学习。

(7) 不存在最大质数。

(8) 如果我掌握了英语、法语，那么学习其他欧洲语言就容易得多。

(9) $9+2 \leqslant 10$

(10) $x=5$

2. 将下列命题符号化。

(1) 李明既聪明又用功。

(2) 张非虽聪明但不用功。

(3) 今天天气很好或很热。

(4) 除非你努力，否则你将失败。

(5) 如果 a 和 b 是奇数，那么 $a+b$ 是偶数。

(6) 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，当且仅当它的对边平行。

(7) 停机的原因在于语法错误或程序错误。

(8) 刘英与李进是同学。

(9) 老王或小李都能完成这个任务。

(10) 假如上午不下雨，我去看电影，否则就在家里读书或看报。

(11) 我今天进城，除非下雨。

(12) 仅当你走我将留下。

1.2 命题公式及等价公式

1.2.1 命题公式的概念

上一节讨论了命题、命题联结词及命题符号化。本节主要讨论命题公式及等价公式。

定义 1.6 命题演算的合式公式(wff)，规定为：

(1) 单个命题变元本身是一个合式公式。

(2) 如果 A 是合式公式，那么 $\neg A$ 是合式公式。

(3) 如果 A 和 B 是合式公式，那么$(A\wedge B)$，$(A\vee B)$，$(A\rightarrow B)$和$(A\leftrightarrow B)$都是合式公式。

(4) 当且仅当能够有限次地应用(1)(2)(3)所得到的包含命题变元、联结词和括号的符号串是合式公式。

定义 1.6 是以递归形式给出的，其中(1)称为基础，(2)(3)称为归纳，(4)称为界限。

根据定义 1.6，$\neg(P\vee\neg Q)$，$\neg(P\wedge Q)$，$(((P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow R))\leftrightarrow(S\leftrightarrow T))$都是合式公式，而 $P\rightarrow(\wedge Q)$，$P\rightarrow QR$，$(P\wedge Q)\rightarrow Q)$ 等都不是合式公式。

为了减少使用圆括号的数量，约定最外层圆括号可以省略。

如果规定了联结词运算的优先次序为$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$，则 $P\wedge Q\rightarrow R$ 也是合式公式。

注意：命题公式是没有真值的，仅当在一个公式中命题变元用确定的命题代换时，得到一个命题。这个命题的真值依赖于代换变元的那些命题的真值。

并不是由命题变元、联结词和一些括号组成的字符串都能成为命题公式。需要根据定义 1.6 判断是否命题公式。

定义 1.7 设 A 和 B 为两个命题公式，且 P_1，P_2，…，P_n 是所有出现于 A 和 B 中的分量，若给 P_1，P_2，…，P_n 任一组真值赋值，A 和 B 的真值都相同，则称 A 和 B 是等价的，或者逻辑相等。记作 $A\Leftrightarrow B$。

【例题 1.11】 证明 $P\leftrightarrow Q\Leftrightarrow(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P)$。

证明：根据题设，列出真值表，如表 1.6 所示。

表 1.6

P	Q	$P\to Q$	$Q\to P$	$P\leftrightarrow Q$	$(P\to Q)\wedge(Q\to P)$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

由表 1.6 可知，最后两列对应的真值相同，故 $P\leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P\to Q)\wedge(Q\to P)$。

1.2.2　命题定律

列出的命题定律都可以用真值表予以验证，如表 1.7 所示。

表 1.7

对合律	$\neg\neg P \Leftrightarrow P$
幂等律	$P\vee P\Leftrightarrow P$，$P\wedge P\Leftrightarrow P$
结合律	$(P\vee Q)\vee R\Leftrightarrow P\vee(Q\vee R)$，$(P\wedge Q)\wedge R\Leftrightarrow P\wedge(Q\wedge R)$
交换律	$P\vee Q\Leftrightarrow Q\vee P$，$P\wedge Q\Leftrightarrow Q\wedge P$
分配律	$P\vee(Q\wedge R)\Leftrightarrow(P\vee Q)\wedge(P\vee R)$，$P\wedge(Q\vee R)\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(P\wedge R)$
吸收律	$P\vee(P\wedge Q)\Leftrightarrow P$，$P\wedge(P\vee Q)\Leftrightarrow P$
De Morgan 律	$\neg(P\vee Q)\Leftrightarrow\neg P\wedge\neg Q$，$\neg(P\wedge Q)\Leftrightarrow\neg P\vee\neg Q$
同一律	$P\vee 0\Leftrightarrow P$，$P\wedge 1\Leftrightarrow P$
零律	$P\vee 1\Leftrightarrow 1$，$P\wedge 0\Leftrightarrow 0$
否定律	$P\vee\neg P\Leftrightarrow 1$，$P\wedge\neg P\Leftrightarrow 0$

【例题 1.12】证明德·摩根(De Morgan)律：$\neg(P\wedge Q)\Leftrightarrow\neg P\vee\neg Q$，$\neg(P\vee Q)\Leftrightarrow\neg P\wedge\neg Q$。
证明：根据 De Morgan 律列出真值表，如表 1.8 所示。

表 1.8

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P\wedge Q$	$\neg(P\wedge Q)$	$\neg P\vee\neg Q$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0

在表 1.8 中，第 6 列与第 7 列对应的真值完成相同，故$\neg(P\wedge Q)\Leftrightarrow\neg P\vee\neg Q$，同理可证，$\neg(P\vee Q)\Leftrightarrow\neg P\wedge\neg Q$。

类似例题 1.12 的证明方法，可以证明表 1.7 中其他公式成立。

【例题 1.13】证明吸收律：$P\vee(P\wedge Q)\Leftrightarrow P$，$P\wedge(P\vee Q)\Leftrightarrow P$。

证明：列出真值表，如表 1.9 所示。

表 1.9

P	Q	$P\wedge Q$	$P\vee(P\wedge Q)$	$P\vee Q$	$P\wedge(P\vee Q)$
0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0
1	0	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

表 1.9 中，第 1 列与第 4 列、第 6 列对应的真值完成相同，故 $P\vee(P\wedge Q)\Leftrightarrow P$，$P\wedge(P\vee Q)\Leftrightarrow P$。

【例题 1.14】 证明$((P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q))\Leftrightarrow(P\leftrightarrow Q)$。

证明：列出真值表，如表 1.10 所示。

表 1.10

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P\wedge Q$	$\neg P\wedge\neg Q$	$P\leftrightarrow Q$	$(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)$
0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	1	1

表 1.10 中，第 7 列与第 8 列对应的真值完成相同，故$((P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q))\Leftrightarrow(P\leftrightarrow Q)$。

根据条件和双条件的定义，用真值可以证明如下性质：

(1) $P\rightarrow Q\Leftrightarrow\neg P\vee Q$，

(2) $P\rightarrow Q\Leftrightarrow\neg Q\rightarrow\neg P$，

(3) $\mathrm{P}\leftrightarrow\mathrm{Q}\Leftrightarrow\mathrm{Q}\leftrightarrow\mathrm{P}$，

(4) $(\mathrm{P}\leftrightarrow\mathrm{Q})\leftrightarrow\mathrm{R}\Leftrightarrow\mathrm{P}\leftrightarrow(\mathrm{Q}\leftrightarrow\mathrm{R})$，

(5) $\mathrm{P}\leftrightarrow\mathrm{Q}\Leftrightarrow(\mathrm{P}\rightarrow\mathrm{Q})\wedge(\mathrm{Q}\rightarrow\mathrm{P})$，

(6) $P\leftrightarrow Q\Leftrightarrow(\neg P\vee Q)\wedge(\neg Q\vee P)\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)$。

用真值表证明两个命题公式等价，证明步骤如下：

(1) 在命题公式中找出所有的分量(命题变元)，对分量所有可能进行赋值。

(2) 在真值表中按照联结词运算的顺序从低到高写出各层次命题公式的真值。

(3) 对应每个赋值，计算命题公式各层次的值，直到最后计算出整个命题公式的真值。

1.2.3 等价置换

定义 1.8 如果 X 是合式公式 A 的一部分，且 X 本身也是一个合式公式，则称 X 为公式 A 的子公式。

定理 1.1 设 X 是合式公式 A 的子公式，若 $X\Leftrightarrow Y$，如果将 A 中的 X 用 Y 来置换，所得到的公式 B 与公式 A 等价，即 $A\Leftrightarrow B$。

证明：因为在相应变元的任一种指派情况下，X 与 Y 的真值相同，故以 Y 取代 X 后，公式

B 与公式 A 在相应的指派情况下，其真值亦必相同，故 $A \Leftrightarrow B$。

满足定理 1.1 条件的置换称为等价置换(等价代换)。

一个命题公式 A 可以进行多次等价置换，所得到的新公式与原公式等价。注意要用同一个子公式替换公式中同一个原子变元，或者用同一个子公式替换另外一个相同的子公式。

【例题 1.15】证明 $(A \vee B) \to C \Leftrightarrow (A \to C) \wedge (B \to C)$。

证明：$(A \vee B) \to C \Leftrightarrow \neg(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B) \vee C$

$\Leftrightarrow (\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee C) \Leftrightarrow (A \to C) \wedge (B \to C)$

【例题 1.16】证明 $P \to (Q \to R) \Leftrightarrow Q \to (P \to R) \Leftrightarrow \neg R \to (Q \to \neg P)$。

证明：$P \to (Q \to R) \Leftrightarrow \neg P \vee (\neg Q \vee R) \Leftrightarrow \neg Q \vee (\neg P \vee R) \Leftrightarrow Q \to (P \to R)$

又

$$P \to (Q \to R) \Leftrightarrow \neg P \vee (\neg Q \vee R) \Leftrightarrow R \vee (\neg Q \vee \neg P) \Leftrightarrow \neg R \to (Q \to \neg P)$$

【例题 1.17】证明 $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (Q \to P)$。

证明：　$(P \to Q) \wedge (Q \to P)$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge (\neg Q \vee P)) \vee (Q \wedge (\neg Q \vee P))$

$\Leftrightarrow (\neg \mathrm{P} \wedge \neg \mathrm{Q}) \vee (\neg \mathrm{P} \wedge \mathrm{P}) \vee (\mathrm{Q} \wedge \neg \mathrm{Q}) \vee (\mathrm{Q} \wedge \mathrm{P})$

$\Leftrightarrow (\neg \mathrm{P} \wedge \neg \mathrm{Q}) \vee 0 \vee 0 \vee (\mathrm{Q} \wedge \mathrm{P})$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge P)$

$\Leftrightarrow P \leftrightarrow Q$

1.2.4　基本等价命题公式

现将常用的基本等价命题公式汇总成表，如表 1.11 所示。

表 1.11

E_1	$\neg\neg P \Leftrightarrow P$
E_2	$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$
E_3	$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$
E_4	$(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$
E_5	$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$
E_6	$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
E_7	$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
E_8	$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$
E_9	$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$
E_{10}	$P \vee P \Leftrightarrow P$
E_{11}	$P \wedge P \Leftrightarrow P$
E_{12}	$R \vee (P \wedge \neg P) \Leftrightarrow R$
E_{13}	$R \wedge (P \vee \neg P) \Leftrightarrow R$
E_{14}	$R \vee (P \vee \neg P) \Leftrightarrow 1$

(续表)

E_{15}	$R\wedge(P\wedge\neg P)\Leftrightarrow 0$
E_{16}	$P\rightarrow Q\Leftrightarrow\neg P\vee Q$
E_{17}	$\neg(P\rightarrow Q)\Leftrightarrow P\wedge\neg Q$
E_{18}	$P\rightarrow Q\Leftrightarrow\neg Q\rightarrow\neg P$
E_{19}	$P\rightarrow(Q\rightarrow R)\Leftrightarrow(P\wedge Q)\rightarrow R$
E_{20}	$P\leftrightarrow Q\Leftrightarrow(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P)$
E_{21}	$P\leftrightarrow Q\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)$
E_{22}	$\neg(P\leftrightarrow Q)\Leftrightarrow P\leftrightarrow\neg Q$

由表 1.7 中的定律、上面例题和表 1.11 给出的一些基本等价命题公式，能推演出更复杂的命题公式。由已知的等价式推出另一些等值式的过程称为**等值演算**，在演算过程中要使用置换规则和等价代换。

习题 1-2

1. 判别下列公式哪些是合式公式，哪些不是。

(1) $(P\leftrightarrow(R\rightarrow S))$

(2) $(Q\rightarrow R\wedge S)$

(3) $(RS\rightarrow Q)$

(4) $((\neg P\rightarrow Q)\rightarrow(Q\rightarrow P))$

(5) $((P\rightarrow(Q\rightarrow R))\rightarrow((P\rightarrow Q)\rightarrow(P\rightarrow R)))$

2. 对下列各式用指定的公式进行替换。

(1) $(Q\rightarrow((P\rightarrow P)\rightarrow Q))$，用 P 替换 Q，用 Q 替换$(P\rightarrow P)$。

(2) $(((A\rightarrow B)\rightarrow B)\rightarrow A)$，用$(A\rightarrow C)$替换 A，用$((B\wedge C)\rightarrow A)$替换 B。

(3) $((A\rightarrow B)\vee(B\rightarrow A))$，用 B 替换 A。

3. 设 P：天下雪；Q：我将去图书馆；R：我有时间。以符号形式写出下列命题。

(1) 如果天不下雪和我有时间，那么我将去图书馆。

(2) 我将去图书馆，仅当我有时间。

(3) 天下雪，那么我不去图书馆。

4. 用 P，Q，R 等表示原子命题，然后将下列句子符号化。

(1) 李名不能既考试离散数学，又考试英语。

(2) 如果张三和李四都不去，那么王五就去。

(3) 如果你来了，那么他唱不唱歌将看你是否伴奏而定。

5. 求下列命题公式的真值表。

(1) $(A\vee C)\wedge(A\rightarrow B)$

(2) $(P\vee Q)\leftrightarrow(Q\vee P)$

(3) $(A\rightarrow(B\rightarrow C))\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C))$

6. 证明下列等价式。

(1) $\neg(P\to Q)\Leftrightarrow P\wedge\neg Q$

(2) $\neg(P\leftrightarrow Q)\Leftrightarrow(P\vee Q)\wedge\neg(P\wedge Q)$

(3) $P\to(Q\to P)\Leftrightarrow\neg P\to(P\to\neg Q)$

(4) $\neg(P\leftrightarrow Q)\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)$

(5) $(P\to R)\wedge(Q\to R)\Leftrightarrow(P\vee Q)\to R$

(6) $((A\wedge B)\to C)\wedge(B\to(D\vee C))\Leftrightarrow(B\wedge(D\to A))\to C$

7. 如果 $P\vee R\Leftrightarrow Q\vee R$，是否有 $P\Leftrightarrow Q$？如果 $P\wedge R\Leftrightarrow Q\wedge R$，是否有 $P\Leftrightarrow Q$？如果 $\neg P\rightleftarrows\neg Q$，是否有 $P\Leftrightarrow Q$？

1.3 重言式和蕴含式

从上节真值表和命题的等价公式推证中可知，有些命题公式，无论对分量作何种指派，其对应的真值都为 1 或都为 0，这两类特殊的命题公式在命题演算中有重要作用。

1.3.1 重言式

定义 1.9　给定 A 命题公式，若无论对 A 分量作怎样的指派，其对应的真值永为 1，则称该命题公式 A 为重言式或永真公式。

定义 1.10　给定命题公式 A，若无论对 A 分量作怎样的指派，其对应的真值永为 0，则称该命题公式 A 为矛盾式或永假公式。

【例题 1.18】 $(P\wedge Q)\wedge\neg P$ 是矛盾式，构造真值表进行证明，如表 1.12 所示。

表 1.12

P	Q	$P\wedge Q$	$\neg P$	$(P\wedge Q)\wedge\neg P$
0	0	0	1	0
0	1	0	1	0
1	0	0	0	0
1	1	1	0	0

【例题 1.19】 $\neg(P\wedge Q)\leftrightarrow(\neg P\vee\neg Q)$是重言式，构造真值表进行证明，如表 1.13 所示。

表 1.13

P	Q	$P\wedge Q$	$\neg(P\wedge Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P\vee\neg Q$	$\neg(P\wedge Q)\leftrightarrow(\neg P\vee\neg Q)$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	1

定理 1.2　任何两个重言式的合取或析取仍然是一个重言式。

证明：设 A 和 B 为两个重言式，则不论 A 和 B 的分量指派任何真值，总有 A 为 1，B 为 1，

故$A\wedge B\Leftrightarrow 1$，$A\vee B\Leftrightarrow 1$。

定理 1.3　一个重言式，对同一分量都用任何合式公式置换，其结果仍为一重言式。

证明：由于重言式的真值与分量的指派无关，故对同一分量以任何合式公式置换后，重言式的真值仍永为 1。

同理，矛盾式也有类似于定理 1.2 和定理 1.3 的结果。

定理 1.4　任何两个矛盾式的合取或析取仍然是一个矛盾式。

定理 1.5　一个矛盾式，对同一分量都用任何合式公式置换，其结果仍为一矛盾式。

定理 1.6　设A，B为两个命题公式，$A\Leftrightarrow B$当且仅当$A\leftrightarrow B$为一个重言式。

证明：若$A\Leftrightarrow B$，则A、B有相同真值，即$A\leftrightarrow B$永为 1。

若$A\leftrightarrow B$为重言式，则$A\leftrightarrow B$永为 1，故A、B的真值相同，即$A\Leftrightarrow B$。

【例题 1.20】证明$\neg(P\wedge Q)\Leftrightarrow(\neg P\vee\neg Q)$。

证明：由表 1.13 可知，$\neg(P\wedge Q)\leftrightarrow(\neg P\vee\neg Q)$为重言式，根据定理 1.6 得

$$\neg(P\wedge Q)\Leftrightarrow(\neg P\vee\neg Q)$$

1.3.2　蕴含式

定义 1.11　当且仅当$P\rightarrow Q$是一个重言式时，我们称“P蕴含Q”，并记作$P\Rightarrow Q$。

表 1.14

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P\rightarrow Q$	$\neg Q\rightarrow\neg P$	$Q\rightarrow P$	$\neg P\rightarrow\neg Q$
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1

从表 1.14 可以看出$(P\rightarrow Q)\Leftrightarrow(\neg Q\rightarrow\neg P)$，$(Q\rightarrow P)\Leftrightarrow(\neg P\rightarrow\neg Q)$。

如表 1.14 所示，$P\rightarrow Q$不是对称的，即$P\rightarrow Q$与$Q\rightarrow P$不等价。对$P\rightarrow Q$来说，$Q\rightarrow P$称作它的逆换式，$\neg P\rightarrow\neg Q$称作它的反换式，$\neg Q\rightarrow\neg P$称作它的逆反式。

要证$P\Rightarrow Q$，只需对条件命题$P\rightarrow Q$的前件P指定真值为 1，若由此推出Q的真值也为 1，则$P\rightarrow Q$是重言式，即$P\Rightarrow Q$成立；同理，对于$\neg Q\rightarrow\neg P$来说，假定Q的真值取 0，若由此推出P的真值为 0，即推证了$\neg Q\Rightarrow\neg P$。因为$(\neg Q\rightarrow\neg P)\Leftrightarrow(P\rightarrow Q)$，等同于对条件命题$P\rightarrow Q$，假定后件$Q$的真值取 0，若由此推出前件$P$的真值也为 0，即推证了$\neg Q\Rightarrow\neg P$，因此$P\Rightarrow Q$成立。

【例题 1.21】证明$\neg Q\wedge(P\rightarrow Q)\Rightarrow\neg P$。

证法 1：假定$\neg Q\wedge(P\rightarrow Q)$为 1，则$\neg Q$为 1，且$(P\rightarrow Q)$为 1。由$Q$为 0，$P\rightarrow Q$为 1，可知$P$必为 0，$\neg P$故为 1。

证法 2：假定$\neg P$为 0，则P为 1。

① 若Q为 0，则$P\rightarrow Q$为 0，$\neg Q\wedge(P\rightarrow Q)$为 0。

② 若Q为 1，则$\neg Q$为 0，$\neg Q\wedge(P\rightarrow Q)$为 0。

故$\neg Q\wedge(P\rightarrow Q)\Rightarrow\neg P$。

表 1.15 所列各蕴含式都可采用上述推理方法证明。

表 1.15

I_1	$P\wedge Q\Rightarrow P$
I_2	$P\wedge Q\Rightarrow Q$
I_3	$P\Rightarrow P\vee Q$
I_4	$Q\Rightarrow P\vee Q$
I_5	$\neg P\Rightarrow P\to Q$
I_6	$Q\Rightarrow P\to Q$
I_7	$\neg(P\to Q)\Rightarrow P$
I_8	$\neg(P\to Q)\Rightarrow \neg Q$
I_9	$P，Q\Rightarrow P\wedge Q$
I_{10}	$\neg P，P\vee Q\Rightarrow Q$
I_{11}	$P\wedge(P\to Q)\Rightarrow Q$
I_{12}	$\neg Q\wedge(P\to Q)\Rightarrow \neg P$
I_{13}	$(P\to Q)\wedge(Q\to R)\Rightarrow P\to R$
I_{14}	$(P\vee Q)\wedge(P\to R)\wedge(Q\to R)\Rightarrow R$
I_{15}	$(P\to Q)\wedge(R\to S)\Rightarrow(P\wedge R)\to(Q\wedge S)$
I_{16}	$(P\leftrightarrow Q)\wedge(Q\leftrightarrow R)\Rightarrow(P\leftrightarrow R)$
I_{17}	$A\to B\Rightarrow(A\vee C)\to(B\vee C)$
I_{18}	$A\to B\Rightarrow(A\wedge C)\to(B\wedge C)$

1.3.3　蕴含的性质

像联结词中$\leftrightarrow$和$\to$的关系那样，等价式与蕴含式之间也存在联系，具体如下：

定理 1.7　设 P，Q 为任意两个命题公式，$P\Leftrightarrow Q$ 的充要条件是 $P\Rightarrow Q$ 且 $Q\Rightarrow P$。

证明：若 $P\Leftrightarrow Q$，则 $P\leftrightarrow Q$ 为重言式，因为 $P\leftrightarrow Q\Leftrightarrow(P\to Q)\wedge(Q\to P)$，故 $P\to Q$ 为 1 且 $Q\to P$ 为 1，即 $P\Rightarrow Q$，$Q\Rightarrow P$ 成立。反之，若 $P\Rightarrow Q$ 且 $Q\Rightarrow P$，则 $P\to Q$ 为 1 且 $Q\to P$ 为 1，因此 $P\leftrightarrow Q$ 为 1，$P\leftrightarrow Q$ 为重言式，即 $P\Leftrightarrow Q$。

常用的蕴含性质如下：

性质 1.1　设 P，Q，R 为合式公式，则蕴含具有如下性质：

(1) 若 $P\Rightarrow Q$ 且 P 是重言式，则 Q 必是重言式。

(2) 若 $P\Rightarrow Q$，$Q\Rightarrow R$，则 $P\Rightarrow R$，即传递性。

(3) 若 $P\Rightarrow Q$，且 $P\Rightarrow R$，则 $P\Rightarrow(Q\wedge R)$。

(4) 若 $P\Rightarrow R$ 且 $Q\Rightarrow R$，则 $P\vee Q\Rightarrow R$。

证明：(1) 根据蕴含定义，$P\to Q$ 永为 1，所以，当 P 为 1 时，Q 必永为 1，即 Q 必是重言式。

(2) 由题设 $P\Rightarrow Q$，$Q\Rightarrow R$ 知，$P\to Q$，$Q\to R$ 都为重言式。所以，$(P\to Q)\wedge(Q\to R)$为重言式。由表 1.15 的(I_{13})式可知，$(P\to Q)\wedge(Q\to R)\Rightarrow P\to R$，故，$P\to R$ 为重言式，即 $P\Rightarrow R$。

(3) 由假设 $P\to Q$，$P\to R$ 为重言式，设 P 为 1，则 Q、R 为 1，所以 $Q\wedge R$ 为 1。因此，

$P \to (Q \wedge R)$为 1。

若 P 为 0，则 $Q \wedge R$ 不论有怎样的真值，$P \to (Q \wedge R)$为 1。

故 $P \Rightarrow (Q \wedge R)$。

(4) 因为 $P \Rightarrow R$ 且 $Q \Rightarrow R$，即 $P \to R$ 为 1，$Q \to R$ 为 1，所以$(\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)$为 1。即$(\neg P \wedge \neg Q) \vee R$ 为 1，则$(P \vee Q) \to R$ 为 1。故 $P \vee Q \Rightarrow R$。

习题 1-3

1. 证明下列命题公式是重言式。

(1) $\neg P \to (P \to Q)$

(2) $((P \to Q) \wedge (Q \to R)) \to (P \to R)$

(3) $((P \vee Q) \wedge \neg(\neg P \wedge (\neg Q \vee \neg R))) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg R)$

2. 证明下列命题公式是矛盾式。

(1) $((P \wedge (P \to Q)) \to Q) \wedge 0$

(2) $(\neg P \wedge P) \vee 0$

(3) $(P \wedge (Q \vee R)) \wedge (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg R)$

(4) $(P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge \neg R$

3. 不用真值法来证明下列蕴含式。

(1) $\neg(P \wedge Q) \Rightarrow \neg A \vee \neg Q$

(2) $P \Rightarrow \neg P \to Q$

(3) $(P \to Q) \to Q \Rightarrow P \vee Q$

(4) $(P \to Q) \Rightarrow P \to (P \wedge Q)$

(5) $\neg P \wedge Q \wedge R \to \Rightarrow R$

(6) $R \Rightarrow P \vee Q \vee \neg Q$

(7) $(Q \to (P \wedge \neg P)) \to (R \to (R \to (P \wedge \neg P))) \Rightarrow P \to Q$

4. 先将自然语言符号化，然后推演它成立。

如果张明学习，那么张明的离散数学不会不及格。

如果张明不热衷于玩游戏，那么张明将学习。

但张明的离散数学不及格。

因此，张明热衷于玩游戏。

5. 先将自然语言符号化，然后推演它成立。

如果 28 是偶数，则 2+3 等于 5。

或 29 不是素数，或 2+3 不等于 5。但 29 是素数。

所以，28 是奇数。

1.4 其他联结词与最小联结词组

1.1 节中介绍了 5 个联结词，但这些联结词还不能完全表达命题间的联系，为此再定义 4

个命题联结词。

1.4.1　其他联结词

定义 1.12 设 P 和 Q 是两个命题公式，复合命题 $P\overline{\vee}Q$ 称作 P 和 Q 的不可兼析取。当且仅当 P 与 Q 的真值不相同时，$P\overline{\vee}Q$ 的真值为 1，否则 $P\overline{\vee}Q$ 的真值为 0，如表 1.16 所示。

表 1.16

P	Q	$P\overline{\vee}Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

显然，$(P\overline{\vee}Q)\Leftrightarrow \neg(P\leftrightarrow Q)$。

定理 1.8 设 P,Q,R 为命题公式。如果 $P\overline{\vee}Q\Leftrightarrow R$，则 $P\overline{\vee}R\Leftrightarrow Q$，$Q\overline{\vee}R\Leftrightarrow P$，且 $P\overline{\vee}Q\overline{\vee}R$ 为一矛盾式。

证明：如果 $P\overline{\vee}Q\Leftrightarrow R$，则

$$P\overline{\vee}R\Leftrightarrow P\overline{\vee}P\overline{\vee}Q\Leftrightarrow 0\overline{\vee}Q\Leftrightarrow Q$$

$$Q\overline{\vee}R\Leftrightarrow Q\overline{\vee}P\overline{\vee}Q\Leftrightarrow 0\overline{\vee}P\Leftrightarrow P$$

$$P\overline{\vee}Q\overline{\vee}R\Leftrightarrow R\overline{\vee}R\Leftrightarrow 0$$

定义 1.13 设 P 和 Q 是两个命题公式，复合命题 $P\stackrel{c}{\rightarrow}Q$ 称作命题 P 和 Q 的条件否定，当且仅当 P 的真值为 1，Q 的真值为 0，$P\stackrel{c}{\rightarrow}Q$ 的真值为 1，否则 $P\stackrel{c}{\rightarrow}Q$ 的真值为 0，如表 1.17 所示。

表 1.17

P	Q	$P\stackrel{c}{\rightarrow}Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

显然，$P\stackrel{c}{\rightarrow}Q\Leftrightarrow \neg(P\rightarrow Q)$。

定义 1.14 设 P 和 Q 是两个命题公式，复合命题 $P\uparrow Q$ 称作 P 和 Q 的与非。当且仅当 P 和 Q 的真值都是 1 时，$P\uparrow Q$ 为 0，否则 $P\uparrow Q$ 的真值都为 1。

联结词“↑”的定义如表 1.18 所示。

表 1.18

P	Q	$P\uparrow Q$
0	0	1
0	1	1

（续表）

P	Q	$P\uparrow Q$
1	0	1
1	1	0

显然，$P\uparrow Q \Leftrightarrow \neg(P\wedge Q)$。

定义 1.15 设 P 和 Q 是两个命题公式，复合命题 $P\downarrow Q$ 称作 P 和 Q 的或非，当且仅当 P 和 Q 的真值都为 0 时，$P\downarrow Q$ 的真值为 1，否则 $P\downarrow Q$ 真值都为 0，如表 1.19 所示。

表 1.19

P	Q	$P\downarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

显然，$P\downarrow Q \Leftrightarrow \neg(P\vee Q)$。

至此，我们一共介绍了九个联结词，是否还需要定义其他联结词呢？

在命题演算中两个分量恰可构成 2^4 个不等价的命题公式，如表 1.20 所示。

表 1.20

P	Q	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1
		0	$\wedge$	$\overset{c}{\rightarrow}$	$\overset{c}{\rightarrow}$	$\downarrow$	P	Q	$\leftrightarrow$	$\overline{\vee}$	$\neg Q$	$\neg P$	$\vee$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\uparrow$	1

从表 1.20 中可以看出，9 个命题联结词就够了，但是并非必要，因为一些联结词的公式可以用另外一些联结词的公式等价代换。下面给出最小联结词组的概念。

1.4.2 最小联结词组

最小联结词组，就是对于任何一个命题公式，都能由仅含这些联结词的命题公式等价代换。

(1) $(P\leftrightarrow Q)\Leftrightarrow(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P)$

(2) $(P\rightarrow Q)\Leftrightarrow \neg P\vee Q$

(3) $P\wedge Q \Leftrightarrow \neg(\neg P\vee\neg Q)$，$P\vee Q\Leftrightarrow \neg(\neg P\wedge\neg Q)$

(4) $P\,\overline{\vee}\,Q\Leftrightarrow \neg(P\leftrightarrow Q)$

(5) $P\overset{c}{\rightarrow}Q\Leftrightarrow \neg(P\rightarrow Q)$

(6) $P\uparrow Q\Leftrightarrow \neg(P\wedge Q)$

(7) $P \downarrow Q \Leftrightarrow \neg(P \vee Q)$

根据上面的 7 个命题公式，联结词组$\{\neg, \vee\}$或$\{\neg, \wedge\}$可以等价代换其他联结词，并且$\neg$和$\vee$，$\neg$和$\wedge$两者不能相互等价代换。故$\{\neg, \vee\}$或$\{\neg, \wedge\}$是最小联结词组。

同理，可证$\{\uparrow\}$或$\{\downarrow\}$也是最小联结词组。

习题 1-4

1. 把下列各式用只含$\vee$和$\neg$的等价式表达，并尽可能简单。

(1) $P \to (\neg P \to Q)$

(2) $(P \to (Q \vee \neg R)) \wedge \neg P \wedge Q$

(3) $(P \wedge Q) \wedge \neg P$

(4) $\neg P \wedge \neg Q \wedge (\neg R \to P)$

2. 对下列各式分别仅用与非($\uparrow$)或非($\downarrow$)表达。

(1) $\neg P$

(2) $P \vee Q$

(3) $P \wedge Q$

(4) $P \to (\neg P \to Q)$

3. 把 $P \uparrow Q$ 表示为只含有“$\downarrow$”的等价公式。

4. 证明：

$$\neg(B \uparrow C) \Leftrightarrow \neg B \downarrow \neg C$$

$$\neg(B \downarrow C) \Leftrightarrow \neg B \uparrow \neg C$$

5. 证明$\{\rightleftarrows, \neg\}$和 $\{\overline{\vee}, \neg\}$不是最小联结词组。

6. 证明$\{\neg, \to\}$和$\{\neg, \stackrel{c}{\to}\}$是最小联结词组。

1.5　对偶式与范式

在实际推理演算和命题公式证明过程中主要用$\neg$、$\vee$、$\wedge$这 3 个联结词，且表 1.7 中命题定律一般情况是成对出现的，将$\vee$和$\wedge$互换而得到。下面讨论这类命题公式。

1.5.1　对偶式

定义 1.16　在给定的命题公式 A 中，将联结词$\vee$换成$\wedge$，$\wedge$换成$\vee$，若有特殊变元 1 和 0 亦相互取代，所得公式 A^* 称为 A 的对偶式。

显然，A 也是 A^* 的对偶式。

例如，根据对偶式定义，3 个命题公式$(P \wedge Q) \vee 1$，$\neg(P \vee Q) \wedge (P \vee (\neg Q \wedge \neg S))$，$(P \vee Q) \wedge R$ 的对偶式分别为：$(P \vee Q) \wedge 0$，$\neg(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg(Q \vee \neg S))$，$(P \wedge Q) \vee R$。

可以证明，$P \uparrow Q$ 和 $P \downarrow Q$ 互为对偶式。

定理 1.9　设 A 和 A^* 是对偶式，P_1，P_2，$\cdots$，P_n 是出现在 A 和 A^* 中的分量，则

$$\neg A(P_1, P_2, \cdots, P_n) \Leftrightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n)$$
$$A(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n) \Leftrightarrow \neg A^*(P_1, P_2, \cdots, P_n)$$

证明：对变元个数 n 进行归纳证明。当 n=2 时，

由 De Morgan 定律可知

$$\neg(P\wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P\vee\neg Q), \ \neg(P\vee Q) \Leftrightarrow (\neg P\wedge\neg Q)$$

上面两个原式成立。

假定 n=k 时，

$$\neg A(P_1, P_2, \cdots, P_k) \Leftrightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_k)$$
$$\neg A^*(P_1, P_2, \cdots, P_k) \Leftrightarrow A(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_k)$$

成立。

假定 n=k+1 时，是在$\neg A(P_1, P_2, \cdots, P_k) \Leftrightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_k)$中增加一个分量 P_{k+1}，而增加分量 P_{k+1} 与 $A(P_1, P_2, \cdots, P_k)$要么是$\wedge$，要么是$\vee$，利用 De Morgan 定律，很容易证明

$$\neg A(P_1, P_2, \cdots, P_k, P_{k+1}) \Leftrightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_k, \neg P_{k+1})$$

同理，有

$$\neg A^*(P_1, P_2, \cdots, P_k, P_{k+1}) \Leftrightarrow A(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_k, \neg P_{k+1})$$

故

$$\neg A(P_1, P_2, \cdots, P_n) \Leftrightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n)$$
$$A(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n) \Leftrightarrow \neg A^*(P_1, P_2, \cdots, P_n)$$

【例题 1.22】 设 $A(P, Q, R)$是$(\neg P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q)\vee R$，证明

$$A(P, Q, R) \Leftrightarrow \neg A^*(\neg P, \neg Q, \neg R)$$

证明：由于 $A(P, Q, R)$是$(\neg P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q)\vee R$，$A^*(P, Q, R)$是$(\neg P\vee Q)\wedge(P\vee\neg Q)\wedge R$，$A^*(\neg P, \neg Q, \neg R)$是$(P\vee\neg Q)\wedge(\neg P\vee Q)\wedge\neg R$，$\neg A^*(\neg P, \neg Q, \neg R)$是$(\neg P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q)\vee R$，所以

$$A(P, Q, R) \Leftrightarrow \neg A^*(\neg P, \neg Q, \neg R)$$

定理 1.10 设 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 是出现在公式 A 和 B 中的所有分量，如果 $A \Leftrightarrow B$，则 $A^* \Leftrightarrow B^*$。

证明：因为 $A \Leftrightarrow B$，即 $A(P_1, P_2, \cdots, P_n) \leftrightarrow B(P_1, P_2, \cdots, P_n)$ 是一个重言式，故，$A(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n) \leftrightarrow B(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n)$也是一个重言式。即

$$A(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n) \Leftrightarrow B(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n)$$

由定理 1.9 得

$$\neg A^*(P_1, P_2, \cdots, P_n) \Leftrightarrow \neg B^*(P_1, P_2, \cdots, P_n)$$

因此，$A^* \Leftrightarrow B^*$。

1.5.2 范式

在推演过程中，同一命题公式可以有多种相互等价的表达形式。为了把命题公式规范化，下面讨论命题公式的范式问题。

定义 1.17 一个命题公式称为合取范式，当且仅当它具有如下形式：

$$A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_n, \ n\geqslant 1$$

其中 A_1，A_2，…，A_n 都是由命题变元或其否定所组成的析取式。

例如 P，$\neg Q$，$(\neg P\vee Q)$，$(P\vee\neg Q)\wedge(P\vee R)$是合取范式。

定义 1.18　一个命题公式称为析取范式，当且仅当它具有如下形式：

$$A_1\vee A_2\vee\cdots\vee A_n,\ n\geqslant 1$$

其中 A_1，A_2，…，A_n 都是由命题变元或其否定所组成的合取式。

例如 P，$\neg Q$，$(\neg P\wedge Q)$，$(P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q\wedge R)$是析取范式。

求命题公式的合取范式或析取范式的步骤如下：

(1) 将命题公式中的联结词等价代换为∧，∨及┐。

(2) 运用 De Morgan 律将否定符号“┐”直接移到各个命题变元之前。

(3) 运用分配律、结合律、交换律等将公式等价代换为合取范式或析取范式。

【例题 1.23】求$(P\wedge(Q\rightarrow R))\rightarrow Q$ 的合取范式和析取范式。

解：　$(P\wedge(Q\rightarrow R))\rightarrow Q\Leftrightarrow(P\wedge(\neg Q\vee R))\rightarrow Q$

$\Leftrightarrow\neg(P\wedge(\neg Q\vee R))\vee Q\Leftrightarrow\neg P\vee(Q\wedge\neg R)\vee Q$　　析取范式

$\Leftrightarrow(\neg P\vee Q)\vee(Q\wedge\neg R)$

$\Leftrightarrow(\neg P\vee Q)\wedge(\neg P\vee Q\vee\neg R)$　　合取范式

命题公式的合取范式或析取范式是不唯一的，因此下面介绍主范式，使命题公式等价代换为唯一的标准形式。

定义 1.19　n 个命题变元的合取式称作布尔合取或小项，其中每个变元与它的否定只能有一个出现且仅出现一次。

例如，n=2，即两个变元 P 和 Q 的小项为：$P\wedge Q$，$P\wedge\neg Q$，$\neg P\wedge Q$，$\neg P\wedge\neg Q$。

n=3，即三个变元 P，Q 和 R 的小项为：$P\wedge Q\wedge R$，$P\wedge Q\wedge\neg R$，$P\wedge\neg Q\wedge R$，$P\wedge\neg Q\wedge\neg R$，$\neg P\wedge Q\wedge R$，$\neg P\wedge Q\wedge\neg R$，$\neg P\wedge\neg Q\wedge R$，$\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R$。

一般说来，n 个命题变元共有 2^n 个小项。

表 1.21、表 1.22 分别为 2 个和 3 个变元的小项的真值表。

表 1.21

P	Q	$P\wedge Q$	$P\wedge\neg Q$	$\neg P\wedge Q$	$\neg P\wedge\neg Q$
0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0

表 1.22

P	Q	R	$\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R$	$\neg P\wedge\neg Q\wedge R$	$\neg P\wedge Q\wedge\neg R$	$\neg P\wedge Q\wedge R$
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	0	0	1

(续表)

1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
P	Q	R	$P\wedge\neg Q\wedge\neg R$	$P\wedge\neg Q\wedge R$	$P\wedge Q\wedge\neg R$	$P\wedge Q\wedge R$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	1

为了写出小项，首先要规定变元按字母表的次序出现，如 P，Q，R，然后根据小项成真赋值的唯一性和每个指派仅对应一个取值为真的小项，规定变元本身为 1，它的否定为 0，这样可以很快写出一种下标为二进制编码的小项，用带下标的 m 表示小项。同时为了讨论方便，可以将二进制转换为十进制。

例如，

$$m_{000}=\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R \qquad m_{100}=P\wedge\neg Q\wedge\neg R$$
$$m_{001}=\neg P\wedge\neg Q\wedge R \qquad m_{101}=P\wedge\neg Q\wedge R$$
$$m_{010}=\neg P\wedge Q\wedge\neg R \qquad m_{110}=P\wedge Q\wedge\neg R$$
$$m_{011}=\neg P\wedge Q\wedge R \qquad m_{111}=P\wedge Q\wedge R$$

性质 1.2 小项的性质如下：

(1) 每个小项都只对应一组真值指派其真值为 1，即当其真值指派与编码相同时，其真值为 1，在其余 2^n-1 种指派情况下均为 0。

(2) 任意两个不同小项是不等价的。例如，$P\wedge\neg Q\wedge R$ 和 $P\wedge\neg Q\wedge\neg R$ 是不等价的。

(3) 任意两个不同小项的合取式永假。例如，

$$m_{001}\wedge m_{100}=(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\wedge(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)$$
$$\Leftrightarrow \neg P\wedge P\wedge\neg Q\wedge R\wedge\neg R\Leftrightarrow 0$$

(4) 全体小项的析取式为永真，记为

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} m_i = m_0\vee m_1\vee\cdots\vee m_{2^n-1}\Leftrightarrow 1$$

定义 1.20 对于给定的命题公式，如果有一个等价公式，它仅由小项的析取所组成，则该等价式称作原式的主析取范式。

一个公式的主析取范式可用构成真值表的方法写出。

定理 1.11 在真值表中，一个公式的真值为 1 的指派所对应的小项的析取，即为此公式的

主析取范式。

证明：设给定公式为 A，其真值为 1 的指派所对应的小项为m_1'，m_2'，$\cdots$，m_k'，这些小项的析取式记为 B，为此要证 $A \Leftrightarrow B$，即要证 A 与 B 在相应指派下具有相同的真值。

首先对 A 为 1 的某一指派，其对应的小项为m_i'，则因为m_i'为 1，而m_1'，m_2'，$\cdots$，m_{i-1}'，m_{i+1}'，$\cdots$，m_k'均为 0，故 B 为 1。

其次，对 A 为 0 的某一指派，其对应的小项不包含在 B 中，即m_1'，m_2'，$\cdots$，m_k'均为 0，故 B 为 0。因此，$A \Leftrightarrow B$。

【例题 1.24】用真值表法，求$(P \to Q) \wedge R$ 的主析取范式。

解：该公式的真值表如表 1.23 所示。

表 1.23

P	Q	R	$(P \to Q)$	$(P \to Q) \wedge R$
0	0	0	1	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

根据真值表，可知$(P \to Q) \wedge R$ 的主析取范式为

$$(\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$$

除用真值表方法外，也可利用等价公式构成主析取范式。

【例题 1.25】试求 $P \to ((P \to Q) \wedge \neg(\neg Q \vee \neg P))$的主析取范式。

解：

$$\begin{aligned}
& P \to ((P \to Q) \wedge \neg(\neg Q \vee \neg P)) \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \vee ((\neg P \vee Q) \wedge (Q \wedge P)) \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \vee ((\neg P \wedge Q \wedge P) \vee (Q \wedge Q \wedge P)) \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \vee 0 \vee (Q \wedge P) \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \vee (Q \wedge P) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \wedge (Q \vee \neg Q)) \vee (Q \wedge P) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)
\end{aligned}$$

构成命题公式的主析取范式主要有两种方法：用真值表写出，由基本等价公式推出。

由基本等价公式推出的步骤如下：

(1) 将原式化为析取范式。

(2) 除去析取范式中所有永假的合取项。

(3) 将析取式中重复出现的合取项或者相同的变元合并。

(4) 对合取项补入没有出现的命题变元，如添加$(P \vee \neg P)$，然后，应用分配律展开公式。

将命题公式变元的个数及出现次序进行固定，然后推出命题公式的主析取范式是唯一的。因此，可以利用真值表方法来判断两个命题公式是否等价，即分别推出两个命题公式的主析取范式，然后看其小项是否相同，如果相同，则它们等价，否则不等价。

与主析取范式类似的是主合取范式。

定义 1.21 n 个命题变元的析取式称作布尔析取或大项。其中每个变元与它的否定只能有一个出现且仅出现一次。例如，$P\vee Q$，$P\vee\neg Q$，$\neg P\vee Q$，$\neg P\vee\neg Q$；又如，$P\vee Q\vee R$，$P\vee Q\vee\neg R$，…，$\neg P\vee\neg Q\vee\neg R$。

类似于小项，可以对大项进行 n 位二进制编码，规定变元本身为 0，它的否定为 1，用带下标的 M 表示大项。例如，

$M_{00}=P\vee Q$，$M_{01}=P\vee\neg Q$，$M_{10}=\neg P\vee Q$，$M_{11}=\neg P\vee\neg Q$

$M_{000}=P\vee Q\vee R$，$M_{100}=\neg P\vee Q\vee R$，$M_{001}=P\vee Q\vee\neg R$，$M_{101}=\neg P\vee Q\vee\neg R$

$M_{010}=P\vee\neg Q\vee R$，$M_{110}=\neg P\vee\neg Q\vee R$，$M_{011}=P\vee\neg Q\vee\neg R$，$M_{111}=\neg P\vee\neg Q\vee\neg R$

性质 1.3 大项的性质如下：

(1) 每个大项当其真值指派与编码相同时，其真值为 0，在其余 2^n-1 种指派情况下均为 1。

(2) 任意两个不同小项是不等价的。例如，$P\vee Q\vee\neg R$ 和 $P\vee\neg Q\vee R$ 是不等价的。

(3) 任意两个不同大项的析取式为永真。即

$$M_{001}\vee M_{110}\Leftrightarrow 1 \qquad (i\neq j)$$

(4) 全体大项的合取式必为永假，记为

$$\prod_{i=0}^{2^n-1}M_i=M_0\wedge M_1\wedge\cdots\wedge M_{2^n-1}\Leftrightarrow 0$$

定义 1.22 对于给定的命题公式，如果有一个等价公式，它仅由大项的合取所组成，则该等价式称作原式的主合取范式。

一个公式的主合取范式亦可用真值表的方法写出。

定理 1.12 在真值表中，一个公式的真值为 0 的指派所对应的大项的合取即为此公式的主合取范式。

此定理的证法与定理 1.11 类似。

【例题 1.26】 利用真值表法，求$(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge R)$的主合取范式与主析取范式。

解：公式$(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge R)$的真值表如表 1.24 所示。

表 1.24

P	Q	R	$\neg P$	$P\wedge Q$	$\neg P\wedge R$	$(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge R)$
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0

(续表)

P	Q	R	$\neg P$	$P\wedge Q$	$\neg P\wedge R$	$(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge R)$
1	1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	1	0	1

故主合取范式为

$(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge R)\Leftrightarrow(P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee\neg Q\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee\neg R)$

主析取范式为

$(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge R)\Leftrightarrow(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge Q\wedge R)$

一个公式的主合取范式亦可用基本等价式推出，其推演步骤为：

(1) 将原式化为合取范式。

(2) 除去合取范式中所有为永真的析取项。

(3) 合并相同的析取项或者相同的变元。

(4) 对析取项补入没有出现的命题变元，如添加$(P\wedge\neg P)$，然后应用分配律等展开公式。

例如，运用大项将例题 1.26 中$(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge R)$化为主合取范式。

解：$(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge R)\Leftrightarrow((P\wedge Q)\vee\neg P)\wedge((P\wedge Q)\vee R)$

$\Leftrightarrow(P\vee\neg P)\wedge(Q\vee\neg P)\wedge(P\vee R)\wedge(Q\vee R)$

$\Leftrightarrow(Q\vee\neg P)\wedge(P\vee R)\wedge(Q\vee R)$

$\Leftrightarrow(Q\vee\neg P\vee(R\wedge\neg R))\wedge(P\vee R\vee(Q\wedge\neg Q))\wedge((Q\vee R)\vee(P\wedge\neg P))$

$\Leftrightarrow(Q\vee\neg P\vee R)\wedge(Q\vee\neg P\vee\neg R)\wedge(P\vee R\vee Q)\wedge(P\vee R\vee\neg Q)\wedge(Q\vee R\vee P)$
$\wedge(Q\vee R\vee\neg P)$

$\Leftrightarrow(\neg P\vee Q\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee\neg R)\wedge(P\vee\neg Q\vee R)\wedge(P\vee Q\vee R)$

为了使主析取范式和主合取范式表达简洁，用Σ表示小项的析取，Σi，j，k 即表示 $m_i\vee m_j\vee m_k$；用Π表示大项的合取，Πi，j，k 即表示 $M_i\wedge M_j\wedge M_k$。

例题 1.26 可表示为

$(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge R)\Leftrightarrow m_{001}\vee m_{011}\vee m_{110}\vee m_{111}=\Sigma 1，3，6，7$

$(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge R)\Leftrightarrow M_{000}\wedge M_{010}\wedge M_{100}\wedge M_{101}=\Pi 0，2，4，5$

容易证明，小项与大项之间满足如下关系：

$$\neg M_i\Leftrightarrow m_i，\quad\neg m_i\Leftrightarrow M_i$$

如

$$\neg M_5\Leftrightarrow\neg M_{101}\Leftrightarrow\neg(\neg P\vee Q\vee\neg R)\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q\wedge R)\Leftrightarrow m_{101}\Leftrightarrow m_5$$

设命题公式 A 中含有 n 个命题变元，且 A 的主析取范式中含有 k 个小项$m_{i_1},m_{i_2},\cdots,m_{i_k}$，则$\neg A$ 的主析取范式中含有 2^n-k 个小项，设为$m_0,m_1,m_2,\cdots,m_{i_1-1},m_{i_1+1},\cdots,m_{i_2-1},m_{i_2+1},\cdots,m_{i_k-1},m_{i_k+1},\cdots,m_{2^n-1}$，得

$\neg A\Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_2\vee\cdots\vee m_{i_1-1}\vee m_{i_1+1}\vee\cdots\vee m_{i_2-1}\vee m_{i_2+1}\vee\cdots\vee m_{i_k-1}\vee m_{i_k+1}\vee\cdots\vee m_{2^n-1}$

$A\Leftrightarrow\neg\neg A\Leftrightarrow\neg(m_0\vee m_1\vee m_2\vee\cdots\vee m_{i_1-1}\vee m_{i_1+1}\vee\cdots\vee m_{i_2-1}\vee m_{i_2+1}\vee\cdots\vee m_{i_k-1}\vee m_{i_k+1}\vee\cdots\vee m_{2^n-1})$

$\Leftrightarrow\neg m_0\wedge\neg m_1\wedge\neg m_2\wedge\cdots\wedge\neg m_{i_1-1}\wedge\neg m_{i_1+1}\wedge\cdots\wedge\neg m_{i_2-1}\wedge\neg m_{i_2+1}\wedge\cdots\wedge\neg m_{i_k-1}\wedge$

$\neg m_{i_k+1} \wedge \cdots \wedge \neg m_{2^n-1}$

$\Leftrightarrow M_0 \wedge M_1 \wedge M_2 \wedge \cdots \wedge M_{i_1-1} \wedge M_{i_1+1} \wedge \cdots \wedge M_{i_2-1} \wedge M_{i_2+1} \wedge \cdots \wedge M_{i_k-1} \wedge M_{i_k+1} \wedge \cdots \wedge M_{2^n-1}$

由以上分析可得如下定理。

定理 1.13 如果命题公式 P 的主析取范式为

$$\sum i_1，i_2，\cdots，i_k，$$

则 P 的主合取范式为

$$\prod 0，1，2，\cdots，i_1-1，i_1+1，\cdots，i_k-1，i_k+1，\cdots，2^n-1$$

由定理 1.13 可知，对一个命题公式只要求主析取范式，就直接写出主合取范式；同理，对一个命题公式只要求主合取范式，就直接写出主析取范式。

习题 1-5

1. 求下列公式的析取范式和合取范式。

(1) $\neg(P\wedge Q)\wedge(P\vee Q)$

(2) $P\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)$

(3) $(\neg P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q)$

(4) $\neg(P\rightarrow Q)$

(5) $(\neg P\wedge Q)\rightarrow R$

(6) $P\rightarrow((Q\wedge R)\rightarrow S)$

(7) $(P\rightarrow Q)\rightarrow R$

(8) $\neg(P\rightarrow Q)\vee(P\vee Q)$

(9) $P\wedge(P\rightarrow Q)$

(10) $(P\rightarrow Q)\rightarrow R$

2. 求下列各式的主析取范式及主合取范式，并指出哪些是重言式。

(1) $\neg(P\vee\neg Q)\wedge(S\rightarrow R)$

(2) $Q\wedge(P\vee\neg Q)$

(3) $(Q\rightarrow P)\wedge(\neg P\wedge Q)$

(4) $(\neg P\vee\neg Q)\rightarrow(P\leftrightarrow\neg Q)$

(5) $P\vee(\neg P\rightarrow(Q\vee(\neg Q\rightarrow R)))$

(6) $(P\rightarrow(Q\wedge R))\wedge(\neg P\rightarrow(\neg Q\wedge\neg R))$

(7) $P\rightarrow(P\wedge(Q\rightarrow P))$

3. 用主析取范式的方法，证明下列各题中的两式是等价的。

(1) $(P\rightarrow Q)\wedge(P\rightarrow R)$，$P\rightarrow(Q\wedge R)$

(2) $(P\rightarrow Q)\rightarrow(P\wedge Q)$，$(\neg P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P)$

(3) $P\wedge Q\wedge(\neg P\vee\neg Q)$，$\neg P\wedge\neg Q\wedge(P\vee Q)$

(4) $P\vee(P\rightarrow(P\wedge Q))$，$\neg P\vee\neg Q\vee(P\wedge Q)$

4. 三人估计比赛结果，甲说“A 第一，B 第二”，乙说“C 第二，D 第四”，丙说“A 第二，D 第四”。结果三人估计得都不全对，但都对了一个，求 A，B，C，D 的名次。要求使用主析

取范式的方法对各人的说法进行分析。

5. 要在 A，B，C，D 四个人中派两个人出差，按下述三个条件有几种派法？如何派？

(1) 若 A 去，则 C 和 D 中要去一人；

(2) B 和 C 不能都去；

(3) 若 C 去，则 D 要留下。

1.6 命题逻辑推理理论

在数学和其他自然科学中，常常是从某些前提 A_1，A_2，…，A_n 出发，然后推导出某结论。而在实际推理中，常常把本学科的一些定律、定理和条件作为假设前提。尽管这些前提并非永真，但在推理过程中，却将假设这些命题为真，并使用一些公认的规则得到另外的命题，形成结论，这种过程就是论证。

定义 1.23　设 A 和 C 是两个命题公式，当且仅当 $A\rightarrow C$ 为一重言式，即 $A\Rightarrow C$，称 C 是 A 的有效结论，或 C 可由 A 逻辑地推出。

这个定义可以推广到有 m 个前提的情况。

设 H_1，H_2，…，H_m，C 为命题公式，当且仅当

$$H_1\wedge H_2\wedge\cdots\wedge H_m\Rightarrow C \tag{*}$$

称 C 是一组前提 H_1，H_2，…，H_m 的有效结论。

判别有效结论的过程即论证过程，论证的方法较多，主要有真值表法、直接证法和间接证法三种方法。

1.6.1　真值表法

设 P_1，P_2，…，P_n 是出现于前提 H_1，H_2，…，H_m 和结论 C 中的全部命题变元，假定对 P_1，P_2，…，P_n 作了全部的真值指派，确定 H_1，H_2，…，H_m 和 C 的所有真值，列出这个真值表，即可看出式(*)是否成立。

根据 $P\Rightarrow Q$ 的证明过程，给出运用真值表的判别方法，具体如下：

从真值表中找出 H_1，H_2，…，H_m 的真值均为 1 的行，对于每一个这样的行，若 C 也有真值 1，则式(*)成立。或者观察 C 的真值为 0 的行，在每一个这样的行中，H_1，H_2，…，H_m 的真值中至少有一个为 0，则式(*)也成立。

【例题 1.27】用真值表证明两难公式：$(P\rightarrow R)\wedge(Q\rightarrow R)\wedge(P\vee Q)\Rightarrow R$。

证明：根据题设列出真值，如表 1.25 所示。

表 1.25

P	Q	R	$P\rightarrow R$	$Q\rightarrow R$	$P\vee Q$
0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	0	1

(续表)

P	Q	R	$P \to R$	$Q \to R$	$P \vee Q$
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1

从真值表中看到$P \to R$，$Q \to R$，$P \vee Q$的真值都为1的情况为第4行、第6行和第8行，而在这三行中R的真值均为1。故

$$(P \to R) \wedge (Q \to R) \wedge (P \vee Q) \Rightarrow R$$

这个公式是表1.15中的I_{14}，即两难推理。

1.6.2 直接证法

直接证法就是由一组前提，利用一些公认的推理规则，根据已知的等价式或蕴含公式，推演得到有效的结论。

P规则：前提在推导过程中的任何时候都可以引入使用。

T规则：在推导中，如果有一个或多个公式、重言蕴含着公式S，则公式S可以引入推导之中。

在推理证明过程时，常常要使用表1.11所示的等价式(E规则)和表1.15所示的蕴含式(I规则)。

【例题1.28】 证明$(W \vee V) \to V$，$V \to C \vee S$，$S \to U$，$\neg C \wedge \neg U \Rightarrow \neg W$。

证明：(1) $\neg C \wedge \neg U$　　P

(2) $\neg U$　　T(l)，I

(3) $S \to U$　　P

(4) $\neg S$　　T(2)(3)，I

(5) $\neg C$　　T(1)，I

(6) $\neg C \wedge \neg S$　　T(4)(5)，I

(7) $\neg(C \vee S)$　　T(6)，E

(8) $(W \vee V) \to V$　　P

(9) $V \to (C \vee S)$　　P

(10) $(W \vee V) \to (C \vee S)$　　T(8)(9)，I

(11) $\neg(W \vee V)$　　T(7)(10)，I

(12) $\neg W \wedge \neg V$　　T(11)，E

(13) $\neg W$　　T(12)，I

【例题1.29】 证明$(A \vee B) \wedge (A \to C) \wedge (B \to D) \Rightarrow C \vee D$。

证法1：(1) $A \vee B$　　P

(2) $\neg A \to B$　　T(1)，E

(3) $B \to D$　　P

(4) $\neg A \to D$　　T(2)(3)，I

(5) $\neg D \to A$　　T(4)，E

(6) $A \to C$　　P

(7) $\neg D \to C$　　T(5)(6)，I

(8) $D \vee C$　　T(7)，E

证法 2：(1) $A \to C$　　P

(2) $A \vee B \to C \vee B$　　T(1)，I

(3) $B \to D$　　P

(4) $B \vee C \to D \vee C$　　T(3)，I

(5) $A \vee B \to D \vee C$　　T(2)(4)，I

(6) $A \vee B$　　P

(7) $D \vee C$　　T(5)(6)，I

1.6.3　不相容

定义 1.24　假设公式 H_1，H_2，…，H_m 中的命题变元为 P_1，P_2，…，P_n，对于 P_1，P_2，…，P_n 的一些真值指派，如果能使 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m$ 的真值为真，则称公式 H_1，H_2，…，H_m 是相容的；如果对于 P_1，P_2，…，P_n 的每一组真值指派使得 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m$ 的真值均为假，则称公式 H_1，H_2，…，H_m 是不相容的。

推证过程为：设有一组前提 H_1，H_2，…，H_m，要推出结论 C，即证 H_1，H_2，…，$H_m \Rightarrow C$，记作 $S \Rightarrow C$，即 $\neg C \to \neg S$ 为永真，或 $C \vee \neg S$ 为永真，故 $\neg C \wedge S$ 为永假。因此要证明 H_1，H_2，…，$H_m \Rightarrow C$，只要证明 H_1，H_2，…，H_m 与 $\neg C$ 是不相容的。

【例题 1.30】证明 $A \to B$，$\neg(B \vee C) \Rightarrow \neg A$。

证明：(1) A　　P(附加前提)

(2) $A \to B$　　P

(3) B　　T(1)(2)，I

(4) $\neg(B \vee C)$　　P

(5) $\neg B \wedge \neg C$　　T(4)，E

(6) $\neg B$　　T(5)，I

(7) $B \wedge \neg B$(矛盾)　　T(3)(6)，I

【例题 1.31】证明 $(P \vee Q) \wedge (P \to R) \wedge (Q \to S) \Rightarrow S \vee R$。

证明：(1) $\neg(S \vee R)$　　P(附加前提)

(2) $\neg S \wedge \neg R$　　T(l)，E

(3) $P \vee Q$　　P

(4) $\neg P \to Q$　　T(3)，E

(5) $Q \to S$　　P

(6) $\neg P \to S$　　T(4)(5)，I

(7) $\neg S \to P$　　T(6)，E

(8) $(\neg S \wedge \neg R) \to (P \wedge \neg R)$　　T(7)，I

(9) $P \wedge \neg R$　　T(2)(8)，I

(10) $P \to R$　　P

(11) $\neg P \vee R$　　T(10)，E

(12) $\neg(P \wedge \neg R)$　　T(11)，E

(13) $(P \wedge \neg R) \wedge \neg(P \wedge \neg R)$ (矛盾)　　T(9)(12)，I

1.6.4　CP 规则

间接证法的另一种情况是：证 H_1，H_2，…，$H_m \Rightarrow (R \to C)$。设 H_1，H_2，…，H_m 为 S，即证 $S \Rightarrow (R \to C)$或 $S \Rightarrow (\neg R \vee C)$，故 $S \to (\neg R \vee C)$为永真式。因为 $S \to (\neg R \vee C) \Leftrightarrow \neg S \vee (\neg R \vee C) \Leftrightarrow (\neg S \vee \neg R) \vee C \Leftrightarrow \neg(S \wedge R) \vee C \Leftrightarrow (S \wedge R) \to C$，所以若 $S \to (\neg R \vee C)$为永真式，则$(S \wedge R) \to C$ 为永真式，即 $S \wedge R \Rightarrow C$。若将 R 作为附加前提，如有 $S \wedge R \Rightarrow C$，即证得 $S \Rightarrow (R \to C)$。由$(S \wedge R) \Rightarrow C$ 证得 $S \Rightarrow (R \to C)$称为 CP 规则。

【例题 1.32】证明 $A \to (B \to C)$，$\neg D \vee A$，$B \Rightarrow D \to C$。

证明：(1) D　　P(附加前提)

(2) $\neg D \vee A$　　P

(3) A　　T(1)(2)，I

(4) $A \to (B \to C)$　　P

(5) $B \to C$　　T(3)(4)，I

(6) B　　P

(7) C　　T(5)(6)，I

(8) $D \to C$　　CP 规则(1)(7)

【例题 1.33】证明$(P \wedge Q) \to R$，$R \to S$，$\neg S \Rightarrow P \to \neg Q$。

证明：(1) P　　P(附加前提)

(2) $R \to S$　　P

(3) $\neg S$　　P

(4) $\neg R$　　T(2)(3)，I

(5) $(P \wedge Q) \to R$　　P

(6) $\neg(P \wedge Q)$　　T(4)(5)，I

(7) $\neg P \vee \neg Q$　　T(6)，E

(8) $\neg Q$　　T(1)(7)，I

(9) $P \to \neg Q$　　CP 规则(1)(8)

【例题 1.34】符号化下列命题，并用推理规则证明：

如果今天是星期一，则10点钟要进行离散数学或程序设计语言两门课程中的一门课的考试；如果程序设计语言课程的老师出差，则不考程序设计语言；今天是星期一，并且程序设计语言课程的老师出差。所以今天进行离散数学的考试。

解：首先将命题符号化。设：P：今天是星期一；Q：10 点钟要进行离散数学考试；R：10

点钟要进行程序设计语言考试；S：程序设计语言课的老师出差；

则上述命题可符号化为：$P \to Q \overline{\vee} R$，$S \to R$，$P \wedge S \Rightarrow Q$。

(1) $P \wedge S$	P
(2) S	T(1)，I
(3) $S \to R$	P
(4) R	T(2)(3)，I
(5) P	T(1)，I
(6) $P \to Q \overline{\vee} R$	P
(7) $Q \overline{\vee} R$	T (5)(6)，I
(8) Q	T (4)(7)，I

【例题 1.35】符号化下列命题，并用推理规则证明：

如果小明是计算机学院的学生，则他要学习离散数学或者统计分析；如果小明不转专业，他就不用学习统计分析。小明是计算机学院的学生且不转专业，则他学习离散数学。

解：首先将命题符号化。设：P：小明是计算机学院的学生。Q：小明学习离散数学。R：小明学习统计分析。S：小明转专业。

则上述可以符号化为：$P \to (Q \vee R)$，$\neg S \to \neg R \Rightarrow (P \wedge \neg S) \to Q$。

(1) $P \wedge \neg S$	P(附加前提)
(2) P	T(1)，I
(3) $\neg S$	T(1)，I
(4) $P \to (Q \vee R)$	P
(5) $Q \vee R$	T(2)(4)，I
(6) $\neg S \to \neg R$	P
(7) $\neg R$	T(3)(6)，I
(8) Q	T(5)(7)，I
(9) $(P \wedge \neg S) \to Q$	CP(1)(8)

习题 1-6

1. 用真值法证明下列各式。

(1) $\neg(P \wedge \neg Q)$，$\neg Q \vee R$，$\neg R \Rightarrow \neg P$

(2) $\neg P \vee Q$，$R \to \neg Q \Rightarrow P \to \neg R$

2. 用直接方法证明下列公式。

(1) $B \wedge C$，$(B \leftrightarrow C) \to (H \vee G) \Rightarrow G \vee H$

(2) $P \to Q$，$(\neg Q \vee R) \wedge \neg R$，$\neg(\neg P \vee S) \Rightarrow \neg S$

(3) $J \to (M \vee N)$，$(H \vee G) \to J$，$H \vee G \Rightarrow M \vee N$

(4) $(A \to B) \wedge (C \to D)$，$(B \to E) \wedge (D \to F)$，$\neg(E \wedge F)$，$A \to C \Rightarrow \neg A$

3. 用不相容的方法证明下列各式。

(1) $(R \to \neg Q)$，$R \vee S$，$S \to \neg Q$，$P \to Q \Rightarrow \neg P$

(2) $S\rightarrow\neg Q$，$S\vee R$，$\neg R$，$\neg R\leftrightarrow\neg Q\Rightarrow\neg P$

4. 用 CP 规则证明下列公式。

(1) $A\vee B\rightarrow C\wedge D$，$D\vee E\rightarrow F\Rightarrow A\rightarrow F$

(2) $A\rightarrow(B\rightarrow C)$，$(C\wedge D)\rightarrow E$，$\neg F\rightarrow(D\wedge\neg E)\Rightarrow A\rightarrow(B\rightarrow F)$

(3) $A\rightarrow(B\wedge C)$，$\neg B\vee D$，$(E\rightarrow\neg F)\rightarrow\neg D$，$B\rightarrow(A\wedge\neg E)\Rightarrow B\rightarrow E$

5. 下面的每一组前提，没有写出结论，请你应用推理规则说明是否能推证有效结论。

(1) 如果我跑步，那么，我很疲劳。
我没有疲劳。

(2) 如果我的程序通过，那么我很快乐。
如果我快乐，那么，阳光很好。
现在是晚上十一点，天很暖。

(3) 如果他犯了错误，那么，他神色慌张。
他神色慌张。

6. 符号化下面的命题，并用推理规则证明结论是否有效。

(1) 如果我努力学习，那么我的离散数学不会不及格；如果我不热衷于玩游戏，那么我将努力学习；我离散数学不及格。因此我热衷于玩游戏。

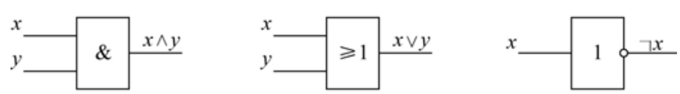
(2) 只要 A 曾到过受害者房间并且 11 点以前没离开，A 就犯了谋杀罪；A 曾到过受害者房间；如果在 11 点以前离开，看门人会看见他；看门人没有看见他。所以 A 犯了谋杀罪。

1.7 命题逻辑的应用

可以结合新工科的特点，将命题逻辑知识应用于日常生活和工程技术中。下面从几个方面进行简要介绍，希望起到抛砖引玉的作用。

1.7.1 电路设计

命题逻辑在电路设计中有着广泛的应用。可以用电子元件物理实现逻辑运算，用这些元件组合成的电路物理实现命题公式，这就是组合电路。实现$\wedge$，$\vee$，$\neg$的元件分别称为与门、或门、非门。与门有 2 个(或 2 个以上)输入，每个输入是 1 个真值，有 1 个输出，输出它的所有输入的合取。或门也有 2 个(或 2 个以上)输入，每个输入是 1 个真值，有 1 个输出，输出它的所有输入的析取。非门只有 1 个输入，输入是 1 个真值，有 1 个输出，输出它的输入的否定。它们的图形符号如图 1.1 所示。



(a) 与门　(b) 或门　(c) 非门

图 1.1

【例题 1.36】假设有一盏灯由设在门口和床头的两个开关控制，要求按动任何一个开关都

能打开或关闭灯。试设计一个这样的线路。解用 x, y 分别表示这两个开关，开关的两个状态分别用 1 和 0 表示。用 F 表示灯的状态，打开为 1，关闭为 0。不妨设当两个开关都为 0 或 1 时灯是打开的。根据题目的要求，开关的状态与灯的状态的关系如表 1.26 所示。表 1.26 是一个真值表，也是一个真值函数。根据此表可以写出 F 的主析取范式：

$$F=m_0\vee m_3=(\neg x\wedge\neg y)\vee(x\wedge y)$$

表 1.26

x	y	$F(x,y)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

根据这个公式，可得控制这盏电灯的组合电路如图 1.2 所示。

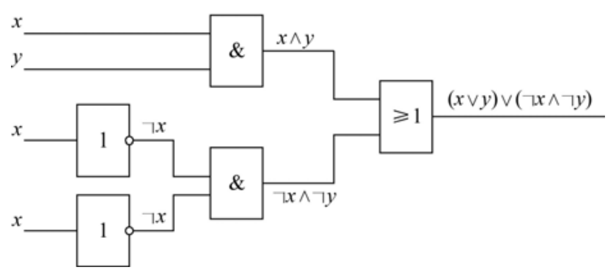


图 1.2

【例题 1.37】一家航空公司为了保证安全，用计算机复核飞行计划。每台计算机能给出飞行计划正确或有误的回答。由于计算机也可能发生故障，因此采用三台计算机同时复核。由所给答案，再根据“少数服从多数”的原则作出判定，试将结果用命题公式表示，并加以简化，画出电路图。

解：设 A，B，C 分别表示三台计算机的答案。Y 表示判断结果。根据题意，得到真值表如表 1.27 所示。可得

$$\begin{aligned}Y &\Leftrightarrow (\neg A\wedge B\wedge C)\vee(A\wedge\neg B\wedge C)\vee(A\wedge B\wedge\neg C)\vee(A\wedge B\wedge C)\\ &\Leftrightarrow ((\neg A\vee A)\wedge B\wedge C)\vee(A\wedge(\neg B\vee B)\wedge C)\vee(A\wedge B\wedge(C\vee\neg C))\\ &\Leftrightarrow (B\wedge C)\vee(A\wedge C)\vee(A\wedge B)\end{aligned}$$

表 1.27

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

电路图如图 1.3 所示。

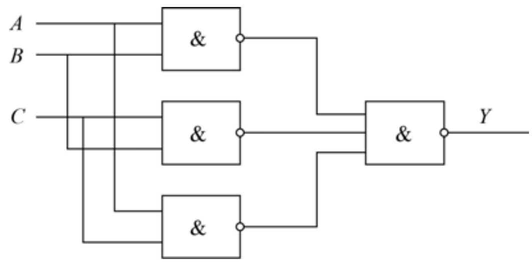


图 1.3

这里只是给出一个电路方面的问题，感兴趣的读者可以查阅有关书籍。此问题可以拓展为某种比赛中有三位评委的情况，评委认为参赛者可晋级，则按动手中的按钮。比赛规则为：两位以上评委按动手中的按钮，将使晋级信号灯点亮。试设计该信号灯控制电路。

设计组合电路时，首先构造一个输入输出表，给出所有可能的输入与对应的输出，即构造一个真值函数。根据这个表可以写出表示这个真值函数的主析取范式，从而设计出需要的组合电路。但是在主析取范式中可能包含许多不必要的运算，使得组合电路中使用许多不必要的元件。例如，考虑一个组合电路，当且仅当 $x=y=z=1$ 或 $x=y=1$ 且 $z=0$ 时输出 1。这个输出的主析取范式为 $F=m_6\vee m_7=(x\wedge y\wedge \neg z)\vee(x\wedge y\wedge z)$。如果直接按照这个公式设计电路，需要用 4 个与门、1 个或门和 1 个非门。实际上，$(x\wedge y\wedge z)\vee(x\wedge y\wedge \neg z)\Leftrightarrow x\wedge y$，只需要一个与门即可。因此，需要对主析取范式进行化简，以使得公式中包含尽可能少的运算。这种包含最少运算的公式称作最简展开式。

1.7.2　数学建模

【例题 1.38】有一逻辑学家误入某部落，被拘于牢狱，酋长意欲放行，他对逻辑学家说：“今有两门，一为自由，一为死亡，你可任意开启一门。为协助你脱逃，今加派两名士兵负责解答你所提的任何问题。惟可虑者，此两士兵中一名天性诚实，一名说谎成性，今后生死由你自己选择。”逻辑学家沉思片刻，即向一士兵发问，然后开门从容离去。该逻辑学家应如何发问？

解：逻辑学家手指一门问身旁一名士兵说：“这扇门是死亡门，他(指另一名士兵)将回答‘是’，对吗？”当被问士兵回答“对”，则逻辑学家开启所指的门从容离去；当被问士兵回答“否”，则逻辑学家开启另一门从容离去。

分析：如果被问者是诚实士兵，他回答“对”。则另一名士兵是说谎士兵，他回答“是”，那么，这扇门不是死亡门。如果被问者是诚实士兵，他回答“否”。则另一名是说谎士兵，他回答“不是”，那么，这扇门是死亡门。

如果被问者是说谎士兵，可以类似分析。

设：P：被问士兵是诚实人。Q：被问士兵的回答是“是”。R：另一士兵的回答是“是”。S：这扇门是死亡门。

可得真值表如表 1.28 所示。

表 1.28

P	**Q**	**R**	**S**
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	0

故有

$$R \Leftrightarrow P \leftrightarrow Q$$

$$S \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \Leftrightarrow (P \vee \neg Q) \wedge \neg Q \Leftrightarrow \neg Q$$

因此当被问人回答“是”时，此门不是死亡门，逻辑学家可开此门从容离去。当被问人回答“否”时，此门是死亡门，逻辑学家可开另一扇门从容离去。

1.7.3　算法代码

1. 逻辑联结词“合取”的代码

将 P, Q 进行合取运算，其结果放在 Z 中，即 $Z \Leftrightarrow P \wedge Q$ 。程序如下：

```
#include"stdio.h"
main()
{
    int z,p,q;
    printf("验证逻辑联结词'合取'");
    printf("\t");
    printf("z=p∧q");
    printf("\n");
    while((p!=0&&p!=1)||(q!=0&&q!=1))
    {
        printf("Please input p(0 or 1):p=  ");
        scanf("% d",&p);
        printf("Please input q(0 or 1):q=  ");
        scanf("% d",&q);
    }
    if ((p==1)&&(q==1))
        z=1;
    else
        z=0;
    printf("z = % d\n",z);
}
```

2. 逻辑联结词“析取”的代码

将 P, Q 进行析取运算，其结果放在 Z 中，即 $Z \Leftrightarrow P \vee Q$ 。程序如下：

```
#include"stdio.h"
main()
{
    int z,p,q;
    printf("验证逻辑联结词'析取'");
    printf("\t");
    printf("z=pv q");
    printf("\n");
    while((p!=0&&p!=1)||(q!=0&&q!=1))
    {
        printf("Please input p(0 or 1):p=  ");
        scanf("% d",&p);
        printf("Please input q(0 or 1):q=  ");
        scanf("% d",&q);
    }
    if ((p==1)||(q==1))
        z=1;
    else
        z=0;
    printf("z = % d\n",z);
}
```

3. 构造合式公式真值表的算法代码

(1) 功能。

给出任意变元的合式公式，构造该合式公式的真值表。

(2) 基本思想。

以用数值变量表示命题变元为前提规范，在程序计算前将转换后的合式公式输入到本程序首个 sign：语句后的条件位置上。另外，我们使用一维数组 $a[N]$来表示合式公式中出现的 n 个命题变元。例如，合式公式$\neg(P \vee Q) \wedge ((P \vee R) \vee S)$应该表示成如下语句：

```
if(!(a[1]==1||a[2]==1)&&((a[1]==1||a[3]==1)||a[4]==1)) z=1;  else z=0;
```

一维数组 $a[N]$除表示 n 个命题变元外，它还是一个二进制加法器的模拟器，每当在这个模拟器中产生一个二进制数时，就相当于为各命题变元产生了一组真值指派。其中数值 1 表示真值为真，而 0 表示真值为假。

(3) 算法逻辑。

① 对二进制加法器模拟器 $a[N]$赋初值，$0 \Leftrightarrow a_i$，$i = 1, 2, \cdots, n$。

② 计算模拟器中所对应的一组真值指派下合式公式的真值(条件语句)。

③ 输出真值表中对应于模拟器所给出的一组真值指派及这组真值指派所对应的一行真值。

④ 在模拟器 $a[N]$中，模拟产生下一个二进制数值。

⑤ 若 $a[N]$中的数值等于 2^n，则结束，否则转②。

(4) 程序及解释说明：

```
#include"stdio.h"
#define N  4
main()
{
   int a[N];
   int i,z;
   printf("构造任意公式的真值表");
   printf("\n");
   for (i=1;i<=4;i++)
   {
      a[i]=0;
      printf("a[% 4d]=0",i);
   }
   sign:
   if(!(a[1]==1||a[2]==1)&&((a[1]==1||a[3]==1)||a[4]==1))
      z=1;
   else
      z=0;
   for (i=N;i>=1;i--)
      printf("% 4d",a[i]);
   printf("   |% 4d\n",z);
   i=1;
   sing:
   a[i]=a[i]+1;
   if (a[i]<2)
      goto sign;
   else
      a[i]=0;
   i++;
   if (i<=4)
      goto sing;
}
```

程序解释说明。

N：合式公式中所有不同的命题变元的个数。

a[N]：一维数组，用于模拟二进制加法器。每个下标变量存放一位二进制数，a 共可存放 n 位二进制数。另外，每个下标变量表示一个命题变元。

Z：存放所给出的合式公式对应于各组真值指派的真值。

I：工作变量。

习题 1-7

1. 银行的金库装设有自动报警装置。仅当总经理室的一个人工控制开关合上时，它才能动作。如果这个人工开关合上，那么当金库的门被撬或者当工作人员尚未切断监视器电源且通向金库的通道上有人时，就会发出警报。试设计这个控制线路。

2. 设计红绿灯自动控制线路。要求传感器中计数器内容为 Z。当 $Z\geqslant 5$ 时，亮绿灯；当 $Z\leqslant 2$ 时，亮红灯；当 $2<Z<5$ 时，亮黄灯。