



在前面的章节中,主要研究了单个随机变量的分布函数。实际上多维随机变量也是经常遇到的一种情形。例如,研究学生的学习成绩,一个学生对应他各个学科的学习成绩,这是一个一对多的关系,用概率论的语言来讲,各科成绩就构成了一个多维随机变量。再例如天气预报需要预报多个天气指标,包括空气质量、湿度、风力、风向、气压等,这些指标中的每个都是一维随机变量,它们结合在一起就构成了一个多维随机变量。研究多维随机变量就是要揭示这些单个随机变量之间的关系,这是研究一维随机变量无法做到的。为了简单起见,本章以二维随机变量为例,研究多维随机变量及其分布函数,主要研究分布函数、边缘分布、条件分布和独立性等重要问题。本章需要的数学工具主要是高等数学中的二重积分。

本章主要包括以下内容:

- (1) 二维随机变量及其分布函数。
- (2) 边缘分布。
- (3) 条件分布。
- (4) 随机变量的独立性。

3.1 二维随机变量及其分布函数

设 S 是一个样本空间, X 和 Y 是两个定义在 S 上的随机变量,则由 X 和 Y 所构成的二维向量 (X, Y) 称为定义在 S 上的随机向量。为了强调,把前面章节所学的随机变量称为一维随机变量。高维的随机变量也可类似定义。

3.1.1 二维随机变量的分布函数

二元实函数 $F(x, y)$ 称为二维随机变量 (X, Y) 的分布函数,如果它满足

$$F(x, y) = P((X \leq x) \cap (Y \leq y)) = P(X \leq x, Y \leq y) \quad (3-1)$$

此时 $F(x, y)$ 也称为 X 和 Y 的联合分布。

如果将二维随机变量 (X, Y) 画在坐标平面上,用 (x, y) 表示点的坐标,则分布函数 $F(x, y)$ 就是二维随机变量 (X, Y) 落入以 (x, y) 为右上方顶点的无穷矩形内的概率,如图 3-1 所示。

根据分布函数的定义,随机点 (X, Y) 落在矩形区域 $\{(x, y): x_1 < x \leq x_2, y_1 < y \leq y_2\}$ 的概率为

$$P(x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2) = F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1)$$

(3-2)

概率如图 3-2 所示。

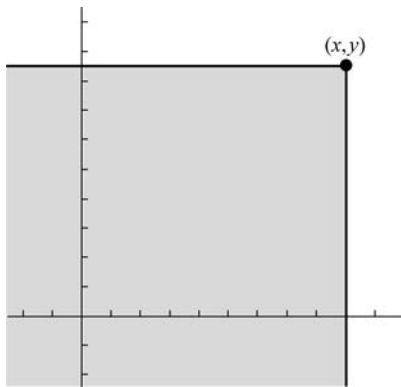


图 3-1 二维随机变量的分布函数

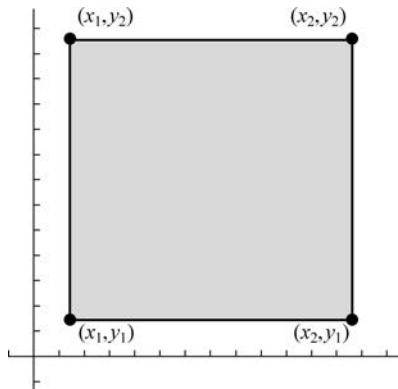


图 3-2 概率

分布函数的基本性质如下：

- (1) 对于固定的 y , $F(x, y)$ 是 x 的增函数, 即对于 $x_1 \leq x_2$, 有 $F(x_1, y) \leq F(x_2, y)$ 。
- (2) 对于固定的 x , $F(x, y)$ 是 y 的增函数, 即对于 $y_1 \leq y_2$, 有 $F(x, y_1) \leq F(x, y_2)$ 。
- (3) $F(x, y)$ 是有界函数, 并且 $0 \leq F(x, y) \leq 1$ 。
- (4) $F(-\infty, y) = F(x, \infty) = F(-\infty, \infty) = 0, F(\infty, \infty) = 1$ 。
- (5) $F(x, y)$ 关于 x 右连续, $F(x, y)$ 关于 y 右连续。

3.1.2 二维离散型随机变量

如果二维随机变量 (X, Y) 全部可能取到的值是有限对或者无限可列多对, 则称 (X, Y) 是离散型随机变量。不妨设二维离散型随机变量全部可能的取值为 (x_i, y_j) , 相应的概率为 $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$, 则称 $P(X = x_i, Y = y_j)$ 为 X 和 Y 的联合分布律, 见表 3-1。

表 3-1 X 和 Y 的联合分布律

X 和 Y 的联合分布		X				
		x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
Y	y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$
	y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{i2}	$\cdots$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$
	y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$

容易知道二维离散型随机变量的联合分布函数为

$$F(x, y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} p_{ij}$$

(3-3)

【例 3-1】 口袋中有 1 个红球, 2 个黑球和 3 个白球, 现在有放回地从袋中取两次, 每次取一个球, 用 X 和 Y 表示两次取球所得红球和黑球的个数, 求二维随机变量 (X, Y) 的概率分布。

解：首先确定 X 和 Y 的取值范围都是 0、1 和 2。由于是有放回地取球, 所以两次取球

共 9 种可能,结果见表 3-2。

表 3-2 两次取球的联合分布

两次取球的联合分布		第 1 次取球		
		红	黑	白
第 2 次取球	红	1/36	1/18	1/12
	黑	1/18	1/9	1/6
	白	1/12	1/6	1/4

于是有

$$P(X=0, Y=0) = \frac{1}{4}, \quad P(X=0, Y=1) = \frac{1}{3}, \quad P(X=0, Y=2) = \frac{1}{9}$$

$$P(X=1, Y=0) = \frac{1}{6}, \quad P(X=1, Y=1) = \frac{1}{9}, \quad P(X=1, Y=2) = 0$$

$$P(X=2, Y=0) = \frac{1}{36}, \quad P(X=2, Y=1) = 0, \quad P(X=2, Y=2) = 0$$

结果见表 3-3。

表 3-3 X 和 Y 的联合概率分布

X 和 Y 的联合概率分布		Y		
		0	1	2
X	0	1/4	1/3	1/9
	1	1/6	1/9	0
	2	1/36	0	0

3.1.3 二维连续型随机变量

对于二维随机变量 (X, Y) 的分布函数 $F(x, y)$, 如果存在非负可积函数 $f(x, y)$, 使对于任意的 x 和 y 有

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(s, t) ds dt \quad (3-4)$$

则称 (X, Y) 是连续型的二维随机变量, 其中 $f(x, y)$ 称为二维随机变量 (X, Y) 的联合概率密度, 简称概率密度。

概率密度具有以下性质。

(1) 非负性: $f(x, y) \geq 0$ 。

(2) 正则性:

$$F(\infty, \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(s, t) ds dt = 1 \quad (3-5)$$

(3) 对于给定的平面区域 A , 点 (X, Y) 落入 A 的概率为

$$P((X, Y) \in A) = \iint_A f(x, y) dx dy \quad (3-6)$$

(4) 在 $f(x, y)$ 的连续点处有

$$f(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x \partial y} \quad (3-7)$$

【例 3-2】 设二维随机变量具有概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} 2\exp(-2x - y), & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(1) 求分布函数 $F(x, y)$ 。

(2) 求概率 $P(Y \leq 2X)$ 。

解: (1) 由密度函数与分布函数的关系可知

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(s, t) ds dt = \begin{cases} \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x 2\exp(-2s - t) ds dt, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

计算后可得

$$F(x, y) = \begin{cases} (1 - \exp(-2x))(1 - \exp(-y)), & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(2) 概率 $P(Y \leq 2X)$ 为

$$P(Y \leq 2X) = \int_0^{\infty} dx \int_0^{2x} 2\exp(-2x - y) dy = \frac{1}{2}$$

代码如下:

```
# 第 3 章/3-1.py
# 第 1 问
from sympy import *
x, y, s, t = symbols('x, y, s, t')
expr = 2 * exp(-2 * s) * exp(-t)
tmp = integrate(expr, (s, 0, x), (t, 0, y)).simplify()
print('分布函数为', tmp)
# 第 2 问
tmp = integrate(expr, (t, 0, 2 * s), (s, 0, oo)).simplify()
print('所求概率为', tmp)
```

输出如下:

```
分布函数为 exp(-2 * x - y) + 1 - exp(-y) - exp(-2 * x)
所求概率为 1/2
```

3.2 边缘分布

二维随机变量 (X, Y) 中的 X 和 Y 也是随机变量, 有各自的分布函数, 记作 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$, 称为二维随机变量 (X, Y) 关于 X 和 Y 的边缘分布函数。边缘分布函数与分布函数 $F(x, y)$ 有密切的联系,

$$F_X(x) = F(x, \infty) = P(X \leq x, Y < \infty) \quad (3-8)$$

$$F_Y(y) = F(\infty, y) = P(X < \infty, Y \leq y) \quad (3-9)$$

如果二维随机变量 (X, Y) 是离散型随机变量, 则

$$p_{i.} = P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}, p_{.j} = P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} \quad (3-10)$$

其中, $p_{i.}$ 和 $p_{.j}$ 分别称为 (X, Y) 关于 X 和 Y 的边缘分布律。

如果二维随机变量 (X, Y) 是连续型随机变量, 则

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy, f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \quad (3-11)$$

其中, $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$ 分别称为 (X, Y) 关于 X 和 Y 的边缘概率密度。

【例 3-3】 在例 3-1 中, 求二维随机变量 (X, Y) 的边缘分布。

解: 已知例 3-1 中 (X, Y) 的联合分布见表 3-4。

表 3-4 X 和 Y 的联合分布

X 和 Y 的联合分布		Y		
		0	1	2
X	0	1/4	1/3	1/9
	1	1/6	1/9	0
	2	1/36	0	0

由此可得边缘分布

$$p_{0.} = P(X=0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{25}{36}, p_{1.} = P(X=1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{5}{18}, p_{2.} = P(X=2) = \frac{1}{36}$$

$$p_{.0} = P(Y=0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{36} = \frac{4}{9}, p_{.1} = P(Y=1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}, p_{.2} = P(Y=2) = \frac{1}{9}$$

代码如下:

```
# 第 3 章/3-2.py
from sympy import *
import numpy as np
arr = np.array([[Rational(1, 4), Rational(1, 3), Rational(1, 9)],
                [Rational(1, 6), Rational(1, 9), 0],
                [Rational(1, 36), 0, 0]])
# X 的边缘分布
print('X 的边缘分布为', arr.sum(axis = 1))
# Y 的边缘分布
print('Y 的边缘分布为', arr.sum(axis = 0))
```

输出如下:

```
X 的边缘分布为[25/36 5/18 1/36]
Y 的边缘分布为[4/9 4/9 1/9]
```

【例 3-4】 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 2(x+y), & 0 < y < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求边缘密度 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$ 。

解: 由边缘分布的定义可得

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} \int_0^x 2(x+y)dy = 3x^2, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \begin{cases} \int_y^1 2(x+y)dx = 1 + 2y - 3y^2, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

代码如下：

```
# 第 3 章/3-3.py
from sympy import *
x, y = symbols('x, y')
fxy = 2 * (x + y)
fxx = integrate(2 * (x + y), (y, 0, x))
print('x 的边缘密度为 ', fxx)
fyy = integrate(2 * (x + y), (x, y, 1))
print('y 的边缘密度为 ', fyy)
```

输出如下：

```
x 的边缘密度为 3 * x ** 2
y 的边缘密度为 -3 * y ** 2 + 2 * y + 1
```

3.3 条件分布

由条件概率容易引出条件概率分布的概念。
如果二维随机变量(X,Y)是离散型随机变量,对于固定的 j ,如果 $P(Y=y_j)>0$,则称

$$P(X=x_i | Y=y_j) = \frac{P(X=x_i, Y=y_j)}{P(Y=y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{.j}}$$

(3-12)

为 $Y=y_j$ 条件下随机变量 X 的条件分布律。同理,当 $P(X=x_i)>0$ 时,称

$$P(Y=y_j | X=x_i) = \frac{P(X=x_i, Y=y_j)}{P(X=x_i)} = \frac{p_{ij}}{p_{i.}}$$

(3-13)

为条件 $X=x_i$ 之下随机变量 Y 的条件分布律。

【例 3-5】 在例 3-1 中,求 $X=1$ 条件下 Y 的条件分布律。

解：已知例 3-1 中(X,Y)的联合分布见表 3-5。

表 3-5 X 和 Y 的联合分布

X 和 Y 的联合分布		Y		
		0	1	2
X	0	1/4	1/3	1/9
	1	1/6	1/9	0
	2	1/36	0	0

因此 $X=1$ 条件下 Y 的条件分布律为

$$P(Y=0 | X=1) = \frac{P(X=1, Y=0)}{P(X=1)} = \frac{1/6}{1/6 + 1/9} = \frac{3}{5}$$

$$P(Y=1 | X=1) = \frac{P(X=1, Y=1)}{P(X=1)} = \frac{1/9}{1/6 + 1/9} = \frac{2}{5}$$

$$P(Y=2 | X=1) = \frac{P(X=1, Y=2)}{P(X=1)} = \frac{0}{1/6 + 1/9} = 0$$

代码如下:

```
# 第3章/3-4.py
from sympy import *
import numpy as np
arr = np.array([[Rational(1, 4), Rational(1, 3), Rational(1, 9)],
                [Rational(1, 6), Rational(1, 9), 0],
                [Rational(1, 36), 0, 0]])

# X 的边缘分布
print('X 的边缘分布为', arr.sum(axis = 1))
# Y 的边缘分布
print('Y 的边缘分布为', arr.sum(axis = 0))
# X 的条件分布
print('X 的条件分布为\n', arr / arr.sum(axis = 1).reshape(3, 1))
# Y 的条件分布
print('Y 的条件分布为\n', arr / arr.sum(axis = 0).reshape(1, 3))
```

输出如下:

```
X 的边缘分布为[25/36 5/18 1/36]
Y 的边缘分布为[4/9 4/9 1/9]
X 的条件分布为
[[9/25 12/25 4/25]
 [3/5 2/5 0]
 [1 0 0]]
Y 的条件分布为
[[9/16 3/4 1]
 [3/8 1/4 0]
 [1/16 0 0]]
```

容易证明离散型随机变量的条件分布具有下面的性质:

(1) $P(X=x_i | Y=y_j) \geq 0$ 。

(2) $\sum_{i=1}^{\infty} P(X=x_i | Y=y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} / p_{.j} = 1$ 。

这个性质类似于分布律的性质,据此可定义离散型随机变量的条件分布律。设 (X, Y) 是二维离散型随机变量,对于固定的 j ,如果 $P(Y=y_j) > 0$,则称

$$P(X=x_i | Y=y_j) = \frac{P(X=x_i, Y=y_j)}{P(Y=y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{.j}} \quad (3-14)$$

为在 $P(Y=y_j)$ 条件下随机变量 X 的条件分布律。同理,对于固定的 i ,如果 $P(X=x_i)>0$,则称

$$P(Y=y_j | X=x_i) = \frac{P(Y=y_j, X=x_i)}{P(X=x_i)} = \frac{p_{ij}}{p_{i.}} \quad (3-15)$$

为在 $P(X=x_i)$ 条件下随机变量 Y 的条件分布律。

如果二维随机变量 (X, Y) 是连续型随机变量,则概率密度为 $f(x, y)$ 。对于固定的 y ,如果 $f_Y(y)>0$,则称

$$f_{X|Y}(x | y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} \quad (3-16)$$

为 $Y=y$ 条件下随机变量 X 的条件概率密度。称

$$F_{X|Y}(x | y) = P(X \leq x | Y=y) = \int_{-\infty}^x f_{X|Y}(x | y) dx = \int_{-\infty}^x \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} dx \quad (3-17)$$

为 $Y=y$ 条件下随机变量 X 的条件分布函数。同理,对于固定的 x ,如果 $f_X(x)>0$,则称

$$f_{Y|X}(y | x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} \quad (3-18)$$

为 $X=x$ 条件下随机变量 Y 的条件概率密度。称

$$F_{Y|X}(y | x) = P(Y \leq y | X=x) = \int_{-\infty}^y f_{Y|X}(y | x) dy = \int_{-\infty}^y \frac{f(x, y)}{f_X(x)} dy \quad (3-19)$$

为 $X=x$ 条件下随机变量 Y 的条件分布函数。

【例 3-6】 设二维连续型随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 2(x+y), & 0 < y < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求条件概率密度 $f_{X|Y}(x | y)$ 和 $f_{Y|X}(y | x)$ 。

解: 容易求得边缘密度

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_0^x 2(x+y) dy = 3x^2, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_y^1 2(x+y) dx = 1+2y-3y^2, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

故当 $0 < y < 1$ 时,

$$f_{X|Y}(x | y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{2(x+y)}{1+2y-3y^2}, & 0 < y < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

当 $0 < x < 1$ 时

$$f_{Y|X}(y | x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{2(x+y)}{3x^2}, & 0 < y < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

代码如下:

```
# 第3章/3-5.py
from sympy import *
x, y = symbols('x, y')
fxy = 2 * (x + y)
# x 的边缘密度
fxx = integrate(fxy, (y, 0, x))
# y 的边缘密度
fyy = integrate(fxy, (x, y, 1))
# x 的条件概率密度
fxyxy = fxy/fyy
print('x 的条件概率密度为', fxyxy)
# y 的条件概率密度
fyxyx = fxy/fxx
print('y 的条件概率密度为', fyxyx)
```

输出如下:

```
x 的条件概率密度为 (2 * x + 2 * y) / (-3 * y ** 2 + 2 * y + 1)
y 的条件概率密度为 (2 * x + 2 * y) / (3 * x ** 2)
```

【例 3-7】 设 (X, Y) 是二维随机变量, X 的边缘密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

在给定 $X=x$ ($0 < x < 1$) 的条件下, Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} 3y^2/x^3, & 0 < y < x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(1) 求 (X, Y) 的概率密度 $f(x, y)$ 。

(2) 求 Y 的边缘密度 $f_Y(y)$ 。

(3) 求概率 $P(X > 2Y)$ 。

解: (1) 由于 $f(x, y) = f_{Y|X}(y|x)f_X(x)$, 所以

$$f(x, y) = \begin{cases} 3x^2 \times 3y^2/x^3 = 9y^2/x, & 0 < y < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(2) Y 的边缘密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \int_y^1 f(x, y) dx = \int_y^1 \frac{9y^2}{x} dx = -9y^2 \ln(y), & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(3) 概率 $P(X > 2Y)$ 为

$$P(X > 2Y) = \int_0^1 dx \int_0^{x/2} \frac{9y^2}{x} dy = \int_0^1 \frac{3x^2}{8} dx = \frac{1}{8}$$

代码如下：

```
# 第3章/3-6.py
from sympy import *
x, y = symbols('x, y')
fxy = 3 * x ** 2 * 3 * y ** 2 / x ** 3
# 联合概率密度
print('联合密度 f(x,y)为 ', fxy)
# y 的边缘密度
fyy = integrate(9 * y ** 2 / x, (x, y, 1))
print('y 的边缘密度为 ', fyy)
# 所求概率
p = integrate(9 * y ** 2 / x, (y, 0, x / 2), (x, 0, 1))
print('所求概率为 ', p)
```

输出如下：

```
联合密度 f(x,y)为 9 * y ** 2/x
y 的边缘密度为 -9 * y ** 2 * log(y)
所求概率为 1/8
```

3.4 相互独立的随机变量

随机变量的独立性与事件的独立性有相似的形式。设二维连续型随机变量 (X, Y) 的分布函数是 $F(x, y)$, 边缘分布函数分别是 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$ 。称随机变量 X 和 Y 是相互独立的, 如果对于任意的 x 和 y 有

$$P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y) \quad (3-20)$$

也就是

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y) \quad (3-21)$$

特别地, 如果 (X, Y) 是连续型随机变量, 具有联合密度函数 $f(x, y)$ 和边缘概率密度 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$, 并且

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y) \quad (3-22)$$

则称随机变量 X 和 Y 是相互独立的。

同理, 如果 (X, Y) 是离散型随机变量, 具有联合分布律 $P(X=x_i, Y=y_j)$ 及边缘分布律 $P(X=x_i)$ 和 $P(Y=y_j)$, 并且

$$P(X=x_i, Y=y_j) = P(X=x_i)P(Y=y_j) \quad (3-23)$$

则称随机变量 X 和 Y 是相互独立的。

【例 3-8】 已知 (X, Y) 的分布律见表 3-6, 判断随机变量 X 与 Y 是否相互独立。

表 3-6 X 和 Y 的联合分布

X 和 Y 的联合分布		Y		
		0	1	2
X	0	1/4	1/3	1/9
	1	1/6	1/9	0
	2	1/36	0	0

解：由 X 和 Y 的联合概率分布可得边缘概率分布

$$P(X=0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{25}{36}, \quad P(X=1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{5}{18}, \quad P(X=2) = \frac{1}{36}$$

$$P(Y=0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{36} = \frac{4}{9}, \quad P(Y=1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}, \quad P(Y=2) = \frac{1}{9}$$

如果 X 与 Y 互相独立, 则

$$P(X=x_i, Y=y_j) = P(X=x_i)P(Y=y_j)$$

但经过计算发现

$$P(X=0, Y=0) = \frac{1}{4} \neq P(X=0)P(Y=0) = \frac{25}{36} \times \frac{4}{9}$$

因此 X 与 Y 不是互相独立的随机变量。

【例 3-9】 设二维随机变量 (X, Y) 具有概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} 2\exp(-2x - y), & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

判断 X 与 Y 是否相互独立。

解：求边缘分布 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_0^{\infty} 2\exp(-2x - y) dy = 2\exp(-2x), & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_0^{\infty} 2\exp(-2x - y) dx = \exp(-y), & y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

因为 $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$, 所以 X 与 Y 相互独立, 代码如下:

```
# 第3章/3-7.py
from sympy import *
x, y = symbols('x, y')
fxy = 2 * exp(-2 * x - y)
# x 边缘密度
fxx = integrate(fxy, (x, 0, oo))
print('x 的边缘密度为', fxx)
# y 边缘密度
fyy = integrate(fxy, (y, 0, oo))
print('y 的边缘密度为', fyy)
tmp = (fxy - fxx * fyy).simplify()
print('联合密度减去边缘密度的乘积为', tmp)
```

输出如下:

```
x 的边缘密度为 exp(-y)
y 的边缘密度为 2 * exp(-2 * x)
联合密度减去边缘密度的乘积为 0
```

3.5 二维正态分布随机变量

正态分布是十分重要的概率分布,它有高维的形式,本节以二维为例阐述高维正态分布。如果二维连续随机变量 (X,Y) 的概率密度具有以下形式

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right) \quad (3-24)$$

其中, $-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty, \sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, -1 < \rho < 1$, 则称 (X,Y) 服从二维正态分布, 记作 $(X,Y) \sim N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$ 。

二维正态分布有重要的性质。设 $(X,Y) \sim N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$, 则

- (1) $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 。
- (2) X 与 Y 相互独立的充分必要条件是 $\rho=0$ 。

 **注意** (X,Y) 服从二维正态分布可以保证 X 和 Y 都服从正态分布,但反之不成立,即 X 和 Y 都服从正态分布不能推出 (X,Y) 服从二维正态分布。

- (3) $aX+bY \sim N(a\mu_1+b\mu_2, a^2\sigma_1^2+2ab\sigma_1\sigma_2\rho+b^2\sigma_2^2)$ 。

生成多元正态分布随机数的代码如下:

```
# 第3章/3-8.py
from scipy.stats import multivariate_normal
a = multivariate_normal(mean = [1,2,3])
tmp = a.rvs(size = 6)
print('生成的多元正态分布随机向量为\n', tmp)
```

输出如下:

```
生成的多元正态分布随机向量为
[[ 1.73224318 -0.24252651 2.21188454]
 [ 0.61892977 1.4181899 1.60655183]
 [ 2.29399 2.96760229 3.03999999]
 [ 0.36019216 0.26900516 1.69847544]
 [ 0.80706445 1.50851257 3.53375826]
 [-0.66429832 3.12841725 3.31326497]]
```

3.6 随机变量函数的分布

本节讨论两个随机变量函数的分布,包括两个随机变量的和、商、乘积、最大值和最小值的分布。

3.6.1 随机变量和的分布

设 (X, Y) 是连续型随机变量, 它的概率密度是 $f(x, y)$, 则 $Z = X + Y$ 仍为连续型随机变量, Z 的概率密度为

$$f_Z(z) = f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y, y) dy \quad (3-25)$$

或者

$$f_Z(z) = f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-y) dx \quad (3-26)$$

当 X 与 Y 相互独立时, 如果 X 的边缘密度是 $f_X(x)$, Y 的边缘密度是 $f_Y(y)$, 则 Z 的概率密度可以写成卷积公式形式

$$f_Z(z) = f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy \quad (3-27)$$

或者

$$f_Z(z) = f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx \quad (3-28)$$

【例 3-10】 设随机变量 X 和 Y 互相独立, X 服从标准正态分布, Y 在 $[-1, 1]$ 区间上服从均匀分布, 求随机变量 $Z = X + Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$ 。

解: X 和 Y 的概率密度分别是

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \text{ 和 } f_Y(y) = \begin{cases} 1/2, & -1 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

因为 X 和 Y 互相独立, 所以

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f_X(z-y) dy = \frac{1}{2} \int_{z-1}^{z+1} f_X(t) dt \\ &= \frac{\Phi(z+1) - \Phi(z-1)}{2} \end{aligned}$$

其中, $\Phi(z)$ 为标准正态分布的积累函数, 代码如下:

```
# 第3章/3-9.py
from sympy import *
x, y, z = symbols('x, y, z')
fx = 1 / sqrt(2 * pi) * exp(-x ** 2 / 2)
t = integrate(fx, (x, z - 1, z + 1))
# 概率密度
print('所求概率密度为', t)
```

输出如下:

```
所求概率密度为 -erf(sqrt(2)*(z-1)/2)/2 + erf(sqrt(2)*(z+1)/2)/2
```

3.6.2 随机变量商的分布

设 (X, Y) 是连续型随机变量, 它的概率密度是 $f(x, y)$, 则 $Z = Y/X$ 仍是连续型随机变

量, Z 的概率密度为

$$f_Z(z) = f_{\frac{Y}{X}}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x, xz) dx \quad (3-29)$$

当 X 与 Y 相互独立时, 如果 X 的密度是 $f_X(x)$, Y 的密度是 $f_Y(y)$, 则 $Z=Y/X$ 的概率密度可以写成如下形式

$$f_Z(z) = f_{\frac{Y}{X}}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x) f_Y(xz) dx \quad (3-30)$$

【例 3-11】 设随机变量 X 和 Y 互相独立, X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-x/5)/5, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

Y 的密度函数为

$$f(y) = \begin{cases} y \exp(-y/5)/25, & y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求 $Z=Y/X$ 的密度函数。

解: 因为 X 和 Y 互相独立, 所以 Z 的概率密度为

$$f_Z(z) = f_{Y/X}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x) f_Y(xz) dx = \int_0^{\infty} \frac{x}{5} \exp\left(\frac{-x}{5}\right) \exp\left(\frac{-xz}{5}\right) \frac{xz}{25} dx$$

计算可得

$$f_Z(z) = \frac{z}{125} \int_0^{\infty} x^2 \exp\left(\frac{-x(1+z)}{5}\right) dx = \frac{2z}{(1+z)^3}$$

代码如下:

```
# 第 3 章/3-10.py
from sympy import *
x, y, z = symbols('x, y, z')
fx = exp(-x/5)/5
fy = y * exp(-y/5)/25
# z = Y/X 的概率密度
t = integrate(fy.subs({y: x * z}) * x * fx, (x, 0, oo))
print('z = Y/X 的概率密度为', t)
```

输出如下:

```
z = Y/X 的概率密度为 Piecewise((2 * z/(z + 1)**3, Abs(arg(z)) <= pi/2), (Integral(x**2 * z * exp(-x/5) * exp(-x * z/5)/125, (x, 0, oo)), True))
```

3.6.3 随机变量积的分布

设 (X, Y) 是连续型随机变量, 它的概率密度是 $f(x, y)$, 则 $Z=XY$ 仍是连续型随机变量, Z 的概率密度为

$$f_Z(z) = f_{XY}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f\left(x, \frac{z}{x}\right) dx \quad (3-31)$$

当 X 与 Y 相互独立时, 如果 X 的密度是 $f_X(x)$, Y 的密度是 $f_Y(y)$, 则 $Z=XY$ 的概

率密度可以写成如下形式

$$f_Z(z) = f_{XY}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) dx \quad (3-32)$$

【例 3-12】 设随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y, & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求 $Z = XY$ 的概率密度。

解：两个随机变量乘积 $Z = XY$ 的概率密度为

$$f_Z(z) = f_{XY}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f\left(x, \frac{z}{x}\right) dx = \int_z^1 \frac{1}{x} \left(x + \frac{z}{x}\right) dx$$

计算可得

$$f_Z(z) = \begin{cases} 2(1-z), & 0 < z < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

代码如下：

```
# 第 3 章/3-11.py
from sympy import *
x, y, z = symbols('x, y, z')
# Z = XY 的概率密度
t = integrate(1/x * (x + z/x), (x, z, 1))
print('Z = XY 的概率密度为', t)
```

输出如下：

```
Z = XY 的概率密度为 2 - 2 * z
```

3.6.4 两个随机变量最大值与最小值的分布

设随机变量 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量, 它们的分布函数分别是 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$, 则 X 和 Y 的最大值 $M = \max\{X, Y\}$ 具有以下分布

$$\begin{aligned} F_M(z) &= P(M \leq z) = P(X \leq z, Y \leq z) \\ &= P(X \leq z)P(Y \leq z) = F_X(z)F_Y(z) \end{aligned} \quad (3-33)$$

X 和 Y 的最小值 $N = \min\{X, Y\}$ 具有以下分布

$$F_N(z) = 1 - P(N > z) = 1 - P(X > z)P(Y > z) = 1 - (1 - F_X(z))(1 - F_Y(z)) \quad (3-34)$$

【例 3-13】 设随机变量 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量, X 与 Y 的概率密度分别是

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \begin{cases} a \exp(-ax), & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \\ f_Y(y) &= \begin{cases} b \exp(-by), & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

求 $\max\{X, Y\}$ 和 $\min\{X, Y\}$ 的概率密度。

解：先求分布函数。设 $M = \max\{X, Y\}$, $N = \min\{X, Y\}$ 则

$$\begin{aligned} F_M(z) &= F_X(z)F_Y(z) = \int_0^z f_X(x)dx \int_0^z f_Y(y)dy \\ &= \begin{cases} (1 - \exp(-az))(1 - \exp(-bz)), & z > 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases} \\ F_N(z) &= 1 - (1 - F_X(z))(1 - F_Y(z)) = 1 - \int_z^\infty f_X(x)dx \int_z^\infty f_Y(y)dy \end{aligned}$$

计算可得

$$F_N(z) = \begin{cases} 1 - \exp(-(a+b)z), & z > 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases}$$

再通过求导可得密度函数

$$\begin{aligned} f_M(z) &= F'_M(z) = \begin{cases} a \exp(-az) + b \exp(-bz) - (a+b) \exp(-az-bz), & z > 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases} \\ f_N(z) &= F'_N(z) = \begin{cases} (a+b) \exp(-az-bz), & z > 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

代码如下：

```
# 第3章/3-12.py
from sympy import *
x, y, z, a, b = symbols('x, y, z, a, b')
fx = a * exp(-a * x)
fy = b * exp(-b * y)
# max 分布函数
M = integrate(fx, (x, 0, z)) * integrate(fy, (y, 0, z))
# max 密度函数
t = M.diff(z)
print('最大值密度为', t)
# min 分布函数
N = 1 - (1 - integrate(fx, (x, 0, z))) * (1 - integrate(fy, (y, 0, z)))
# min 密度函数
t = N.diff(z)
print('最小值密度为', t)
```

输出如下：

```
最大值密度为 a * (1 - exp(-b * z)) * exp(-a * z) + b * (1 - exp(-a * z)) * exp(-b * z)
最小值密度为 a * exp(-a * z) * exp(-b * z) + b * exp(-a * z) * exp(-b * z)
```

3.7 本章练习

1. 设随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} k(6 - x - y), & 0 < x < 2, 2 < y < 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

- (1) 求常数 k 的值。
- (2) 求概率 $P(X < 1, Y < 3)$ 。
- (3) 求概率 $P(X < 1.6)$ 。
- (4) 求概率 $P(X + Y \leq 5)$ 。

2. 某盒子里有 3 个黑球, 2 个红球, 2 个白球, 在其中任取 4 个球。用随机变量 X 表示取到黑球的个数, 用随机变量 Y 表示取到红球的个数。求 X 和 Y 的联合分布律。

3. 一枚硬币抛 3 次, 用 X 表示前两次出现正面的次数, 用 Y 表示 3 次中出现正面的次数。求 X 和 Y 的联合分布律和 (X, Y) 的边缘分布律。

4. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 4.8y(2-x), & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求边缘分布律。

5. 设随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & |y| < x, 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$ 和 $f_{X|Y}(x|y)$ 。

6. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 X 与 Y 都服从指数分布, 即 $X \sim E(\lambda_1), Y \sim E(\lambda_2)$, 其中 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ 。令 $Z = \min\{X, Y\}$, 求 Z 的概率密度函数 $f_Z(z)$ 。

7. 设随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

分别求 $Z = X + Y$ 和 $Z = XY$ 的概率密度。

8. 设 X 与 Y 是两个相互独立的随机变量, 其概率密度分别是

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \text{ 和 } f_Y(y) = \begin{cases} \exp(-y), & y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求随机变量 $Z = X + Y$ 的概率密度。

9. 某种零件的寿命服从正态分布 $N(160, 20^2)$, 随机地选取 4 个该种零件, 求其中没有一只寿命小于 190 的概率。

10. 设二维随机变量 (X, Y) 服从正态分布 $N(1, 0; 1, 1, 0)$, 求概率 $P(XY - Y < 0)$ 。

3.8 常见考题解析: 多维随机变量及其分布

本章是概率论考试的重点和难点, 其中二维随机变量及其分布函数、边缘分布、条件分布和随机变量的独立性都是重要的考点, 有很大的出题发挥空间。在学习这一章时要特别注意概念的理解和计算的准确。

【考题 3-1】 设 X 和 Y 为两个随机变量, 并且

$$P(X \geq 0, Y \geq 0) = \frac{3}{7}, \quad P(X \geq 0) = P(Y \geq 0) = \frac{4}{7}$$

则 $P(\max(X, Y) \geq 0)$ 是多少?

解：根据题意易知

$$\begin{aligned} P(\max(X, Y) \geq 0) &= P(X \geq 0 \cup Y \geq 0) \\ &= P(X \geq 0) + P(Y \geq 0) - P(X \geq 0, Y \geq 0) = \frac{5}{7} \end{aligned}$$

【考题 3-2】 设平面区域 D 由曲线 $y=1/x$ 及直线 $y=0, x=1, x=e^2$ 所围成, 二维随机变量 (X, Y) 在区域 D 服从均匀分布, 则 (X, Y) 关于 X 的边缘概率密度在 $x=2$ 处的值为多少?

解：根据题意, D 由 $y=1/x, y=0, x=1, x=e^2$ 所围成, 并且是均匀分布, 则其概率密度是常数, 设为 a , 那么有

$$1 = \int_1^{e^2} dx \int_0^{1/x} a dy = a (\ln(e^2) - 0) = 2a$$

解得 $a=1/2$ 。边缘概率密度为

$$f_X(2) = \int_0^{1/2} f(2, y) dy = \int_0^{1/2} a dy = \frac{1}{4}$$

代码如下：

```
# 第 3 章/3-13.py
from sympy import *
x, y, density = symbols('x, y, density')
# 求密度, 得密度为 1/2
s = integrate(density, (y, 0, 1/x), (x, 1, exp(1)**2))
# 求函数值
print('函数值为', integrate(1/2, (y, 0, Rational(1, 2))))
```

输出如下：

函数值为 0.2500000000000000

【考题 3-3】 设两个独立随机变量 X 和 Y 分别服从正态分布 $N(0, 1)$ 和 $N(1, 1)$, 则有()。

- A. $P(X+Y \leq 0) = 1/2$ B. $P(X+Y \leq 1) = 1/2$
C. $P(X-Y \leq 0) = 1/2$ D. $P(X-Y \leq 1) = 1/2$

解：由 X 和 Y 分别服从正态分布 $N(0, 1)$ 和 $N(1, 1)$ 可知 $X+Y \sim N(1, 2)$ 且 $X-Y \sim N(-1, 2)$, 故有 $P(X+Y \leq 1) = 1/2$, 选 B。

【考题 3-4】 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 下表列出了二维随机变量 (X, Y) 的联合分布律及关于 X 和关于 Y 的边缘分布律中的部分数值, 试将其余数值填入表 3-7 中的空白处。

表 3-7 考题 3-4 的表格

X 与 Y 分布律	y_1	y_2	y_3	$P(X=x_i)=p_{i.}$
x_1		1/8		
x_2	1/8			
$P(Y=y_j)=p_{.j}$	1/6			1

解: 提示, 利用 X 与 Y 的独立性。由于 $P(Y=y_1)=1/6$, 故 $P(X=x_1, Y=y_1)=1/6-1/8=1/24$, 从而 $P(X=x_1)=1/4, P(X=x_1, Y=y_3)=1/4-1/24-1/8=1/12$ 。由独立性可知 $P(Y=y_j)=1/2, P(X=x_2, Y=y_2)=3/8, P(X=x_2)=3/4, P(X=x_2, Y=y_3)=1/4, P(Y=y_3)=1/3$ 。

【考题 3-5】 设某班车起点站上客人数 X 服从参数为 λ 的泊松分布, 每位乘客在途中下车的概率为 p , 并且中途下车与否互相独立, 以 Y 表示在中途下车的人数, 求

(1) 在发车时有 n 个乘客的条件下, 中途有 m 人下车的概率。

(2) 二维随机变量 (X, Y) 的概率分布。

解: (1) 这是一个二项分布问题, n 个乘客下车 m 个, 故概率为 $C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$ 。

(2) 由条件概率公式可得

$$P(X=n, Y=m) = P(Y=m | X=n)P(X=n) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

其中 $0 \leq m \leq n, n=0, 1, 2, \dots$ 。

【考题 3-6】 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 6x, & 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

则 $P(X+Y \leq 1)$ 是多少?

解: 根据题意, 如图 3-3 所示的阴影区域为所求的概率。

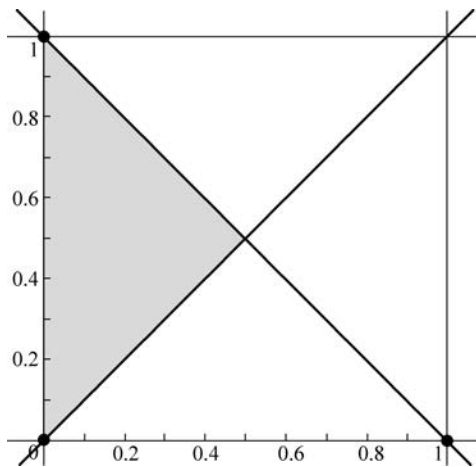


图 3-3 考题 3-6 示意图

$$P(X+Y \leq 1) = \iint_{x+y \leq 1} f(x, y) dx dy = \int_0^{1/2} dx \int_x^{1-x} 6x dy = \int_0^{1/2} 6x(1-2x) dx = \frac{1}{4}$$

代码如下:

```
# 第3章/3-14.py
from sympy import *
x = symbols('x')
# 概率
t = integrate(6 * x, (y, x, 1 - x), (x, 0, Rational(1, 2)))
print('所求概率为', t)
```

输出如下：

所求概率为 $1/4$

【考题 3-7】 从数 1、2、3、4 中任取一个数，记为 X ，在从 $1, 2, \dots, X$ 中任取一个数，记为 Y ，则 $P(Y=2)$ 是多少？

解：由全概率公式可得

$$P(Y=2) = \sum_{i=1}^4 P(Y=2 | X=i)P(X=i) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \times \frac{1}{4} = \frac{13}{48}$$

【考题 3-8】 设二维随机变量 (X, Y) 的概率分布如表 3-8 所示。

表 3-8 X 和 Y 的概率分布

X 与 Y 概率分布	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

已知随机事件 $\{X=0\}$ 与 $\{X+Y=1\}$ 互相独立，则()。

A. $a=0.2, b=0.3$

B. $a=0.4, b=0.1$

C. $a=0.3, b=0.2$

D. $a=0.1, b=0.4$

解：由 $\{X=0\}$ 与 $\{X+Y=1\}$ 互相独立可知

$$P(\{X=0\} \cap \{X+Y=1\}) = P(\{X=0\} \cap \{Y=1\}) = P\{X=0\}P\{X+Y=1\}$$

即 $P(\{X=0\} \cap \{Y=1\}) = a = P\{X=0\}P\{X+Y=1\} = (a+0.4)(a+b)$ ；而且 $\{X=0\}^c = \{X=1\}$ 与 $\{X+Y=1\}$ 也相互独立，从而

$$P(\{X=1\} \cap \{X+Y=1\}) = P(\{X=1\} \cap \{Y=0\}) = P\{X=1\}P\{X+Y=1\}$$

$$\text{即 } P(\{X=1\} \cap \{Y=0\}) = b = P\{X=1\}P\{X+Y=1\} = (b+0.1)(a+b)。$$

整理可得

$$\frac{a}{b} = \frac{a+0.4}{b+0.1}$$

化简后可得 $a=4b$ 。又显然有 $a+b=0.5$ ，因此 $a=0.4, b=0.1$ 。

【考题 3-9】 设随机变量 X 与 Y 相互独立，并且均服从区间 $[0, 3]$ 上均匀分布，则概率值 $P(\max\{X, Y\} \leq 1)$ 是多少？

解：事件 $(\max\{X, Y\} \leq 1) = (X \leq 1, Y \leq 1) = (X \leq 1) \cap (Y \leq 1)$ ，由 X 与 Y 相互独立可知 $P(\max\{X, Y\} \leq 1) = P((X \leq 1) \cap (Y \leq 1)) = P(X \leq 1)P(Y \leq 1) = (1/3)(1/3) = 1/9$ 。

【考题 3-10】 设随机变量 (X, Y) 服从二维正态分布，并且 X 与 Y 不相关。 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$ 分别表示 X 与 Y 的概率密度，则在 $Y=y$ 的条件下， X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$ 为()。

A. $f_X(x)$

B. $f_Y(y)$

C. $f_X(x)f_Y(y)$

D. $f_X(x)/f_Y(y)$

解：在二维正态分布随机变量 (X, Y) 中， X 与 Y 独立等价于 X 与 Y 不相关，而对任意两个随机变量 X 与 Y ，如果它们互相独立，则有 $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ 。根据条件密度的定义，当在 $Y=y$ 的条件下，如果 $f_Y(y) \neq 0$ ，则

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{f_X(x)f_Y(y)}{f_Y(y)} = f_X(x)$$

现有 $f_Y(y)$ 显然不为 0, 故 $f_{X|Y}(x|y) = f_X(x)$ 。

【考题 3-11】 设随机变量 X 与 Y 独立同分布, 并且 X 的分布函数为 $F(x)$, 则 $Z = \max(X, Y)$ 的分布函数是()。

A. $F^2(x)$

B. $F(x)F(y)$

C. $1 - [1 - F(x)]^2$

D. $[1 - F(x)][1 - F(y)]$

解: 随机变量 $Z = \max(X, Y)$ 的分布函数 $F_Z(x)$ 应为 $F_Z(x) = P(Z \leq x)$, 由此定义推出

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= P(\max(X, Y) \leq x) = P(X \leq x, Y \leq x) \\ &= P(X \leq x)P(Y \leq x) = F(x)F(x) = F^2(x) \end{aligned}$$

【考题 3-12】 设随机变量 X 与 Y 互相独立, 其概率密度函数分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \quad f_Y(y) = \begin{cases} \exp(-y), & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

求随机变量 $Z = 2X + Y$ 的概率密度函数。

解: 根据题意

$$P(Z \leq z) = P(2X + Y \leq z) = \iint_{2x+y \leq z} f(x, y) dx dy$$

积分区域为 $0 \leq x \leq 1$ 且 $y > 0$, 还需满足 $2x + y \leq z$ 。故当 $z \leq 0$ 时, $F_Z(z) = 0$ 。当 $0 < z \leq 2$ 时, 有积分

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) = \iint_{2x+y \leq z} f(x, y) dx dy = \int_0^{\frac{z}{2}} dx \int_0^{z-2x} \exp(-y) dy \\ &= \int_0^{z/2} (1 - \exp(2x - z)) dx = \frac{z}{2} + \frac{1}{2} (\exp(-z) - 1) \end{aligned}$$

当 $2 < z$ 时, 有

$$F_Z(z) = \int_0^1 dx \int_0^{z-2x} \exp(-y) dy = \int_0^1 (1 - \exp(2x - z)) dx = 1 - \frac{\exp(-z)}{2} (e^2 - 2)$$

综上可得分布函数为

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0 \\ \frac{z}{2} + \frac{1}{2} (\exp(-z) - 1), & 0 < z \leq 2 \\ 1 - \frac{\exp(-z)}{2} (e^2 - 2), & 2 < z \end{cases}$$

求导即可得概率密度函数为

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{\exp(-z)}{2}, & 0 < z \leq 2 \\ \frac{\exp(2-z)}{2} - \frac{\exp(-z)}{2}, & 2 < z \end{cases}$$

代码如下:

```
# 第3章/3-15.py
from sympy import *
x, y, z = symbols('x, y, z')
fx = 1
fy = exp(-y)
fxy = fx * fy
# 0 < z <= 2
t1 = integrate(fxy, (y, 0, z - 2 * x), (x, 0, z / 2))
print('当 0 < z <= 2 时分布函数为', t1)
print('当 0 < z <= 2 时密度函数为', t1.diff(z))
# z > 2
t2 = integrate(fxy, (y, 0, z - 2 * x), (x, 0, 1))
print('当 z > 2 时分布函数为', t2)
print('当 z > 2 时密度函数为', t2.diff(z))
```

输出如下：

```
当 0 < z <= 2 时分布函数为 z/2 - 1/2 + exp(-z)/2
当 0 < z <= 2 时密度函数为 1/2 - exp(-z)/2
当 z > 2 时分布函数为 -exp(2 - z)/2 + 1 + exp(-z)/2
当 z > 2 时密度函数为 exp(2 - z)/2 - exp(-z)/2
```

【考题 3-13】 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 2\exp(-x - 2y), & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求随机变量 $Z = X + 2Y$ 的分布函数。

解：根据题意

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(X + 2Y \leq z) = \iint_{x+2y \leq z} f(x, y) dx dy$$

积分区域为 $x > 0, y > 0, x + 2y \leq z$, 故当 $z \leq 0$ 时, $F_Z(z) = 0$ 。当 $z > 0$ 时,

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \iint_{x+2y \leq z} f(x, y) dx dy = 2 \int_0^z dx \int_0^{(z-x)/2} \exp(-x - 2y) dy \\ &= 2 \int_0^z \exp(-x) dx \int_0^{(z-x)/2} \exp(-2y) dy = 1 - \exp(-z) - z \exp(-z) \end{aligned}$$

综上所述可得

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0 \\ 1 - \exp(-z) - z \exp(-z), & z > 0 \end{cases}$$

代码如下：

```
# 第3章/3-16.py
from sympy import *
x, y, z = symbols('x, y, z')
fxy = 2 * exp(-x - 2 * y)
# z > 0
t = integrate(fxy, (y, 0, (z - x) / 2), (x, 0, z))
print('分布函数为', t)
```

输出如下:

分布函数为 $-z * \exp(-z) + 1 - \exp(-z)$

【考题 3-14】 设随机变量 X 与 Y 互相独立, X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, Y 服从 $[-\pi, \pi]$ 上均匀分布, 试求 $Z = X + Y$ 的概率分布密度函数(本题计算结果可以用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示), 其中

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

解: 设 X 的密度函数为 $f(x)$, Y 的密度函数为 $g(y)$, 显然

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & -\pi < y < \pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

先求分布函数

$$F(z) = P(Z \leq z) = P(X + Y \leq z) = P(X \leq z - y) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} dy \int_{-\infty}^{z-y} f(x) dx$$

所求的密度函数为分布函数的导数, 对 z 求导数, 即

$$f(z) = F'(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} dy \left(\int_{-\infty}^{z-y} f(x) dx \right)' = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} f(z-y) dy$$

令 $z-y=s$, 则

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} f(z-y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z-y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_{z+\pi}^{z-\pi} -f(s) ds = \frac{1}{2\pi} \int_{z-\pi}^{z+\pi} f(s) ds$$

再令 $(s-\mu)/\sigma = t$, 可得

$$\frac{1}{2\pi} \int_{z-\pi}^{z+\pi} f(s) ds = \frac{1}{2\pi} \int_{z-\pi}^{z+\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(s-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) ds = \frac{1}{2\pi} \int_{(z-\pi-\mu)/\sigma}^{(z+\pi-\mu)/\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

故有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \left[\Phi\left(\frac{z+\pi-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{z-\pi-\mu}{\sigma}\right) \right]$$

代码如下:

```
# 第3章/3-17.py
from sympy import *
x, y, z = symbols('x, y, z')
sigma, mu = symbols('sigma, mu')
fx = 1 / (sqrt(2 * pi) * sigma) * exp(-(x - mu) ** 2 / (2 * sigma ** 2))
gy = 1 / (2 * pi)
# 分布函数
t = integrate(gy * fx, (x, -oo, z - y), (y, -pi, pi))
print('分布函数为', t)
# 密度函数
print('密度函数为', t.diff(z))
```

输出如下：

```
分布函数为 sqrt(2) * exp(-mu ** 2 / (2 * sigma ** 2)) * Integral(exp(-x ** 2 / (2 * sigma ** 2))
* exp(mu * x / sigma ** 2), (x, -oo, -y + z), (y, -pi, pi)) / (4 * pi ** (3/2) * sigma)
密度函数为 sqrt(2) * exp(-mu ** 2 / (2 * sigma ** 2)) * Integral(exp(-(y + z) ** 2 / (2 *
sigma ** 2)) * exp(mu * (y + z) / sigma ** 2), (y, -pi, pi)) / (4 * pi ** (3/2) * sigma)
```

【考题 3-15】 设两个互相独立的随机变量 X 与 Y 具有同一分布, 并且 X 的分布律为 $P(X=0)=0.5, P(X=1)=0.5$, 则随机变量 $Z=\max\{X, Y\}$ 的分布律是什么。

解: Z 可以取值 0 和 1,

$$P(Z=0)=P(\max\{X, Y\}=0)=P(X=0, Y=0)=P(X=0)P(Y=0)=0.5^2=0.25$$

$$P(Z=1)=P(\max\{X, Y\}=1)=P(X=1, Y=0)+P(X=0, Y=1)+P(X=1, Y=1) \\ =3 \times 0.5^2=0.75$$

【考题 3-16】 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, 0 < y < 2x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(1) 求 (X, Y) 的边缘概率密度 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$ 。

(2) $Z=2X-Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$ 。

解: (1) 边缘密度是联合密度关于各自变量的积分, 可得

$$f_X(x) = \begin{cases} \int_0^{2x} dy = 2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \text{ 和 } f_Y(y) = \begin{cases} \int_{y/2}^1 dx = 1 - \frac{y}{2}, & 0 < y < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(2) 先求分布函数

$$F(z) = P(Z \leq z) = P(2X - Y \leq z) = P(Y \geq 2X - z)$$

由于二维随机变量 (X, Y) 分布在区域 $0 < x < 1, 0 < y < 2x$ 中, 因此只有当 $0 < z < 2$ 时, $F(z)$ 才有可能不为 0, 故而当 $0 < z < 2$ 时,

$$F(z) = P(Y \geq 2X - z) = 1 - \left(1 - \frac{z}{2}\right) \frac{2-z}{2} = z - \frac{z^2}{4}$$

因此

$$f_Z(z) = \begin{cases} 1 - \frac{z}{2}, & 0 < z < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

代码如下:

```
# 第 3 章/3-18.py
from sympy import *
x, y, z = symbols('x, y, z')
fxy = 1
# x 的边缘密度
fx = integrate(fxy, (y, 0, 2 * x))
print('x 的边缘密度为', fx)
# y 的边缘密度
fy = integrate(fxy, (x, y / 2, 1))
```



```
print('y 的边缘密度为', fy)
# 0 < z < 2
s = 1 - integrate(fxy, (y, 0, 2 * x - z), (x, z / 2, 1))
print('分布函数为', s)
print('密度函数为', s.diff(z))
```

输出如下:

```
x 的边缘密度为 2 * x
y 的边缘密度为 1 - y/2
分布函数为 - z ** 2/4 + z
密度函数为 1 - z/2
```

【考题 3-17】 设随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1 < x < 0 \\ \frac{1}{4}, & 0 \leq x < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

令 $Y = X^2$, $F(x, y)$ 为二维随机变量 (X, Y) 的分布函数。求

(1) Y 的概率密度 $f_Y(y)$ 。

(2) $F(-1/2, 4)$ 。

解: (1) 先求 Y 的分布函数, $F_Y(y) = P(X^2 \leq y)$, 当 $y > 4$ 或 $y < 0$ 时, 显然 $F_Y(y) = 0$ 。

当 $0 \leq y \leq 1$ 时,

$$F_Y(y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = \int_{-\sqrt{y}}^0 f_X(x) dx + \int_0^{\sqrt{y}} f_X(x) dx = \frac{\sqrt{y}}{2} + \frac{\sqrt{y}}{4} = \frac{3\sqrt{y}}{4}$$

当 $1 \leq y \leq 4$ 时,

$$F_Y(y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = \int_{-1}^0 f_X(x) dx + \int_0^{\sqrt{y}} f_X(x) dx = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{y}}{4}$$

综上 Y 的概率密度 $f_Y(y)$ 为

$$f_Y(y) = (F_Y(y))' = \begin{cases} \frac{3}{8\sqrt{y}}, & 0 \leq y \leq 1 \\ \frac{1}{8\sqrt{y}}, & 1 \leq y \leq 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(2) 根据多元分布函数的定义可得

$$F(-1/2, 4) = P(X \leq -1/2, Y \leq 4) = P(-1 \leq X \leq -1/2) = 1/4$$

代码如下:

```
# 第 3 章/3-19.py
from sympy import *
x, y = symbols('x, y')
```

```
# 0 <= y <= 1
Fy1 = sqrt(y) / 2 + sqrt(y) / 4
print('当 0 <= y <= 1 时密度为', Fy1.diff(y))
# 1 <= y <= 4
Fy2 = sqrt(y) / 4 + 1
print('当 1 <= y <= 4 时密度为', Fy2.diff(y))
```

输出如下：

```
当 0 <= y <= 1 时密度为 3/(8 * sqrt(y))
当 1 <= y <= 4 时密度为 1/(8 * sqrt(y))
```

【考题 3-18】 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 - x - y, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(1) 求 $P(X > 2Y)$ 。

(2) 求 $Z = X + Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$ 。

解：(1) 根据联合概率密度可得

$$P(X > 2Y) = \int_0^1 dx \int_0^{x/2} (2 - x - y) dy = \frac{7}{24}$$

(2) 先求分布函数, $F(z) = P(X + Y \leq z)$, 显然当 $z < 0$ 时, $F(z) = 0$; 当 $z > 2$ 时, $F(z) = 1$ 。当 $0 \leq z \leq 1$ 时,

$$F(z) = P(X + Y \leq z) = \int_0^z dx \int_0^{z-x} (2 - x - y) dy = z^2 - \frac{1}{3}z^3$$

当 $1 \leq z \leq 2$ 时,

$$F(z) = P(X + Y \leq z) = 1 - \int_{z-1}^1 dx \int_{z-x}^1 (2 - x - y) dy = \frac{1}{3}z^3 - 2z^2 + 4z - \frac{5}{3}$$

综上, 可得

$$f_Z(z) = F(z)' = \begin{cases} 2z - z^2, & 0 < z < 1 \\ 4 - 4z + z^2, & 1 < z < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

代码如下：

```
# 第 3 章/3-20.py
from sympy import *
x, y, z = symbols('x, y, z')
fxy = 2 - x - y
# 求概率 P(X < Y)
p = integrate(fxy, (y, 0, x/2), (x, 0, 1))
print('所取概率为', p)
# 0 <= z <= 1
F = integrate(fxy, (y, 0, z - x), (x, 0, z)).simplify()
print('概率密度, 当 0 <= z <= 1 时:', F.diff(z).simplify())
# 1 <= z <= 2
F = 1 - integrate(fxy, (y, z - x, 1), (x, z - 1, 1)).simplify()
print('概率密度, 当 1 <= z <= 2 时:', F.diff(z).simplify())
```

输出如下:

```
所取概率为 7/24
概率密度,当 0 <= z <= 1 时: z * (2 - z)
概率密度,当 1 <= z <= 2 时: z ** 2 - 4 * z + 4
```

【考题 3-19】 设随机变量 X 与 Y 互相独立, X 的概率分布为 $P(X=i)=1/3, i=-1, 0, 1$, Y 的概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

记 $Z=X+Y$,

(1) 求 $P(Z \leq 1/2 | X=0)$ 。

(2) 求 Z 的概率密度 $f_Z(z)$ 。

解: (1) 根据独立性和条件概率的定义可知

$$P(Z \leq 1/2 | X=0) = P(Y \leq 1/2 | X=0) = P(Y \leq 1/2) = 1/2$$

(2) 分布函数为

$$\begin{aligned} F(z) &= P(X+Y \leq z) = P(Y \leq z-X) = \sum_{i=-1}^1 P(Y \leq z-X | X=i) P(X=i) \\ &= \frac{1}{3} [F_Y(z+1) + F_Y(z) + F_Y(z-1)] \end{aligned}$$

求导有

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \frac{1}{3} [F_Y(z+1) + F_Y(z) + F_Y(z-1)]' \\ &= \frac{1}{3} [f_Y(z+1) + f_Y(z) + f_Y(z-1)] \end{aligned}$$

因此可得

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & -1 < z < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

3.9 本章常用的 Python 函数总结

本章主要用 sympy 库计算函数的微分和积分, 导入 sympy 的方式为 `from sympy import *`, 本章常用的 Python 函数见表 3-9。

表 3-9 本章常用的 Python 函数

函 数	代 码
声明符号变量	<code>x,y,z = symbols('x,y,z')</code>
定义表达式(包含未知变量)	<code>expr = x ** 2 + 4 * x - 5</code>
定义函数	<code>f = lambda x: expr(x)</code> , 其中 <code>expr(x)</code> 为包含 <code>x</code> 的表达式, 例如 <code>x ** 2 + 4 * x - 5</code>
对已知函数的微分(求导数)	设 <code>expr</code> 是包含 <code>x</code> 的表达式, <code>expr.diff(x)</code>



续表

函 数	代 码
对已知函数的积分(一元函数的积分)	integrate(f(x),(x,a,b)),其中 f(x)是被积函数表达式,a 和 b 是积分上下限
重积分	integrate(f(xy),(y,c,d),(x,a,b)),其中 f(xy)是被积函数表达式,a、b、c、d 是积分上下限。累次积分的顺序是: 先对 y 积分,再对 x 积分
表达式化简	expr.simplify()

3.10 本章上机练习

实训环境

- (1) 使用 Python 3.x 版本。
- (2) 使用 IPython 或 Jupyter Notebook 交互式编辑器,推荐使用 Anaconda 发行版中自带的 IPython 或 Jupyter Notebook。

【实训 3-1】 求下列函数的导数和不定积分:

- (1) $y=f(x)=\sin(x)+3$ 。
- (2) $y=f(x)=\exp(-x+4)-x^4$ 。
- (3) $y=f(x)=\arcsin(x)$ 。
- (4) $y=f(x)=\ln(-x^2+x)-\cos(x)$ 。

代码如下:

```
# 第 3 章/3-21.py
from sympy import *
x = symbols('x')
# 第(1)题
y = sin(x) + 3
df = y.diff(x)
print('第(1)题 y 对 x 的导数为 ', df)
integ = integrate(y, (x))
print('第(1)题 y 对 x 的积分为 ', integ)
# 第(2)题
y = exp(-x + 4) - x**4
df = y.diff(x)
print('第(2)题 y 对 x 的导数为 ', df)
integ = integrate(y, (x))
print('第(2)题 y 对 x 的积分为 ', integ)
# 第(3)题
y = asin(x)
df = y.diff(x)
print('第(3)题 y 对 x 的导数为 ', df)
integ = integrate(y, (x))
print('第(3)题 y 对 x 的积分为 ', integ)
```

```
# 第(4)题
y = ln(- x ** 2 + x) - cos(x)
df = y.diff(x)
print('第(4)题 y 对 x 的导数为 ', df)
integ = integrate(y, (x))
print('第(4)题 y 对 x 的积分为 ', integ)
```

输出如下：

```
第(1)题 y 对 x 的导数为 cos(x)
第(1)题 y 对 x 的积分为 3 * x - cos(x)
第(2)题 y 对 x 的导数为 -exp(4 - x)
第(2)题 y 对 x 的积分为 3 * x - exp(4 - x)
第(3)题 y 对 x 的导数为 1/sqrt(1 - x**2)
第(3)题 y 对 x 的积分为 x * asin(x) + sqrt(1 - x**2)
第(4)题 y 对 x 的导数为 (1 - 2 * x)/(- x**2 + x) + sin(x)
第(4)题 y 对 x 的积分为 x * log(- x**2 + x) - 2 * x - log(x - 1) - sin(x)
```

【实训 3-2】 求下列函数的 4 阶导数：

- (1) $y=f(x)=\sin(x) * \cos(2x)$ 。
- (2) $y=f(x)=\exp(-x)-x^4$ 。
- (3) $y=f(x)=\arcsin(x)+\exp(-x)$ 。
- (4) $y=f(x)=\ln(-x^2) * \cos(x)$ 。

代码如下：

```
# 第 3 章/3-22.py
from sympy import *
x = symbols('x')
# 第(1)题
y = sin(x) * cos(2 * x)
df = y.diff(x,4).simplify()
print('第(1)题 y 对 x 的导数 4 阶导数为 ', df)
# 第(2)题
y = exp(-x) - x ** 4
df = y.diff(x,4).simplify()
print('第(2)题 y 对 x 的导数 4 阶导数为 ', df)
# 第(3)题
y = asin(x) + exp(-x)
df = y.diff(x,4).simplify()
print('第(3)题 y 对 x 的导数 4 阶导数为 ', df)
# 第(4)题
y = ln(- x ** 2) * cos(x)
df = y.diff(x,4).simplify()
print('第(4)题 y 对 x 的导数 4 阶导数为 ', df)
```

输出如下：

```
第(1)题 y 对 x 的导数 4 阶导数为 (121 - 162 * sin(x) ** 2) * sin(x)
第(2)题 y 对 x 的导数 4 阶导数为 -24 + exp(-x)
第(3)题 y 对 x 的导数 4 阶导数为 15 * x ** 3 / (1 - x ** 2) ** (7/2) + 9 * x / (1 - x ** 2) ** (5/2) + exp(-x)
第(4)题 y 对 x 的导数 4 阶导数为 log(-x ** 2) * cos(x) + 8 * sin(x) / x + 12 * cos(x) / x ** 2 - 16 * sin(x) / x ** 3 - 12 * cos(x) / x ** 4
```

【实训 3-3】 求下列二元函数对变量 y 不定积分：

- (1) $f(x, y) = \sin(x + y) * \cos(2y)$ 。
- (2) $f(x, y) = \exp(-x - y)$ 。
- (3) $f(x, y) = \arcsin(x - y) + \exp(-x + y)$ 。
- (4) $f(x, y) = \ln(-x^2 + y) + \cos(y)$ 。

代码如下：

```
# 第 3 章/3-23.py
from sympy import *
x, y = symbols('x, y')
# 第(1)题
fxy = sin(x + y) * cos(2 * y)
integro = integrate(fxy, (y))
print('第(1)题对 y 的不定积分为', integro)
# 第(2)题
fxy = exp(-x - y)
integro = integrate(fxy, (y))
print('第(2)题对 y 的不定积分为', integro)
# 第(3)题
fxy = asin(x - y) + exp(-x + y)
integro = integrate(fxy, (y))
print('第(3)题对 y 的不定积分为', integro)
# 第(4)题
fxy = ln(-x ** 2 + y) + cos(y)
integro = integrate(fxy, (y))
print('第(4)题对 y 的不定积分为', integro)
```

输出如下：

```
第(1)题对 y 的不定积分为 2 * sin(2 * y) * sin(x + y) / 3 + cos(2 * y) * cos(x + y) / 3
第(2)题对 y 的不定积分为 -exp(-x - y)
第(3)题对 y 的不定积分为 -x * asin(x - y) + y * asin(x - y) - sqrt(-x ** 2 + 2 * x * y - y ** 2 + 1) + exp(-x + y)
第(4)题对 y 的不定积分为 -x ** 2 * log(-x ** 2 + y) + y * log(-x ** 2 + y) - y + sin(y)
```

【实训 3-4】 求下列级数的前 n 项和：

- (1) $a_k = k^2$ 。
- (2) $a_k = k^3$ 。

(3) $a_k = 2^k k^2$ 。

代码如下：

```
# 第3章/3-24.py
from sympy import *
n, k = symbols('n, k')
# 第(1)题
s = summation(k ** 2, (k, 1, n))
print('第(1)题前 n 项和为', s)
# 第(2)题
s = summation(k ** 3, (k, 1, n))
print('第(2)题前 n 项和为', s)
# 第(3)题
s = summation(k ** 2 * 2 ** k, (k, 1, n))
print('第(3)题前 n 项和为', s)
```

输出如下：

```
第(1)题前 n 项和为 n**3/3 + n**2/2 + n/6
第(2)题前 n 项和为 n**4/4 + n**3/2 + n**2/4
第(3)题前 n 项和为 2*(2**n*n**2 - 2*2**n*n + 3*2**n - 3)
```

【实训 3-5】 计算下列二重积分：

(1) 被积函数为 $f(x, y) = xy$ ，积分区域为由直线 $y = 1, x = 2$ 和 $y = x$ 所围成的闭区域。

(2) 被积函数为 $f(x, y) = y\sqrt{1+x^2-y^2}$ ，积分区域为由直线 $y = x, x = -1$ 和 $y = 1$ 所围成的闭区域。

(3) 被积函数为 $f(x, y) = xy$ ，积分区域为抛物线 $y^2 = x$ 及直线 $y = x - 2$ 所围成的闭区域。

代码如下：

```
# 第3章/3-25.py
from sympy import *
x, y = symbols('x, y')
# 第(1)题
fxy = x * y
# 先对 x 积分, 再对 y 积分
s1 = integrate(fxy, (y, 1, x), (x, 1, 2))
print('第(1)题先对 x 积分, 再对 y 积分, 结果为', s1)
# 先对 y 积分, 再对 x 积分
s2 = integrate(fxy, (x, y, 2), (y, 1, 2))
print('第(1)题先对 y 积分, 再对 x 积分, 结果为', s2)
# 第(2)题
fxy = y * sqrt(1 + x ** 2 - y ** 2)
# 先对 x 积分, 再对 y 积分
s1 = integrate(fxy, (y, x, 1), (x, -1, 1))
print('第(2)题先对 x 积分, 再对 y 积分, 结果为', s1)
```

```
# 第(3)题
fxy = x * y
# 先对 x 积分, 再对 y 积分
s1 = integrate(fxy, (y, -sqrt(x), sqrt(x)), (x, 0, 1)) + integrate(fxy, (y, x - 2, sqrt(x)),
(x, 1, 4))
print('第(3)题先对 x 积分, 再对 y 积分, 结果为', s1)
# 先对 y 积分, 再对 x 积分
s2 = integrate(fxy, (x, y ** 2, y + 2), (y, -1, 2))
print('第(3)题先对 y 积分, 再对 x 积分, 结果为', s2)
```

输出如下：

```
第(1)题先对 x 积分, 再对 y 积分, 结果为 9/8
第(1)题先对 y 积分, 再对 x 积分, 结果为 9/8
第(2)题先对 x 积分, 再对 y 积分, 结果为 1/2
第(3)题先对 x 积分, 再对 y 积分, 结果为 45/8
第(3)题先对 y 积分, 再对 x 积分, 结果为 45/8
```