

## 第5章 多元函数微分



本章解读

### 本章题目考点解读

| 试题编号   | 亮点 1          | 亮点 2       |
|--------|---------------|------------|
| 第 1 题  | 可微的充分条件       | 偏导数连续      |
| 第 2 题  | 全微分           | 多元函数化为一元函数 |
| 第 3 题  | 定义法计算偏导数      |            |
| 第 4 题  | 闭区域上的多元函数最值   |            |
| 第 5 题  | 隐函数的存在性       |            |
| 第 6 题  | 偏导数存在与函数连续的关系 | 全微分的存在性    |
| 第 7 题  | 可微的判别         | 定义法计算偏导数   |
| 第 8 题  | 偏微分化为常微分      | 伽马函数       |
| 第 9 题  | 偏导数的性质        |            |
| 第 10 题 | 定义求二阶偏导数      |            |
| 第 11 题 | 偏导数方程变量替换     |            |
| 第 12 题 | 多元极限推导可微      | 矩阵可对角化的条件  |
| 第 13 题 | 多元极限与可微的关系    |            |
| 第 14 题 | 条件极值简便解法      |            |
| 第 15 题 | 偏导数计算         |            |
| 第 16 题 | 链式法则          |            |
| 第 17 题 | 变限函数求偏导       |            |
| 第 18 题 | 交换次序求混合偏导     | 积分极限       |
| 第 19 题 | 二阶偏导          | 全微分        |
| 第 20 题 | 链式法则求偏导       | 隐函数求导      |
| 第 21 题 | 变限函数求偏导       |            |
| 第 22 题 | 多元函数的极值       |            |
| 第 23 题 | 多元隐函数的极值      |            |
| 第 24 题 | 由距离构造条件极值     |            |
| 第 25 题 | 二阶偏导          |            |
| 第 26 题 | 闭区域上的多元函数最值   |            |
| 第 27 题 | 偏导数与全微分       | 法向量、切向量    |
| 第 28 题 | 偏导数反求原函数      | 全微分        |
| 第 29 题 | 曲线的旋转曲面       | 曲面的法向量     |
| 第 30 题 | 梯度            | 最大方向导数     |
| 第 31 题 | 全微分反求原函数      | 多元函数极值     |



| 试题编号   | 亮点 1      | 亮点 2       |
|--------|-----------|------------|
| 第 32 题 | 多元极限与极值   |            |
| 第 33 题 | 曲面的切平面    |            |
| 第 34 题 | 偏导数反求原函数  |            |
| 第 35 题 | 偏微分化为常微分  | 求解常系数常微分方程 |
| 第 36 题 | 全微分反求原函数  | 伽马函数       |
| 第 37 题 | 偏导数的含义    |            |
| 第 38 题 | 偏导数方程变量替换 | 求多元原函数     |
| 第 39 题 | 偏导数确定多元函数 |            |
| 第 40 题 | 向量的混合积    |            |
| 第 41 题 | 直线在平面的投影  | 直线的旋转曲面方程  |
| 第 42 题 | 曲面的切平面    | 直线在平面的投影   |
| 第 43 题 | 多元函数的极值   | 结合一元函数     |
| 第 44 题 | 空间曲线的切线   |            |



1. 二元函数  $f(x, y)$  在点  $(0, 0)$  处可微的一个充分条件是( )。

(A)  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} [f(x, y) - f(0, 0)] = 0$

(B)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0$ , 且  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0$

(C)  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$

(D)  $\lim_{x \rightarrow 0} [f_x(x, 0) - f_x(0, 0)] = 0$ , 且  $\lim_{y \rightarrow 0} [f_y(0, y) - f_y(0, 0)] = 0$

2. 设函数  $f(x, y)$  可微, 且  $f(x+1, e^x) = x(x+1)^2$ ,  $f(x, x^2) = 2x^2 \ln x$ , 则  $df(1, 1) =$  \_\_\_\_\_。

3. 设  $f(x, y) = \sin \sqrt{x^2 + y^4}$ , 则  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  处( )。

(A) 对  $x$  可偏导, 对  $y$  不可偏导

(B) 对  $x$  不可偏导, 对  $y$  可偏导

(C) 对  $x$  可偏导, 对  $y$  可偏导

(D) 对  $x$  不可偏导, 对  $y$  也不可偏导

4. 设函数  $u(x, y)$  在有界闭区域  $D$  上连续, 在  $D$  的内部具有二阶连续偏导数, 且满足  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \neq$

0 及  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ , 则( )。

(A)  $u(x, y)$  的最大值和最小值都在  $D$  的边界上取得

(B)  $u(x, y)$  的最大值和最小值都在  $D$  的内部取得

(C)  $u(x, y)$  的最大值在  $D$  的内部取得,  $u(x, y)$  的最小值在  $D$  的边界上取得

(D)  $u(x, y)$  的最小值在  $D$  的内部取得,  $u(x, y)$  的最大值在  $D$  的边界上取得

5. 根据隐函数存在定理, 方程  $(x^2 + y^2)z + \ln z + 2(x + y + 1) = 0$  在其定义域任意点  $(x, y, z)$  的邻域内, 下列说法正确的有( )。

① 可确定具有连续偏导数的隐函数  $x = x(y, z)$

② 可确定具有连续偏导数的隐函数  $y = y(x, z)$

③ 可确定具有连续偏导数的隐函数  $z = z(x, y)$

(A) 0 个

(B) 1 个

(C) 2 个

(D) 3 个

6. 若函数  $z = f(x, y)$  有  $f'_x(0, 0) = 1, f'_y(0, 0) = -1$ , 则下列说法正确的有( )。

①  $z = f(x, y)$  在点  $(0, 0)$  处连续

②  $g(x) = f(x, 0)$  在点  $x = 0$  处连续

③  $g(x) = f(x, 0)$  在点  $x = 0$  的邻域  $(0, \sigma)$  内单调增加

④ 在点  $(0, 0)$  处  $dz = dx - dy$

(A) 1 个

(B) 2 个

(C) 3 个

(D) 4 个

7. 设  $f(x, y) = \varphi(|xy|)$ ,  $\varphi(0) = 0, u = 0$  附近  $|\varphi(u)| \leq u^2$ , 则  $f(x, y)$  在点  $(0, 0)$  处( )。

(A) 连续, 但偏导不存在

(B) 偏导数存在, 但不连续

(C) 连续且偏导存在, 但不可微

(D) 可微

8. 设  $f(u)$  具有二阶连续导数,  $z = f(e^x \sin y)$  满足  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{2x} z$ , 且有  $f(0) = 1$ ,

$f'(0) = -1$ , 则积分  $\int_0^{+\infty} x^3 f(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

9. 若从函数  $F(x, y, z) = 0$  可分别解出  $x = f(y, z), y = g(z, x), z = h(x, y)$ , 则下列各式中不成立的是( )。

(A)  $F'_x dx + F'_y dy + F'_z dz = 0$

(B)  $\left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 = 1$

(C)  $\left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z}\right)^3 = 1$

(D)  $\left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z}\right)^4 = 1$

10. 设函数  $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ , 则  $f''_{xy}(0, 0) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

11. 设函数  $u = f(x, y)$  具有二阶连续偏导数, 且满足等式  $4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 12 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ 。等式在变换  $\xi = x + ay, \eta = x + by$  下化简为  $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$ , 则  $ab = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

12. 设矩阵  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  有 3 个线性无关的特征向量, 连续函数  $z = f(x, y)$  满足

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{f(x, y) - 2x + y - 2}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} = a$ , 则下列说法不正确的是( )。

(A)  $z = f(x, y)$  在点  $(0, 1)$  处可微

(B)  $f(0, 1) = 1$

(C) 点  $(0, 1)$  处偏导数  $\left[\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\right]_{(0, 1)} = 1$

(D)  $dz|_{(0, 1)} = 2dx + dy$

13. 如果函数  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  处连续, 那么下列命题正确的是( )。

(A) 若极限  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{|x| + |y|}$  存在, 则  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  处可微

(B) 若极限  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$  存在, 则  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  处可微

(C) 若  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  处可微, 则极限  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{|x| + |y|}$  存在

(D) 若  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  处可微, 则极限  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$  存在

14. 函数  $u = \sin x \sin y \sin z$  满足  $x + y + z = \frac{\pi}{2}$  ( $x > 0, y > 0, z > 0$ ) 的条件极值为( )。

(A) 1

(B) 0

(C)  $\frac{1}{6}$

(D)  $\frac{1}{8}$

15. 设  $f(x) = \ln x + 1$  ( $x \in [1, +\infty)$ ),  $F(u, v)$  可微,  $y(x)$  由  $F(xe^{x+y}, f(xy)) = x^2 + y^2$  确定, 则  $\frac{dy}{dx} =$  \_\_\_\_\_。

16. 设  $u = f(x, y, z)$ ,  $\phi(x^2, e^y, z) = 0$ ,  $y = \sin x$ , 其中  $f, \phi$  都具有一阶连续偏导数, 且  $\frac{\partial \phi}{\partial z} \neq 0$ , 则  $\frac{du}{dy} =$  \_\_\_\_\_。

17. 设  $f(x, y) = \int_0^{xy} e^{-t^2} dt$ , 则  $\frac{x}{y} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{y}{x} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} =$  \_\_\_\_\_。

18. 设  $u = e^{-x} \sin \frac{x}{y}$ , 回答下列问题:

(1)  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$  在点  $(2, \frac{1}{\pi})$  处的值为 \_\_\_\_\_;

(2)  $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 [u(x, 1)]^n dx =$  \_\_\_\_\_。

19. 下列说法正确的是( )。

(A) 设函数  $F(x, y) = \int_0^{xy} \frac{\sin t}{1+t^2} dt$ , 则  $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \Big|_{\substack{x=0 \\ y=2}} = 4$

(B) 设函数  $f(u, v)$  满足  $f(x+y, \frac{y}{x}) = x^2 - y^2$ , 则  $\frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{\substack{u=1 \\ v=1}} = 0$

(C) 设函数  $f(u, v)$  可微,  $z = z(x, y)$  由方程  $(x+1)z - y^2 = x^2 f(x-z, y)$  确定, 则  $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(0,1)} = 1$

(D)  $z = x e^{x+y} + (x+1) \ln(1+y)$ , 则  $dz_{(1,0)} = 2e dx + (e+2) dy$

20. 设函数  $z = z(x, y)$  由方程  $F(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}) = 0$  确定, 其中  $F$  为可微函数, 且  $F'_2 \neq 0$ , 则

$u(x, y) = x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}$ , 则  $\frac{\partial u}{\partial x} =$  \_\_\_\_\_。

21. 设  $\varphi(x)$  连续,  $f(x, y) = \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} t \varphi(x^2 + y^2 - t^2) dt$ , 且  $\varphi(2) = 8$ , 则  $df(1, 1) =$  \_\_\_\_\_。

22. 设  $f(x, y) = x^3 - 4x^2 + 2xy - y^2$ , 则下述结论中正确的是( )。
- (A) 点  $(0, 0)$  是极大值点  
 (B) 点  $(2, 2)$  是  $f(x, y)$  的驻点, 且为极大值点  
 (C) 点  $(2, 2)$  是极小值点  
 (D) 点  $(0, 0)$  是  $f(x, y)$  的驻点, 但不是极值点
23. 设  $z = z(x, y)$  是由  $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$  确定的函数, 下列说法正确的是( )。
- (A) 有极小值, 但无极大值  
 (B) 无极小值, 但有极大值  
 (C) 无极小值, 且无极大值  
 (D) 有极小值, 且有极大值
24. (仅数学一) 已知曲线  $C: \begin{cases} x^2 + y^2 - 2z^2 = 0 \\ x + y + 3z = 5 \end{cases}$ , 则曲线  $C$  距离  $xOy$  面最远的点和最近的点的  $z$  坐标值之和为\_\_\_\_\_。
25. 设函数  $z = f(xy, yg(x))$ , 其中函数  $f$  具有二阶连续偏导数, 函数  $g(x)$  可导, 且在  $x=1$  处取得极值  $g(1)=1$ , 则  $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{\substack{x=1 \\ y=1}} =$ \_\_\_\_\_。
26. 关于函数  $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x^2 y^2$  在区域  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$  上的最大值和最小值, 下列说法正确的是( )。
- (A) 函数在区域内无驻点  
 (B) 函数最小值为 2  
 (C) 函数最大值为 2  
 (D) 函数的最小值在边界的直线段上取到

27. (仅数学一) 设  $f(x, y)$  在点  $(0, 0)$  附近有定义, 且  $f'_x(0, 0) = 3, f'_y(0, 0) = 1$ , 则下列说法正确的有( )。

①  $dz|_{(0,0)} = 3dx + dy$

② 曲面  $z = f(x, y)$  在  $(0, 0, f(0, 0))$  处的法向量为  $(3, 1, -1)$

③ 曲线  $\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = \sin x \end{cases}$  在  $(0, 0, f(0, 0))$  处的切向量为  $(1, 0, 3)$

④ 曲线  $\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = 0 \end{cases}$  在  $(0, 0, f(0, 0))$  处的切向量为  $(3, 0, 1)$

(A) 0 个 (B) 1 个 (C) 2 个 (D) 3 个

28. 设  $z = f(x, y)$ , 且  $f(x, 1) = 0, f'_y(x, 0) = \sin x, f''_{yy}(x, y) = 2x$ , 则  $dz|_{(\frac{\pi}{2}, 1)} =$  \_\_\_\_\_。

29. (仅数学一) 由曲线  $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 12 \\ z = 0 \end{cases}$  绕  $y$  轴旋转一周得到的旋转面在点  $(0, \sqrt{3}, \sqrt{2})$  处的指向外侧的单位法向量为\_\_\_\_\_。

30. (仅数学一) 已知函数  $f(x, y) = x + y + xy$ , 曲线  $C: x^2 + y^2 + xy = 3$ ,  $f(x, y)$  在曲线  $C$  上的点  $(x_0, y_0)$  取最大方向导数, 则  $f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  处的梯度为\_\_\_\_\_。

31. 设函数  $z=f(x,y)$  在有界闭区域  $D$  上连续, 且全微分为  $dz=xdx+ydy$ , 则( )。

- (A) 点  $(0,0)$  不是  $f(x,y)$  的极值点
- (B) 点  $(0,0)$  是  $f(x,y)$  的极大值点
- (C) 函数一定能在边界上取到最值
- (D)  $z=\frac{x^2+y^2}{2}+C$ , 其中  $C$  为任意非零常数

32. 已知函数  $f(x,y)$  在点  $(0,0)$  的某个邻域内连续, 且  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x,y)-kxy}{(x^2+y^2)^2}=1$ , 则( )。

- (A) 点  $(0,0)$  不是  $f(x,y)$  的极值点
- (B) 点  $(0,0)$  是  $f(x,y)$  的极大值点
- (C) 点  $(0,0)$  是  $f(x,y)$  的极小值点
- (D) 点  $(0,0)$  是否为  $f(x,y)$  的极值点与  $k$  有关

33. (仅数学一) 曲面  $x^2+\cos(xy)+yz+x=0$  在点  $(0,1,-1)$  处的切平面方程为( )。

- (A)  $x-y+z=-2$
- (B)  $x+y+z=2$
- (C)  $x-2y+z=-3$
- (D)  $x-y-z=0$

34. 已知  $f(x,y)$  满足  $f''_{xy}(x,y)=2(y+1)e^x$ ,  $f'_x(x,0)=(x+1)e^x$ ,  $f(0,y)=y^2+2y$ , 则  $f'_y(x,y)=$ \_\_\_\_\_。

35. 设函数  $f(u)$  具有二阶连续导数,  $z=f(e^x \cos y)$  满足  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (4z + e^x \cos y) e^{2x}$ 。若  $f(0)=0, f'(0)=0$ , 则  $f(1)=$ \_\_\_\_\_。

36. 设函数  $f(x, y)$  具有一阶连续偏导数, 且  $df(x, y) = ye^y dx + x(1+y)e^y dy$ ,  $f(0, 0) = 0$ , 则  $\int_0^{+\infty} f(x, -x) dx =$  \_\_\_\_\_。

37. 设  $f(x, y)$  具有一阶偏导数, 且对任意的  $(x, y)$ , 都有  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} > 0$ ,  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} < 0$ , 则( )。

(A)  $f(0, 0) > f(1, 1)$

(B)  $f(0, 0) < f(1, 1)$

(C)  $f(0, 1) > f(1, 0)$

(D)  $f(0, 1) < f(1, 0)$

38. 设  $z = z(u, v)$  具有二阶连续偏导数, 且  $z = z(x - 2y, x + 3y)$  满足  $6 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$ , 则  $z(u, v)$  的函数表达式为 \_\_\_\_\_。

39. 设函数  $f(x, y)$  可微, 且满足条件:  $\frac{f_y(0, y)}{f(0, y)} = \cot y$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x} = -f(x, y)$ ,  $f\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = 1$ , 则函数  $f(x, y) =$  \_\_\_\_\_。

40. (仅数学一) 设  $(a \times b) \cdot c = 2$ , 则  $[(a + b) \times (b + c)] \cdot (c + a) =$  \_\_\_\_\_。

41. (仅数学一) 直线  $L: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$  在平面  $\Pi: x-y+2z-1=0$  上的投影直线为  $L_0$ , 则  $L_0$  绕  $y$  轴旋转一周所成曲面的方程为\_\_\_\_\_。

42. (仅数学一) 设有直线  $L: \begin{cases} x+3y+2z+1=0 \\ 2x-y-10z+3=0 \end{cases}$  及平面  $\Pi: 4x-2y+z-3=0$ 。

(1) 直线  $L$  ( );

(A) 平行于  $\Pi$  (B) 在  $\Pi$  上 (C) 垂直于  $\Pi$  (D) 与  $\Pi$  斜交

(2) 曲面  $z-e^z+2xy=3$  在点  $(1,2,0)$  处的切平面  $\Sigma$  的方程为\_\_\_\_\_;

(3) 平面  $\Sigma$  与平面  $\Pi$  的交线在平面  $x+y+z=1$  上的投影为\_\_\_\_\_。

43. 设函数  $f(x) > 0$  具有二阶连续导数, 且  $f(x) > 0, f'(0)=0$ , 则函数  $z=f(x)\ln f(y)$  在点  $(0,0)$  处取得极小值的一个充分条件是( )。

(A)  $f(0) > 1, f''(0) > 0$

(B)  $f(0) > 1, f''(0) < 0$

(C)  $f(0) < 1, f''(0) > 0$

(D)  $f(0) < 1, f''(0) < 0$

44. (仅数学一) 在曲线  $x=t, y=-t^2, z=t^3$  的所有切线中, 与平面  $x+2y+z=4$  平行的切线( )。

(A) 只有 1 条

(B) 只有 2 条

(C) 至少有 3 条

(D) 不存在