

3.1 基本术语



视频讲解

机构学把机构的运动看作只与其几何约束方式有关,与受力、质量和时间等无关的学科,而现实的运动是与时间和空间密切相关的。运动学(kinematics)模型就是用来描述机构运动中坐标变化的一组方程,处理运动的几何学及与时间有关的量,而不考虑引起运动的力。动力学(dynamics)研究机构动态方程的建立,是一组描述机构运动和驱动力之间动态特性的数学方程。

3.1.1 完整约束系统和非完整约束系统

非完整约束(non-holonomic constrain)系统是指含有系统广义坐标导数且不可积的约束,与之相反的就是完整约束(holonomic constrain)系统。典型的非完整约束系统(简称非完整系统)包括车辆、移动机器人、某些空间机器人、水下机器人、欠驱动机器人和运动受限机器人等。因此,非完整系统的控制研究具有广泛应用背景和重要应用价值。经典力学对非完整系统做了基础性研究。从19世纪80年代末起,由于机器人及车辆控制的需要,开始对非完整系统的控制问题进行深入研究。由于非完整约束是对系统广义坐标导数的约束,不减少系统的位形自由度,这使得系统的独立控制个数少于系统的位形自由度,给其控制设计带来很大困难。非完整系统不能用连续的状态反馈整定。

3.1.2 保守力和非保守力

在一个物理系统里,假若一个粒子,从起始点移动到终结点,由于受到作用力所做的功不因为路径的不同而改变,则称此力为保守力(conservative force)。假若一个物理系统里,所有的作用力都是保守力,则称此系统为保守系统;反之,则称为非保守力和非保守系统。

3.1.3 广义坐标

广义坐标(generalized coordinates)是不特定的坐标,描述完整系统位形的独立变量。对于含有 n 个质点的质点系,在空间有 $3n$ 个坐标。若这些质点间存在 k 个有限约束,则约束方程可写为 $f_s(x_1, x_2, \dots, x_{3n}; t) = 0 (s = 1, 2, \dots, k)$ 。利用约束方程消去 $3n$ 个坐标中的 k 个变量,剩下 $N = 3n - k$ 个变量是独立的。利用变量转换,可将这 N 个变量用其他任

意 N 个独立变量 $q_1, q_2, \dots, q_N$ 来表示。因此, $3n$ 个 x 坐标可用 N 个 q 表示为 $x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_N; t) (i=1, 2, \dots, 3n)$ 。这种相互独立的变量称为广义坐标, 其数目 N 等于完整系统的自由度。常用的广义坐标有线量和角量两种。例如, 对约束在空间固定曲线上运动的质点, 可用自始点计量的路程 s 作为广义坐标; 用细杆约束在竖直平面内摆动的质点, 可用杆与铅垂线的夹角 θ 作为广义坐标。广义坐标对时间的导数称为广义速度。

3.1.4 刚体与柔性体

刚体是物理学上的一种假设存在的理想物体, 不会发生变形的称为刚体, 与之对应, 会发生变形的称为柔性体。

柔性机械臂、涡轮机叶片、直升机旋翼以及带有柔性附件的人造卫星等都是刚柔耦合系统。建立这类结构的模型, 需要考虑大范围刚体运动与弹性小变形运动的耦合问题。

3.1.5 直角坐标系

运动在数学模型上表现为质点的空间坐标值随时间的变化。所以, 对质点的空间坐标的描述是理论分析的基础。要全面地确定一个物体在三维空间中的状态需要有 3 个位置自由度和 3 个姿态自由度。前者用来确定物体在空间中的具体方位, 后者则是确定物体的指向。物体的 6 个自由度的状态称为物体的位姿。直角坐标系是最常见的坐标系, 又名笛卡儿坐标系, 由 Cartesian 建立, 满足右手法则, 特点为 3 个坐标轴 X 、 Y 、 Z 相互垂直, 如图 3.1 所示。为易于想象和理解, 3 个坐标轴的位置精度不变。空间点 P 的位置由一组坐标 (x, y, z) 来表示。空间位置可由沿 3 个坐标轴的平动获得。直角坐标适合描述平动, 如常用于数控机床的三轴平动工件台的运动描述。

3.1.6 圆柱坐标系

圆柱坐标系如图 3.2 所示, 空间 P 点的位置由一组坐标 (ρ, θ, μ) 来表示。笛卡儿坐标与圆柱坐标的转换关系为

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta, & \rho \geq 0 \\ y = \rho \sin \theta, & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ z = \mu, & -\infty \leq \mu \leq +\infty \end{cases} \quad (3.1)$$

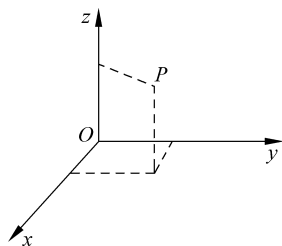


图 3.1 直角坐标系示意图

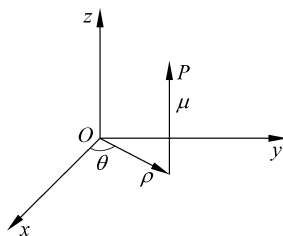


图 3.2 圆柱坐标系示意图

圆柱坐标系适合描述平动和转动的混合运动(平动多, 转动少的情况), 例如常用于描述摇臂钻床钻头的空间运动轨迹。

3.1.7 球坐标系

球坐标系是平面极坐标系的扩展。空间点 P 的位置由一组坐标 (ρ, ω, ϕ) 来表示,如图 3.3 所示。笛卡儿坐标与球坐标的转换关系为

$$\begin{cases} x = \rho \cos \omega \sin \phi, & \rho \geq 0 \\ y = \rho \sin \omega \sin \phi, & 0 \leq \omega \leq \pi \\ z = \rho \cos \phi, & 0 \leq \phi \leq 2\pi \end{cases} \quad (3.2)$$

圆柱坐标系适合描述平动和转动的混合运动(平动少,转动多的情况),例如常用于描述球铰链的空间运动轨迹。

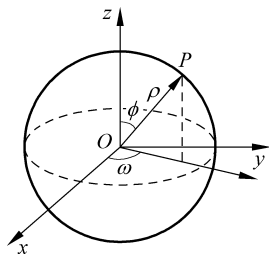


图 3.3 球坐标系示意图

3.1.8 固定坐标系与移动坐标系

固定坐标系即坐标系的原点和各轴的方向不随时间发生变化的坐标系,例如世界坐标系、工业机器人的基座坐标系,用于描述空间的绝对初始位置(零位)。

移动坐标系即坐标系的原点或各轴的方向随时间发生变化的坐标系,例如工业机器人的连杆坐标系。移动坐标系往往是跟随运动刚体一起变化的。注意,运动是相对的,所以坐标系是固定或是移动的,也是相对的。工业机器人的连杆子坐标系相对于基座坐标系是移动的,相对于连杆本身又是静止的。

3.2 运动学建模

3.2.1 坐标变换

1. 平动的坐标变换

设手坐标系 H 与基坐标系 B 具有相同的姿态,但 H 系坐标原点与 B 系的原点不重合。用矢量 $\bar{r}_0$ 来描述 H 系相对于 B 系的位置,称 $\bar{r}_0$ 为 H 系相对于 B 系的平移矢量,如图 3.4 所示。

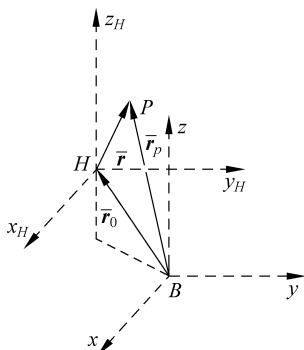


图 3.4 平动坐标变换

如果点 P 在 H 系中的位置为 $\bar{r}$,则 $\bar{r}$ 相对于 B 系的位置矢量 $\bar{r}_p$ 可由矢量相加得出,即

$$\bar{r}_p = \bar{r}_0 + \bar{r} \quad (3.3)$$

称为坐标平移变换方程。

2. 转动的坐标变换

以绕 z 轴转动为例来研究绕坐标轴转动某个角度的表示法。设 H 系从与 B 系相重合的位置绕 B 系的 z 轴转动 θ_z 角, H 系与 B 系的关系如图 3.5 所示。

若将 H 系的 3 个单位矢量表示在 B 系中,则有

$$\bar{n} = \begin{bmatrix} \cos \theta_z \\ \sin \theta_z \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{o} = \begin{bmatrix} -\sin \theta_z \\ \cos \theta_z \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

实现两个坐标系之间的转动关系的矩阵,又叫转动矩阵 $\mathbf{R}$,可表示为

$$\mathbf{R} = [\bar{\mathbf{n}} \quad \bar{\mathbf{o}} \quad \bar{\mathbf{a}}] = \begin{bmatrix} \cos\theta_z & -\sin\theta_z & 0 \\ \sin\theta_z & \cos\theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

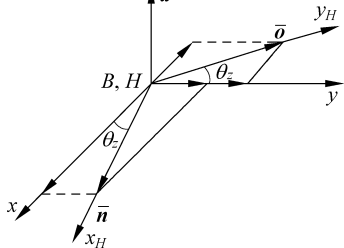


图 3.5 H 系相对 B 系绕 z 轴转动 θ_z 角的坐标关系

同理可得,绕其他轴旋转的变换矩阵为

$$\text{Rot}(x, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & -\sin\theta_x \\ 0 & \sin\theta_x & \cos\theta_x \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$$\text{Rot}(y, \theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta_y & 0 & \sin\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

3. 复合运动的坐标替换

基坐标系 B 和手坐标系 H 的原点不重合,而且两坐标系的姿态也不相同的情况,如图 3.6 所示。

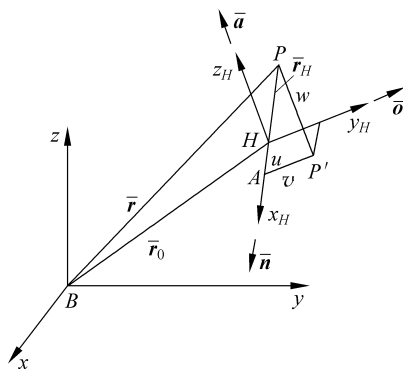


图 3.6 复合运动坐标变换

对于任意一点 P 在 B 和 H 系中的描述有以下的关系

$$\bar{\mathbf{r}}_p = \bar{\mathbf{r}}_0 + \mathbf{R}\bar{\mathbf{r}}_H \quad (3.7)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{r}}_p \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \bar{\mathbf{r}}_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{r}}_H \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a \\ \mathbf{R}_{3 \times 3} & b \\ c \\ 0_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

A 矩阵称为齐次矩阵(homogeneous matrix),将转动和移动组合在一个 4×4 矩阵中。齐次矩阵用途很广,一般形式为

$$\text{齐次矩阵} = \begin{bmatrix} \text{旋转矩阵 } 3 \times 3 & \text{平移矢量 } 3 \times 1 \\ \text{透视变量 } 1 \times 3 & \text{比例因子 } 1 \times 1 \end{bmatrix}$$

例 3.1 坐标旋转变换举例。

已知一个矢量 U 绕 z 轴旋转 90° 变成 V , 则用旋转矩阵表示为

$$V = \text{Rot}(Z, 90^\circ) U$$

一个矢量 U 先后绕 x 、 y 轴分别旋转 90° 、 60° 得到 V , 用旋转矩阵表示为

$$V = \text{Rot}(Y, 60^\circ) \text{Rot}(X, 90^\circ) U$$

例 3.2 利用齐次矩阵表示手的转动。

手的转动可以表示为绕 x 轴的侧摆 $\text{Rot}(X, \Phi_x)$, 绕 y 轴的俯仰 $\text{Rot}(Y, \Phi_y)$ 和绕 z 轴横滚 $\text{Rot}(Z, \Phi_z)$, 依次构成的复合转动 $\text{RPY}(\Phi_z, \Phi_y, \Phi_x)$ 。

$$\text{RPY}(\Phi_z, \Phi_y, \Phi_x) = \text{Rot}(Z, \Phi_z) \text{Rot}(Y, \Phi_y) \text{Rot}(X, \Phi_x)$$

$$= \begin{bmatrix} c\Phi_z & -s\Phi_z & 0 & 0 \\ s\Phi_z & c\Phi_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\Phi_y & 0 & s\Phi_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s\Phi_y & 0 & c\Phi_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\Phi_x & -s\Phi_x & 0 \\ 0 & s\Phi_x & c\Phi_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

式中, $s = \sin, c = \cos$ 。

从上式可见,手腕的转动计算比较复杂。

4. 变换的顺序

一般的齐次坐标变换过程可以分为以下两种情况。

(1) 如果用一个描述平移和(或)旋转的变换 C , 左乘一个坐标系的变换 T , 那么产生的平移和(或)旋转就是相对于静止坐标系进行的。

(2) 如果用一个描述平移和(或)旋转的变换 C , 右乘一个坐标系的变换 T , 那么产生的平移和(或)旋转就是相对于运动坐标系进行的。

5. 变换的封闭性

坐标变换具有封闭性,如图 3.7 所示。

图中, $Z \rightarrow A \rightarrow E$ 和 $P \rightarrow Q$ 都表示坐标变换。实际上,可以从封闭的有向变换图的任一变换开始列变换方程。从某一变换弧开始,顺箭头方向为正方向,逆箭头方向为逆变换,一直连续列写到相邻于该变换弧为止(但不再包括该起点变换)。如果包括该起点变换,则会得到一个单位变换。

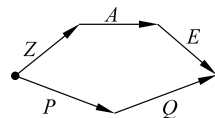


图 3.7 坐标变换的封闭特性

注意变换的顺序以及变换的参考基坐标系。

(1) 如果是相对于基坐标系 B 的运动,其相应的齐次变换矩阵左乘原齐次变换矩阵。

(2) 如果是相对于手坐标系 H 的运动,其相应的齐次变换矩阵右乘原齐次变换矩阵。



视频讲解

3.2.2 D-H 参数

通常描述机构运动学的方法有 D-H(Denavit-Hartenberg)法、Duff 法和牧野法等。D-H 坐标系法的优点是将齐次变换分解为和臂杆相关的变换,以及和关节相关的变换,为具体的编程和数值求解计算等带来方便。对于多个零部件组成、具有多个运动副关节的机构内部的运动,可用 D-H 参数来建立齐次变换矩阵来描述。具有 n 个关节自由度的机器人系统,其齐次矩阵可表示为

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \cdots \mathbf{A}_i \cdots \mathbf{A}_n$$

式中,每一个齐次变换矩阵有 6 个参数。

为建立运动学方程,需要讨论相邻连杆运动关系。以回转副连接的两杆件的 D-H 参数的确定为例。对于两个相邻臂杆 C_i 和 C_{i-1} ,设关节轴线分别为 z_{i-1} 、 z_i 和 z_{i+1} 。为描述相邻臂杆间平移和转动的关系,D-H 坐标系的参数有 4 个:两个相邻关节轴线 z_i 和 z_{i+1} 的公垂线间距离为 a_i (连杆长度);由 z_i 和 z_{i+1} 公垂线组成的平面 Q , z_{i+1} 与平面 Q 的夹角为 α_i (扭转角);与关节 i 相邻的两个公垂线 a_i 与 a_{i-1} 之间的距离为 d_i (连杆偏移量);与关节 i 相邻的两个公垂线 a_i 与 a_{i-1} 在以 z_i 为法线的平面上的投影夹角为 θ_i (关节角)。 a_i 、 α_i 、 d_i 和 θ_i 参数称为 D-H 参数,D-H 坐标系如图 3.8 所示。

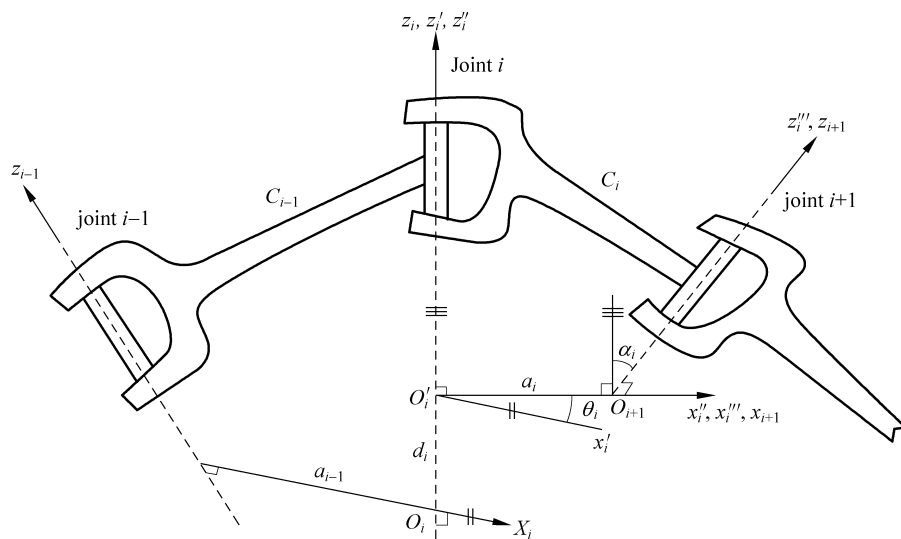


图 3.8 D-H 坐标系

D-H 法是为每个关节处的臂杆坐标系建立 4×4 齐次变换矩阵,描述与前一个臂杆坐标系的关系。

不失一般性,按照 D-H 参数的定义,通用的关节坐标变换为

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_i &= \text{Rot}(z_{i-1}, \theta_i) \text{Trans}(z_{i-1}, d_i) \text{Trans}(x_i, a_i) \text{Rot}(x_i, \alpha_i) \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos a_i & \sin \theta_i \sin a_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cos a_i & -\cos \theta_i \sin a_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin a_i & \cos a_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

图 3.8 中建立的 D-H 坐标系,若是针对仿人机器人上肢体,臂杆 C_{i-1} 的坐标系经过两次旋转和一次平移可以变换到连杆 C_i 的坐标系。参照图 3.8 和图 3.9,3 次变换分别如下。

第一次:臂杆沿 x_{i-1} 轴平移 a_{i-1} ,将 O_{i-1} 移动到 O'_{i-1} ,记为 $\text{Trans}(a_{i-1}, 0, 0)$ 。变换后的臂杆 C_{i-1} 坐标系如图 3.9(a) 所示。

第二次:以 x_{i-1} 轴为转轴,旋转 α_{i-1} 角度,使新的 z_{i-1} 轴与 z_i 轴同向,记为 $\text{Rot}(x_{i-1}, \alpha_{i-1})$ 。变换后的臂杆 C_{i-1} 坐标系如图 3.9(b) 所示。

第三次:以 z_i 轴为转轴,旋转 θ_i 角度,使新的 x_{i-1} 轴与 x_i 轴同向,记为 $\text{Rot}(z_i, \theta_i)$ 。变换后的臂杆 C_{i-1} 坐标系如图 3.9(c) 所示。

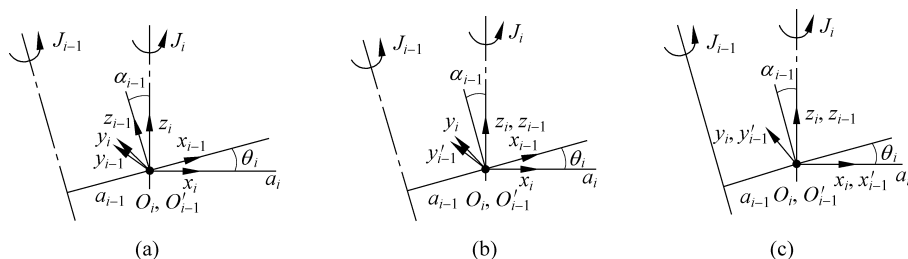


图 3.9 上肢体坐标系变换示意图

经过 3 次变换,坐标系 $O_{i-1}x_{i-1}y_{i-1}z_{i-1}$ 与坐标系 $O_ix_iy_iz_i$ 完全重合。通过上述 3 次变换,建立了两相邻臂杆 C_i 和 C_{i-1} 之间的相对关系,并记为矩阵 $\mathbf{A}_i$ 。3 次变换构成的总齐次变换矩阵 $\mathbf{A}_i$ (D-H 矩阵)为

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_i &= \text{Trans}(a_{i-1}, 0, 0) \text{Rot}(x_{i-1}, \alpha_{i-1}) \text{Rot}(z_i, \theta_i) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{i-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_{i-1} & -\sin \alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & \sin \alpha_{i-1} & \cos \alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & a_{i-1} \\ \sin \theta_i \cos \alpha_{i-1} & \cos \theta_i \cos \alpha_{i-1} & -\sin \alpha_{i-1} & -\sin \alpha_{i-1} \\ \sin \theta_i \sin \alpha_{i-1} & \cos \theta_i \sin \alpha_{i-1} & \cos \alpha_{i-1} & \cos \alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

例 3.3 列写图 3.10 中垂直 3 关节手臂运动学方程(坐标变换矩阵),包括建立坐标系、各关节 D-H 参数、各关节变换矩阵,综合得到手臂运动学方程。

首先建立基坐标系和各个关节坐标系,如图 3.11 所示。

而后分析各个关节的 D-H 参数,可得表 3.1 所示结果。

表 3.1 例 3.3 的 D-H 参数表

参数	joint1	joint2	joint3
θ_i	θ_1	θ_2	θ_3
a_i	0	a_2	a_3

续表

参数	joint1	joint2	joint3
d_i	d_1	0	0
α_i	90°	0	0

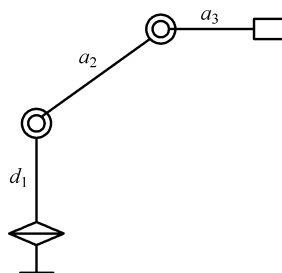


图 3.10 例 3.3 示意图(1)

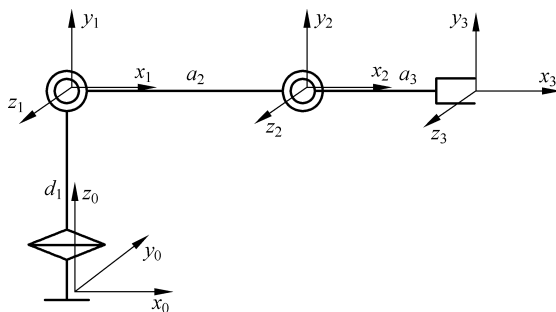


图 3.11 例 3.3 示意图(2)

根据齐次变换矩阵建立方法,分别建立各个关节的变换矩阵为

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & -c_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & c_2 a_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & s_2 a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & c_3 a_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & s_3 a_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

进而计算

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3$$

$\mathbf{A}$ 的各项元素为

$$A_{11} = c_1 c_2 c_3 - c_1 s_2 s_3, \quad A_{12} = -c_1 c_2 s_3 - c_1 s_2 c_3, \quad A_{13} = s_1$$

$$A_{14} = c_1 c_2 c_3 a_3 - c_1 s_2 s_3 a_3 + c_1 c_2 a_2$$

$$A_{21} = s_1 c_2 c_3 - s_1 s_2 s_3, \quad A_{22} = -s_1 c_2 s_3 - s_1 s_2 c_3, \quad A_{23} = -c_1$$

$$A_{24} = s_1 c_2 c_3 a_3 - s_1 s_2 s_3 a_3 + s_1 c_2 a_2, \quad A_{31} = s_2 c_3 + c_2 s_3, \quad A_{32} = -s_2 s_3 + c_2 c_3$$

$$A_{33} = 0, \quad A_{34} = s_2 c_3 a_3 + c_2 s_3 a_3 + s_2 a_2 + d_1, \quad A_{41} = A_{42} = A_{43} = 0, \quad A_{44} = 1$$

代入原始位置时的参数: $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$, 可得原始位置时的变换矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_2 + a_3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

代入转动后的参数: $\theta_1 = \theta_2 = 0, \theta_3 = 90^\circ$, 如图 3.12 所示, 可得此时的变换矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & d_1 + a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

代入转动后的参数: $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 90^\circ$, 如图 3.13 所示, 可得此时的变换矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -a_3 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 + a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

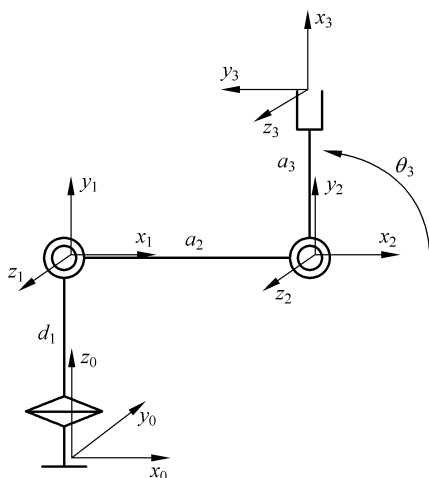


图 3.12 例 3.3 示意图(3)

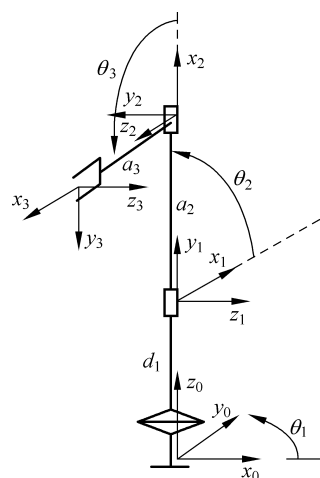


图 3.13 例 3.3 示意图(4)

3.2.3 速度运动学分析

本节将进一步讨论运动的几何学及与时间有关的量, 即讨论机器人的速度运动学问题。速度运动学问题重要是因为操作机不仅需要达到某个(或一系列的)位置, 而且常需要按给定的速度达到这些位置。

所谓微分运动指的是无限小的运动, 即无限小的移动和无限小的转动。微分运动既可以用指定的当前坐标系来描述, 也可以用基础坐标系来描述。

对于微分移动(平动)的齐次变换矩阵 T 可表示为

$$\text{Trans}(dx, dy, dz) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

式中, dx 、 dy 、 dz 是微分位移矢量在基础坐标系或当前坐标系的分量。

微分转动中 δ_x 很小, 所以 $\sin \delta_x \doteq \delta_x$, $\cos \delta_x \doteq 1$, 可得

$$\text{Rot}(x, \delta_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\delta_x & 0 \\ 0 & \delta_x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{Rot}(y, \delta_y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \delta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\delta_y & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\text{Rot}(z, \delta_z) &= \begin{bmatrix} 1 & -\delta_z & 0 & 0 \\ \delta_z & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\text{Rot}(x, \delta_x) \text{Rot}(y, \delta_y) \text{Rot}(z, \delta_z) &= \begin{bmatrix} 1 & -\delta_z & \delta_y & 0 \\ \delta_x \delta_y + \delta_z & 1 - \delta_x \delta_y \delta_z & -\delta_x & 0 \\ -\delta_y + \delta_x \delta_z & \delta_y \delta_z + \delta_x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&\doteq \begin{bmatrix} 1 & -\delta_z & \delta_y & 0 \\ \delta_z & 1 & -\delta_x & 0 \\ -\delta_y & \delta_x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.12)
\end{aligned}$$

上面的近似等式是在略去二阶与三阶无穷小量的条件下获得的。

定理 3.1 绕任意单位矢量 $\bar{K} = [K_x, K_y, K_z]^T$ 转动 $\delta\theta$ 的微分转动等效于绕轴 x, y, z 的 3 个微分转动 $\delta_x, \delta_y, \delta_z$, 并有

$$\delta_x = K_x \delta\theta, \quad \delta_y = K_y \delta\theta, \quad \delta_z = K_z \delta\theta$$

于是总的转动微分 $\text{Rot}(\bar{K}, \delta\theta)$ 可由如下的齐次矩阵描述

$$\text{Rot}(\bar{K}, \delta\theta) = \text{Rot}(x, \delta_x) \text{Rot}(y, \delta_y) \text{Rot}(z, \delta_z) = \begin{bmatrix} 1 & -K_z \delta\theta & K_y \delta\theta & 0 \\ K_z \delta\theta & 1 & -K_x \delta\theta & 0 \\ -K_y \delta\theta & K_x \delta\theta & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

定理 3.2 微分转动与其转动次序无关。

$$\begin{aligned}
\text{Rot}(x, \delta_x) \text{Rot}(y, \delta_y) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\delta_x & 0 \\ 0 & \delta_x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \delta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\delta_y & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\text{Rot}(y, \delta_y) \text{Rot}(x, \delta_x) &= \begin{bmatrix} 1 & \delta_x \delta_y & \delta_y & 0 \\ 0 & 1 & -\delta_x & 0 \\ -\delta_y & \delta_x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

略去二阶无穷小量后得

$$\text{Rot}(x, \delta_x) \text{Rot}(y, \delta_y) = \text{Rot}(y, \delta_y) \text{Rot}(x, \delta_x) \quad (3.14)$$

考虑操作机的手爪位姿 r 和关节变量 θ 的关系用正运动学方程 $r = f(\theta)$ 表示的情况。以 6 连杆运动机构为例

$$r_1 = f_1(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_6) \cdots r_6 = f_6(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_6)$$

$$\frac{dr}{dt} = J \frac{d\theta}{dt}, \quad J = \frac{\partial f(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_6)}{\partial \theta^T}$$

$\mathbf{J}$ 即为雅可比矩阵。通过 $\mathbf{J}$ 可以实现从关节速度到基坐标速度的变换。

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_6} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_6}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_6}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial f_6}{\partial \theta_6} \end{bmatrix} = [\mathbf{J}_{ij}]_{6 \times 6}, \quad \mathbf{J}_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial \theta_j} \quad (3.15)$$

同样对于 $m \times n$ 维空间的机器人,其雅可比矩阵为

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_m}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial \theta_n} \end{bmatrix} = [\mathbf{J}_{ij}]_{m \times n} \quad (3.16)$$

对于同时具有平动和转动的运动机构,末端的角速度和线速度,在基坐标系中的描述记为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_n \\ \boldsymbol{\omega}_n \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

结果可表示为一个雅可比矩阵形式

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\boldsymbol{\Theta}) \dot{\boldsymbol{\Theta}} \quad (3.18)$$

式中, $\boldsymbol{\Theta}$ 为 $n \times 1$ 的机械手关节(旋转或平移关节)的位移矢量。

雅可比矩阵 $\mathbf{J}(\boldsymbol{\Theta})$ 表明了机械手关节速度与末端(手爪)直角坐标速度之间的线性变换关系。

例 3.4 已知操作机的位姿为

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

求先实施转动 $\text{Rot}(x, 0.1)$, 再实施移动 $\text{Trans}(1, 0, 0.5)$ 的微分运动后操作机的新位姿。

定义微分算子

$$\Delta = \text{Trans}(dx, dy, dz) \text{Rot}(\bar{\mathbf{K}}, d\theta) - \mathbf{I}$$

由于 $\delta_x = 0.1, dx = 1; \delta_y = 0, dy = 0; \delta_z = 0, dz = 0.5$, 计算可得

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0 & -\delta_z & \delta_y & dx \\ \delta_z & 0 & -\delta_x & dy \\ -\delta_y & -\delta_x & 0 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

操作机的新位姿为

$$\mathbf{T} + \Delta \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & -0.1 & 0 & 2 \\ 0.1 & 1 & 0 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



视频讲解

3.3 动力学建模

1. 牛顿-欧拉方程

面向平动

$$\mathbf{f} = m\mathbf{a} \quad (3.19)$$

式中, m 为物体质量(kg); $\mathbf{a}$ 为物体线加速度(m/s^2); $\mathbf{f}$ 为力(N)。

面向转动

$$J_c \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (J_c \boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\tau} \quad (3.20)$$

式中, J_c 为物体转动惯量($\text{kg} \cdot \text{m}^2$); $\boldsymbol{\omega}$ 为物体角速度(rad/s); $\boldsymbol{\tau}$ 为力矩($\text{N} \cdot \text{m}$)。

2. 拉格朗日(Lagrange)力学方程

对于保守系统, Lagrange 方程是用 s 个独立变量来描述力学体系的运动, 是一组二阶微分方程。其基本形式为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, \dots, s \quad (3.21)$$

式中, $q_1, q_2, \dots, q_s$ 为所研究力学体系的广义坐标; $Q_1, Q_2, \dots, Q_s$ 为作用在此力学体系上的广义力; T 为系统总动能。

对于同时受到保守力和耗散力作用的、由 n 个关节部件组成的机械系统(非保守系统), 其 Lagrange 方程应为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = F_{q_i} \quad (3.22)$$

式中, q_i 为广义坐标, 表示系统中的线位移或角位移的变量; F_{q_i} 为作用在系统上的广义力; T 、 V 和 D 分别为系统总的动能、势能和耗散能, 分别为

$$T = \sum_{i=1}^n T_i, \quad V = \sum_{i=1}^n V_i, \quad D = \sum_{i=1}^n D_i \quad (3.23)$$

3. 拉格朗日函数方法

对于具有外力作用的非保守机械系统, 其拉格朗日函数 L 可定义为

$$L = T - V \quad (3.24)$$

若操作机的执行元件控制某个转动变量 θ 时, 则执行元件的总力矩 τ_θ 应为

$$\tau_\theta = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} \quad (3.25)$$

若操作机的执行元件控制某个移动变量 r 时, 则施加在运动方向 r 上的力 F_r 应为

$$F_r = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} \quad (3.26)$$

Lagrange 方程是以广义坐标表达的任意完整系统的运动方程式, 方程式的数目和系统的自由度是一致的。理想约束反力不出现在方程组中, 因此建立运动方程式时只需分析已知的主动力, 而不必分析未知的约束反力。

Lagrange 方程是以能量观点建立起来的运动方程式。为了列出系统的运动方程式, 只需要从两个方面去分析: 一个是表征系统运动的动力学量——系统的动能和势能; 另一个是表征主动力作用的动力学量——广义力。因此, 用 Lagrange 方程来求解系统的动力学方

程可以大大简化建模过程。两种方法各有优劣,比较情况如表 3.2 所示。

表 3.2 拉格朗日法与牛顿-欧拉法的比较

比较项	拉格朗日法	牛顿-欧拉法
方程	较简单、紧凑	较复杂、不紧凑
加速度	不需要求解加速度,只需速度	需要求解加速度
内作用力	不需要求解内作用力	需要求解内作用力
摩擦损耗	因不考虑内作用力,所以不考虑摩擦损耗	可考虑摩擦损耗
自由度	随着自由度的增加,虽然方程本身不会变得复杂,但由于关节之间的耦合作用,会使求解任一关节驱动力(力矩)变得复杂。而且,自由度越大,计算的复杂度也越大,计算量会急剧增加	随着自由度增加,方程本身也不会变得很复杂,只是方程中矩阵的行数会增加。因此方法着眼于每一个连杆的运动,所以每一个关节驱动力(力矩)的计算量并不会随着自由度的增加而增加
适用性	适用于自由度较少的情况	适用于自由度较多的情况
所得结果	仅能求得关节的驱动力(力矩)	既可以求得关节的驱动力(力矩),也可以求得相互作用的内作用力(力矩)
编程	不易于编程	易于编程

因为两种方法并不都考虑摩擦损耗,所以两种方法求得的结果不完全相同。

例 3.5 图 3.14 所示的 θ - r 操作机, $m_1 = 10\text{kg}$, $m_2 = 1 \sim 5\text{kg}$, $r_1 = 1\text{m}$, $r = 1 \sim 2\text{m}$, $\dot{\theta}_{\max} = 1\text{s}^{-1}$, $\ddot{\theta}_{\max} = 1\text{s}^{-2}$, $\dot{r}_{\max} = 1\text{m/s}$, $\ddot{r}_{\max} = 1\text{m/s}^2$ 。

对于下面的三种工作情况,计算力矩 T_θ 。

(1) 手臂水平,并伸至全长,静止, $m_2 = 5\text{kg}$ 。

(2) 手臂水平,并伸至全长,转动和伸缩都以最大速率运动, $m_2 = 5\text{kg}$ 。

(3) 手臂水平,并伸至全长,承受最大转动加速度, $m_2 = 5\text{kg}$ 。

求解情况(1)

$$T_\theta = (m_1 r_1 + m_2 r) g \cos\theta = D_1 = 196\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$$

求解情况(2)

$$T_\theta = D_1 + 2m_2 r \dot{r} \dot{\theta} = 216\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$$

求解情况(3)

$$T_\theta = D_1 + (m_1 r_1^2 + m_2 r^2) \ddot{\theta} = 226\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$$

经分析可知,力矩中重力项通常远大于其他项,且重力项随角度变化很大;惯性力项通常大于科氏力项和向心力项。

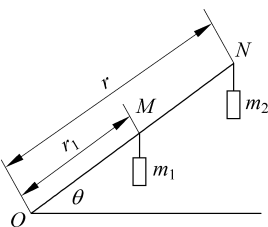


图 3.14 例 3.5 示意图

3.4 倒立摆案例

一阶小车直线倒立摆的结构如图 3.15 所示。图中, θ 为倒立摆体摆动角度, r 为皮带轮半径。



视频讲解



视频讲解

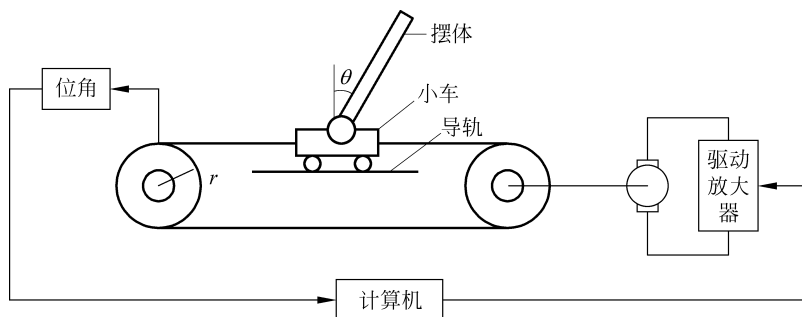


图 3.15 倒立摆系统结构图

为便于建模,假设:

- (1) 除皮带外,全部对象(摆体、小车、导轨等)均视为刚体;
- (2) 各部分的摩擦力(力矩)与相对速度(角速度)成正比;
- (3) 施加在小车上的驱动力与加在功率放大器上的输入电压 u 成正比,比例系数设为 G_0 ;
- (4) 皮带轮与传送带之间无滑动,传送带无伸长现象;
- (5) 信号与力的传递无延时。

首先需计算均匀杆(长度为 $2L$, 质量为 m)的转动惯量。当均匀杆绕一端转动时,其转动惯量为

$$J = \int_0^{2L} l^2 \rho dl = \frac{8}{3} \rho L^3, \quad \rho = \frac{m}{2L}, \quad J = \frac{4}{3} mL^2$$

杆相对质心的转动惯量为

$$J_c = \int_{-L}^L l^2 \rho dl = \frac{1}{3} mL^2$$

所以

$$J = J_c + mL^2$$

3.4.1 牛顿-欧拉法倒立摆动力学建模

1. 小车部分

小车部分的受力分析如图 3.16 所示。

图中, m_0 表示小车质量; N 表示轨道反力; F_0 表示小车滑动摩擦系数; f_x 表示摆体对小车作用力的水平分量; f_y 表示摆体对小车作用力的垂直分量。

考虑到小车只有水平方向(X)的运动,故可列写小车运动方程

$$m_0 \ddot{r} = G_0 u - f_x - F_0 \cdot \dot{r} \quad (3.27)$$

2. 摆体部分

摆体部分的受力分析如图 3.17 所示。

图中, m_1 表示摆体质量; L 表示摆体质心 c 到支点距离; F_1 表示摆体转动摩擦系数; J_{1c} 表示摆体绕质心转动惯量; J_1 表示摆体绕支点的转动惯量; f'_x 小车对摆体作用力的水平分量; f'_y 小车对摆体作用力的垂直分量。

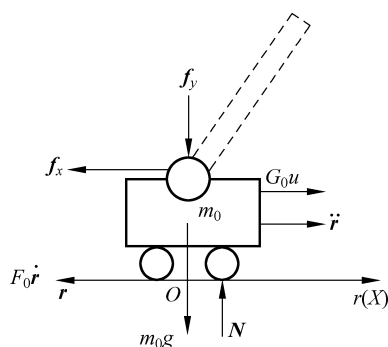


图 3.16 小车受力分析图

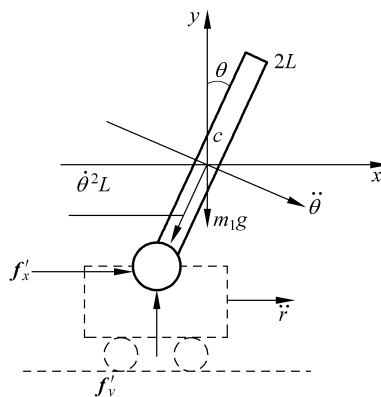


图 3.17 摆杆受力分析图

考虑到摆体为一平面运动体,则其运动可以分解为平动和绕质心转动两部分,质心加速度等于质心平动加速度和绕质心转动加速度之和。

计算质心加速度。水平分量为

$$a_{cx} = \ddot{r} + \ddot{\theta}L \cos \theta - \dot{\theta}^2 L \sin \theta$$

垂直分量为

$$a_{cy} = -(\ddot{\theta}L \sin \theta + \dot{\theta}^2 L \cos \theta)$$

列写摆体动力学方程式(平动部分)

$$f'_x = m_1 a_{cx} = m_1 (\ddot{r} + \ddot{\theta}L \cos \theta - \dot{\theta}^2 L \sin \theta)$$

$$f'_y - m_1 g = m_1 a_{cy} \quad f'_y = m_1 a_{cy} + m_1 g$$

$$f'_y = -m_1 (\ddot{\theta}L \sin \theta + \dot{\theta}^2 L \cos \theta) + m_1 g$$

列写摆体动力学方程式(转动部分)

$$J_{1c} \ddot{\theta} = -f'_x L \cos \theta + f'_y L \sin \theta - F_1 \dot{\theta}$$

代入 f'_x 、 f'_y , 整理可得

$$J_{1c} \ddot{\theta} = -m_1 (\ddot{r} + \ddot{\theta}L \cos \theta - \dot{\theta}^2 L \sin \theta) \cdot L \cos \theta$$

$$- [m_1 (\ddot{\theta}L \sin \theta + \dot{\theta}^2 L \cos \theta) - m_1 g] L \sin \theta - F_1 \dot{\theta}$$

$$J_{1c} \ddot{\theta} = -m_1 L \cos \theta \cdot \ddot{r} - m_1 L^2 \cos^2 \theta \cdot \ddot{\theta} + m_1 L^2 \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot \dot{\theta}^2 - m_1 L^2 \sin^2 \theta \cdot \ddot{\theta}$$

$$- m_1 L^2 \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot \dot{\theta}^2 + m_1 g L \sin \theta - F_1 \dot{\theta}$$

$$J_{1c} \ddot{\theta} = -m_1 L^2 \ddot{\theta} - m_1 L \cos \theta \cdot \ddot{r} + m_1 g L \sin \theta - F_1 \dot{\theta}$$

$$(J_{1c} + m_1 L^2) \ddot{\theta} + m_1 L \cos \theta \cdot \ddot{r} = m_1 g L \sin \theta - F_1 \dot{\theta}$$

令

$$J_1 = J_{1c} + m_1 L^2$$

$$m_1 L \cos \theta \cdot \ddot{r} + J_1 \ddot{\theta} = m_1 g L \sin \theta - F_1 \dot{\theta}$$

将 $f_x = f'_x$ 代入小车式 (3.27), 可得

$$m_0 \ddot{\mathbf{r}} = G_0 u - \mathbf{f}_x - F_0 \cdot \dot{\mathbf{r}} = G_0 u - m_1 (\ddot{\mathbf{r}} + \ddot{\theta} L \cos \theta - \dot{\theta}^2 L \sin \theta) - F_0 \cdot \dot{\mathbf{r}}$$

$$(m_0 + m_1) \ddot{\mathbf{r}} + m_1 L \cos \theta \cdot \ddot{\theta} = G_0 u + m_1 \dot{\theta}^2 L \sin \theta - F_0 \cdot \dot{\mathbf{r}}$$

二方程联立, 可得矩阵形式

$$\begin{bmatrix} m_0 + m_1 & m_1 L \cos \theta \\ m_1 L \cos \theta & J_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{r}} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_0 & -m_1 L \sin \theta \cdot \dot{\theta} \\ 0 & F_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -m_1 g L \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_0 u \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

对应于动力学一般形式

$$\mathbf{M}(q) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(q, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(q) = \boldsymbol{\tau} \quad (3.29)$$

从左向右, 依次称为惯性项、向心项哥氏项、重力项和广义力项。

3.4.2 拉格朗日方程法倒立摆动力学建模

应用非保守系统的拉格朗日方程, 则小车和摆体的动能、势能和耗散能分别为

$$T_0 = \frac{1}{2} m_0 \dot{\mathbf{r}}^2, \quad V_0 = 0, \quad D_0 = \frac{1}{2} F_0 \dot{\mathbf{r}}^2$$

$$T_1 = \frac{1}{2} J_{1c} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_1 \left\{ \left[\frac{d}{dt} (r + L \sin \theta) \right]^2 + \left[\frac{d}{dt} (L \cos \theta) \right]^2 \right\}$$

$$V_1 = m_1 g L \cos \theta, \quad D_1 = \frac{1}{2} F_1 \dot{\theta}^2$$

当 $q_i = r$ 时, $F_{q_i} = G_0 u$ 。

当 $q_i = \theta$ 时, $F_{q_i} = 0$, 于是有

$$T = T_0 + T_1 = \frac{1}{2} m_0 \dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{1}{2} J_{1c} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_1 [(\dot{\mathbf{r}} + L \cos \theta \cdot \dot{\theta})^2 + (-L \sin \theta \cdot \dot{\theta})^2]$$

$$V = V_0 + V_1 = m_1 g L \cos \theta, \quad D = D_0 + D_1 = \frac{1}{2} F_0 \dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{1}{2} F_1 \dot{\theta}^2$$

当 $q_i = r$ 时, 即对小车而言

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = m_0 \dot{\mathbf{r}} + m_1 (\dot{\mathbf{r}} + L \cos \theta \cdot \dot{\theta}) = (m_0 + m_1) \dot{\mathbf{r}} + m_1 L \cos \theta \cdot \dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \right) = (m_0 + m_1) \ddot{\mathbf{r}} + m_1 L (-\sin \theta \cdot \dot{\theta}^2 + \cos \theta \cdot \ddot{\theta})$$

$$= (m_0 + m_1) \ddot{\mathbf{r}} + m_1 L \cos \theta_1 \cdot \ddot{\theta} - m_1 L \sin \theta_1 \cdot \dot{\theta}^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = F_0 \dot{\mathbf{r}}$$

当 $q_i = \theta$ 时, 即对摆体而言

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = J_{1c} \dot{\theta} + m_1 (\dot{\mathbf{r}} L \cos \theta + L^2 \cos^2 \theta \cdot \dot{\theta} + L^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\theta}) = J_{1c} \dot{\theta} + m_1 (\dot{\mathbf{r}} L \cos \theta + L^2 \dot{\theta})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) = J_{1c} \ddot{\theta} + m_1 L (\ddot{\mathbf{r}} \cos \theta - \dot{\mathbf{r}} \sin \theta \cdot \dot{\theta} + L \ddot{\theta})$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = -m_1 L \dot{r} \sin \theta \cdot \dot{\theta}, \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} = -m_1 g L \sin \theta, \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = F_1 \dot{\theta}$$

得到单级倒立摆的动力学方程为

$$\begin{bmatrix} m_0 + m_1 & m_1 L \cos \theta \\ m_1 L \cos \theta & J_{1c} + m_1 L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{r} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_0 & -m_1 L \sin \theta \cdot \dot{\theta} \\ 0 & F_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_0 u \\ m_1 g L \sin \theta \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

于是可以得到与式(3.28)相同的结果。

当考虑在不稳定平衡点附近的线性化时,可令

$$\cos \theta \approx 1, \quad \sin \theta \approx \theta, \quad \sin \theta \cdot \dot{\theta} \approx 0, \quad \theta \approx 0$$

于是可得简化动力学方程

$$\begin{bmatrix} m_0 + m_1 & m_1 L \\ m_1 L & J_{1c} + m_1 L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{r} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_0 & 0 \\ 0 & F_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_0 u \\ m_1 g L_1 \theta \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

3.4.3 拉格朗日函数法倒立摆动力学建模

本节应用拉格朗日函数,也可以求解倒立摆动力学建模问题。

建立 Lagrange 函数

$$L = T - V$$

小车部分

$$T_0 = \frac{1}{2} m_0 \dot{r}^2, \quad V_0 = 0$$

摆体部分

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2} J_{1c} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_1 \left\{ \left[\frac{d}{dt} (r + l_1 \sin \theta) \right]^2 + \left[\frac{d}{dt} (l_1 \cos \theta) \right]^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2} J_{1c} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{r}^2 + m_1 l_1 \dot{r} \dot{\theta} + \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}^2 \\ V_1 &= m_1 g l_1 \cos \theta \end{aligned}$$

则

$$L = \frac{1}{2} (m_0 + m_1) \dot{r}^2 + \frac{1}{2} (J_{1c} + m_1 l_1^2) \dot{\theta}^2 + m_1 l_1 \dot{r} \dot{\theta} - m_1 g l_1 \cos \theta$$

对于小车(r)而言, L 求偏导和导数,可得

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = (m_0 + m_1) \dot{r} + m_1 l_1 \dot{\theta}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = (m_0 + m_1) \ddot{r} + m_1 l_1 \ddot{\theta}, \quad \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

对应广义坐标 r 的广义力为

$$F_r = G_0 u - F_0 \dot{r}$$

可得第一个方程

$$G_0 u - F_0 \dot{r} = (m_0 + m_1) \ddot{r} + m_1 l_1 \ddot{\theta}$$

对于摆杆 θ 而言, L 求偏导和导数,可得

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = (J_{1c} + m_1 l_1^2) \dot{\theta} + m_1 l_1 \dot{r} = J_1 \dot{\theta} + m_1 l_1 \dot{r},$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = J_1 \ddot{\theta} + m_1 l_1 \ddot{r}, \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = m_1 g l_1 \sin \theta \doteq m_1 g l_1 \theta$$

对应广义坐标 θ 的广义力为 $-F_1 \dot{\theta}^2$ 。可得第二个方程

$$-F_1 \dot{\theta} = J_1 \ddot{\theta} + m_1 l_1 \ddot{r} - m_1 g l_1 \theta$$

写成矩阵形式,便得到与前两种方法在平衡点附近线性化后相同的结果。

$$\begin{bmatrix} m_0 + m_1 & m_1 l_1 \\ m_1 l_1 & J_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{r} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_0 & 0 \\ 0 & F_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_0 u \\ m_1 g l_1 \theta \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

3.5 小结

本章阐述了典型的坐标系,以及动静坐标系之间的齐次变换矩阵;利用 D-H 参数建立起相互由运动副链接的运动体内部各连杆之间的坐标变换关系;以 6 自由度双腿机器人为例,论述了多连杆复杂系统的位置运动学的建模方法和逆问题求解方法,关键是理清运动之间的传递关系及动静坐标转换;给出了速度运动学建模方法;以 6 自由度双腿机器人为例,论述了单腿支撑和双腿支撑状态下,系统的动力学建模方法和逆问题求解方法;而后推广应用到 12 自由度步行机器人的运动学和动力学建模中;结合实际案例分析了拉格朗日和牛顿-欧拉建模方法的优劣;建立了小车倒立摆案例系统的完整动力学模型。

习题

3.1 如图 3.18 所示,手坐标上长度为 1 的矢量 a ,先沿 z 轴移动 10 为 b ,再分别绕 x 轴和 x_H 轴转 90° 为 c 和 d ,通过齐次变换矩阵运算,求解 b 、 c 、 d 矢量值,写出求解过程,并注意运算中的左、右乘关系。

3.2 列写图 3.19 所示转动-平动三关节手臂运动学方程(坐标变换矩阵),包括建立坐标、各关节 D-H 参数、各关节变换矩阵,综合得到手臂运动学方程。

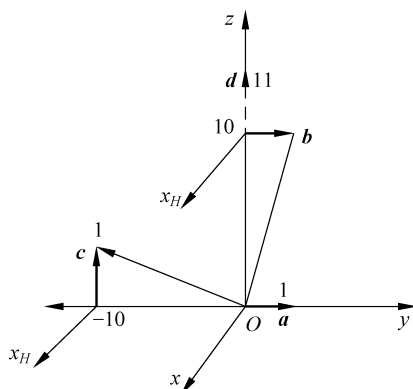


图 3.18 习题 3.1 示意图

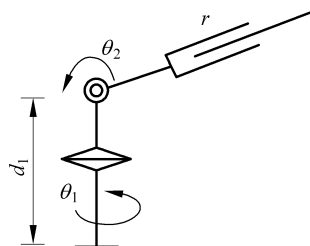


图 3.19 习题 3.2 示意图

3.3 设手坐标上向量 $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ 1 \end{bmatrix}$, 先沿 z 轴移动 10 为 $\mathbf{b}$, 再绕 x 轴转 90° 为 $\mathbf{c}$, 最后绕

x_H 轴转 90° 为 $\mathbf{d}$ 。分别求解 $\mathbf{b}$ 、 $\mathbf{c}$ 、 $\mathbf{d}$ 向量值, 写出计算过程。

3.4 以人体手臂为对象(肩关节有 3 个转动自由度, 肘关节有 1 个转动自由度, 腕关节有 2 个转动自由度), 建立机构简图, 并建立运动学模型。

3.5 以人体手臂为对象(肩关节有 2 个转动自由度, 肘关节有 1 个转动自由度, 不考虑腕关节和手掌), 建立机构简图, 并建立动力学模型。

3.6 测量个人手臂的机构参数和关节转动角度范围, 并代入习题 3.5 所得的运动学模型, 利用 MATLAB 求解人体躯干保持静止时, 拳头可达工作空间的具体数值。

3.7 简述运动学正问题和运动学逆问题。

3.8 编程题: 求解图 3.20 所示运动机构在摆动过程膝关节中心点、踝关节中心点和

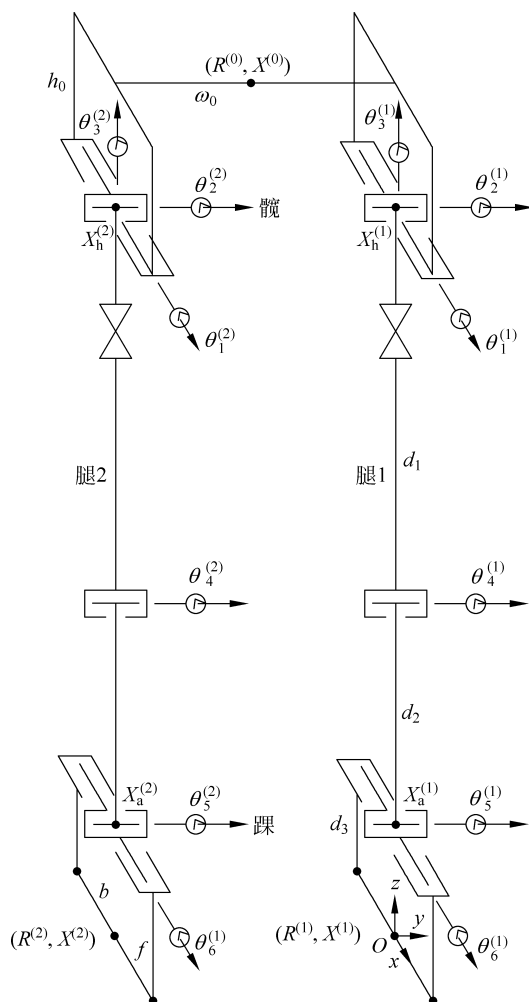


图 3.20 习题 3.8 示意图

脚跟、脚尖点的运动轨迹,画图表示运动轨迹。运动中,髋关节中心点 $(R^{(0)}, X^{(0)})$ 固定,摆角运动给定为(仅供参考,参数可自己修改)

$$\theta_1^{(1)} = -\theta_1^{(2)} = \sin(3t), \quad \theta_2^{(1)} = -\theta_2^{(2)} = \sin(5t), \quad \theta_3^{(1)} = -\theta_3^{(2)} = \sin(4t)$$

摆动时长 t 为 0.8s,机构参数通过测量个人的双腿得到。

以直立为初始姿态,此时各个角度的初值为 0。

3.9 求图 3.21 所示的 2 自由度机械手的雅可比矩阵。

3.10 求解 θ - r 操作机的雅可比矩阵及其逆矩阵。

3.11 利用牛顿-欧拉方法建立图 3.22 所示圆轨一级倒立摆的动力学模型。

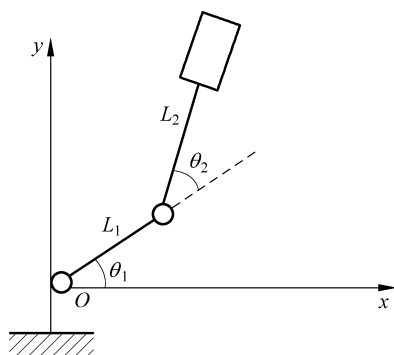


图 3.21 习题 3.9 示意图

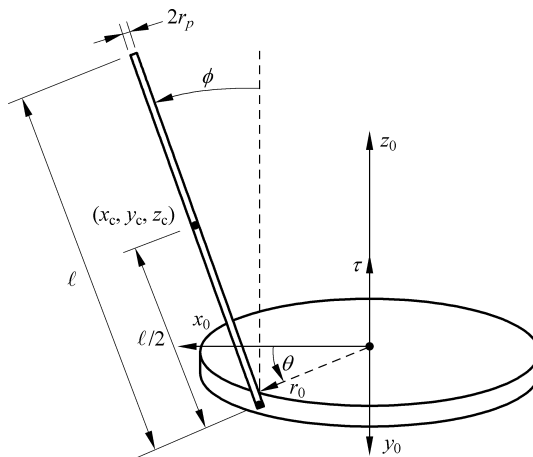


图 3.22 习题 3.11 示意图