第5章 离散时间信号与系统频域分析

连续时间傅里叶分析在分析和了解连续时间信号与系统的性质中起到了很重要的作用。同样，离散时间傅里叶分析对离散时间信号与系统的研究也起着极为重要的作用。特别是目前随着计算机的广泛应用和功能的日益扩大，离散时间信号与系统分析技术有了突飞猛进的发展。

离散时间傅里叶分析与连续时间傅里叶分析之间有许多相似之处。例如，可以把离散时间信号表示成复指数信号的线性组合。但在它们之间也存在着某些不同之处。例如，一个离散时间周期性信号的傅里叶级数是一个有限项级数，而不像连续时间信号的傅里叶级数是一个无穷级数。本章通过对两类系统相似处的讨论来加深对傅里叶分析法的理解，同时利用它们之间的差别来研究离散时间系统的特性。

导图

5.1 离散时间信号的傅里叶变换

5.1.1 抽样信号的频谱

抽样是从连续到离散的过渡，离散时间信号可以用于表示连续时间信号的抽样值，因此，离散时间信号的频域表示与抽样信号的频谱有内在的联系。本节将从抽样信号的频谱引出对离散时间信号进行频域分析的方法，即离散时间傅里叶变换。

对连续时间信号 $x_a(t)$ 以时间间隔 T_s 进行冲激串抽样，根据 4.10.1 节，可以写出抽样后连续时间信号的时域和频域表达式。

$$x_s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT_s)\delta(t-nT_s) \tag{5.1.1}$$

$$X_s(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_a(\mathrm{j}\omega-\mathrm{j}k\omega_s) \tag{5.1.2}$$

式(5.1.2)描述了抽样信号的频谱与原信号频谱的关系：通过原信号频谱的周期延拓可以得到抽样信号的频谱。从另一个角度看，也可以直接对式(5.1.1)进行傅里叶变换求得抽样信号的频谱：

$$\begin{aligned}X_s(\mathrm{j}\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty}x_s(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT_s)\delta(t-nT_s)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_a(nT_s)\delta(t-nT_s)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT_s)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T_s n}\end{aligned} \tag{5.1.3}$$

由于 $x_a(t)$ 的傅里叶变换存在，因此上述推导过程中的求和及积分都是收敛的，在推导中对二者进行了换序。式(5.1.3)表明，可以根据连续时间信号的抽样值采用求和的方式

求得抽样信号的频谱，并且由于傅里叶变换的唯一性，式(5.1.3)与式(5.1.2)必然是相等的。因此式(5.1.3)的结果也将是以 $2\pi/T_s$ 为周期的周期函数，这一点也可以从 $e^{-j\omega T_s n}$ 的周期性得到验证，即

$$e^{-j\left(\omega+\frac{2\pi}{T_s}\right)T_s n}=e^{-j(\omega T_s n+2\pi n)}=e^{-j\omega T_s n}$$

抽样的目的之一就是使用数字设备对信号进行处理，例如进行频谱分析。抽样定理表明，当 T_s 小于奈奎斯特抽样间隔时，式(5.1.3)的基本周期就能反映原信号的频谱，此时式(5.1.3)提供了基于抽样值进行频谱分析的方法。

为了进一步简化表达，将抽样值表示为一个离散时间信号 $x(n)$：

$$x(n)=x_a(nT_s)$$

从离散时间信号的观点来看，已不再关注抽样间隔 T_s 的具体值，因此定义新的频率变量

$$\Omega=\omega T_s \tag{5.1.4}$$

式(5.1.3)变为

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\Omega n} \tag{5.1.5}$$

$X(\Omega)$是在引入了 $x(n)$和 Ω 之后定义的新的函数，它与 $X_s(j\omega)$存在以下对应关系：

$$X(\Omega)=X_s\left(j\frac{\Omega}{T_s}\right)$$

由于 $X_s(j\omega)$以 $2\pi/T_s$ 为周期，根据式(5.1.4)，$X(\Omega)$将以 2π 为周期，这也可以从式(5.1.5)得到验证。由于

$$e^{-j(\Omega+2\pi)n}=e^{-j(\Omega n+2\pi n)}=e^{-j\Omega n}$$

因此根据式(5.1.5)求得的 $X(\Omega)$将以 2π 为周期。

$X(\Omega)$可以看作基于连续时间信号的抽样值进行频谱分析的结果，反映了被抽样的连续时间信号的频域特性。式(5.1.5)又说明，$X(\Omega)$可以完全基于离散时间信号 $x(n)$计算得到，因此在 5.1.2 节中，它将被定义为离散时间信号的频谱，从而引出直接对离散时间信号进行频域分析的方法。

5.1.2 离散时间傅里叶变换

对离散时间信号 $x(n)$，定义其傅里叶变换 $X(\Omega)$为

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\Omega n} \tag{5.1.6}$$

为与连续时间信号的傅里叶变换相区别，式(5.1.6)称为**离散时间傅里叶变换**(Discrete Time Fourier Transform)，简记为 DTFT，Ω 称为**数字角频率**。从 5.1.1 节的分析可以知道，$X(\Omega)$一般是 Ω 的连续函数，并且以 2π 为周期。

$$X(\Omega)=X(\Omega+2\pi k),\quad k\text{ 为任意整数}$$

从形式上看，$x(n)$的时域离散间隔是1，因此其频域的周期是2π，时域的离散性造成了频域的周期性。

考虑式(5.1.6)无穷级数求和的收敛问题，保证这个和式收敛的条件与连续时间傅里叶变换的收敛条件是对应的。如果$x(n)$是绝对可和的，即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|<\infty \tag{5.1.7}$$

那么式(5.1.6)就一定收敛，$x(n)$的傅里叶变换存在。

式(5.1.6)对应的反变换为

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(\Omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega n}\,\mathrm{d}\Omega \tag{5.1.8}$$

其中，$\int_{2\pi}(\cdot)\mathrm{d}\Omega$表示在任意一个长度为$2\pi$的连续区间内积分。由于式(5.1.8)等号右边的被积函数以2π为周期，因此式(5.1.8)等号右边的积分区间取任意一个长度为2π的连续区间，结果都相同。

下面给出式(5.1.8)的证明：

将式(5.1.6)代入式(5.1.8)等号右边的表达式，有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(\Omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega n}\,\mathrm{d}\Omega&=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega m}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega n}\,\mathrm{d}\Omega\\&=\frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(x(m)\int_{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega(n-m)}\,\mathrm{d}\Omega\right)\end{aligned}$$

由于$x(n)$满足绝对可和的条件，积分与求和运算可以换序。

又由于

$$\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega(n-m)}\,\mathrm{d}\Omega=\delta(n-m) \tag{5.1.9}$$

因此

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(x(m)\int_{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega(n-m)}\,\mathrm{d}\Omega\right)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)=x(n)$$

证毕。

式(5.1.9)是证明过程中的一个关键步骤，可以通过对$n=m$和$n\neq m$两种情况的分别讨论进行验证。

至此，得到了完整的离散时间傅里叶变换对$x(n)$与$X(\Omega)$，记作$x(n)\leftrightarrow X(\Omega)$。

离散时间傅里叶变换：

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega n}$$

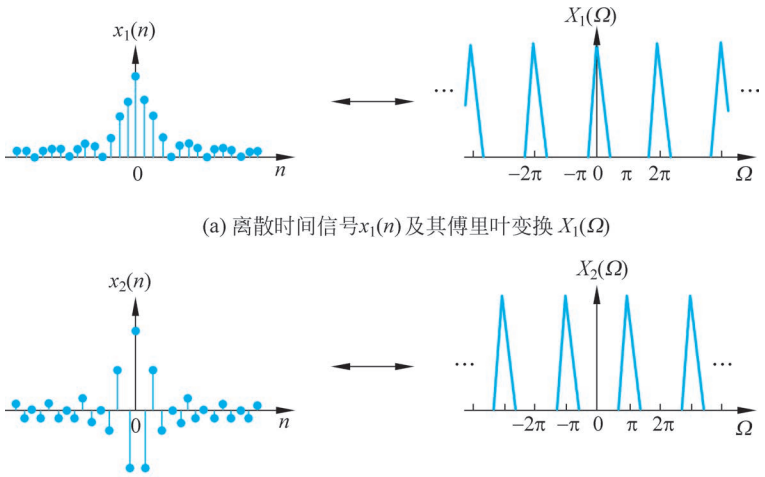
离散时间傅里叶反变换：

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(\Omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega n}\,\mathrm{d}\Omega$$

类比 4.4.2 节对连续时间傅里叶变换的分析，可以理解反变换表达式的物理意义：$x(n)$可表示成复指数信号 $e^{j\Omega n}$ 的线性组合，这些复指数信号在频率上是无限靠近的，它们的幅度是 $X(\Omega)(d\Omega/2\pi)$，用以合成 $x(n)$的复指数信号的频率分布在任意一个连续的 2π 区间内。因此，像连续时间情况一样，$X(\Omega)$称为离散时间傅里叶变换，也称为 $x(n)$的频谱。因为它表示了 $x(n)$是怎样由这些不同频率的复指数信号组成的。

由以上分析可见，离散时间傅里叶变换和连续时间傅里叶变换具有很多相同点。两者的主要差别就在于离散时间傅里叶变换 $X(\Omega)$的周期性，以及反变换式的积分限为有限区间 2π，这是因为在频率上相差 2π 的离散时间复指数信号是完全相同的。

由于 $e^{j\Omega n}$ 具有周期性，也就是在 $\Omega=0$ 和 $\Omega=2k\pi, k\neq 0$ 整数处信号值相同，因此靠近这些值或任何其他 π 的偶数倍的 Ω，都对应于信号的低频部分，而靠近 π 的奇数倍的 Ω 都对应于信号的高频部分。为此，在图 5.1.1 中分别画出了两个序列 $x_1(n)$和 $x_2(n)$，及其变换 $X_1(\Omega)$和 $X_2(\Omega)$。从频谱来看，$X_1(\Omega)$集中于 $\Omega=0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \cdots$附近，而 $X_2(\Omega)$则主要集中在 $\Omega=\pm\pi, \pm 3\pi, \cdots$附近，说明序列 $x_1(n)$是低频信号，序列 $x_2(n)$是高频信号；从时域波形看，序列 $x_1(n)$比序列 $x_2(n)$变化得慢。



(a) 离散时间信号$x_1(n)$及其傅里叶变换 $X_1(\Omega)$

(b) 离散时间信号$x_2(n)$及其傅里叶变换 $X_2(\Omega)$

图 5.1.1　离散时间信号及其傅里叶变换

下面举例说明离散时间傅里叶变换。

仿真求解

例 5.1.1　求 $x(n)=a^n u(n), |a|<1$ 的离散时间傅里叶变换。

解：由式(5.1.6)得

$$X(\Omega)=\sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\Omega n}=\sum_{n=0}^{\infty}(a e^{-j\Omega})^n$$

这是一个公比为 $a e^{-j\Omega}$ 的无穷几何级数，因此只要 $|a e^{-j\Omega}|<1$，就有

$$X(\Omega)=\frac{1}{1-a e^{-j\Omega}}$$

因为 $|e^{-j\Omega}|=1$，这就意味着若 $|a|\geqslant 1$，$X(\Omega)$不收敛，即不存在离散时间傅里叶变换。

若$|a|<1$，有

$$X(\Omega)=\frac{1}{1-a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}},\quad |a|<1$$

即

$$X(\Omega)=\frac{1}{1-a\cos\Omega+\mathrm{j}a\sin\Omega}$$

所以有

$$|X(\Omega)|=\frac{1}{\sqrt{(1-a\cos\Omega)^2+(a\sin\Omega)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+a^2-2a\cos\Omega}}$$

$$\angle X(\Omega)=-\arctan\frac{a\sin\Omega}{1-a\cos\Omega}$$

图5.1.2(a)所示为当$a=0.8$时，指数信号$x(n)=a^n u(n)$波形图，图5.1.2(b)、(c)所示为其频谱图。可以看出，频谱是Ω的连续且周期为2π的周期函数。幅度谱$|X(\Omega)|$和相位谱$\angle X(\Omega)$分别是Ω的偶函数和奇函数。

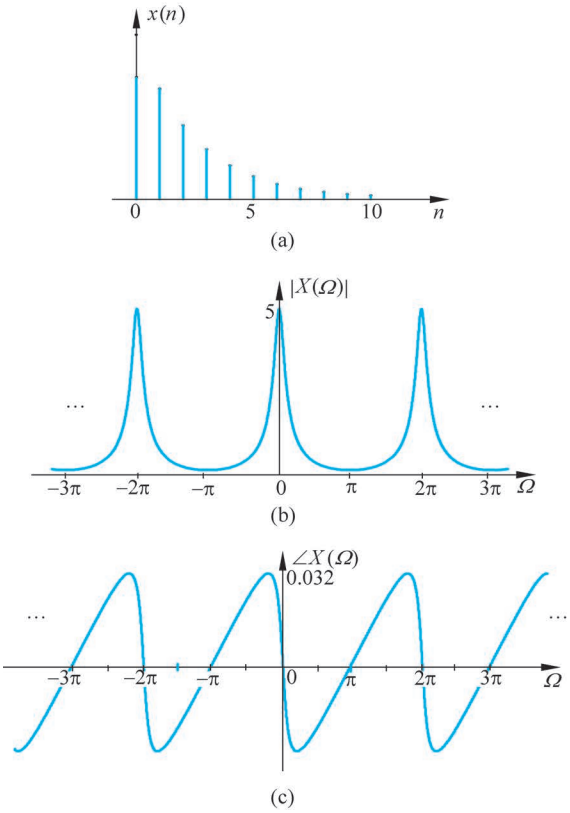


图5.1.2 指数信号$a^n u(n)$及其傅里叶变换

例5.1.2 有一矩形脉冲序列

$$x(n)=\begin{cases}1, & |n|\leqslant N_1\\ 0, & |n|>N_1\end{cases}$$

试求$x(n)$的傅里叶变换$X(\Omega)$，并画出$N_1=4$时的频谱图。

仿真求解

解： 由式(5.1.6)，$x(n)$的傅里叶变换为

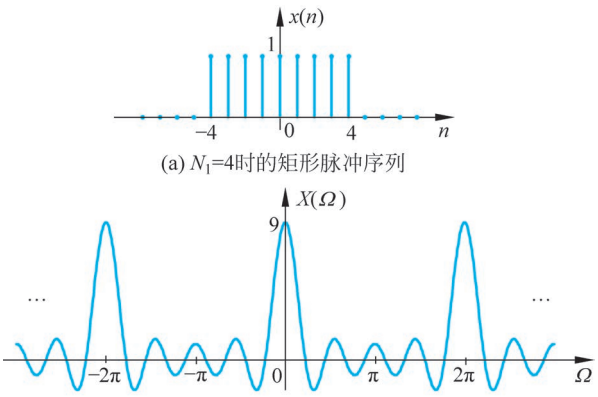
$$X(\Omega)=\sum_{n=-N_1}^{N_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega n}$$

这是一个公比为 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}$ 的级数，由等比求和公式得

$$X(\Omega)=\frac{\sin\Omega\left(N_1+\frac{1}{2}\right)}{\sin(\Omega/2)}$$

当 $N_1=4$ 时，有 $$X(\Omega)=\frac{\sin(4.5\Omega)}{\sin(0.5\Omega)}$$

其频谱图如图 5.1.3(b)所示。



(a) N_1=4时的矩形脉冲序列

(b) 对应的傅里叶变换

图 5.1.3　离散时间矩形脉冲及其傅里叶频谱

这个例子与连续时间的矩形脉冲相类比，矩形脉冲信号的频谱为 $\sin x/x$ 函数形式。而矩形脉冲序列的谱必为周期性的，则与 $\sin x/x$ 函数相对应，矩形脉冲序列的谱为 $\sin Bx/\sin x$ 函数形式，像所有离散时间傅里叶变换一样是周期的，其周期为 2π。

仿真求解

例 5.1.3　若 $x(n)$是一个单位样值序列，即 $x(n)=\delta(n)$，试求 $x(n)$的傅里叶变换 $X(\Omega)$。

解： 由式(5.1.6)，$x(n)$的傅里叶变换为

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega n}=1$$

这与连续时间情况一样，单位样值序列的傅里叶变换在所有频率上都是相等的。图 5.1.4 给出了单位样值序列及其频谱的示意图。

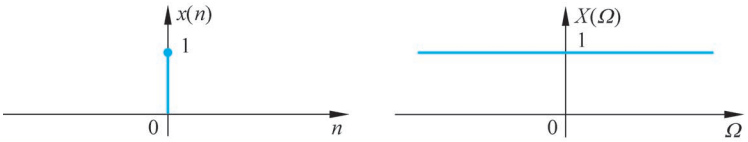


图 5.1.4　单位样值序列及其傅里叶频谱

例 5.1.4 求频谱为 $X(\Omega)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-2\pi k)$ 的序列 $x(n)$。

解： 根据式(5.1.8)，并将积分区间选为$(-\pi,\pi]$，在此区间内有 $X(\Omega)=2\pi\delta(\Omega)$，因此

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(\Omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega n}\,\mathrm{d}\Omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}2\pi\delta(\Omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega n}\,\mathrm{d}\Omega=\int_{-\pi}^{\pi}\delta(\Omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega n}\,\mathrm{d}\Omega=1$$

$x(n)=1$ 说明 $x(n)$是一个函数值恒为 1 的常数序列。图 5.1.5 给出了常数序列及其频谱的示意图。由于常数序列只有直流分量，这个变换对也再次验证了，在数字频率域中，$\Omega=0,\pm2\pi,\pm4\pi,\cdots$，对应的复指数信号都是直流分量。需要说明的是，常数序列并不满足式(5.1.7)给出的绝对可和的条件，因此其傅里叶变换中出现了冲激函数。与连续时间傅里叶变换类似，在频域引入冲激函数后，傅里叶变换的适用范围扩大了，一些不满足绝对可和的序列也可以求出离散时间傅里叶变换，在 5.1.4 节将给出更多的例子。

仿真求解

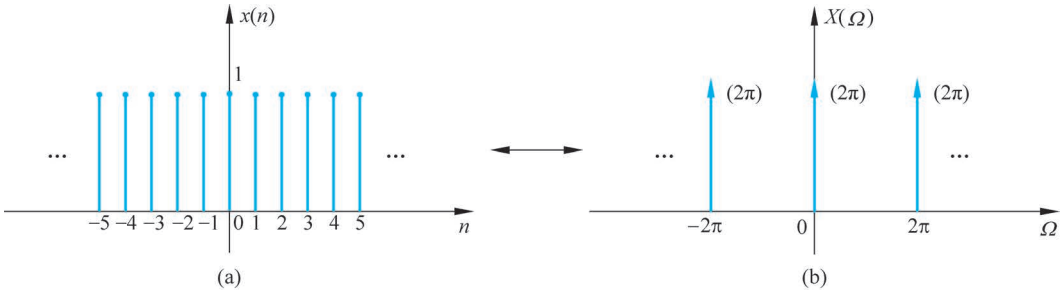


图 5.1.5 常数序列及其傅里叶频谱

5.1.3 离散时间傅里叶变换性质

离散时间傅里叶变换和连续时间傅里叶变换一样，也具有很多重要的性质。同样可以简化一个信号正变换和反变换的求取，这些性质与连续时间情况下相比有很多相似之处，但是也有若干明显的差别。

1. 周期性

离散时间傅里叶变换对 Ω 来说，总是周期的，其周期为 2π，这一点是与连续时间傅里叶变换不同的。

2. 线性性

如果

$$x_1(n)\leftrightarrow X_1(\Omega),\quad x_2(n)\leftrightarrow X_2(\Omega)$$

则

$$ax_1(n)+bx_2(n)\leftrightarrow aX_1(\Omega)+bX_2(\Omega)$$

其中，a、b 为常数。

3. 对称性

如果
$$x(n) \leftrightarrow X(\Omega)$$
则
$$x^*(n) \leftrightarrow X^*(-\Omega)$$

若信号 $x(n)$ 是实信号，即 $x(n)=x^*(n)$，这意味着有 $X(\Omega)=X^*(-\Omega)$，即 $X(\Omega)$ 是共轭对称的。实信号 $x(n)$ 的频谱 $X(\Omega)$ 一般是复函数，又可写成
$$X(\Omega)=|X(\Omega)|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\angle X(\Omega)}$$

由于 $X(\Omega)$ 的共轭对称性，对实信号 $x(n)$ 可得
$$|X(\Omega)|=|X(-\Omega)|$$
$$\angle X(\Omega)=-\angle X(-\Omega)$$

可见对于实信号 $x(n)$，幅度谱 $|X(\Omega)|$ 是 Ω 的偶函数，相位谱 $\angle X(\Omega)$ 是 Ω 的奇函数。如例 5.1.1 和例 5.1.2 所示就是这种情况。

4. 时移和频移性质

如果
$$x(n) \leftrightarrow X(\Omega)$$
则
$$x(n-n_0) \leftrightarrow \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega n_0} X(\Omega) \tag{5.1.10}$$
而且
$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0 n} x(n) \leftrightarrow X(\Omega-\Omega_0) \tag{5.1.11}$$
此性质可直接根据傅里叶变换定义推导出来。

5. 差分与求和

离散时间情况下求和就相应于连续时间情况下的积分。而一阶差分就相应于连续时间情况下的一阶微分。

考虑一阶差分信号 $x(n)-x(n-1)$，根据线性和时移性质，其傅里叶变换为
$$x(n)-x(n-1) \leftrightarrow (1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega})X(\Omega)$$
再考虑信号
$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{n} x(m)$$
由于 $y(n)-y(n-1)=x(n)$，似乎可导出 $y(n)$ 的变换应为 $x(n)$ 的变换除以 $(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega})$，但是，正像连续时间积分性质一样，除此项以外还要增加一些项，其精确表达式为
$$\sum_{m=-\infty}^{n} x(m) \leftrightarrow \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}} X(\Omega)+\pi X(0)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-2\pi k) \tag{5.1.12}$$
式(5.1.12)的冲激序列反映了求和中可能出现的直流或平均值。由于 $x(n)=\delta(n)$ 时，$X(\Omega)=1$，

而
$$u(n)=\sum_{m=-\infty}^{n}\delta(m)$$

则

$$u(n) \leftrightarrow \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi k) \tag{5.1.13}$$

式(5.1.12)和式(5.1.13)的推导与连续时间积分性质类似。

6. 时间和频率尺度特性

由于离散时间信号在时间上的离散性，因此时间和频率的尺度特性与在连续时间情况下稍有不同。

如果 $$x(n) \leftrightarrow X(\Omega)$$

先求 $y(n)=x(-n)$ 的傅里叶变换：

$$\begin{aligned} Y(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega n} \end{aligned}$$

令 $m=-n$，可得 $$\begin{aligned} Y(\Omega) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(-\Omega)m} \\ &= X(-\Omega) \end{aligned}$$

即 $$x(-n) \leftrightarrow X(-\Omega) \tag{5.1.14}$$

显然，式(5.1.14)与连续时间情况是类似的，即信号在时间域中的翻转相应于在频域中其频谱的翻转。但是对于时间和频率尺度变换时其结果就不同了。

对于连续时间情况，时域尺度变换性质为

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\mathrm{j}\frac{\omega}{a}\right)$$

与上式相类似的离散时间情况如下，令 k 是一个正整数，定义一个信号

$$x_{(k)}(n) = \begin{cases} x(n/k), & n \text{ 是 } k \text{ 的倍数} \\ 0, & n \text{ 不是 } k \text{ 的倍数} \end{cases}$$

图 5.1.6 画出了 $k=3$ 时的 $x_{(3)}(n)$。

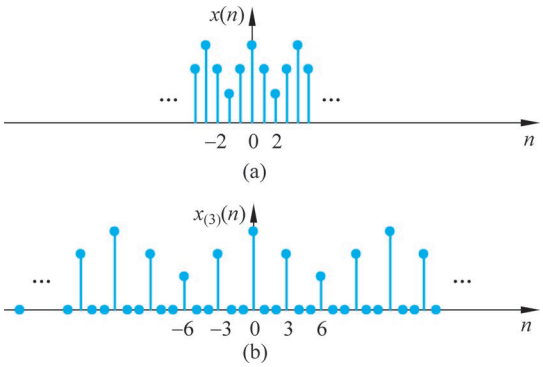


图 5.1.6 在序列 $x(n)$ 的每两个值之间插入两个零值而得到的序列 $x_{(3)}(n)$

显然，$x_{(k)}(n)$是在$x(n)$的连续值之间插入$(k-1)$个零值而得到的。直观上来看，可以将$x_{(k)}(n)$看作减慢了的$x(n)$，其傅里叶变换为

$$\begin{aligned}X_{(k)}(\Omega)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_{(k)}(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega n}\\&=\sum_{r=-\infty}^{\infty}x_{(k)}(rk)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega^{r}k}\\&=\sum_{r=-\infty}^{\infty}x(r)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(k\Omega)r}\\&=X(k\Omega)\end{aligned}$$

即

$$x_{(k)}(n)\leftrightarrow X(k\Omega) \tag{5.1.15}$$

式(5.1.15)又一次表明了时域和频域之间的反比关系。若$k>1$，则信号在时域中扩展了，随时间的变化减慢了，而它的傅里叶变换就压缩了。由于$X(\Omega)$是周期的，且周期为2π，因而$X(k\Omega)$也是周期的，其周期为$2\pi/|k|$。图5.1.7通过一个矩形脉冲序列的例子来说明这个性质。

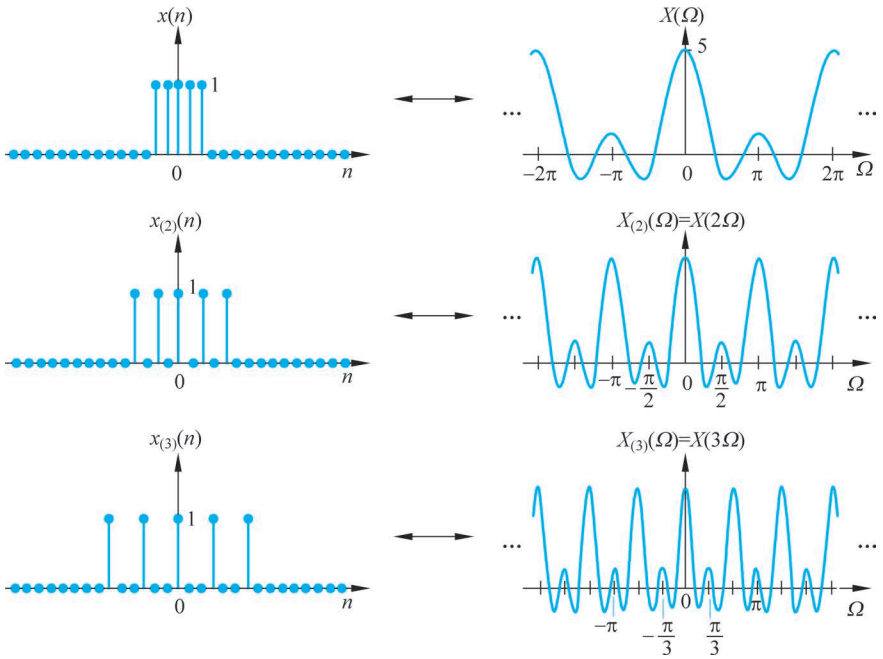


图 5.1.7　矩形脉冲序列时间和频率尺度特性

7. 频域微分

对式

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega n}$$

两边对 Ω 求微分可得

$$\frac{\mathrm{d}X(\Omega)}{\mathrm{d}\Omega}=-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{j}nx(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega n}$$

显然上式右边就是 $-\mathrm{j}nx(n)$ 的傅里叶变换，两边都乘以 j 可得到

$$nx(n)\leftrightarrow\mathrm{j}\frac{\mathrm{d}X(\Omega)}{\mathrm{d}\Omega} \tag{5.1.16}$$

8. 帕塞瓦尔定理

如果 $x(n)\leftrightarrow X(\Omega)$，则

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}|X(\Omega)|^2\mathrm{d}\Omega \tag{5.1.17}$$

这个关系类似于连续时间情况下的帕塞瓦尔定理。同样，式(5.1.17)的左边表示序列 $x(n)$ 在时域中的能量，右边表示其在频域中的能量，$|X(\Omega)|^2$ 称为**能量谱密度**。若 $x(n)$ 是周期序列，它的能量是无穷大，式(5.1.17)将不再适用。周期序列的帕塞瓦尔定理将在 5.2.3 节介绍。

9. 卷积性质

$$y(n)=x(n)*h(n) \tag{5.1.18}$$

则

$$Y(\Omega)=X(\Omega)H(\Omega)$$

其中，$X(\Omega)$、$H(\Omega)$ 和 $Y(\Omega)$ 分别是 $x(n)$、$h(n)$ 和 $y(n)$ 的傅里叶变换。式(5.1.18)的推导过程与连续时间情况下完全相同。

5.1.4 周期序列的离散时间傅里叶变换

一般来说，周期序列是功率信号，不满足绝对可和的条件，但从例 5.1.4 导出的变换对

$$1\leftrightarrow 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-2\pi k)$$

已经看到，在频域引入冲激函数后，可以对一些不满足绝对可和条件的序列求出傅里叶变换。本节将给出周期序列的离散时间傅里叶变换的一般形式，它们都包含一系列的冲激函数。学习周期序列的离散时间傅里叶变换有两个作用：①深刻认识时域周期性造成的频谱离散化，这一点在连续时间信号的频域分析中已经出现过，对于离散时间信号也是同样适用的，但由于离散时间信号的频谱还具有周期性，因此离散时间周期信号的频谱会有新的特点；②为引出离散时间周期信号的傅里叶级数展开做铺垫，离散时间信号的傅里叶级数展开是数字信号处理中广泛应用的快速傅里叶变换(Fast Fourier Transform，FFT)技术的基础。

仿真求解

例 5.1.5 求周期脉冲序列 $x(n)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta(n-lN)$ 的傅里叶变换。

解： 对图 5.1.5 中的常数序列在时域扩展 N 倍，可以得到周期为 N 的周期脉冲序列 $x(n)$，又由于

$$1\leftrightarrow 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-2\pi k)$$

根据式(5.1.15)的时间和频率尺度特性，有

$$X(\Omega)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(N\Omega-2\pi k)=\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\Omega-\frac{2\pi}{N}k\right)$$

图 5.1.8 给出了周期脉冲序列及其频谱的示意图。可以看出，随着时域内脉冲之间的间隔变长，在频域内冲激之间间隔就变小。类似于在连续时间情况下，时域与频域成反比的关系。

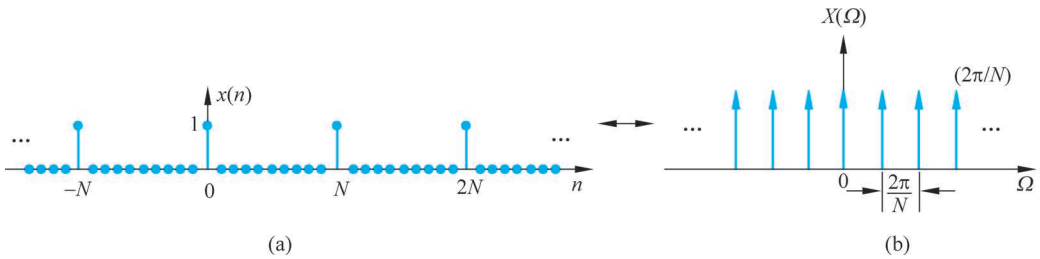


图 5.1.8 周期脉冲序列及其频谱

周期脉冲序列的傅里叶变换对

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta(n-lN)\leftrightarrow\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\Omega-\frac{2\pi}{N}k\right)\tag{5.1.19}$$

对于推导一般的周期序列的傅里叶变换有重要的作用。这是由于，周期序列可以看作有限长序列的周期延拓，而延拓的过程可以用有限长序列与周期脉冲序列卷积实现。下面运用式(5.1.19)推导周期序列的傅里叶变换。

周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的周期为 N，用 $x(n)$ 表示 $\tilde{x}(n)$ 的一个周期：

$$x(n)=\begin{cases}\tilde{x}(n), & M\leqslant n\leqslant M+N-1\\ 0, & \text{其余 } n \text{ 值}\end{cases}\tag{5.1.20}$$

其中，M 可以为任意整数。$\tilde{x}(n)$ 可以由 $x(n)$ 以 N 为周期延拓得到：

$$\tilde{x}(n)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}x(n-lN)=x(n)*\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta(n-lN)$$

根据卷积性质，可以求得周期序列的傅里叶变换

$$\begin{aligned}\tilde{x}(n)\leftrightarrow X(\Omega)\cdot\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\Omega-\frac{2\pi}{N}k\right)\\=\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X\left(\frac{2\pi}{N}k\right)\delta\left(\Omega-\frac{2\pi}{N}k\right)\end{aligned}\tag{5.1.21}$$

式(5.1.21)表明，周期序列的傅里叶变换是一个周期性冲激序列，在[0,2π)区间内，

这些冲激位于以下 N 个频率点上：

$$\Omega_1=0,\Omega_2=\frac{2\pi}{N},\Omega_3=2\left(\frac{2\pi}{N}\right),\cdots,\Omega_N=(N-1)\left(\frac{2\pi}{N}\right)$$

周期序列的傅里叶变换仍然是以 2π 为周期的函数，因此与以上 N 个频率点相距 2π 整数倍的所有频率点上，也存在强度相同的冲激。冲激的强度可以根据一个周期内的序列 $x(n)$ 的傅里叶变换 $X(\Omega)$ 在以上频率点的值求得。

$$X\left(\frac{2\pi}{N}k\right)=\sum_{n=M}^{M+N-1}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}kn} \tag{5.1.22}$$

虽然由于 M 的变化，$x(n)$ 和 $X(\Omega)$ 都会有变化，但是可以证明，$X(\Omega)$ 在采样频率点 $2\pi k/N$ 上的值与 M 无关。因此，M 的取值不会影响式(5.1.22)，从而 $x(n)$ 在 $\tilde{x}(n)$ 中的截取起始位置不影响式(5.1.21)的结果。

图 5.1.9 给出了 $x(n)$、$\tilde{x}(n)$ 及其频谱的示意图。

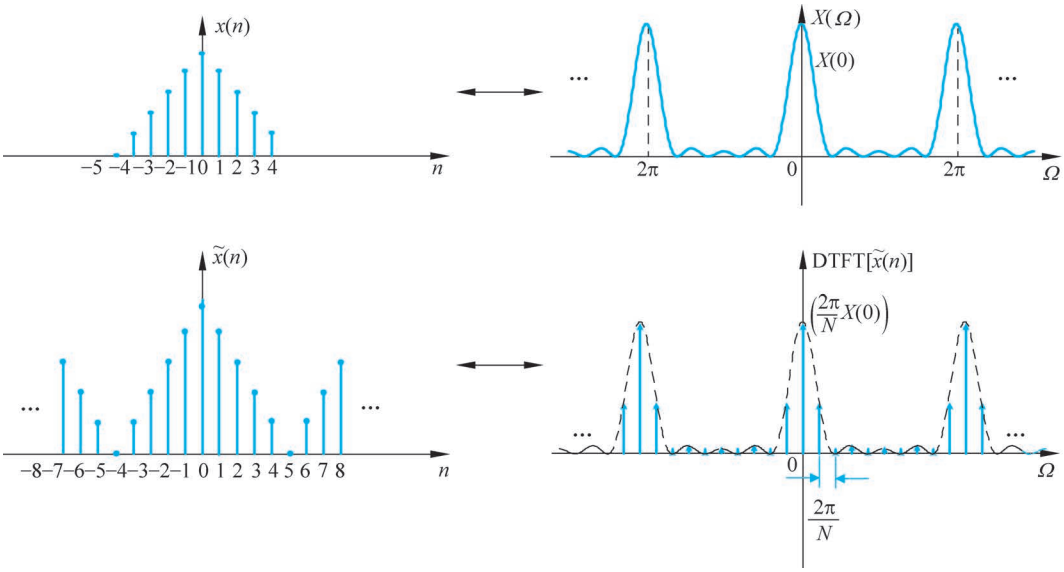


图 5.1.9　周期序列和非周期序列的频谱

从图 5.1.9 可以看出，周期序列的频谱不但是周期的，而且是离散的。频谱的离散性正是由时域的周期性造成的。离散间隔 $\Omega_0=2\pi/N$ 与序列的周期成反比，也称作周期序列的基本频率。

例 5.1.6　求图 5.1.10(a)所示周期矩形脉冲序列 $\tilde{x}(n)$ 的离散时间傅里叶变换。

解： 由图 5.1.10(a)可见其周期为 $N=32$，不妨截取 $n=-16,\cdots,15$ 的一个周期形成 $x(n)$，有

$$x(n)=\begin{cases}1, & |n|\leqslant 4\\ 0, & \text{其余 } n \text{ 值}\end{cases}$$

它的傅里叶变换已经在例 5.1.2 中求过。

仿真求解

$$X(\Omega)=\frac{\sin(4.5\Omega)}{\sin(0.5\Omega)}$$

根据式(5.1.21)，有

$$\tilde{X}(\Omega)=\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X\left(\frac{2\pi}{N}k\right)\delta\left(\Omega-\frac{2\pi}{N}k\right)$$

其中，$N=32$。记 $\Omega_0=2\pi/32=\pi/16$，求得 $\tilde{x}(n)$的离散时间傅里叶变换为

$$\tilde{x}(n)\leftrightarrow\frac{\pi}{16}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\sin(4.5k\Omega_0)}{\sin(0.5k\Omega_0)}\delta(\Omega-k\Omega_0)$$

图 5.1.10(b)给出了频谱的示意图。

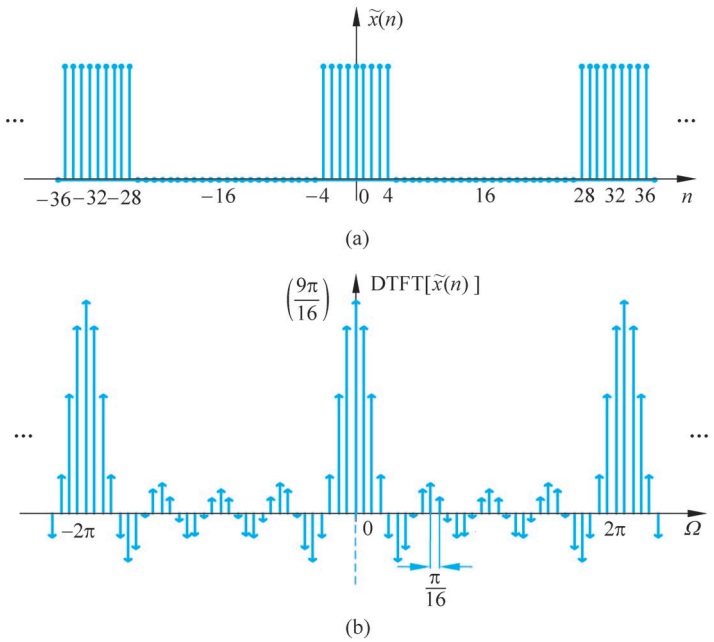


图 5.1.10　周期矩形脉冲序列及其频谱

仿真求解

例 5.1.7　讨论序列 $x(n)=\cos\Omega_0 n$ 的傅里叶变换。

解：$x(n)=\cos\Omega_0 n=\frac{1}{2}e^{jn\Omega_0}+\frac{1}{2}e^{-jn\Omega_0}$

由于 $1\leftrightarrow 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-2\pi k)$ 和 $e^{j\Omega_0 n}x(n)\leftrightarrow X(\Omega-\Omega_0)$

求得其傅里叶变换 $X(\Omega)$为

$$X(\Omega)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}[\pi\delta(\Omega-\Omega_0-2\pi l)+\pi\delta(\Omega+\Omega_0+2\pi l)]\tag{5.1.23}$$

$X(\Omega)$如图 5.1.11 所示。

这个例题并没有从周期序列傅里叶变换的一般形式来求解，这是因为 $x(n)=\cos\Omega_0 n$ 并不一定是周期序列。如果它是周期序列并且周期为 N，则必有

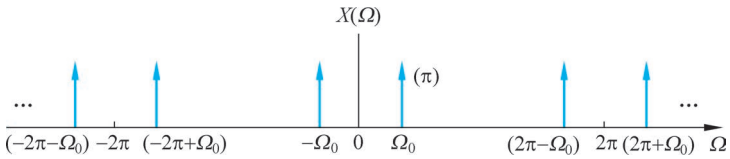


图 5.1.11 $x(n)=\cos\Omega_0 n$ 的离散时间傅里叶变换

$$\cos\Omega_0(n+N)=\cos\Omega_0 n,\quad \text{对任意整数 } n \text{ 成立}$$

因此要求 $\Omega_0 N=2\pi m$，其中 m 为一个整数，由于离散时间信号的频率可以约束在一个 2π 主值区间内，不妨假定 $0\leqslant\Omega_0<2\pi$，则有 $0\leqslant m<N$。由此推得

$$\Omega_0=\frac{2\pi}{N}m,\quad 0\leqslant m<N \tag{5.1.24}$$

仅当 Ω_0 满足式(5.1.24)时，$x(n)=\cos\Omega_0 n$ 才是周期信号。此时式(5.1.23)中冲激发生的位置满足周期序列频谱通式(5.1.21)的要求。不难验证，当 Ω_0 满足式(5.1.24)时，式(5.1.21)中的

$$X\left(\frac{2\pi}{N}k\right)=\sum_{n=0}^{N-1}\cos(\Omega_0 n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}kn}=\begin{cases}N/2, & k=Nl\pm m,\ l\ \text{为整数}\\ 0, & \text{其余 } k \text{ 值}\end{cases}$$

此时采用式(5.1.21)也能得到与式(5.1.23)相同的结果。

若 Ω_0 不满足式(5.1.24)，$x(n)=\cos\Omega_0 n$ 不是周期序列，它的频谱仍然可以用式(5.1.23)描述，也是一串冲激函数。但由于信号不是周期的，不存在基本频率，而冲激发生的位置也不存在与基本频率的整数倍关系，因此并不符合周期序列频谱的通式(5.1.21)。

5.2 离散时间信号的傅里叶级数

5.2.1 周期序列的分解与合成

将式(5.1.21)给出的频谱代入式(5.1.8)，得到

$$\tilde{x}(n)=\frac{1}{N}\int_{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X\left(\frac{2\pi}{N}k\right)\delta\left(\Omega-\frac{2\pi}{N}k\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega n}\,\mathrm{d}\Omega \tag{5.2.1}$$

注意，积分可以在任意一个长度为 2π 的区间内进行，因此能对积分产生贡献的冲激谱线只有 N 个，不妨取 $\Omega\in[0,2\pi)$ 区间，则能对积分产生贡献的 k 满足 $0\leqslant k\leqslant N-1$，因此式(5.2.1)可以写为

$$\tilde{x}(n)=\frac{1}{N}\int_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{N-1}X\left(\frac{2\pi}{N}k\right)\delta\left(\Omega-\frac{2\pi}{N}k\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega n}\,\mathrm{d}\Omega$$

在傅里叶变换存在的前提下，可以将积分与求和换序：

$$\tilde{x}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X\left(\frac{2\pi}{N}k\right)\int_0^{2\pi}\delta\left(\Omega-\frac{2\pi}{N}k\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega n}\,\mathrm{d}\Omega$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X\left(\frac{2\pi}{N}k\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}kn} \tag{5.2.2}$$

其中，$X\left(\frac{2\pi}{N}k\right)$是$\tilde{x}(n)$中任意截取的一个周期$x(n)$的傅里叶变换在离散频点上的值：

$$X\left(\frac{2\pi}{N}k\right)=\sum_{n=<N>}\tilde{x}(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}kn} \tag{5.2.3}$$

求和限$n=<N>$表示可以在任意一个长度为N的周期内求和。

将$X\left(\frac{2\pi}{N}k\right)$转换为以$k$为自变量的函数，记为$\tilde{X}(k)$，即$\tilde{X}(k)=X\left(\frac{2\pi}{N}k\right)$。由于$X(\Omega)$以$2\pi$为周期，$\tilde{X}(k)$将以$N$为周期。根据式(5.2.3)，有

$$\tilde{X}(k)=\sum_{n=<N>}\tilde{x}(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}kn} \tag{5.2.4}$$

采用$\tilde{X}(k)$函数，式(5.2.2)可以写为

$$\tilde{x}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}kn} \tag{5.2.5}$$

由于$\tilde{X}(k)$将以N为周期，并且$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}(k+mN)n}=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}kn}$，因此求和区间不必局限为$0\leqslant k\leqslant N-1$，可以在任意一个长度为$N$的周期内求和。这一点也可以从式(5.2.1)关于$\Omega$的积分限的讨论得到验证，积分区间选择不同的$2\pi$区间，相应位置处$N$根冲激谱线就会对积分产生贡献，但不管积分限或相继的N根谱线如何选取，最终结果是相同的。因此式(5.2.5)可以进一步写成

$$\tilde{x}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=<N>}\tilde{X}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}kn} \tag{5.2.6}$$

式(5.2.6)说明，周期序列可以分解为N个复指数序列之和，每个复指数序列的系数可以按照式(5.2.4)求得。实际上，这N个复指数序列$\{\phi_k(n)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}kn},k\in<N>\}$构成了一组完备正交基。任何一个以$N$为周期的时间序列都可以在这组基上进行表示，这与4.2节对连续时间周期信号进行正交分解的思想是完全一致的。不同之处在于，连续时间周期信号需要在一个无穷维的空间中才能得到精确的表示，而离散时间周期信号只有N个自由度，在一个N维空间中就可以得到精确的表示，因此式(5.2.6)是一个由N项组成的求和式。

不妨选取$k=0,1,\cdots,N-1$，则

$$\tilde{x}(n)=\frac{1}{N}\tilde{X}(0)+\frac{1}{N}\tilde{X}(1)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}n}+\frac{1}{N}\tilde{X}(2)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{4\pi}{N}n}+\cdots+\frac{1}{N}\tilde{X}(N-1)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}(N-1)n}$$

其中，右边第一项为直流分量，第二项为与基本频率$2\pi/N$对应的基波分量，后续的项分别对应各高次谐波分量。由于数字频率的周期性，第N次谐波分量$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}Nn}$将等同于直流分量，因此展开式中最高次谐波为第$N-1$次谐波分量。

5.2.2 离散傅里叶级数展开

式(5.2.4)和式(5.2.6)描述了一个周期为 N 的时域周期序列 $\tilde{x}(n)$ 和一个周期为 N 的频域周期序列 $\tilde{X}(k)$ 之间的相互转换关系，称为**离散傅里叶级数展开**(Discrete Time Fourier Series)，简写为 DTFS 或 DFS。$\tilde{X}(k)$ 称为**离散傅里叶级数展开的系数**。

$$\tilde{x}(n) \xleftrightarrow{\text{DFS}} \tilde{X}(k)$$

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=\langle N\rangle} \tilde{X}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=\langle N\rangle} \tilde{x}(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}kn}$$

$\tilde{x}(n)$ 和 $\tilde{X}(k)$ 都是周期的和离散的，这再次说明，周期序列的谱是离散的并且是周期的。从信号分解与合成的观点看，合成周期离散序列只需要 N 个复指数信号 $\{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_k n}\}$，这些复指数信号的频率是基本频率 $\Omega_0 = 2\pi/N$ 的整数倍，即 $\Omega_k = k\Omega_0$，倍数 k 在一个长度为 N 的周期内取值。

至此给出了周期序列的两种频域表示方法，一种是 5.1.4 节导出的周期序列的傅里叶变换，另一种是本节导出的傅里叶级数展开。对比式(5.1.21)和式(5.2.4)，两种频域表示方法的结果是可以相互转换的。它们的区别在于：式(5.1.21)是以数字频率 Ω 为自变量的频谱(实际为频谱密度)，其周期为 2π，每个合成周期信号所需要的分量在频谱中都会对应一根冲激谱线；式(5.2.4)是以谱线序号为自变量的绝对谱，每根谱线直接代表了周期信号中对应的复指数分量，因此其周期为 N，谱线的函数值是有限值，合成周期信号所需要的复指数分量的复振幅就是 $\tilde{X}(k)/N$。

采用傅里叶级数展开描述周期序列的频谱有几个好处：①直观理解周期序列与复指数序列的分解与合成关系；②谱线的函数值是有限值，便于计算。在讨论计算问题时，经常引入以下记号：

$$W_N = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi/N}$$

于是式(5.2.4)、式(5.2.6)变为

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=\langle N\rangle} \tilde{x}(n)W_N^{kn}$$

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=\langle N\rangle} \tilde{X}(k)W_N^{-kn}$$

其中，$W_N = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi/N}$ 称为**旋转因子**，它的特性在设计快速计算方法时有重要的作用。

例 5.2.1 求图 5.1.10(a)所示周期矩形脉冲序列的离散时间傅里叶级数。

解： 由图 5.1.10(a)可见其周期为 $N=32$，则其基频 $\Omega_0 = 2\pi/32 = \pi/16$，由式(5.2.6)，得

仿真求解

$$\tilde{x}(n)=\frac{1}{32}\sum_{k=\langle 32\rangle}\tilde{X}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\frac{\pi}{16}n}$$

在例 5.1.6 中已经求过该周期矩形脉冲序列的离散时间傅里叶变换，根据周期序列两种频域表示之间的关系

$$\tilde{X}(k)=X\left(\frac{2\pi}{N}k\right)$$

可以直接得到

$$\tilde{X}(k)=\frac{\sin(4.5k\Omega_0)}{\sin(0.5k\Omega_0)}$$

按照式(5.2.4)计算，也可以得到同样的结果。于是图 5.1.10(a)所示的周期矩形脉冲序列的傅里叶级数展开为

$$\tilde{x}(n)=\frac{1}{32}\sum_{k=\langle 32\rangle}\frac{\sin(4.5k\Omega_0)}{\sin(0.5k\Omega_0)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\frac{\pi}{16}n}$$

图 5.2.1 给出了该序列的傅里叶级数展开谱，将它与图 5.1.10(b)进行对比，可以验证周期序列的傅里叶变换与傅里叶级数展开的区别。

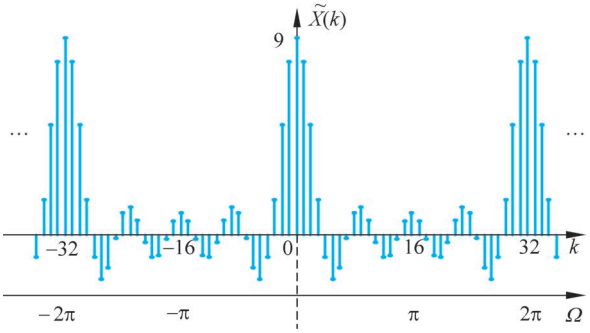


图 5.2.1　周期矩形脉冲序列的傅里叶级数展开

仿真求解

例 5.2.2　试求图 5.2.2(a)所示序列 $\tilde{x}(n)=\sin 0.1\pi n$ 的离散时间傅里叶级数，并画出其幅度谱和相位谱。

解：正弦序列 $\tilde{x}(n)=\sin 0.1\pi n$ 的频率 $\Omega_0=0.1\pi=\frac{2\pi}{20}$，满足式(5.1.24)，此时 $m=1$，$N=20$。因此它是一个周期 $N=20$ 的周期序列，其基波频率 $\Omega_0=2\pi/N=0.1\pi$。根据式(5.2.6)，有

$$\tilde{x}(n)=\frac{1}{20}\sum_{k=\langle 20\rangle}\tilde{X}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}0.1\pi kn}$$

其中，求和是在任意 20 个 k 的相继值上进行。现将这个范围选为 $-10\leqslant k<10$，这样选取对应于利用基本频率范围 $-\pi\leqslant\Omega<\pi$ 内的频率分量合成 $x(n)$，于是有

$$\tilde{x}(n)=\frac{1}{20}\sum_{k=-10}^{9}\tilde{X}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}0.1\pi kn}$$

注意例 5.1.7 分析的是余弦信号，而本题讨论的是正弦信号。本题中按照式(5.2.4)计

算，傅里叶级数展开的系数

$$\tilde{X}(k)=\sum_{n=-10}^{9}\sin 0.1\pi n\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.1\pi kn}=\sum_{n=-10}^{9}\frac{1}{2\mathrm{j}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}0.1\pi n}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.1\pi n})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.1\pi kn}$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{j}}\sum_{n=-10}^{9}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}0.1\pi n(1-k)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.1\pi n(1+k)})$$

在这些和式中，k 取 $-10\sim 9$ 的全部值。上式右边第一个和式除 $k=1$ 时有值为 20 外，对于其余的 k 值均为 0。同理，第二个和式除 $k=-1$ 时有值为 20 外，对于其余的 k 值均为 0。因此

$$\tilde{X}(1)=\frac{10}{\mathrm{j}},\quad \tilde{X}(-1)=-\frac{10}{\mathrm{j}}$$

而所有其他系数都为 0。对应的傅里叶级数为

$$\tilde{x}(n)=\sin 0.1\pi n=\frac{1}{2\mathrm{j}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}0.1\pi n}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.1\pi n})\tag{5.2.7}$$

这里的基波频率 $\Omega_0=0.1\pi$，仅有两个非零分量：

$$\tilde{X}(1)=\frac{10}{\mathrm{j}}=10\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}},\quad \tilde{X}(-1)=-\frac{10}{\mathrm{j}}=10\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}$$

因此

$$|\tilde{X}(1)|=|\tilde{X}(-1)|=10$$

$$\angle\tilde{X}(1)=-\pi/2,\quad \angle\tilde{X}(-1)=\pi/2$$

以上推导的是在区间 $-10\leqslant k<10$ 内的频谱，对应的频率区间是 $-\pi\leqslant\Omega<\pi$。按照式(5.2.7)，总共仅有两个分量分别对应于 $k=1$ 和 $k=-1$，剩下 18 个分量都是 0。频谱 $\tilde{X}(k)$ 是 k 的周期函数，周期为 $N=20$，为此，将这个频谱以周期为 $N=20$(或 $\Omega=2\pi$)重复，结果如图 5.2.2(b)和图 5.2.2(c)所示。可以看到，幅度谱和相位谱分别为 k(或 Ω)的偶函数和奇函数。

再次观察式(5.2.7)，它本身就是正弦函数的欧拉公式展开，可以直接得到而不用求傅里叶级数展开。本题的目的是加深对离散时间傅里叶级数及其周期性的理解。由于傅里叶级数分量可以在任意长度为 $N=20$(或 $\Omega=2\pi$)的范围内选取，例如若选这个频率范围为 $0\leqslant\Omega<2\pi$(或 $0\leqslant k<20$)，得到的傅里叶级数为

$$\tilde{x}(n)=\sin 0.1\pi n=\frac{1}{2\mathrm{j}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}0.1\pi n}-\mathrm{e}^{\mathrm{j}1.9\pi n})\tag{5.2.8}$$

这个级数与式(5.2.7)的级数是等效的，因为这两个指数 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}1.9\pi n}$ 和 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.1\pi n}$ 是等效的，这是由于 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}1.9\pi n}=\mathrm{e}^{\mathrm{j}1.9\pi n}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi n}=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.1\pi n}$ 的缘故。傅里叶级数是利用复指数序列表示周期信号 $x(n)$ 的一种方法。从这个角度理解，式(5.2.8)的结果表明：在合成 $\sin 0.1\pi n$ 所需要的 20 个谐波分量中，除 1 次谐波和 19 次谐波外，直流分量和其余的谐波分量都为 0。

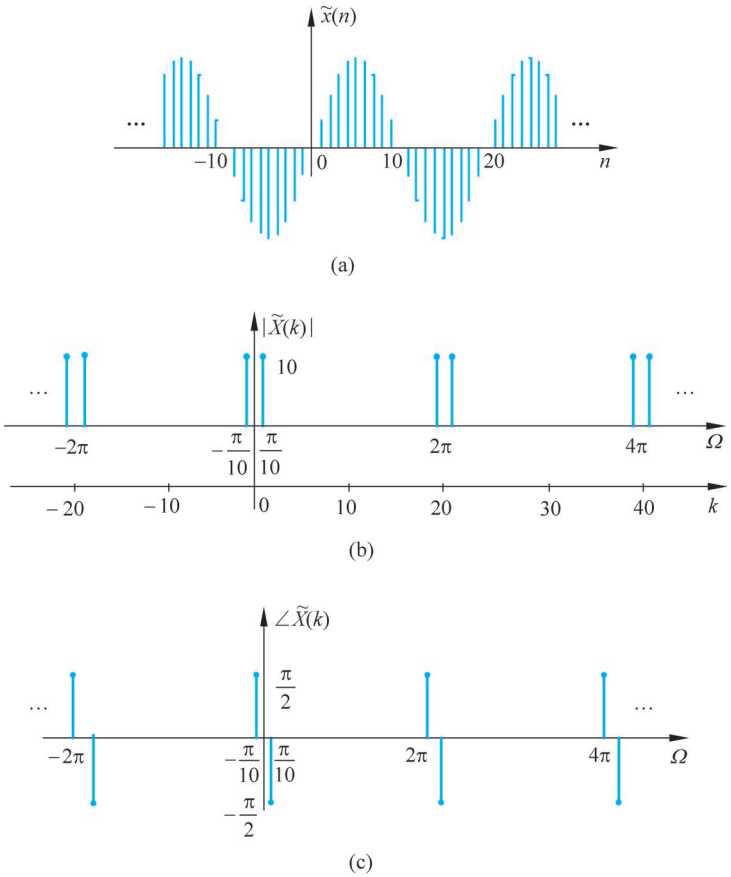


图 5.2.2　离散时间正弦序列 $x(n)=\sin 0.1\pi n$ 和它的频谱

5.2.3　离散傅里叶级数的主要性质

1. 线性

设 $\tilde{x}_1(n)$ 和 $\tilde{x}_2(n)$ 为两个离散时间周期序列，它们的离散傅里叶级数系数分别为 $\tilde{X}_1(k)$ 和 $\tilde{X}_2(k)$，两个序列的每个周期的长度均为 N。如果另一个周期序列 $\tilde{x}_3(n)$ 为 $a\tilde{x}_1(n)$ 与 $b\tilde{x}_2(n)$ 之和，即

$$\tilde{x}_3(n)=a\tilde{x}_1(n)+b\tilde{x}_2(n)$$

其中，a、b 为常数，则 $\tilde{x}_3(n)$ 的离散傅里叶级数系数为

$$\tilde{X}_3(k)=a\tilde{X}_1(k)+b\tilde{X}_2(k)$$

且 $\tilde{X}_3(k)$ 的一个周期的长度亦为 N。

证明：

$$\begin{aligned}\tilde{X}_3(k)&=\mathrm{DFS}[\tilde{x}_3(n)]\\&=\mathrm{DFS}[a\tilde{x}_1(n)+b\tilde{x}_2(n)]\\&=a\tilde{X}_1(k)+b\tilde{X}_2(k)\end{aligned}$$

由于 $\tilde{X}_1(k)$ 与 $\tilde{X}_2(k)$ 的每个周期的长度皆为 N，所以二者相加后，每周期长度仍为 N。

2. 序列的移位

一个周期序列全体左移(或右移)时对一个整数周期来说从左(或右)侧移出去的恰好等于从右(或左)侧补进来的。

1) 时间序列的移位

若
$$\tilde{x}(n) \xleftrightarrow{\text{DFS}} \tilde{X}(k)$$

则
$$\tilde{x}(n+m) \xleftrightarrow{\text{DFS}} W_N^{-km}\tilde{X}(k) \tag{5.2.9}$$

证明：
$$\text{DFS}[\tilde{x}(n+m)] = \sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n+m)W_N^{kn}$$

令
$$n+m=r$$

则
$$\text{DFS}[\tilde{x}(n+m)] = \sum_{r=m}^{N-1+m}\tilde{x}(r)W_N^{k(r-m)}$$

但
$$\sum_{r=m}^{N-1+m}\tilde{x}(r)W_N^{kr} = \sum_{r=m}^{N-1}\tilde{x}(r)W_N^{kr} + \sum_{r=N}^{N+m-1}\tilde{x}(r)W_N^{kr}$$
$$= \sum_{r=m}^{N-1}\tilde{x}(r)W_N^{kr} + \sum_{r=0}^{m-1}\tilde{x}(r)W_N^{kr} = \tilde{X}(k)$$

所以
$$\text{DFS}[\tilde{x}(n+m)] = W_N^{-km}\tilde{X}(k)$$

如果移位点数 $|m|>N$，则由于 $\tilde{x}(n)$ 为周期序列，其离散傅里叶级数系数与 $\tilde{x}(n)$ 移位点数为 $(m-PN)$ 时相同，这里 P 为正或负的整数。

如果整个序列左(或右)移 l 个整周期，即 $m=lN$，则整个序列与没有移位相同，即
$$\text{DFS}[\tilde{x}(n+lN)] = \tilde{X}(k)$$

2) 频域序列的移位

若
$$\tilde{x}(n) \xleftrightarrow{\text{DFS}} \tilde{X}(k)$$

则
$$W_N^{qn}\tilde{x}(n) \xleftrightarrow{\text{DFS}} \tilde{X}(k+q) \tag{5.2.10}$$

证明：
$$\text{IDFS}[\tilde{X}(k+q)] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k+q)W_N^{-kn}$$

令
$$k+q=r$$

则
$$\text{IDFS}[\tilde{X}(k+q)] = \frac{1}{N}\sum_{r=q}^{N-1+q}\tilde{X}(r)W_N^{-(r-q)n}$$
$$= W_N^{qn}\tilde{x}(n)$$

3. 离散傅里叶级数的对称性质

当已知 $\tilde{x}(n)$ 和 $\tilde{X}(k)$ 是一个傅里叶级数变换对时，可以利用离散傅里叶级数变换对的一些性质，不必再进行计算就能直接写出某些其他的离散傅里叶级数变换对。例如 $\tilde{x}^*(n)$ 与 $\tilde{X}^*(-k)$ 是一个离散傅里叶级数变换对，可以直接写出 $\tilde{x}^*(-n)$ 与 $\tilde{X}^*(k)$ 也

是一个变换对等。这些性质称为离散傅里叶级数的对称性质。

（1）若
$$\tilde{x}(n) \xleftrightarrow{\text{DFS}} \tilde{X}(k)$$
则
$$\tilde{x}^*(n) \xleftrightarrow{\text{DFS}} \tilde{X}^*(-k) \tag{5.2.11}$$

证明：
$$\begin{aligned}\text{DFS}[\tilde{x}^*(n)] &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}^*(n) W_N^{kn} \\ &= \left[\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{-kn}\right]^* \\ &= \tilde{X}^*(-k)\end{aligned}$$

（2）用相同的方法可以证明：
$$\tilde{x}^*(-n) \xleftrightarrow{\text{DFS}} \tilde{X}^*(k) \tag{5.2.12}$$

（3）在 $\tilde{x}(n)$ 为实序列的情况下，还可以证明下列的对称性质：
$$\tilde{X}(-k) \overset{N}{\leftrightarrow} \tilde{X}^*(k) \tag{5.2.13a}$$
$$\text{Re}[\tilde{X}(k)] = \text{Re}[\tilde{X}(-k)] \tag{5.2.13b}$$
$$\text{Im}[\tilde{X}(k)] = -\text{Im}[\tilde{X}(-k)] \tag{5.2.13c}$$
$$|\tilde{X}(k)| = |\tilde{X}(-k)| \tag{5.2.13d}$$
$$\angle\tilde{X}(k) = -\angle\tilde{X}(-k) \tag{5.2.13e}$$

式(5.2.13a)说明当 $\tilde{x}(n)$ 是实序列时，其离散傅里叶级数系数的共轭等于 $\tilde{X}(-k)$。式(5.2.13b)和式(5.2.13c)说明当 $\tilde{x}(n)$ 是实序列时，其离散傅里叶级数系数的实部是偶函数，虚部是奇函数。式(5.2.13d)和式(5.2.13e)说明其离散傅里叶级数系数的模为偶函数，相角为奇函数。

4. 周期卷积

设 $\tilde{x}_1(n)$ 和 $\tilde{x}_2(n)$ 是周期为 N 的两个周期序列，它们的离散傅里叶级数系数分别为 $\tilde{X}_1(k)$ 和 $\tilde{X}_2(k)$，周期长度亦为 N。令
$$\tilde{x}_3(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(n-m) \tag{5.2.14}$$
式(5.2.14)中的序列 $\tilde{x}_1(m)$ 和 $\tilde{x}_2(n-m)$ 都是变量 m 的周期函数，周期为 N，因而乘积也是周期为 N 函数。另外，求和也只在一个周期上进行。这类卷积通常称为**周期卷积**。图 5.2.3 举例说明了对应式(5.2.14)的两个周期序列的周期卷积的形成过程。在作这种卷积过程中，当一个周期移出计算区间时，下一周期就移入计算区间。

1）时域周期卷积定理

令 $\tilde{x}_3(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(n-m)$，$\tilde{x}_3(n)$ 的离散傅里叶级数系数为
$$\tilde{X}_3(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}_3(n) W_N^{kn}$$

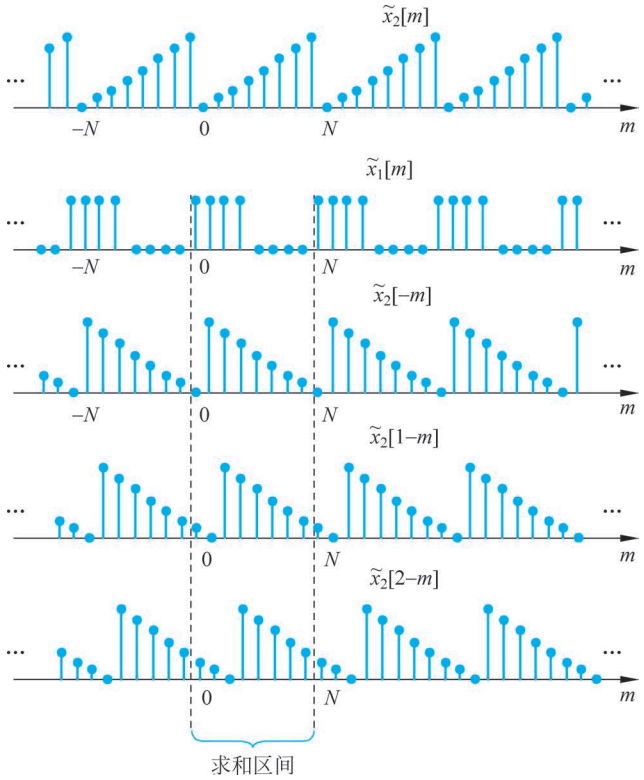


图 5.2.3　形成两个周期序列之周期卷积的步骤

则
$$\tilde{X}_3(k)=\tilde{X}_1(k)\tilde{X}_2(k) \tag{5.2.15}$$

证明：

$$\begin{aligned}\tilde{X}_3(k)&=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}_3(n)W_N^{kn}\\&=\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(n-m)W_N^{kn}\\&=\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1(m)\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}_2(n-m)W_N^{k(n-m)}W_N^{km}\\&=\tilde{X}_1(k)\tilde{X}_2(k)\end{aligned}$$

上述推导中，$\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}_2(n-m)W_N^{k(n-m)}$ 是从 $\tilde{x}_2(-m)$ 到 $\tilde{x}_2(N-1-m)$ 的 N 个点分别乘以 $W_N^{k(-m)}\cdots W_N^{k(N-1-m)}$ 求和，由于 $\tilde{x}_2(n)$ 是周期的，所以求和的结果与 $\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}_2(n)W_N^{kn}$ 是相同的。

2）频域周期卷积定理

令 $\tilde{x}_3(n)=\tilde{x}_1(n)\tilde{x}_2(n)$，$\tilde{x}_3(n)$的离散傅里叶级数系数为 $\tilde{X}_3(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}_3(n)W_N^{kn}$，则

$$\tilde{X}_3(k)=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\tilde{X}_1(l)\tilde{X}_2(k-l) \tag{5.2.16}$$

即 $\tilde{X}_3(k)$ 等于 $\tilde{X}_1(k)$ 和 $\tilde{X}_2(k)$ 的周期卷积的 $1/N$ 倍。

证明：

$$\begin{aligned}\tilde{x}_3(n)&=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{X}_3(k)W_N^{-kn}\\&=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\tilde{X}_1(l)\tilde{X}_2(k-l)W_N^{-kn}\\&=\left[\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\tilde{X}_1(l)W_N^{-ln}\right]\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}_2(k-l)W_N^{-(k-l)n}\right]\\&=\tilde{x}_1(n)\tilde{x}_2(n)\end{aligned}$$

5. 帕塞瓦尔定理

由于傅里叶级数展开给出了用 N 个正交的复指数序列合成周期序列的方法，因此周期序列的功率也可以由这 N 个正交序列的功率合成，这就是适用于周期序列的**帕塞瓦尔定理**：

$$\sum_{n=\langle N\rangle}\left|\tilde{x}(n)\right|^2=\frac{1}{N}\sum_{k=\langle N\rangle}\left|\tilde{X}(k)\right|^2 \tag{5.2.17}$$

5.3 几种傅里叶变换的关系

所谓傅里叶变换，就是在以时间为自变量的“信号”与以频率为自变量的“频谱”函数之间的某种变换关系。从前面的分析已经看到，傅里叶变换的离散性和周期性在时域与频域中表现出巧妙的对称关系，即当自变量“时间”或“频率”取连续形式和离散形式的不同组合，就可以形成各种不同的傅里叶变换对。具体来说，呈周期性的连续时间函数，其傅里叶变换为离散的非周期频率函数（傅里叶级数，离散频谱）；而非周期性的离散时间函数，其傅里叶变换为连续的周期性函数（抽样信号的频谱呈周期性）。本节对可能出现四种类型的时域和频域组合进行讨论，给出示意图形，着重说明各种组合的不同特点。

5.3.1 连续时间傅里叶变换

连续时间函数 $x(t)$ 的傅里叶变换 $X(\mathrm{j}\omega)$ 可以表示为

$$X(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t \tag{5.3.1}$$

反变换可表示为

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega \tag{5.3.2}$$

这种时间函数及其频谱函数的形式如图 5.3.1(a)所示。这里的 $x(t)$ 和 $X(\mathrm{j}\omega)$ 都是连续的，也都是非周期的。

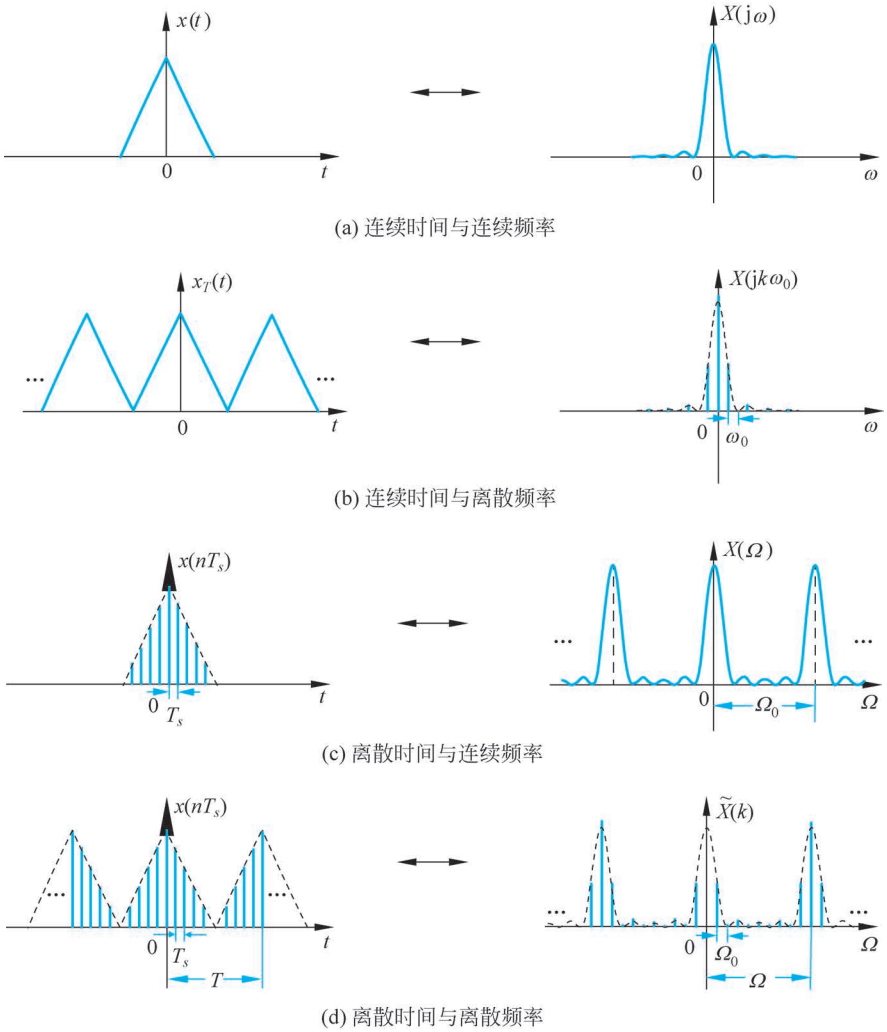


图 5.3.1　傅里叶变换的各种形式

5.3.2　连续时间傅里叶级数

当连续时间信号为周期函数时，其傅里叶变换具有离散特性，呈冲激序列。在这种情况下，表示信号频谱的另一种方法是写作傅里叶级数的形式。令 $x(t)$ 代表一周期为 $T=2\pi/\omega_0$ 的周期性连续时间函数，傅里叶级数的系数写作 X_k，这组变换对是

$$X_k=\frac{1}{T}X(\mathrm{j}k\omega_0)=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega_0 t}\,\mathrm{d}t \tag{5.3.3}$$

和

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_0 t} \tag{5.3.4}$$

两函数的特性如图 5.3.1(b)所示，可见周期性的连续时间函数对应于非周期性的离散频谱。

5.3.3 离散时间傅里叶变换

如果将非周期性的连续时间信号 $x(t)$，进行等间隔取样就得到非周期性的离散时间函数 $x(n)$，那么，它的傅里叶变换式就是周期性的连续函数，写作 $X(\Omega)$，如图 5.3.1(c)所示。这种情况曾在 5.1 节中详细讨论过。

这组变换对是

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega n} \tag{5.3.5}$$

和

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\Omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega n}\,\mathrm{d}\Omega \tag{5.3.6}$$

此种情况与第二种情况呈对称关系，即非周期的离散时间函数对应于周期性的连续频谱。

5.3.4 离散时间傅里叶级数

对连续的非周期信号 $x(t)$在时域中取样，结果得到频域的周期性函数，如果再在频域中取样，则又得到时域的周期性，这样就得到周期性的离散时间信号与周期性离散频率间的变换对，即在 5.2 节中曾详细讨论过的离散傅里叶级数

$$\tilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k(2\pi/N)n} \tag{5.3.7}$$

和

$$\tilde{x}(n)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{X}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}k(2\pi/N)n} \tag{5.3.8}$$

它们是图 5.3.1(d)所示函数图形的数学描述。

综上可知，傅里叶变换的四种形式中，只有第四种离散傅里叶级数可以借助计算机从时频对信号进行分析，对于数字信号处理有实用价值；前三种形式中或者信号是时间的连续函数，或者频谱是频率的连续函数，或者信号及频谱二者都是变量的连续函数，因此都不适合用计算机进行计算。要使前三种形式能用计算机进行计算，必须针对每种形式的具体情况，或者在时域与频域上同时取样，或者在时域上取样，或者在频域上取样。信号在时域上取样导致频域的周期函数，而在频域上取样导致时域的周期函数，最后都将使原时间函数和频率函数二者都成为周期离散的函数，即由于取样的结果，前三种形式都能变为第四种形式——离散傅里叶级数形式。即便是离散傅里叶级数，由于其时频都是周期序列，仍不便于计算机计算。但是离散傅里叶级数虽是周期序列，却只有 N 个

独立的复值，只要知道它的一个周期内容，其他内容也就知道了，故时频各取一个周期，建立一种对应关系，这就是离散傅里叶变换(DFT)的思想，有关此部分内容将在相关课程中学习。

5.4 离散时间系统频域分析

5.4.1 系统响应的频域表示

考虑一个离散时间线性时不变系统，其单位样值响应为 $h(n)$，要求系统对输入 $x(n)$ 的零状态响应 $y_{zs}(n)$。有 $y_{zs}(n)=x(n)*h(n)$。令

$$x(n)\leftrightarrow X(\Omega),\quad h(n)\leftrightarrow H(\Omega),\quad y_{zs}(n)\leftrightarrow Y(\Omega)$$

根据离散时间傅里叶变换的卷积性质，有

$$Y(\Omega)=X(\Omega)H(\Omega) \tag{5.4.1}$$

其中，$H(\Omega)$ 称为**系统的频率响应**，且

$$H(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega n} \tag{5.4.2}$$

$H(\Omega)$ 一般是复数，可以用幅度和相位表示为 $H(\Omega)=|H(\Omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\angle H(\Omega)}$，其中 $|H(\Omega)|$ 称为系统的“**幅频特性**”，$\angle H(\Omega)$ 称为系统的“**相频特性**”。与连续时间系统频率响应的地位与作用相类似，它表示输出序列频谱的幅度和相位相对于输入序列的变化，即输出幅度谱是输入幅度谱和系统幅频特性的乘积，而输出相位谱是输入相位谱和系统相频特性的和。离散时间系统的幅频特性也是频率的偶函数，相频特性也是频率的奇函数。但与连续时间系统频率响应 $H(\mathrm{j}\omega)$ 显著不同的是，**$H(\Omega)$ 是 Ω 的周期函数**，且周期为 2π。

5.4.2 系统的频率响应和单位样值响应的计算

对于一个线性时不变系统，其输出 $y(n)$ 和输入 $x(n)$ 之间满足如下形式的线性常系数差分方程：

$$\sum_{i=0}^{k}a_i y(n-i)=\sum_{r=0}^{m}b_r x(n-r)$$

两边进行傅里叶变换，并应用傅里叶变换的线性和时移性质，就可得到如下表示式：

$$\sum_{i=0}^{k}a_i\mathrm{e}^{-\mathrm{j}i\Omega}Y(\Omega)=\sum_{r=0}^{m}b_r\mathrm{e}^{-\mathrm{j}r\Omega}X(\Omega) \tag{5.4.3}$$

或者，等效为

$$H(\Omega)=\frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}=\frac{\sum_{r=0}^{m}b_r\mathrm{e}^{-\mathrm{j}r\Omega}}{\sum_{i=0}^{k}a_i\mathrm{e}^{-\mathrm{j}i\Omega}} \tag{5.4.4}$$

从式(5.4.4)可看到，与连续时间情况一样，$H(\Omega)$是两个多项式之比，但是在此情况下它们是以 $e^{-j\Omega}$ 为变量的多项式。同样，分子多项式的系数就是式(5.4.3)右边的系数，而分母多项式的系数就是式(5.4.3)左边的系数。因此，根据式(5.4.3)就可直接确定系统的频率响应。对系统频率响应求傅里叶反变换就得到了系统的单位样值响应 $h(n)$。

仿真求解

例 5.4.1 有一线性时不变系统，初始状态为 0，且由下列差分方程表征：

$$y(n)-\frac{3}{4}y(n-1)+\frac{1}{8}y(n-2)=2x(n)$$

试求其系统频率响应和单位样值响应。

解： 根据式(5.4.4)，该系统的频率响应为

$$H(\Omega)=\frac{2}{1-\frac{3}{4}e^{-j\Omega}+\frac{1}{8}e^{-2j\Omega}}$$

为了确定相应的单位样值响应，就需要求 $H(\Omega)$的反变换。与连续时间情况一样，有效的方法是利用部分分式展开法，即

$$H(\Omega)=\frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}\right)}=\frac{4}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}-\frac{2}{1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}}$$

其中每一项的反变换都能直接求出来，其结果为

$$h(n)=4\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)-2\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$$

例 5.4.1 中采用的求解步骤与连续时间情况在形式上是一样的，尤其是在 $H(\Omega)$展开成部分分式以后，其每一项的反变换都能直接写出来。因此，这种方法可用来求取任何一个由常系数差分方程所表征的线性时不变系统的单位样值响应。同样，若已知系统的输入序列的傅里叶变换 $X(\Omega)$和系统的单位样值响应 $h(n)$，可以用频域分析法求系统对 $x(n)$的零状态响应 $y_{zs}(n)$。

仿真求解

例 5.4.2 已知一离散 LTI 系统的单位样值响应为 $h(n)=(0.5)^n u(n)$，输入信号为 $x(n)=(0.8)^n u(n)$，试求零状态响应 $y_{zs}(n)$。

解： 由例 5.1.1 可知

$$x(n)=(0.8)^n u(n)\leftrightarrow X(\Omega)=\frac{1}{1-0.8e^{-j\Omega}}$$

$$h(n)=(0.5)^n u(n)\leftrightarrow H(\Omega)=\frac{1}{1-0.5e^{-j\Omega}}$$

又因为 $$y_{zs}(n)=x(n)*h(n)$$

根据时域卷积性质有

$$\begin{aligned}Y_{zs}(\Omega)=X(\Omega)H(\Omega)&=\frac{1}{1-0.8e^{-j\Omega}}\cdot\frac{1}{1-0.5e^{-j\Omega}}\\&=\frac{8/3}{1-0.8e^{-j\Omega}}-\frac{5/3}{1-0.5e^{-j\Omega}}\end{aligned}$$

求离散时间傅里叶反变换，有

$$y_{zs}(n)=\left[\frac{8}{3}(0.8)^n-\frac{5}{3}(0.5)^n\right]u(n)$$

例 5.4.3 已知某系统的单位样值响应 $h(n)=\beta^n u(n)$，当输入为 $x(n)=\alpha^n u(n)$ 时，试求其零状态响应 $y_{zs}(n)$。（α、β 为绝对值小于 1 的非零实数。）

解： 由例 5.1.1 可知 $x(n)=\alpha^n u(n)\leftrightarrow X(\Omega)=\dfrac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}}$

$$h(n)=\beta^n u(n)\leftrightarrow H(\Omega)=\frac{1}{1-\beta e^{-j\Omega}}$$

由式(5.4.1)，有 $Y(\Omega)=X(\Omega)H(\Omega)=\dfrac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}}\cdot\dfrac{1}{1-\beta e^{-j\Omega}}$

仿真求解

若 $\alpha\neq\beta$，则

$$Y(\Omega)=\frac{\dfrac{\alpha}{\alpha-\beta}}{(1-\alpha e^{-j\Omega})}-\frac{\dfrac{\beta}{\alpha-\beta}}{(1-\beta e^{-j\Omega})} \tag{5.4.5}$$

因此，$Y(\Omega)$的离散时间傅里叶反变换为

$$\begin{aligned}y(n)&=\frac{\alpha}{\alpha-\beta}\alpha^n u(n)-\frac{\beta}{\alpha-\beta}\beta^n u(n)\\&=\frac{1}{\alpha-\beta}\left[\alpha^{n+1}u(n)-\beta^{n+1}u(n)\right]\end{aligned}$$

若 $\alpha=\beta$，式(5.4.5)的部分分式展开就不适用了，在此情况下有

$$Y(\Omega)=\left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}}\right)^2$$

该式可写为

$$Y(\Omega)=\frac{j}{\alpha}e^{j\Omega}\frac{d}{d\Omega}\left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}}\right)$$

根据频域微分性质，以及如下的傅里叶变换对

$$\alpha^n u(n)\leftrightarrow\frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}}$$

可以得到

$$n\alpha^n u(n)\leftrightarrow j\frac{d}{d\Omega}\left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}}\right)$$

再利用时移性质得

$$(n+1)\alpha^{n+1}u(n+1)\leftrightarrow je^{j\Omega}\frac{d}{d\Omega}\left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}}\right)$$

再除以 α，可得到

$$y(n)=(n+1)\alpha^{n+1}u(n+1)\leftrightarrow\frac{j}{\alpha}e^{j\Omega}\frac{d}{d\Omega}\left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}}\right)=\left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}}\right)^2$$

上式中的 $u(n+1)$开始于 $n=-1$，但由于$(n+1)$在 $n=-1$ 时为 0，所以 $y(n)$在 $n<0$ 时

仍为 0，可写成

$$y(n)=(n+1)\alpha^{n+1}u(n)$$

在离散时间线性时不变系统中，频率响应 $H(\Omega)$ 所起的作用与连续时间线性时不变系统中的 $H(\mathrm{j}\omega)$ 是一样的。同样，两个系统级联后的频率响应就是两者频率响应的乘积。也如同连续时间系统一样，不是每一个离散时间线性时不变系统都有一个频率响应特性，例如单位样值响应 $h(n)=2^n u(n)$ 的线性时不变系统对正弦输入就没有一个有限的响应，这是因为 $h(n)$ 的傅里叶变换不收敛，即不满足绝对可和的条件。

如果一个线性时不变系统是稳定的，那么它的单位样值响应就是绝对可和的，即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|<\infty \tag{5.4.6}$$

也就保证了 $h(n)$ 的傅里叶变换的收敛。因此一个稳定的线性时不变系统就一定存在系统频率响应。

5.4.3 滤波特性

与连续系统的滤波特性一样，离散系统的滤波特性也有低通、带通、高通、带阻、全通之分，由于频响特性 $H(\Omega)$ 的周期性，这些特性只能限于在 $-\pi\leqslant\Omega\leqslant\pi$ 范围内来区分，图 5.4.1 给出了理想时域离散低通、带通、高通、带阻、全通滤波器的频率响应的幅频特性。

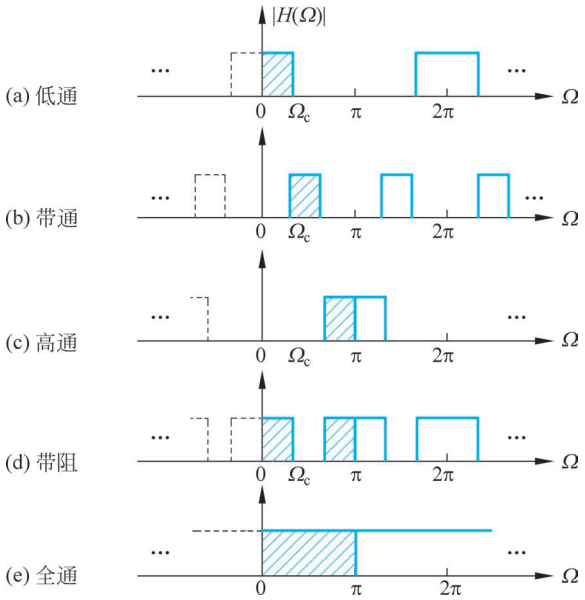


图 5.4.1　理想低通、带通、高通、带阻、全通数字滤波器的幅频特性

图 5.4.1(a)给出了理想时域离散低通滤波器的幅频特性。对于 $-\pi\leqslant\Omega\leqslant\pi$，有

$$|H(\Omega)|=\begin{cases}1, & |\Omega|\leqslant\Omega_c\\ 0, & \Omega_c<|\Omega|\leqslant\pi\end{cases} \tag{5.4.7}$$

因为 $H(\Omega)$ 是周期性的，所以式(5.4.7)规定了对于所有 Ω 的频率响应。这个系统把输

入信号频率在 $\Omega_c < |\Omega| \leqslant \pi$ 范围内的所有分量全部滤掉。显然，理想低通滤波器不是因果性的，但是它在概念上极其重要。同样，可以用可实现的系统来逼近理想滤波器特性。

5.5 案例：DTFT 在多天线通信系统和阵列雷达系统中的应用

多天线通信系统和阵列雷达系统都具有规则排列的多个天线单元。通过对多天线通信系统各个发射天线单元发射的信号进行控制，可以实现对波束特定指向；而对阵列雷达各接收天线单元收到的信号进行处理，可以进行目标角度测量。空间位置不同的各个天线对电磁波进行了空间采样，可以用离散信号来描述。本节将采用离散时间信号与系统的理论与方法，对多天线通信系统的波束形成和阵列雷达的目标波达方向估计等内容进行说明。从这些案例中可以看到，运用本章所学的基本原理，就可以理解多天线通信系统和阵列雷达系统中的很多关键技术，这也再次体现了信号与系统这门课程的基础性作用。

动画

5.5.1 多天线通信系统的波束形成

通信信号在空间传播过程中会出现衰减，特别是对于毫米波波段的 5G 通信系统，高达几十 dB 的信号衰减可能会导致系统无法正常工作。为了满足未来海量的无线通信业务的需求，大规模阵列技术成为 5G 的核心技术之一。5G 基站可以通过调节各天线的相位使信号进行有效叠加，提高天线增益来保证无线信号传输质量。这种通过调节各发射天线的相位使信号在某个方向进行有效叠加的技术称为波束形成技术。图 5.5.1 给出了一个通信系统发射天线阵的示意图，它是一个均匀线阵，每个阵元可以发射频率相同的余弦波信号。由于每个阵元都连接了一个移相器，各个阵元发射的信号的初始相位可以改变，我们将看到，通过调整初始相位，可以控制阵列合成波束指向用户。

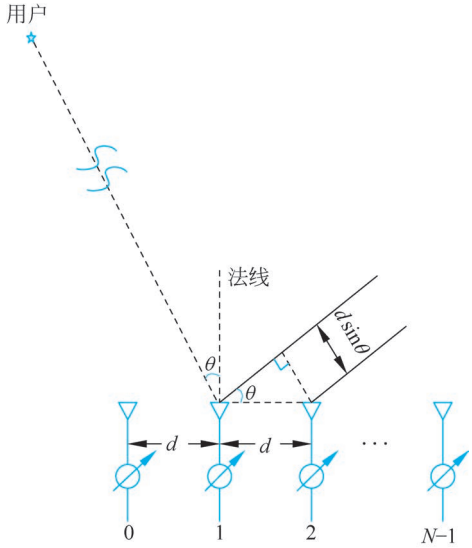


图 5.5.1 发射均匀线阵示意图

首先假设基站各个阵元发射的都是初始相位相同的余弦信号，频率为 f_0，波长为 λ。由于用户不一定位于阵面的法线方向，各个阵元的信号到达目标存在时间延迟，从而造成相位差异。对于方位角为 θ 的目标，相邻阵元与用户的距离差为 $d\sin\theta$，因此用户接收到相邻阵元的信号的相位差同为

$$\phi = 2\pi \frac{d\sin\theta}{\lambda} \tag{5.5.1}$$

从而用户收到的第 n 个阵元的信号可以建模为

$$x(n) = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi n}, \quad n = 0, 1, \cdots, N-1 \tag{5.5.2}$$

此时用户收到的总的信号是各个阵元的信号的叠加，即

$$A(\theta) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) = \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi n} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{(N-1)\phi}{2}} \frac{\sin\frac{N\phi}{2}}{\sin\frac{\phi}{2}} \tag{5.5.3}$$

由于各个阵元发射的是同频率的余弦信号，用户收到的也是同频率的余弦信号（忽略用户运动引起的多普勒频谱），式(5.5.3)给出的是这个信号的复幅度，它同时描述了该信号的强度和初始相位。式(5.5.3)是 θ 的函数，因此不同方向的用户接收到的通信信号功率不同，$|A(\theta)|^2$ 描述了通信系统发射功率在空间的分配情况，也称为通信系统的天线阵列方向图。

实际上，式(5.5.3)可以看作一个离散时间信号的傅里叶变换，这个离散时间信号反映的是阵列的几何构型。例如含有 N 个阵元的均匀线阵，可以用 N 点的门函数表示，而式(5.5.3)恰恰是离散时间门函数的傅里叶变换。

图 5.5.2 给出了 $d=0.5\lambda$，$N=20$ 的情况下，同相发射的均匀线阵的方向图。从图中可以看到，由于同相发射，通信系统合成波束指向阵面的法线方向。根据门函数傅里叶变换的性质可知，阵列越长，合成的波束宽度将会越窄。

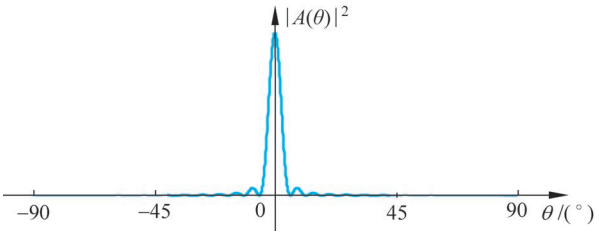


图 5.5.2　同相发射的均匀线阵的方向图

那么，怎样才能使波束指向法线以外的方向呢，可以通过改变各个阵元发射信号的初始相位实现。如果在相邻阵元间增加一个 ϕ_0 的相移，则用户接收到的各个阵元的信号为

$$x(n) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_0 n}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi n}, \quad n = 0, 1, \cdots, N-1$$

根据傅里叶变换的性质不难得到此时的阵列方向图：

$$A(\theta)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)=\sum_{n=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\phi-\phi_0)n}=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{(N-1)(\phi-\phi_0)}{2}}\frac{\sin\dfrac{N(\phi-\phi_0)}{2}}{\sin\dfrac{\phi-\phi_0}{2}}$$

此时使$|A(\theta)|^2$取最大值的目标方向为

$$\theta_0=\arcsin\left(\frac{\phi_0\lambda}{2\pi d}\right)$$

这就是移相以后均匀线阵的波束指向。通过改变各个发射阵元发射信号的相位，可以控制阵列的合成波束指向特定的方向。

图5.5.3给出了移相值为0.7π时的方向图，阵列参数与图5.5.2相同。对比图5.5.2可以发现，除了波束中心指向发生了偏转，波束宽度也有所展宽。波束展宽是由于在用户方向的等效阵列长度缩短了。

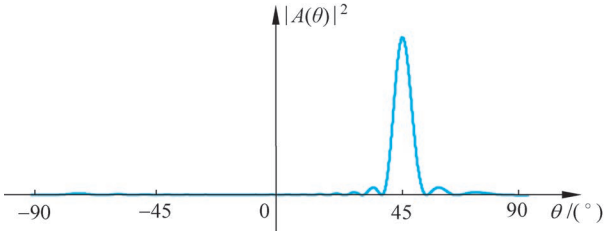


图5.5.3 相邻阵元移相0.7π的均匀线阵的方向图

5.5.2 阵列雷达系统的目标波达方向估计

动画

图5.5.4给出了一个均匀线阵的天线布置，天线之间的间距为d。对距离雷达很远的目标，它辐射或散射的电磁波信号到达雷达阵列时可以认为是平面波，波前平面的垂线指向目标。由于波前平面与阵列有一定的夹角，因此相邻天线接收到的电磁波存在相位延迟。假设目标辐射或散射的是单频连续波，频率为f_0，波长为λ，根据图5.5.4的几何关系可知，相邻天线的信号的相位差也可以表示为式(5.5.1)。以第一个天线(序号为0)的回波相位为基准，则第n个天线(序号为$n-1$)相对于第一个天线的回波相位为$(n-1)\phi$，因此可以将n个天线的信号记为

$$x(n)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi n},\quad n=0,\cdots,N-1 \tag{5.5.4}$$

需要说明的是，由于目标辐射或散射的信号是单频连续波，因此各个天线的回波都是同频率的余弦信号，它们之间仅有初始相位不同，因此我们可以仅采用一个复数而不是一个时间信号描述同一时刻每个天线的接收信号。

从表达式看，式(5.5.4)是一个典型的离散时间复正弦信号，但此时序号n不代表时间，而代表空间位置。通过对这个信号进行频谱分析，可以估计它的频率ϕ，从而估计目标的方向角θ，这是阵列雷达的一个重要应用：估计波达方向(Direction of Arrival，DOA)。下面将对式(5.5.4)进行离散时间傅里叶变换，说明估计DOA的基本原理和主

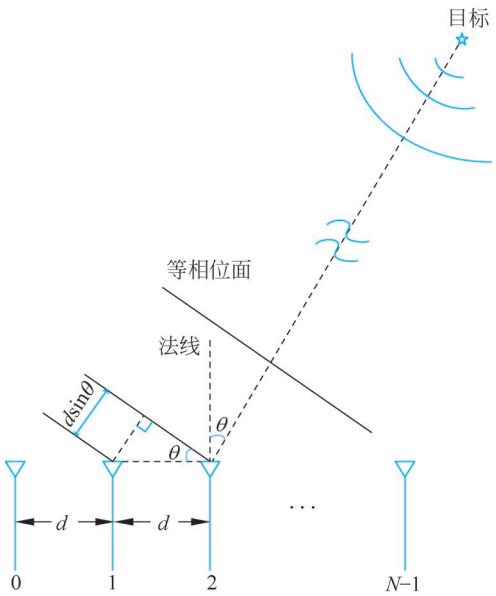


图 5.5.4　均匀线阵及目标回波的相位延迟

要的性能参数。

式(5.5.4)的离散时间傅里叶变换为

$$X(\Omega)=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{(N-1)(\Omega-\phi)}{2}}\frac{\sin\dfrac{N(\Omega-\phi)}{2}}{\sin\dfrac{(\Omega-\phi)}{2}} \tag{5.5.5}$$

$|X(\Omega)|$在$\Omega=\phi+2k\pi,k=\cdots,-1,0,1,\cdots$时取到最大值。但是由于离散时间信号的频谱具有周期性，最大值的位置不唯一。为了避免测角结果模糊，通常要求：

$$d\leqslant\frac{\lambda}{2} \tag{5.5.6}$$

此时根据式(5.5.1)，有

$$-\pi<\phi<\pi$$

其中排除了$\theta=\pm\dfrac{\pi}{2}$的极端情况。

当阵列间距满足式(5.5.6)时，根据幅度谱峰值的位置$\Omega_{\max}$，可以解算信号源的波达方向：

$$\theta=\arcsin\left(\frac{\Omega_{\max}}{2\pi}\cdot\frac{\lambda}{d}\right) \tag{5.5.7}$$

式(5.5.5)的主瓣宽度约为

$$\Delta\Omega=\frac{2\pi}{N}$$

主瓣宽度决定了谱峰的定位精度和对邻近谱峰的分辨能力。将它代入式(5.5.7)，

可以得到以 θ 为自变量的主瓣宽度：

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{Nd} \cdot \frac{1}{|\cos\theta|} \tag{5.5.8}$$

式(5.5.8)说明，阵列长度越长，测向精度和分辨能力越高；目标偏离阵列法线方向越远，测向精度和分辨能力越低。实际上，$Nd\cos\theta$ 可以视为阵列在波前平面上的投影长度，也是对该方向的目标测向的有效阵列长度，因此 式(5.5.8)说明测向性能与有效阵列长度成反比。

图 5.5.5 给出了空间中有两个信号源时，均匀线阵接收信号的幅度谱。两个信源的波达方向分别为 $\theta=10°$和 $\theta=60°$，仿真参数取 $\lambda=3\text{cm}$，$d=1.5\text{cm}$，阵元数目分别为 $N=20$ 和 $N=50$。图 5.5.5(a)和(b)的横坐标为数字频率，图 5.5.5(c)和(d)是根据数字频域与波达方向的关系将横坐标转换为波达方向。对比图 5.5.5 的左右子图可以看到阵列长度对测向性能的影响，对比图 5.5.5(c)、(d)子图中的两个峰值可以看到不同方向信源的测向性能差异。

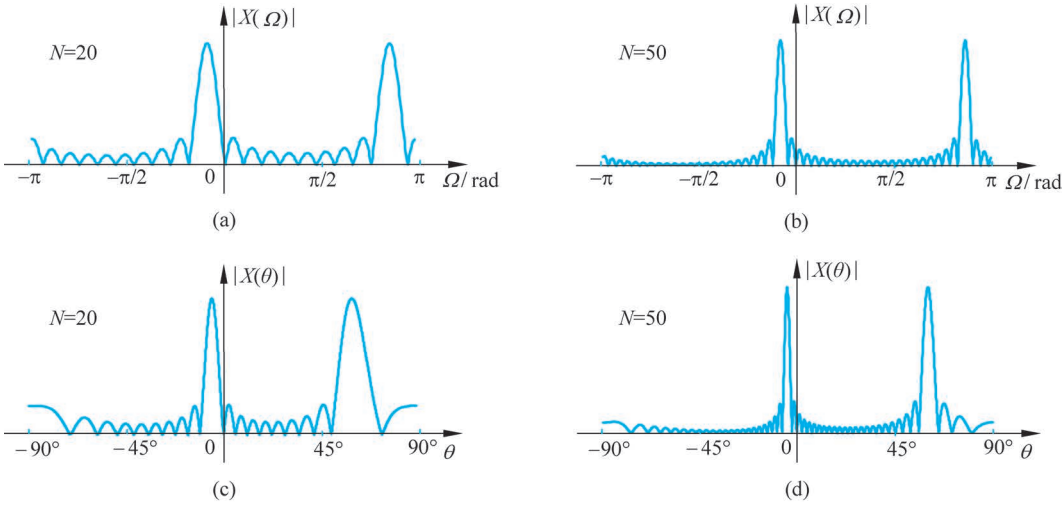


图 5.5.5　均匀阵列接收信号的幅度谱

式(5.5.6)可以保证对阵列雷达整个上半平面的信源无模糊测向。但在实际应用中，关注的信源方向不一定在整个 $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ 区间内，这时可以把每个天线的波束都对准关注的区间，从而使得关注区间之外的信号不被阵列接收到。由于目标区间收缩，阵元间距 d 可以扩大，这有利于在阵元数目不变的情况下增加阵列长度，提高测向精度和分辨力，同时有利于在实现时降低阵元间的互耦，提高测向性能。

当阵元间距 $d>\frac{\lambda}{2}$ 时，如果仍取 $-\pi<\phi<\pi$ 作为解的主值区间，则根据式(5.5.7)，此时能无模糊测向的角度区间为

$$-\theta_{\max} < \theta < \theta_{\max}, \quad \theta_{\max} = \arcsin\left(\frac{\lambda}{2d}\right) \tag{5.5.9}$$

图 5.5.6 给出了不同的 d/λ 数值下对应的 $\theta_{\max}$ 取值，可以看到从 $d=0.5\lambda$ 开始，无模糊测角范围随阵列间距的增大迅速降低，当 $d=\lambda$ 时，无模糊测向范围已经缩小到 $\pm 30°$。

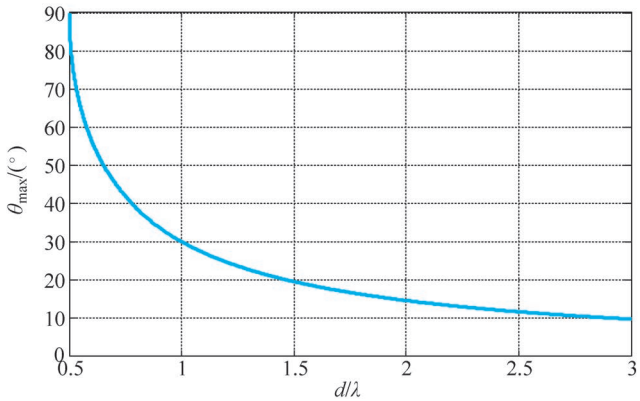


图 5.5.6　阵元间距与无模糊测角范围的关系曲线

习　　题

自测题

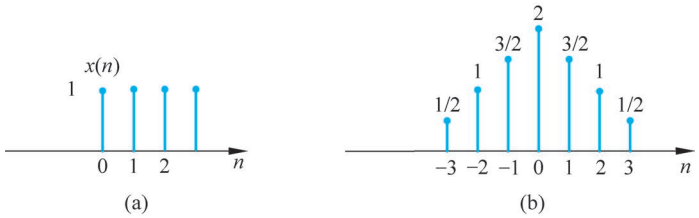
基础题

5-1　计算下列每个序列的傅里叶变换：

(1) $x(n)$如题图 5-1(a)；　(2) $x(n)$如题图 5-1(b)；　(3) $2^n u(-n)$；

(4) $\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n+2)$；　(5) $\left(\frac{1}{2}\right)^n [u(n+3)-u(n-2)]$；

(6) $\delta(4-2n)$；　(7) $0.5^{|n|}$。



题图 5-1

5-2　计算下列频谱的傅里叶反变换。

(1) $X(\Omega)=1-2e^{-j3\Omega}+4e^{j2\Omega}+3e^{-j6\Omega}$；

(2) $X(\Omega)=\cos^2\Omega$；

(3) $X(\Omega)=\cos(\Omega/2)+j\sin\Omega$。

5-3 设 $X(\Omega)$是 $x(n)$的傅里叶变换。将下列信号的傅里叶变换表示成 $X(\Omega)$的形式(不限制 $x(n)$一定为实信号)：

(1) $\mathrm{Re}[x(n)]$；　　(2) $x^*(-n)$。

5-4 推导离散时间傅里叶变换的卷积性质 $x(n)*h(n)\leftrightarrow X(\Omega)H(\Omega)$。

5-5 下列 9 个离散时间信号：

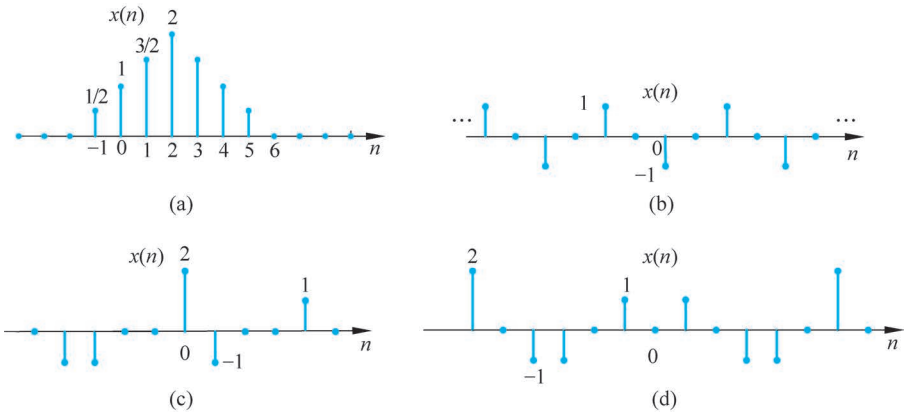
(a) $x(n)$如题图 5-2(a)所示；　　(b) $x(n)$如题图 5-2(b)所示；

(c) $x(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$；　　(d) $x(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$；

(e) $x(n)=\delta(n-1)+\delta(n+2)$；　　(f) $x(n)=\delta(n-1)+\delta(n+3)$；

(g) $x(n)$如题图 5-2(c)所示；　　(h) $x(n)$如题图 5-2(d)所示；

(i) $x(n)=\delta(n-1)-\delta(n+1)$。



题图 5-2

如果存在傅里叶变换，确定其中哪些信号的傅里叶变换满足下列条件之一：

(1) $\mathrm{Re}[X(\Omega)]=0$；　　(2) $\mathrm{Im}[X(\Omega)]=0$；

(3) 对于某个整数 k，满足 $\mathrm{Im}[e^{jk\Omega}X(\Omega)]=0$；

(4) $\int_{-\pi}^{\pi}X(\Omega)\mathrm{d}\Omega=0$；　　(5) $X(\Omega)$是周期性的；　　(6) $X(0)=0$。

5-6 设信号 $x_1(n)=\cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)+\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$，$X_1(\Omega)$表示其傅里叶变换。计算下列频谱的傅里叶反变换：

(1) $X_2(\Omega)=X_1(\Omega)e^{j\Omega}$，$|\Omega|<\pi$；　　(2) $X_3(\Omega)=X_1(\Omega)e^{-j3\Omega/2}$，$|\Omega|<\pi$。

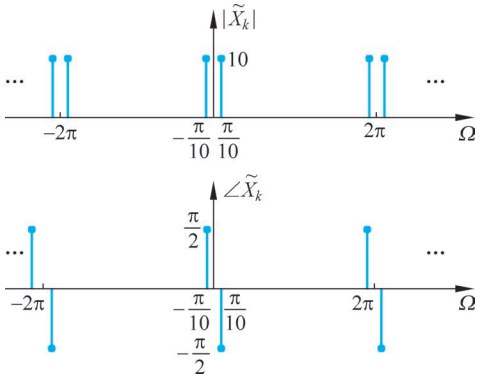
5-7 判断下列序列是否具有周期性。如果具有周期性，确定其周期：

(1) $x(n)=A\cos\left(\frac{3\pi}{7}n-\frac{\pi}{8}\right)$；　　(2) $x(n)=e^{j\left(\frac{n}{8}-\pi\right)}$。

5-8 试求 $\tilde{x}(n)=4\cos 2.4\pi n+2\sin 3.2\pi n$ 的离散傅里叶级数，并对 $0\leqslant k\leqslant N-1$ 画出它的频谱图。

5-9 $\tilde{x}(n)=2\cos 3.2\pi(n-3)$的幅度谱在哪些角频率有非零值？

5-10 某离散时间周期信号 $\tilde{x}(n)$ 的频谱图如题图 5-3 所示，写出 $\tilde{x}(n)$ 的解析表达式。



题图 5-3

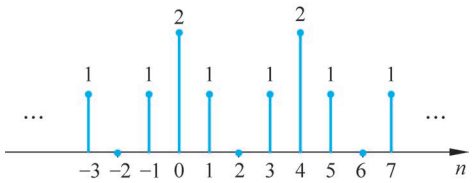
5-11 试证明对于实周期序列，离散傅里叶级数的下列特性成立：

(1) $\tilde{X}(k)=\tilde{X}^*(-k)$；　　(2) $\mathrm{Re}[\tilde{X}(k)]=\mathrm{Re}[\tilde{X}(-k)]$；

(3) $\mathrm{Im}[\tilde{X}(k)]=-\mathrm{Im}[\tilde{X}(-k)]$；　　(4) $|\tilde{X}(k)|=|\tilde{X}(-k)|$；

(5) $\angle\tilde{X}(k)=-\angle\tilde{X}(k)$。

5-12 题图 5-4 所示周期序列 $\tilde{x}(n)$，周期 $N=4$，求 $\tilde{X}(k)$，并画出其频谱图。



题图 5-4

5-13 若周期序列的周期为 N，那么它也是周期为 $2N$ 的周期序列。令 $\tilde{X}_1(k)$ 表示周期为 N 时的傅里叶系数，$\tilde{X}_2(k)$ 表示周期为 $2N$ 时的傅里叶系数，试以 $\tilde{X}_1(k)$ 表示 $\tilde{X}_2(k)$。

5-14 某离散时间线性时不变系统的单位样值响应 $h(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$，求该系统对下列输入信号的响应 $y(n)$：

(1) $x(n)=\left(\frac{3}{4}\right)^n u(n)$；　(2) $x(n)=(n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$；　(3) $x(n)=(-1)^n$。

5-15 某离散时间线性时不变系统的单位样值响应 $h(n)=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right]u(n)$，求该系统对下列输入信号的响应 $y(n)$：

(1) $x(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$；　(2) $x(n)=\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$。

5-16 设 $x(n)$ 和 $h(n)$ 的傅里叶变换分别为 $X(\Omega)=3\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}+2\mathrm{e}^{\mathrm{j}3\Omega}$ 和 $H(\Omega)=$

$-e^{j\Omega}+2e^{j2\Omega}+e^{j4\Omega}$。求 $y(n)=x(n)*h(n)$。

5-17 某离散线性时不变系统，当输入 $x(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u(n-1)$ 时，输出 $y(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$。(1)求该系统的频率响应和单位样值响应；(2)写出表征该系统的差分方程。

5-18 用计算机对测量数据 $x(n)$ 进行平均处理，当接收到一个测量数据后，就把这一次输入数据与前三次输入数据进行平均。试求这一运算过程的系统频率响应 $H(\Omega)$。

5-19 描述某线性时不变系统的方程为 $y(n)+\frac{1}{2}y(n-1)=x(n)$。

(1) 确定该系统的频率响应 $H(\Omega)$；

(2) 计算下列输入的响应 $y(n)$：

(a) $x(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$；　　(b) $x(n)=\left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n)$；

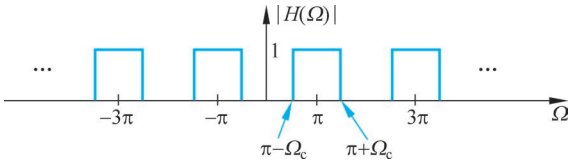
(c) $x(n)=\delta(n)+\frac{1}{2}\delta(n-1)$；　　(d) $x(n)=\delta(n)-\frac{1}{2}\delta(n-1)$。

(3) 具有下列傅里叶变换的输入，求系统的响应 $y(n)$：

(a) $X(\Omega)=\dfrac{1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$；　　(b) $X(\Omega)=\dfrac{1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}}$；

(c) $X(\Omega)=\dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}\right)\left(1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)}$；　　(d) $X(\Omega)=1+2e^{-j3\Omega}$。

5-20 某离散系统的幅频特性如题图 5-5 所示，判断该滤波器是何种类型滤波器。



题图 5-5

5-21 (1) 若 $x(n)\leftrightarrow X(\Omega)$，证明：$(-1)^n x(n)\leftrightarrow X(\Omega-\pi)$；

(2) 若某滤波器的单位样值响应为 $(-1)^n x(n)$，其中 $x(n)$ 的傅里叶变换 $X(\Omega)=G_{2\Omega_c}(\Omega)$，画出该滤波器的频率响应，并判断其属于何种类型的滤波器。

提高/拓展题

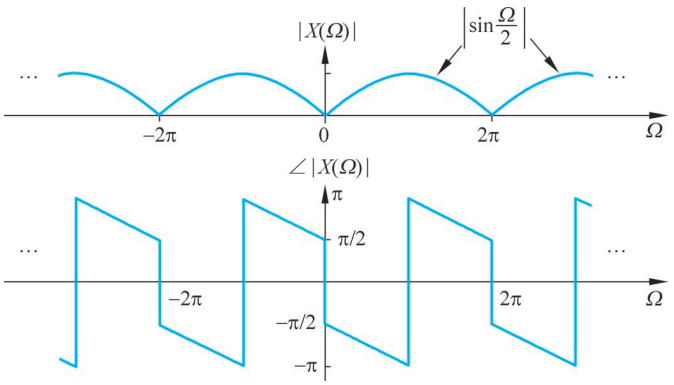
T5-1 计算 $2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\delta(\Omega-2\pi k)+\delta\left(\Omega-\frac{\pi}{4}-2\pi k\right)+\delta\left(\Omega+\frac{\pi}{4}-2\pi k\right)\right]$ 的傅里叶反变换。

T5-2 某序列 $x(n)$ 的离散时间傅里叶变换记作 $X(\Omega)$，已知其满足下面 4 个条件，求 $x(n)$。

（1）当 $n>0$ 时，$x(n)=0$；　　（2）$x(0)>0$；

（3）$\mathrm{Im}[X(\Omega)]=\sin\Omega-\sin3\Omega$；　　（4）$\int_{-\pi}^{\pi}|X(\Omega)|^2\mathrm{d}\Omega=6\pi$。

T5-3 某离散时间信号 $x(n)$ 的频谱如题图 T5-1 所示，试计算 $x(n)$。

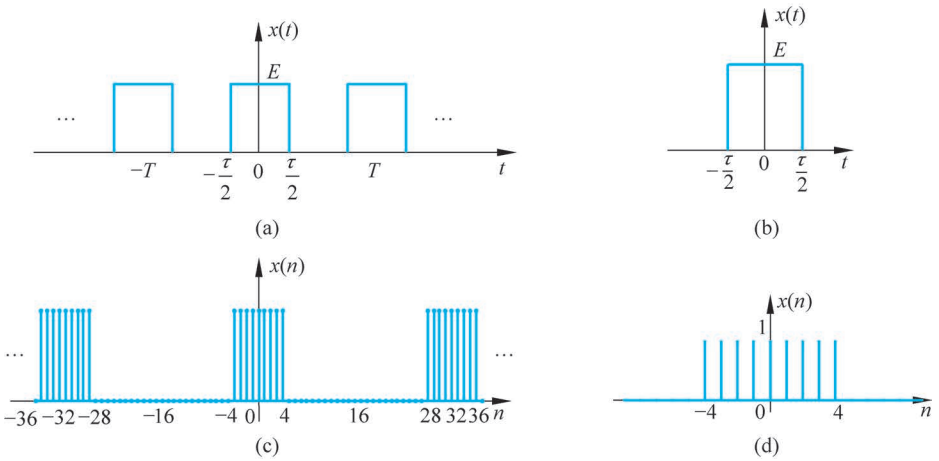


题图 T5-1

T5-4 计算下列周期序列的傅里叶变换：

（1）$\sin\dfrac{n\pi}{4}$；　　（2）$1+\cos\left(\dfrac{n\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$。

T5-5 判断题图 T5-2 所示信号的频谱是否具有周期性和离散性，并说明原因。



题图 T5-2

T5-6 某离散时间理想高通滤波器的频率响应 $H(\Omega)=\begin{cases}1, & \pi-\Omega_c\leqslant|\Omega|\leqslant\pi\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$。

（1）若 $h(n)$ 是该滤波器的单位样值响应，确定函数 $g(n)$ 使得 $h(n)=\dfrac{\sin\Omega_c n}{n}g(n)$。

（2）当 Ω_c 增加时，该滤波器的单位样值响应会更加向原点集中吗？