第5章

05

多元函数微分

专题 24 多元可微的判别

“可微判别”是许多考生的软肋，做了很多题，可依然迈不过这道坎。因为此考点不仅理解上难，计算上也难，可谓是难上加难。但也正因如此，本考点也是高区分度的考点，高等数学不可多得的精妙之处。小白不可恋战，可只做第(1)问。

30. 设 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-1}{\sin^k(x^2+y^2)}=1$，

(1) 当 $k=1$ 时，下列选项正确的是(　　)。

(A) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可偏导

(B) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可偏导但不可微

(C) $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=1$ 且 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微分

(D) $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$ 且 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微分

(2) 若函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微分，求常数 k 的取值范围。

专题 25　多元函数求偏导

多元函数求偏导，这本是一类老掉牙的考题。但命题人对考生的“爱就像蓝天白云，晴空万里，突然暴风雨，无处躲避，总是让人始料不及”。

31. 设函数 $f(x,y)=\int_{0}^{xy}\mathrm{e}^{xt^{2}}\mathrm{d}t$，则

（1）$\left.\dfrac{\partial^{2}f}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=$________。

（2）求极限 $\lim\limits_{y\to+\infty}f(-1,y)$。

32. 设函数 $u=f(x,y,z)$，$g[\sin x,\ln(1+y),z]=0$，$x=e^y$，其中 f 和 g 都具有一阶连续偏导数，且$\dfrac{\partial g}{\partial z}\neq 0$，求$\dfrac{du}{dy}$。

专题 26 多元函数极值

多元函数极值理解上无深渊，但计算上有波澜，属于最难算的专题之一。

普通极值与条件极值花开两朵，各领风骚数百天。本专题汇总核心考法，计算量巨大。来来来，择日不如撞日，既然做到这里了，现在就开始狂练计算吧！

33. 设 $z=z(x,y)$ 是由 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 确定的函数，求 $z=z(x,y)$ 的极值点和极值。

34. 求解下列极值问题：

（1）求直线 $4x+3y=16$ 与椭圆 $18x^2+5y^2=45$ 之间的最短距离。

（2）将长为 2 米的铁丝分成三段，依次围成圆、正方形与正三角形。三个图形的面积之和是否存在最小值？

35. 若函数 $\int_{-\pi}^{\pi}(x-a_1\cos x-b_1\sin x)^2\mathrm{d}x=\min_{a,b\in R}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}(x-a\cos x-b\sin x)^2\mathrm{d}x\right\}$，则 $a_1\cos x+b_1\sin x$ 的值为（　　）。

（A）$2\sin x$　　（B）$2\cos x$　　（C）$2\pi\sin x$　　（D）$2\pi\cos x$

36. 已知 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某邻域内连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-g(x,y)}{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}=1$，

(1) 若 $g(x,y)=xy^2$，点 $(0,0)$ 是否为 $f(x,y)$ 的极值点？

(2) 若 $g(x,y)=axy$，点 $(0,0)$ 是否为 $f(x,y)$ 的极值点？

37. 已知函数 $z=f(x,y)$ 的全微分 $\mathrm{d}z=2x\mathrm{d}x-2y\mathrm{d}y$，并且 $f(1,1)=2$，求 $f(x,y)$ 在椭圆域 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+\frac{y^2}{4}\leqslant 1\right\}$ 上的最大值和最小值。

专题 27 偏导数反求原函数

由偏导数反求原函数属逆向操作。在过去，这种考法是一座难以翻越的大山。到而今，拉远镜头，此考法只是考题“浩瀚群峰中的一角”。喜爱登山的朋友可在此一展身手。

38. 函数 $f(x,y)$满足$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=0$，$f'_y(x,x)=2x+2$，$f(y,y)=(y+1)^2-(2-y)\ln y$，

(1) 求 $f(x,y)$。

(2) 求曲线 $f(x,y)=0$ 所围图形绕直线 $y=-1$ 旋转所成旋转体的体积。

专题 28 偏导数方程

与天斗，其乐无穷；与偏导数方程斗，其乐无穷。求二阶偏导本身就具有很大的计算量，若再与变量替换、化为微分方程等综合，强大的计算量足以让同学们乐此不疲，“打着喷嚏、发烧都不休息”。

39. 设二元函数 $z=z(x,y)$ 有二阶连续的偏导数，

（1）若变换 $\begin{cases} u=x-2y \\ v=x+ay \end{cases}$ 可把方程 $6\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 化简为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$，求常数 a。

（2）若 $z=f(\mathrm{e}^x\cos y)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+\mathrm{e}^x\cos y)\mathrm{e}^{2x}$，且 $f(0)=0$，$f'(0)=0$，求 $f(u)$ 的表达式。

专题 29 偏导数应用(仅数学一)

本专题属于最易遗忘的考点之一,但最近几年频繁出现,尤其是旋度这类练习较少的考点,2016 年、2018 年均有其身影。考生应加强防范。

40. 设向量场 $\boldsymbol{A}=xy^2\boldsymbol{i}+ye^z\boldsymbol{j}+x\ln(1+z^2)\boldsymbol{k}$,求

(1) 向量场 $\boldsymbol{A}$ 在点 $P(1,1,0)$ 处的散度 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}$ 与旋度 $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$。

(2) 函数 $f(x,y,z)=x^2+2y^2+z^2$ 在点 $P(1,1,0)$ 沿该点处 $\boldsymbol{A}$ 方向的方向导数。

41. 由曲线$\begin{cases}x^2-3y^2=4\\z=0\end{cases}$绕 x 轴旋转一周得到的旋转面为Σ_1,绕 y 轴旋转一周得到的旋转面为Σ_2,求

(1) 曲面Σ_2 在点(4,2,0)处的切平面方程。

(2) 曲面Σ_1 与平面 $x=3$,$x=4$ 三者围成立体的体积。