

第3章 命题逻辑

3.1 命题的有关概念

习题 3.1 及参考答案

1. 指出下列语句哪些是命题,对于命题指出其真值.

- (1) 北京在 2008 年举办奥运会.
- (2) 离散数学是计算机专业的必修课.
- (3) $x > y$.
- (4) 西南大学是一所“211 工程”建设的学校.
- (5) 1 是素数.
- (6) 读大学就是要学会思考.
- (7) 月收入超过 3500 元要缴纳个人所得税.

解 (1) 是命题,真值为 1.

(2) 是命题,真值为 1.

(3) 不是命题,因为 x 和 y 的取值未定,于是无法确定 $x > y$ 的真值.

(4) 是命题,真值为 1.

(5) 是命题,真值为 0.

(6) 是命题,真值为 1.

(7) 是命题,真值为 1.

2. 找出下列各命题的所有原子命题,并分别用小写英文字母表示.

- (1) 我不去游泳.
- (2) 张三一边看书,一边用 iPhone 听音乐.
- (3) 小李能歌善舞.
- (4) 这学期我选修人工智能或模式识别课程.
- (5) 明天去深圳的飞机是上午八点或上午八点半起飞.
- (6) 如果我有时间,我就回家去看望我的父母.
- (7) 我今天进城,除非天下雨.
- (8) 小张既没有外出也没有上网,他在睡觉.
- (9) 你只有刻苦学习,才能取得好成绩.
- (10) 仅当你走,我留下值班.

解 (1) p : 我去游泳.

(2) p : 张三看书, q : 张三用 iPhone 听音乐.

(3) p : 小李能歌, q : 小李善舞.

(4) p : 这学期我选修人工智能课程, q : 这学期我选修模式识别课程.

- (5) p : 明天去深圳的飞机是上午八点起飞, q : 明天去深圳的飞机是上午八点半起飞.
 (6) p : 我有时间, q : 我回家去看望我的父母.
 (7) p : 我今天进城, q : 天下雨.
 (8) p : 小张外出, q : 小张上网, r : 小张睡觉.
 (9) p : 你刻苦学习, q : 你取得好成绩.
 (10) p : 你走, q : 我留下值班.

3.2 逻辑联结词

习题 3.2 及参考答案

1. (1) 设 p : 现在很多人都有车, 求 $\neg p$.
 (2) 写出“ -2 是偶数或 3 是正数”的否定命题.
 (3) 设 p : 每个自然数都是整数, 求 $p \vee \neg p$.

解 (1) $\neg p$: 现在不是很多人都有车.

(2) “ -2 是偶数或 3 是正数”的否定命题为“ -2 不是偶数并且 3 不是正数”.

(3) $p \vee \neg p$: 每个自然数都是整数或者不是每个自然数都是整数.

2. 令 p : 今天有雨, q : 明天有雨, $p \wedge q, p \vee q, p \rightarrow q, p \oplus q, p \uparrow q, p \downarrow q$ 和 $p \xrightarrow{n} q$ 分别表示什么复合命题?

解 $p \wedge q$: 今明两天都有雨.

$p \vee q$: 今天或者明天有雨.

$p \rightarrow q$: 如果今天有雨, 那么明天有雨.

$p \oplus q$: 今明两天只有一天有雨.

$p \uparrow q$: 不可能今明两天都有雨.

$p \downarrow q$: 不可能今天或明天有雨.

$p \xrightarrow{n} q$: 不可能今天有雨, 则明天有雨.

3. 令 p : 我们去图书馆, q : 我们去上网, $\neg(p \wedge q)$ 表示什么复合命题?

解 $\neg(p \wedge q)$: 我们不能既去图书馆又去上网.

4. 令 p : 我生病, q : 我去上课, 则“虽然我没有生病, 但我不去上课”该如何用符号表示?

解 $\neg p \wedge \neg q$.

5. “张红和张兰是姐妹”中的“和”与联结词 $\wedge$ 有什么不同?

解 “张红和张兰是姐妹”中的“和”表示的是两个人之间的关系, 而联结词 $\wedge$ 表示的是两个命题的合取. 特别注意, 不能将“张红和张兰是姐妹”分解成“张红是姐妹”且“张兰是姐妹”.

6. 写出一个命题, 它可以表示为 $p \leftrightarrow (\neg q \wedge r)$.

解 令 p : 今天体育课考试, q : 今天下雨, r : 马老师来了, 则 $p \leftrightarrow (\neg q \wedge r)$ 表示“今天体育课考试当且仅当今天不下雨并且马老师来了”.

3.3 命题公式及其真值表

习题 3.3 及参考答案

1. 将下列命题符号化.

- (1) 若 a 和 b 是奇数, 则 $a+b$ 是偶数.
- (2) 只有在正整数 $n \leq 2$ 时, 不定方程 $x^n + y^n = z^n$ 才有正整数解.
- (3) 天在下雨, 我没有去书店.
- (4) 两矩阵相等当且仅当其对应的元素分别相等.
- (5) 这苹果虽然甜, 但我不打算买.
- (6) 除非我接到正式邀请, 否则我不去参加圣诞晚会.
- (7) 我和小王是同学.
- (8) 因为他要看今晚的 NBA 篮球比赛, 所以他没有来上自习.
- (9) 尽管她学习成绩不好, 但她的动手能力很强.
- (10) 我的手机没电了, 借你的手机用一下.

解 (1) 令 p : a 是奇数, q : b 是奇数, r : $a+b$ 是偶数.

该命题符号化为 $p \wedge q \rightarrow r$.

(2) 令 p : 正整数 $n \leq 2$, q : 不定方程 $x^n + y^n = z^n$ 有正整数解.

该命题符号化为 $q \rightarrow p$.

(3) 令 p : 天在下雨, q : 我去书店.

该命题符号化为 $p \wedge \neg q$.

(4) 令 p : 两矩阵相等, q : 两矩阵对应的元素分别相等.

该命题符号化为 $p \leftrightarrow q$.

(5) 令 p : 这苹果甜, q : 我打算买.

该命题符号化为 $p \wedge \neg q$.

(6) 令 p : 我接到正式邀请, q : 我去参加圣诞晚会.

该命题符号化为 $\neg p \rightarrow \neg q$.

(7) 令 p : 我和小王是同学.

该命题符号化为 p .

(8) 令 p : 他看今晚的 NBA 篮球比赛, q : 他来上自习.

该命题符号化为 $p \wedge \neg q$.

(9) 令 p : 她学习成绩好, q : 她的动手能力很强.

该命题符号化为 $\neg p \wedge q$.

(10) 令 p : 我的手机没电了, q : 借你的手机用一下.

该命题符号化为 $p \wedge q$.

2. 设 p, q 和 r 为命题变元, 列出下列命题公式的真值表.

- (1) $(\neg p \wedge (p \vee q)) \rightarrow q$.
- (2) $(\neg p \vee \neg q) \rightarrow (p \leftrightarrow \neg q)$.
- (3) $(p \vee q) \rightarrow r$.

(4) $(p \rightarrow (q \wedge r)) \wedge (\neg p \rightarrow (\neg q \wedge \neg r))$.

解 (1) $(\neg p \wedge (p \vee q)) \rightarrow q$ 的真值表如表 3-1 所示.

表 3-1

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$\neg p \wedge (p \vee q)$	$\neg p \wedge (p \vee q) \rightarrow q$
1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1

(2) $(\neg p \vee \neg q) \rightarrow (p \leftrightarrow \neg q)$ 的真值表如表 3-2 所示.

表 3-2

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$	$p \leftrightarrow \neg q$	$(\neg p \vee \neg q) \rightarrow (p \leftrightarrow \neg q)$
1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0

(3) $(p \vee q) \rightarrow r$ 的真值表如表 3-3 所示.

表 3-3

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \rightarrow r$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	0
1	0	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	1	1
0	1	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	0	0	1

(4) $(p \rightarrow (q \wedge r)) \wedge (\neg p \rightarrow (\neg q \wedge \neg r))$ (将该命题公式用 A 表示) 的真值表如表 3-4 所示.

表 3-4

p	q	r	$p \rightarrow (q \wedge r)$	$\neg p \rightarrow (\neg q \wedge \neg r)$	A
1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0

续表

p	q	r	$p \rightarrow (q \wedge r)$	$\neg p \rightarrow (\neg q \wedge \neg r)$	A
1	0	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1

3. 设 p, q, r 和 s 为命题变元, 判断下列命题公式的类型.

(1) $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r)$.

(2) $((p \rightarrow r) \vee \neg r) \rightarrow (\neg(q \rightarrow p) \wedge q)$.

(3) $((p \vee q) \rightarrow r) \leftrightarrow (r \rightarrow (p \wedge q))$.

(4) $p \rightarrow (\neg p \wedge q \wedge r \wedge s)$.

解 (1) $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r)$ (将该命题公式用 A 表示) 的真值表如表 3-5 所示.

表 3-5

p	q	r	$q \rightarrow r$	$p \wedge q$	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	$(p \wedge q) \rightarrow r$	A
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1
0	0	0	1	0	1	1	1

由真值表可知, $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r)$ 是永真式.

(2) 当 $p=0, q=1, r=1$ 时, $((p \rightarrow r) \vee \neg r) \rightarrow (\neg(q \rightarrow p) \wedge q)$ 为 1; 当 $p=0, q=0, r=0$ 时, $((p \rightarrow r) \vee \neg r) \rightarrow (\neg(q \rightarrow p) \wedge p)$ 为 0. 故 $((p \rightarrow r) \vee \neg r) \rightarrow (\neg(q \rightarrow p) \wedge q)$ 是中性式.

(3) 根据联结词 $\leftrightarrow$ 的定义, 对于命题公式 $((p \vee q) \rightarrow r) \leftrightarrow (r \rightarrow (p \wedge q))$, 分别考虑 $(p \vee q) \rightarrow r$ 和 $r \rightarrow (p \wedge q)$. 很显然, 当 $p=0, q=0, r=0$ 时, $(p \vee q) \rightarrow r$ 和 $r \rightarrow (p \wedge q)$ 都为 1, 在这种指派下原命题公式为 1. 若 $(p \vee q) \rightarrow r$ 为 0, 则可取 $p=1, q=1, r=0$, 而这时 $r \rightarrow (p \wedge q)$ 为 1, 于是在这种指派下原命题公式为 0.

故 $((p \vee q) \rightarrow r) \leftrightarrow (r \rightarrow (p \wedge q))$ 是中性式.

(4) 当 $p=1, q=1, r=1, s=1$ 时, $p \rightarrow (\neg p \wedge q \wedge r \wedge s)$ 为 0; 当 $p=0, q=0, r=0, s=0$

时, $p \rightarrow (\neg p \wedge q \wedge r \wedge s)$ 为 1. 故 $p \rightarrow (\neg p \wedge q \wedge r \wedge s)$ 是中性式.

4. 证明: 对于任意命题公式 A 、 B 和 C , 下列命题公式均永真.

(1) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$.

(2) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$.

(3) $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$.

证 (1) 假定 $B \rightarrow A = 0$, 则 $B = 1, A = 0$, 因此 $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ 永真.

(2) 对于命题变元 p, q 和 r , 命题公式 $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$ (将该命题公式用 D 表示) 的真值表如表 3-6 所示.

表 3-6

p	q	r	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$	D
1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1

由真值表可知, 命题公式 $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$ 是永真式, 故对于任意命题公式 A, B 和 C , $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ 是永真式.

(3) 假定 $B \rightarrow A = 0$, 则 $B = 1, A = 0$, 于是 $\neg A = 1, \neg B = 0$, 进而 $\neg A \rightarrow \neg B = 0$, 因此 $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$ 永真.

5. 证明: 对于任意命题公式 A 和 B , 有 $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ 永真.

证 对于任意命题变元 p 和 q , 命题公式 $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ 的真值表如表 3-7 所示.

表 3-7

p	q	$p \leftrightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	0	0	1
0	0	1	1	1

由真值表可知, $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ 是永真式. 根据永真式的代入定理知, 对于任意命题公式 A 和 B , 有 $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ 永真.

6. 对于任意命题公式 A, B 和 C , 证明下列命题公式永真.

- (1) $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$.
 (2) $(A \vee B) \wedge (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow C$.
 (3) $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A$.
 (4) $A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$.

证 (1) 假定 $A \rightarrow B = 0$, 则 $A = 1, B = 0$, 于是 $\neg A = 0$, 因此 $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ 永真.

(2) 若 $(A \vee B) \wedge (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow C = 0$, 则

$$(A \vee B) \wedge (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) = 1 \text{ 且 } C = 0$$

由 $(A \vee B) \wedge (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) = 1$, 可得 $A \vee B = 1, A \rightarrow C = 1, B \rightarrow C = 1$. 由于 $C = 0$, 由 $A \rightarrow C = 1$ 和 $B \rightarrow C = 1$, 可推出 $A = 0$ 且 $B = 0$, 进而 $A \vee B = 0$, 这与 $A \vee B = 1$ 矛盾.

故 $(A \vee B) \wedge (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow C$ 永真.

(3) 假定 $\neg A = 0$, 则 $A = 1$.

若 $B = 0$, 则 $A \rightarrow B = 0$, 进而 $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B) = 0$.

若 $B = 1$, 则 $\neg B = 0$, 于是 $A \rightarrow \neg B = 0$, 进而 $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B) = 0$.

因此 $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A$ 永真.

(4) 假定 $\neg A \rightarrow B = 0$, 则 $\neg A = 1, B = 0$, 进而 $A = 0$, 所以 $A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$ 永真.

3.4 逻辑等值的命题公式

习题 3.4 及参考答案

1. 证明: 命题公式间的等值关系是等价关系.

证 (1) 对于任意命题公式 A , 显然 $A = A$, 所以 $=$ 是自反的.

(2) 对于任意命题公式 A 和 B , 若 $A = B$, 则 $B = A$, 于是 $=$ 是对称的.

(3) 对于任意命题公式 A, B 和 C , 若 $A = B$ 且 $B = C$, 则 $A = C$, 因此 $=$ 是传递的.

由(1)、(2)和(3)知, $=$ 是等价关系.

2. 证明定理 3-5 中的分配律和德·摩根律.

证 (1) 先证明析取对合取可分配: $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

对于任意命题变元 p, q 和 r , 命题公式 $p \vee (q \wedge r)$ 及 $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ 的真值表如表 3-8 所示.

表 3-8

$p \quad q \quad r$	$q \wedge r$	$p \vee q$	$p \vee r$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
1 1 1	1	1	1	1	1
1 1 0	0	1	1	1	1
1 0 1	0	1	1	1	1
1 0 0	0	1	1	1	1
0 1 1	1	1	1	1	1
0 1 0	0	1	0	0	0
0 0 1	0	0	1	0	0
0 0 0	0	0	0	0	0

由真值表可知, $p \vee (q \wedge r)$ 和 $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ 在任何指派下均有相同的真值, 所以 $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$. 于是 $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ 对于任意命题公式 A , B 和 C 均成立.

再证明合取对析取可分配: $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.

对于任意命题变元 p, q 和 r , 命题公式 $p \wedge (q \vee r)$ 及 $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ 的真值表如表 3-9 所示.

表 3-9

p q r	$q \vee r$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
1 1 1	1	1	1	1	1
1 1 0	1	1	0	1	1
1 0 1	1	0	1	1	1
1 0 0	0	0	0	0	0
0 1 1	1	0	0	0	0
0 1 0	1	0	0	0	0
0 0 1	1	0	0	0	0
0 0 0	0	0	0	0	0

由真值表可知, $p \wedge (q \vee r)$ 和 $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ 在任何指派下均有相同的真值, 所以 $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$. 于是 $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ 对于任意命题公式 A, B 和 C 均成立.

(2) 先证明 $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$.

对于任意命题变元 p, q , 命题公式 $\neg(p \vee q)$ 及 $\neg p \wedge \neg q$ 的真值表如表 3-10 所示.

表 3-10

p q	$p \vee q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$
1 1	1	0	0	0	0
1 0	1	0	1	0	0
0 1	1	1	0	0	0
0 0	0	1	1	1	1

由真值表可知, $\neg(p \vee q)$ 和 $\neg p \wedge \neg q$ 在任何指派下均有相同的真值, 所以 $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$. 于是 $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$ 对于任意命题公式 A, B 均成立.

再证明 $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$.

对于任意命题变元 p, q , 分别列出 $\neg(p \wedge q)$ 及 $\neg p \vee \neg q$ 的真值表如表 3-11 所示.

由真值表可知, $\neg(p \wedge q)$ 和 $\neg p \vee \neg q$ 在任何指派下有相同的真值, 所以 $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$. 于是 $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$ 对于任意命题公式 A, B 均成立.

表 3-11

p q	$p \wedge q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$
1 1	1	0	0	0	0
1 0	0	0	1	1	1
0 1	0	1	0	1	1
0 0	0	1	1	1	1

3. 设 A, B, C 是任意的命题公式, 判断下列命题是否成立, 阐述理由.

(1) 若 $A \wedge C = B \wedge C$, 则 $A = B$;

(2) 若 $A \vee C = B \vee C$, 则 $A = B$;

(3) 若 $\neg A = \neg B$, 则 $A = B$.

解 (1) 不成立. 取 $A = p, B = p \vee q, C = p$, 则 $A \wedge C = p \wedge p = p$ 且 $B \wedge C = (p \vee q) \wedge p \stackrel{\text{吸收律}}{=} p$. 于是 $A \wedge C = B \wedge C$. 而显然 $p \neq p \vee q$, 即 $A \neq B$.

(2) 不成立. 取 $A = p, B = p \wedge q, C = p$, 则 $A \vee C = p \vee p = p$ 且 $B \vee C = (p \wedge q) \vee p \stackrel{\text{吸收律}}{=} p$, 于是 $A \vee C = B \vee C$. 而显然 $p \neq p \wedge q$, 即 $A \neq B$.

(3) 成立. 因为 $\neg A = \neg B$, 所以 $\neg \neg A = \neg \neg B$, 于是 $A = B$.

4. 设 A, B 是任意的命题公式, 证明下列各式.

(1) $A \oplus B = \neg(A \leftrightarrow B) = (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$;

(2) $A \rightarrow B = \neg A \vee B$;

(3) $A \uparrow B = \neg(A \wedge B)$;

(4) $A \downarrow B = \neg(A \vee B)$.

证 这些等值式的证明可以先针对命题变元进行, 再根据定理 3-2 和永真式的代入定理就能得到要证明的结论. 下面都是将 A 看作命题变元 p 且 B 看作命题变元 q , 利用真值表进行的证明.

(1) 命题公式 $p \oplus q$ 、 $\neg(p \leftrightarrow q)$ 和 $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ 的真值表如表 3-12 所示.

表 3-12

p q	$p \oplus q$	$\neg(p \leftrightarrow q)$	$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$
1 1	0	0	0
1 0	1	1	1
0 1	1	1	1
0 0	0	0	0

由真值表知, 命题公式 $p \oplus q$ 、 $\neg(p \leftrightarrow q)$ 和 $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ 在任何指派下的取值都相同, 因此 $p \oplus q = \neg(p \leftrightarrow q) = (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$. 故对于任意命题公式 A, B , 均有 $A \oplus B = \neg(A \leftrightarrow B) = (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$.

(2) 命题公式 $p \rightarrow q$ 和 $\neg p \vee q$ 的真值表如表 3-13 所示.

表 3-13

p	q	$\neg p$	$p \rightarrow q$	$\neg p \vee q$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

由真值表知,命题公式 $p \rightarrow q$ 和 $\neg p \vee q$ 在任何指派下的取值都相同,因此 $p \rightarrow q = \neg p \vee q$. 故对于任意命题公式 A, B , 均有 $A \rightarrow B = \neg A \vee B$.

(3) 命题公式 $p \uparrow q$ 和 $\neg(p \wedge q)$ 的真值表如表 3-14 所示.

表 3-14

p	q	$p \wedge q$	$p \uparrow q$	$\neg(p \wedge q)$
1	1	1	0	0
1	0	0	1	1
0	1	0	1	1
0	0	0	1	1

由真值表知,命题公式 $p \uparrow q$ 和 $\neg(p \wedge q)$ 在任何指派下的取值都相同,因此 $p \uparrow q = \neg(p \wedge q)$. 故对于任意命题公式 A, B , 均有 $A \uparrow B = \neg(A \wedge B)$.

(4) 命题公式 $p \downarrow q$ 和 $\neg(p \vee q)$ 的真值表如表 3-15 所示.

表 3-15

p	q	$p \vee q$	$p \downarrow q$	$\neg(p \vee q)$
1	1	1	0	0
1	0	1	0	0
0	1	1	0	0
0	0	0	1	1

由真值表知,命题公式 $p \downarrow q$ 和 $\neg(p \vee q)$ 在任何指派下的取值都相同,因此 $p \downarrow q = \neg(p \vee q)$. 故对于任意命题公式 A, B , 均有 $A \downarrow B = \neg(A \vee B)$.

5. 设 A, B, C 是任意的命题公式,证明下列各式.

- (1) $A \oplus B = B \oplus A$;
- (2) $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$;
- (3) $A \rightarrow B = \neg B \rightarrow \neg A$;
- (4) $\neg(A \leftrightarrow B) = A \leftrightarrow \neg B$.

证 (1) 根据定理 3-6 有 $A \oplus B = (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$, 于是

$$B \oplus A = (B \wedge \neg A) \vee (\neg B \wedge A)$$

由于 $\wedge$ 和 $\vee$ 满足交换律, 所以

$$A \oplus B = (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) = (B \wedge \neg A) \vee (\neg B \wedge A) = B \oplus A$$

(2) 对于任意命题变元 p, q 和 r , 命题公式 $(p \oplus q) \oplus r$ 及 $p \oplus (q \oplus r)$ 的真值表如表 3-16 所示.

表 3-16

p	q	r	$p \oplus q$	$q \oplus r$	$(p \oplus q) \oplus r$	$p \oplus (q \oplus r)$
1	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0

由真值表可知, $(p \oplus q) \oplus r$ 和 $p \oplus (q \oplus r)$ 在任何指派下均有相同的真值, 所以 $(p \oplus q) \oplus r = p \oplus (q \oplus r)$. 于是 $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ 对于任意命题公式 A, B 和 C 均成立.

(3) $\neg B \rightarrow \neg A = \neg(\neg B) \vee \neg A = B \vee \neg A = \neg A \vee B = A \rightarrow B$.

(4) 因为 $\neg(A \leftrightarrow B) = (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$, 而

$$\begin{aligned}
 A \leftrightarrow \neg B &= (A \rightarrow \neg B) \wedge (\neg B \rightarrow A) = (\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg \neg B \vee A) \\
 &= (\neg A \vee \neg B) \wedge (A \vee B) \\
 &= (\neg A \wedge A) \vee (\neg A \wedge B) \vee (\neg B \wedge A) \vee (\neg B \wedge B) \\
 &= 0 \vee (\neg A \wedge B) \vee (\neg B \wedge A) \vee 0 = (\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)
 \end{aligned}$$

所以, 有 $\neg(A \leftrightarrow B) = A \leftrightarrow \neg B$.

6. 设 A 和 B 是命题公式, 证明关于逻辑联结词 $\uparrow$ 的下列结论.

(1) $\neg A = A \uparrow A$;

(2) $A \wedge B = (A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow B)$;

(3) $A \vee B = (A \uparrow A) \uparrow (B \uparrow B)$.

证 (1) $\neg A = \neg(A \wedge A) = A \uparrow A$.

(2) $A \wedge B = \neg(\neg(A \wedge B)) = \neg(A \uparrow B) = (A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow B)$.

(3) $A \vee B = \neg(\neg A \wedge \neg B) = (\neg A) \uparrow (\neg B) = (A \uparrow A) \uparrow (B \uparrow B)$.

7. 设 A 和 B 是命题公式, 证明关于逻辑联结词 $\downarrow$ 的下列结论.

(1) $\neg A = A \downarrow A$;

(2) $A \wedge B = (A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B)$;

(3) $A \vee B = (A \downarrow B) \downarrow (A \downarrow B)$.

证 (1) $\neg A = \neg(A \vee A) = A \downarrow A$.

(2) $A \wedge B = \neg(\neg A \vee \neg B) = (\neg A) \downarrow (\neg B) = (A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B)$.

$$(3) A \vee B = \neg(\neg(A \vee B)) = \neg(A \downarrow B) = (A \downarrow B) \downarrow (A \downarrow B).$$

8. 设 A, B 和 C 是命题公式, 将等价联结词 $\leftrightarrow$ 记为 $\odot$, 证明下列等值式.

$$(1) A \odot B = B \odot A;$$

$$(2) (A \odot B) \odot C = A \odot (B \odot C);$$

$$(3) A \odot B = \neg(A \oplus B);$$

$$(4) A \odot B = (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B).$$

证 (1) 对于任意命题变元 p, q , 命题公式 $p \odot q$ 及 $q \odot p$ 的真值表如表 3-17 所示.

表 3-17

p	q	$p \odot q$	$q \odot p$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	1

由真值表可知, $p \odot q$ 和 $q \odot p$ 在任何指派下均有相同的真值, 所以 $p \odot q = q \odot p$. 于是 $A \odot B = B \odot A$ 对于任意命题公式 A, B 均成立.

(2) 对于任意命题变元 p, q 和 r , 命题公式 $(p \odot q) \odot r$ 及 $p \odot (q \odot r)$ 的真值表如表 3-18 所示.

表 3-18

p	q	r	$p \odot q$	$q \odot r$	$(p \odot q) \odot r$	$p \odot (q \odot r)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	0	0

由真值表可知, $(p \odot q) \odot r$ 和 $p \odot (q \odot r)$ 在任何指派下均有相同的真值, 所以 $(p \odot q) \odot r = p \odot (q \odot r)$. 于是 $(A \odot B) \odot C = A \odot (B \odot C)$ 对于任意命题公式 A, B 和 C 均成立.

(3) 由于 $A \oplus B = \neg(A \leftrightarrow B)$, 于是 $\neg(A \oplus B) = \neg \neg(A \leftrightarrow B)$, 进而 $\neg(A \oplus B) = A \leftrightarrow B$, 即 $A \odot B = \neg(A \oplus B)$.

$$\begin{aligned} (4) A \odot B &= (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) = (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A) \\ &= (\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge A) \vee (B \wedge \neg B) \vee (B \wedge A) \\ &= (\neg A \wedge \neg B) \vee 0 \vee 0 \vee (B \wedge A) = (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B). \end{aligned}$$

9. 设 A, B, C, D 是任意的命题公式, 化简下列命题公式并将最后的结果仅用 $\downarrow$ 表示.

- (1) $(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C)$;
 (2) $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$;
 (3) $\neg((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$;
 (4) $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge B) \vee (B \wedge C \wedge D)$.

解 (1) $(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C)$
 $= ((A \wedge C) \wedge B) \vee ((A \wedge C) \wedge \neg B)$
 $= (A \wedge C) \wedge (B \vee \neg B) = (A \wedge C) \wedge 1 = A \wedge C$
 $= (A \downarrow A) \downarrow (C \downarrow C)$.

(2) $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$
 $= ((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge B)) \vee (A \wedge \neg B)$
 $= ((A \vee \neg A) \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) = (1 \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) = B \vee (A \wedge \neg B)$
 $= (B \vee A) \wedge (B \vee \neg B) = (B \vee A) \wedge 1 = B \vee A = A \vee B$
 $= (A \downarrow B) \downarrow (A \downarrow B)$.

(3) $\neg((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$
 $= \neg(A \wedge (B \vee C)) = \neg \neg(\neg A \vee \neg(B \vee C)) = \neg((\neg A) \downarrow (\neg(B \vee C)))$
 $= \neg((A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow C)) = ((A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow C)) \downarrow ((A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow C))$.

(4) $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge B) \vee (B \wedge C \wedge D)$
 $= ((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge B)) \vee (B \wedge C \wedge D)$
 $= ((A \vee \neg A) \wedge B) \vee (B \wedge C \wedge D) = (1 \wedge B) \vee (B \wedge C \wedge D)$
 $= B \vee (B \wedge C \wedge D) = B$.

10. 设 A, B, C, D 是任意的命题公式, 判断下列命题公式的类型.

- (1) $((A \rightarrow C) \vee \neg C) \rightarrow (\neg(B \rightarrow A) \wedge A)$;
 (2) $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow D) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))$.

解 (1) 由于

$$\begin{aligned} & ((A \rightarrow C) \vee \neg C) \rightarrow (\neg(B \rightarrow A) \wedge A) \\ &= ((\neg A \vee C) \vee \neg C) \rightarrow ((B \wedge \neg A) \wedge A) \\ &= (\neg A \vee (C \vee \neg C)) \rightarrow (B \wedge (\neg A \wedge A)) \\ &= (\neg A \vee 1) \rightarrow (B \wedge 0) \\ &= 1 \rightarrow 0 = 0 \end{aligned}$$

所以, $((A \rightarrow C) \vee \neg C) \rightarrow (\neg(B \rightarrow A) \wedge A)$ 是永假式.

(2) 因为

$$\begin{aligned} & (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow D) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C)) \\ &= (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow D) \rightarrow (\neg(A \vee B) \vee C)) \\ &= (A \rightarrow C) \rightarrow ((\neg B \vee D) \rightarrow (\neg(A \vee B) \vee C)) \\ &= (A \rightarrow C) \rightarrow (\neg(\neg B \vee D) \vee (\neg(A \vee B) \vee C)) \\ &= (\neg A \vee C) \rightarrow ((B \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge \neg B) \vee C) \\ &= \neg(\neg A \vee C) \vee ((B \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge \neg B) \vee C) \\ &= (A \wedge \neg C) \vee (B \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge \neg B) \vee C \\ &= ((A \wedge \neg C) \vee C) \vee (B \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge \neg B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= A \vee C \vee (B \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge \neg B) \\
&= (A \vee (\neg A \wedge \neg B)) \vee C \vee (B \wedge \neg D) \\
&= A \vee \neg B \vee C \vee (B \wedge \neg D) \\
&= A \vee (\neg B \vee (B \wedge \neg D)) \vee C \\
&= A \vee \neg B \vee \neg D \vee C \\
&= A \vee \neg B \vee C \vee \neg D
\end{aligned}$$

显然, $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow D) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))$ 是中性式.

11. 设 A, B, C 是任意的命题公式, 证明下列等值式.

- (1) $\neg(A \rightarrow B) = A \wedge \neg B$;
- (2) $A \rightarrow (B \rightarrow A) = \neg A \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$;
- (3) $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) = (A \vee B) \rightarrow C$;
- (4) $A \rightarrow (B \rightarrow C) = (A \wedge B) \rightarrow C$.

证 (1) $\neg(A \rightarrow B) = \neg(\neg A \vee B) = A \wedge \neg B$.

(2) 由于

$$A \rightarrow (B \rightarrow A) = A \rightarrow (\neg B \vee A) = \neg A \vee (\neg B \vee A) = \neg A \vee \neg B \vee A = 1$$

而

$$\begin{aligned}
\neg A \rightarrow (A \rightarrow \neg B) &= \neg A \rightarrow (\neg A \vee \neg B) = \neg \neg A \vee (\neg A \vee \neg B) \\
&= A \vee \neg A \vee \neg B = 1
\end{aligned}$$

所以 $A \rightarrow (B \rightarrow A) = \neg A \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$.

- (3) $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)$
 $= (\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee C)$
 $= (\neg A \wedge \neg B) \vee C = \neg(A \vee B) \vee C = (A \vee B) \rightarrow C$.

- (4) $A \rightarrow (B \rightarrow C)$
 $= A \rightarrow (\neg B \vee C) = \neg A \vee (\neg B \vee C)$
 $= (\neg A \vee \neg B) \vee C = \neg(A \wedge B) \vee C = (A \wedge B) \rightarrow C$.

12. 设 p 和 q 是命题变元, 求出 $p \oplus q$ 的对偶式, 它与 $p \odot q$ 的关系如何?

解 由于 $p \oplus q = (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$, 所以 $p \oplus q$ 的对偶式为

$$\begin{aligned}
(p \oplus q)^* &= (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) = (p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q) \vee (\neg q \wedge \neg p) \vee (\neg q \wedge q) \\
&= (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) = p \odot q
\end{aligned}$$

13. 有一个国家只有两种人: 一种人总说真话, 另一种人总说假话. 一个逻辑学家来到该国, 在一个三岔路口处, 不知道哪一条路是去首都方向的. 这时碰巧来了一个人, 逻辑学家只问了他一个问题, 就知道去首都的路了. 请问他问的是什么问题? 为什么?

解 逻辑学家指着两条路中的一条问: “这条路是去首都方向的吗? 其他人(指与所问的人不是同一种人的人)将回答‘是的’, 对吗?”

令 p : 被问的人说真话, q : 被问的人回答“是”, r : 其他人将回答“是”, s : 这条路是去首都方向的, 则有表 3-19.

表 3-19

p	q	r	s
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	0
0	0	1	1

由表 3-19 可知, $r = p \leftrightarrow q$, $s = \neg q$. 于是, 当被问的人回答“是”时, 这条路不是去首都方向的; 当被问的人回答“不是”时, 这条路是去首都方向的.

3.5 命题公式的范式

习题 3.5 及参考答案

1. 求下列命题公式的析取范式与合取范式.

$$(1) p \wedge (p \rightarrow q).$$

$$(2) \neg(p \wedge q) \wedge (p \vee q).$$

$$(3) (\neg p \wedge q) \rightarrow r.$$

$$(4) (p \rightarrow q) \rightarrow r.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } (1) p \wedge (p \rightarrow q) &= p \wedge (\neg p \vee q) = (p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q) = 0 \vee (p \wedge q) \\ &= p \wedge q \end{aligned} \quad \text{(析取范式和合取范式)}$$

$$\begin{aligned} (2) \neg(p \wedge q) \wedge (p \vee q) &= (\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q) \quad \text{(合取范式)} \\ &= (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg q \wedge p) \vee (\neg q \wedge q) \\ &= (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \quad \text{(析取范式)} \end{aligned}$$

$$(3) (\neg p \wedge q) \rightarrow r = \neg(\neg p \wedge q) \vee r = p \vee \neg q \vee r \quad \text{(析取范式和合取范式)}$$

$$\begin{aligned} (4) (p \rightarrow q) \rightarrow r &= (\neg p \vee q) \rightarrow r = \neg(\neg p \vee q) \vee r \\ &= (p \wedge \neg q) \vee r \quad \text{(析取范式)} \\ &= (p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \quad \text{(合取范式)} \end{aligned}$$

2. 在一次研讨会上, 3 名与会者根据王教授的口音分别作出下述判断.

甲说: “王教授不是苏州人, 是上海人.”

乙说: “王教授不是上海人, 是苏州人.”

丙说: “王教授不是杭州人, 也不是上海人.”

王教授听后笑道: “你们 3 人中有一人全说对了, 有一人全说错了, 有一人对错各半.”

请问王教授是哪里人?

解 令 p : 王教授是苏州人, q : 王教授是上海人, r : 王教授是杭州人. 分别考虑由 p, q, r 产生的所有极小项:

(1) $p \wedge q \wedge r$ 表示王教授是苏州人、上海人和杭州人, 这时甲和乙对错各一半, 而丙全错, 不可能.

(2) $p \wedge q \wedge \neg r$ 表示王教授是苏州人、上海人,但不是杭州人,这时甲、乙和丙对错各一半,不可能.

(3) $p \wedge \neg q \wedge r$ 表示王教授是苏州人、杭州人,但不是上海人,这时甲和丙对错各一半,而乙全对,不可能.

(4) $p \wedge \neg q \wedge \neg r$ 表示王教授是苏州人,但不是上海人、杭州人,这时甲全错,乙和丙全对,不可能.

(5) $\neg p \wedge q \wedge r$ 表示王教授不是苏州人,是上海人、杭州人,这时甲全对,乙和丙全错,不可能.

(6) $\neg p \wedge q \wedge \neg r$ 表示王教授不是苏州人、杭州人,是上海人,这时甲全对,乙全错,而丙对错各半,这是一种正确答案.

(7) $\neg p \wedge \neg q \wedge r$ 表示王教授不是苏州人、上海人,是杭州人,这时甲和乙对错各一半,而丙全对,不可能.

(8) $\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$ 表示王教授不是苏州人、上海人、杭州人,这时甲和乙对错各一半,而丙全对,不可能.

综上所述,王教授是上海人.

说明 若利用王教授只能是其中一个城市的人或者不是这三个城市的人这两个可能性,可以将上面的求解过程简化.

3. 当 p, q, r, s 4 个人考试成绩出来后,有人问 4 个人中谁的成绩最好. p 说“不是我.” q 说“是 s .” r 说“是 q .” s 说“不是我.”4 个人的回答只有一个人符合实际. 哪个人的成绩最好? 若有两个人成绩并列最好,应是哪两个人?

解 令 p : p 的成绩最好, q : q 的成绩最好, r : r 的成绩最好, s : s 的成绩最好.

若只有 p 的回答正确,则有 $\neg p \wedge \neg s \wedge \neg q \wedge \neg \neg s$.

若只有 q 的回答正确,则有 $\neg \neg p \wedge s \wedge \neg q \wedge \neg \neg s$.

若只有 r 的回答正确,则有 $\neg \neg p \wedge \neg s \wedge q \wedge \neg \neg s$.

若只有 s 的回答正确,则有 $\neg \neg p \wedge \neg s \wedge \neg q \wedge \neg s$.

由于

$$\begin{aligned} & (\neg p \wedge \neg s \wedge \neg q \wedge \neg \neg s) \vee (\neg \neg p \wedge s \wedge \neg q \wedge \neg \neg s) \vee \\ & (\neg \neg p \wedge \neg s \wedge q \wedge \neg \neg s) \vee (\neg \neg p \wedge \neg s \wedge \neg q \wedge \neg s) \\ & = (p \wedge s \wedge \neg q \wedge \neg \neg s) \vee (\neg \neg p \wedge \neg s \wedge \neg q \wedge \neg s) \\ & = (p \wedge \neg q \wedge s) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg s) \\ & = (p \wedge \neg q \wedge r \wedge s) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge s) \vee \\ & (p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge \neg s) \end{aligned}$$

在上式中, $p \wedge \neg q \wedge r \wedge s$ 表示 p, r, s 成绩最好, $p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge s$ 表示 p, s 成绩最好, $p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s$ 表示 p, r 成绩最好, $p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge \neg s$ 表示 p 成绩最好.

于是,当只有一个人成绩最好时,是 p ; 当有两个人成绩并列最好时,应是 p, s 或 p, r .

4. 已知 p, q, r, s 这 4 个人中有且仅有两个人参加围棋比赛,但必须满足下列 4 个条件:

(1) p 和 q 仅一个人参加.

(2) 若 r 参加,则 s 也参加.

(3) q 和 s 至多参加一个人.

(4) 若 s 不参加, 则 p 也不参加.

应派哪两个人去参加比赛?

解 令 p : p 参加围棋比赛, q : q 参加围棋比赛, r : r 参加围棋比赛, s : s 参加围棋比赛, 则 4 个条件分别符号化为

$$(1) p \oplus q.$$

$$(2) r \rightarrow s.$$

$$(3) \neg(q \wedge s).$$

$$(4) \neg s \rightarrow \neg p.$$

由于 4 个条件要求同时满足, 所以

$$A(p, q, r, s) = (p \oplus q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge \neg(q \wedge s) \wedge (\neg s \rightarrow \neg p)$$

求出 $A(p, q, r, s)$ 的主析取范式:

$$\begin{aligned} A(p, q, r, s) &= (p \oplus q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge \neg(q \wedge s) \wedge (\neg s \rightarrow \neg p) \\ &= (((\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)) \wedge (\neg r \vee s)) \wedge (\neg q \vee \neg s) \wedge (s \vee \neg p) \\ &= ((\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge s) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee \\ &\quad (p \wedge \neg q \wedge s)) \wedge ((\neg q \wedge s) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg s)) \\ &= (\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge s) \vee (\neg p \wedge q \wedge r \wedge s) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee \\ &\quad (p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge s) \vee (p \wedge \neg q \wedge r \wedge s) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s) \end{aligned}$$

根据已知条件, 只有 $p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge s$ 取真一种情况, 于是

$$p=1, q=0, r=0, s=1$$

即应派 p 和 s 参加围棋比赛.

5. 分别用等值演算法和真值表法求下列命题公式的主析取范式及主合取范式, 并判断其类型.

$$(1) (\neg p \vee \neg q) \rightarrow (p \leftrightarrow \neg q).$$

$$(2) (q \rightarrow p) \wedge (\neg p \wedge q).$$

$$(3) (q \vee \neg p) \rightarrow r.$$

$$(4) (p \rightarrow (q \wedge r)) \wedge (\neg p \rightarrow (\neg q \wedge \neg r)).$$

解 (1) 方法 1: 等值演算法.

$$\begin{aligned} (\neg p \vee \neg q) \rightarrow (p \leftrightarrow \neg q) &= (\neg p \vee \neg q) \rightarrow ((p \rightarrow \neg q) \wedge (\neg q \rightarrow p)) \\ &= \neg(\neg p \vee \neg q) \vee ((\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)) \\ &= (p \wedge q) \vee ((\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)) \\ &= (p \wedge q) \vee ((\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg q \wedge p) \vee (\neg q \wedge q)) \\ &= (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \quad (\text{主析取范式}) \\ &= m_{11} \vee m_{01} \vee m_{10} \\ &= M_{00} \\ &= (p \vee q) \quad (\text{主合取范式}) \end{aligned}$$

方法 2: 真值表法.

列出 $(\neg p \vee \neg q) \rightarrow (p \leftrightarrow \neg q)$ 的真值表, 如表 3-20 所示.

表 3-20

p q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$	$p \leftrightarrow \neg q$	$(\neg p \vee \neg q) \rightarrow (p \leftrightarrow \neg q)$
1 1	0	0	0	0	1
1 0	0	1	1	1	1
0 1	1	0	1	1	1
0 0	1	1	1	0	0

由真值表知：

$$(\neg p \vee \neg q) \rightarrow (p \leftrightarrow \neg q) = (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \quad (\text{主析取范式})$$

$$(\neg p \vee \neg q) \rightarrow (p \leftrightarrow \neg q) = (p \vee q) \quad (\text{主合取范式})$$

因此, $(\neg p \vee \neg q) \rightarrow (p \leftrightarrow \neg q)$ 是中性式.

(2) 方法 1: 等值演算法.

$$(q \rightarrow p) \wedge (\neg p \wedge q) = (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \wedge q) = (((p \vee \neg q) \wedge \neg p) \wedge q)$$

$$= (\neg p \wedge \neg q) \wedge q = \neg p \wedge \neg q \wedge q = 0$$

$$= \emptyset \quad (\text{主析取范式不存在})$$

$$= (p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) \quad (\text{主合取范式})$$

方法 2: 真值表法.

列出 $(q \rightarrow p) \wedge (\neg p \wedge q)$ 的真值表, 如表 3-21 所示.

表 3-21

p q	$\neg p$	$q \rightarrow p$	$\neg p \wedge q$	$(q \rightarrow p) \wedge (\neg p \wedge q)$
1 1	0	1	0	0
1 0	0	1	0	0
0 1	1	0	1	0
0 0	1	1	0	0

由真值表知：

$(q \rightarrow p) \wedge (\neg p \wedge q)$ 的主析取范式不存在.

$$(q \rightarrow p) \wedge (\neg p \wedge q) = (p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) \quad (\text{主合取范式})$$

因此, $(q \rightarrow p) \wedge (\neg p \wedge q)$ 是永假式.

(3) 方法 1: 等值演算法.

$$(q \vee \neg p) \rightarrow r = \neg(q \vee \neg p) \vee r = (p \wedge \neg q) \vee r$$

$$= (p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$$

$$= (p \vee (q \wedge \neg q) \vee r) \wedge ((p \wedge \neg p) \vee \neg q \vee r)$$

$$= (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$$

$$= (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \quad (\text{主合取范式})$$

$$= M_{000} \wedge M_{010} \wedge M_{110}$$

$$= m_{111} \vee m_{101} \vee m_{100} \vee m_{011} \vee m_{001}$$

$$= (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \quad (\text{主析取范式})$$

方法 2: 真值表法.

列出 $(q \vee \neg p) \rightarrow r$ 的真值表, 如表 3-22 所示.

表 3-22

p	q	r	$\neg p$	$q \vee \neg p$	$(q \vee \neg p) \rightarrow r$
1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0
1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	0

由真值表知:

$$(q \vee \neg p) \rightarrow r = (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \quad (\text{主析取范式})$$

$$(q \vee \neg p) \rightarrow r = (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \quad (\text{主合取范式})$$

因此, $(q \vee \neg p) \rightarrow r$ 是中性式.

(4) 方法 1: 等值演算法.

$$\begin{aligned}
& (p \rightarrow (q \wedge r)) \wedge (\neg p \rightarrow (\neg q \wedge \neg r)) \\
&= (\neg p \vee (q \wedge r)) \wedge (p \vee (\neg q \wedge \neg r)) \\
&= (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (p \vee \neg r) \\
&= (\neg p \vee q \vee (r \wedge \neg r)) \wedge (\neg p \vee (q \wedge \neg q) \vee r) \wedge \\
&\quad (p \vee \neg q \vee (r \wedge \neg r)) \wedge (p \vee (q \wedge \neg q) \vee \neg r) \\
&= (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge \\
&\quad (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \\
&= (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge \\
&\quad (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \quad (\text{主合取范式}) \\
&= M_{100} \wedge M_{101} \wedge M_{110} \wedge M_{010} \wedge M_{011} \wedge M_{001} \\
&= m_{111} \vee m_{000} \\
&= (p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \quad (\text{主析取范式})
\end{aligned}$$

方法 2: 真值表法.

列出 $(p \rightarrow (q \wedge r)) \wedge (\neg p \rightarrow (\neg q \wedge \neg r))$ (将该命题公式用 A 表示) 的真值表, 如表 3-23 所示.

表 3-23

p	q	r	$p \rightarrow (q \wedge r)$	$\neg p \rightarrow (\neg q \wedge \neg r)$	A
1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1

由真值表知:

$$\begin{aligned}
 & (p \rightarrow (q \wedge r)) \wedge (\neg p \rightarrow (\neg q \wedge \neg r)) \\
 &= (p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \quad (\text{主析取范式}) \\
 & (p \rightarrow (q \wedge r)) \wedge (\neg p \rightarrow (\neg q \wedge \neg r)) \\
 &= (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge \\
 & \quad (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \quad (\text{主合取范式})
 \end{aligned}$$

因此, $(p \rightarrow (q \vee r)) \wedge (\neg p \rightarrow (\neg q \wedge \neg r))$ 是中性式.

6. 利用主范式判断命题公式 $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)$ 的类型.

解 因为

$$\begin{aligned}
 & (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r) \\
 &= ((\neg p \vee q) \vee (\neg q \vee r)) \rightarrow (\neg(p \vee q) \vee r) \\
 &= 1 \rightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee r \\
 &= (\neg p \wedge \neg q) \vee r \\
 &= (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \\
 &= (\neg p \vee (q \wedge \neg q) \vee r) \wedge ((p \wedge \neg p) \vee \neg q \vee r) \\
 &= (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \\
 &= (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r)
 \end{aligned}$$

于是, $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)$ 恰有 3 种指派使其为 0, 进而恰有 5 种指派使其为 1, 故 $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)$ 是中性式.

7. 利用主范式判断下列两个命题公式是否等值.

$$(1) (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r).$$

$$(2) (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r).$$

解 先分别求出所给两个命题公式的主析取范式.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r) \\
 &= (p \wedge q \wedge (r \vee \neg r)) \vee (\neg p \wedge (q \vee \neg q) \wedge r) \vee ((p \vee \neg p) \wedge q \wedge r) \\
 &= (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee \\
 & \quad (p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)
 \end{aligned}$$