第 3 章

暂态电路

本章所讨论的暂态电路是指当信号源或电路本身突然发生变化的情况，例如开关过程。一阶电路的暂态过程比较简单，电容上的偏压或流经电感的电流会以指数衰减的方式从初始态过渡到终止态。二阶电路的暂态过程则要复杂一些，除了指数衰减以外还可能会出现振荡。与暂态过程有密切联系的是数字信号，由于它只有 0 和 1 这两个状态，因此它可以通过一个开关来产生。然而，开关过程又与控制系统关系密切，所以很多控制理论的概念都被用于分析暂态过程。

电子电路可以分为两大类：模拟电路和数字电路，图 3.1 展示了分别与这两种电路所对应的信号。第 2 章的内容主要涉及模拟信号，本章的内容则与数字信号有关。早期的通信系统采用的是模拟信号，其优点是电路十分简单，其缺点是信号质量较差。例如，早期的电视屏幕上会出现很多“雪花”，而无线电广播中也会有很多噪声。与模拟信号相比，数字信号有很多优点：其一是存储和读取十分方便，例如存储在手机里的文字和影音信息；其二是信号处理十分方便，例如手机里的美颜修图软件；其三是在信号传播过程中可以避免噪声的干扰，例如用手机进行信息交流十分可靠；其四是加密和解密过程十分方便，例如用手机进行支付和转账都相当安全。如今，绝大多数电子产品的核心都是数字电路，而模拟电路则主要用于通信系统之间进行信息交流的界面。

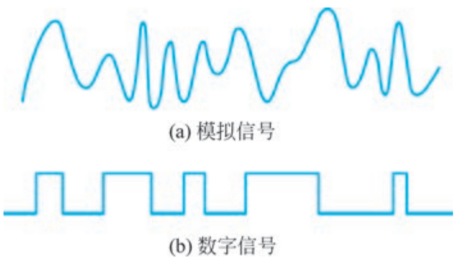


图 3.1　信号的类别

K 很多人有一种误解，认为数字通信过程就是直接发射和接收由 0 和 1 组成的数字信号。其实，除了光通信以外，这在其他通信领域都无法实现。因此，数字通信系统与模拟

通信系统并没有本质的区别，在空间和电缆中传播的电磁波都是正弦波。这两者的差别仅仅在于调制和解调的具体细节中；例如，利用第 2 章介绍的调幅（AM）和调频（FM）方式既可以传输模拟信号也可以用于数字通信。此外，相位调制（Phase Modulation，PM）在数字通信过程中得到了广泛应用，但不适用于模拟通信系统。

3.1 电容的模型

电容这个词翻译得很到位，它就相当于一个电荷的容器。当然，capacitor 这个英文词也有它的意义，其所强调的是容量问题。如果把一个电容当作在一个截面相同的容器，如图 3.2 所示的量筒或烧杯，那么其横截面积就相当于电容的大小（capacitance）。

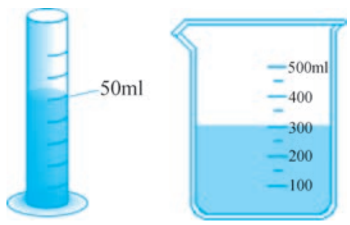


图 3.2 电容器的流体模型

在这个流体模型里，液面的高度相当于电压，而液体的体积则对应于电荷总量，它等于底面积与高度的乘积。

$$q(t)=C\cdot v(t) \tag{3.1}$$

电容的单位是法拉（F），用来纪念 19 世纪的英国著名物理学家法拉第（Faraday），他在电磁感应领域做出了重要贡献，并且发明了原始的电动机和发电机。法拉这个单位可以通过式（3.1）来定义：[F]=[C]/[V]。也就是说，当电容的两个极板上分别带有一库仑的正负电荷时，彼此之间的电压是一伏特，那么这样的一个电容器的值被定义为一法拉。这是一个很大的单位，在实验室所用的分立电容器一般都在 nF～mF 的范围，而在集成电路上的电容一般都在 pF 量级以下。

K 在电子电路实验室中使用的分立电容器主要分为两种：电介质电容和电解质电容。前者有不少优点，例如无极性、耐高压和低漏电，可以在高频工作，但缺点是容量比较小。在这一大类中又可以按介电材料分为很多类，例如陶瓷电容、聚合物电容、纸质电容，等等。

电解质电容的容量比较大，可是有一些工作条件的限制，而且大部分有极性。在使用电解质电容时一定要注意上面标注的极性，如果弄错了则有可能导致爆炸。

此外，与容器中液体的势能所对应的是电容器中存储的能量。

$$W_C(t)=\frac{1}{2}q(t)\cdot v(t)=\frac{1}{2}C\cdot v^2(t) \tag{3.2}$$

在式（3.2）中，$\frac{1}{2}v(t)$可以理解为液体重心的高度，而且假设 $\rho g=1$，这样 $q(t)$既是体积也是重量。

K 当电容充满电以后，它可以像电池那样来提供电源。与电池相比，电容的功率密度较高，但是能量密度较低。换言之，用同样质量的电容和电池来比较，电容可以释放更高的瞬间电流，但是它的续航能力较差。此外，随着电量的释放，其电压也会急剧下降。因此，在不需要很高瞬间功率的应用中，例如便携式电子设备和小型电动工具中，电池就可以满足要求。然而，在对瞬间功率要求很高的应用中，例如电磁炮和电磁弹射，则需要依靠电容来实现。

电容不仅可以存储能量，而且也可以存储信息。当它处于“空”和“满”两种状态时，分别对应于 0 和 1，这和古人所采取的“结绳记事”方法如出一辙。目前计算机内存所采用的动态随机存储器（Dynamic Random Access Memory，DRAM）的存储单元就是一个小电容。由于其体积很小，密度很高，因此价格十分低廉。图 3.3 是 DRAM 的示意图，每个存储信息的电容都与一个晶体管相连，它起到控制信息存取的作用；此外，还需要一些用于读写和刷新信息的辅助电路。

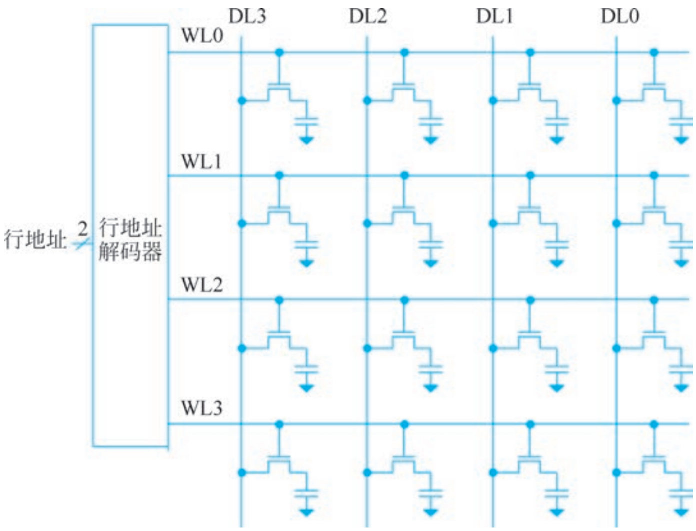


图 3.3　DRAM 示意图

早期 DRAM 中的电容结构十分简单，先在硅片上的一块区域内生长出一层氧化层，然后再覆盖一层导电材料就形成了一个平行板电容器。但是，这种结构占据的面积太大，后来为了增加密度，电容的结构转向纵深方向发展：先在硅片上刻蚀出一个比较深的小洞，然后在其表面生长出很薄的一层氧化层，最后再填充进导体材料。如今在先进工艺过程中电容是在硅片的上面制成的，从而可以采用性能更优异的材料。无论采用什么结构和工艺过程，如此微小的电容总存在漏电现象。为了防止信息丢失就需要经常重新充电，所以才被称为“动态”存储器。手机和计算机在“待机”状态下也要耗电，原因之一就是 DRAM 中的信息需要不断刷新。所以“动态”是这类存储器的弱点，而“静态随机存储器”（SRAM）的性能更优越。

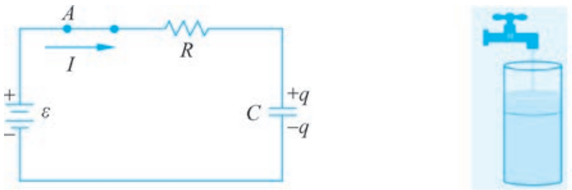
K 与 DRAM 相对应的是 SRAM(Static Random Access Memory)，其核心部分由 4 个晶体管或 2 个非门构成。由于其复杂度远高于一个电容，所以其价格要比 DRAM 高很多，目前主要用作 CPU 中的高速缓存(cache memory)。因为采用了自锁的正反馈机制，这种存储器所存储的数据在不断电的情况下不会流失，所以被称为静态随机存储器。在响应速度上，SRAM 比 DRAM 快得多。因此，这里的“动”与“静”与数据的读写速度没有任何关系。

在这里用的“随机”(Random Access)指的是一种读写方式，其含义是读写处在任何位置的存储单元所需的时间都是相同的。与之相对的是“顺序存储器”，例如磁盘和 CD，最具代表性的就是一维的磁带。在 20 世纪 80 年代人们听音乐主要靠磁带，那时必须先要花时间“倒带”(rewind)，然后才能听挑选的歌曲。如今大家都把音乐存储在手机的固态存储器中，播放曲库中的任何一首歌都没有时间延迟。因此，这个看似贬义的“随机”实际上是一大优点。

3.2 电容的时域分析

当有电流输入到电容器时，它与通过一根管子向一个容器中注水的过程有类似之处，如图 3.4 所示。管子中液体的流量所对应的是电流，而容器中液体的体积是电荷总量。这两者之间有着简单的关系：后者是前者的积分，而前者是后者的导数。由此可以得出电流与电压之间的关系：

$$i(t)=\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}=C\,\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} \tag{3.3}$$



(a) 电路图　　(b) 流体模型

图 3.4　含有电容的电路

这个流体模型还可以帮助我们来确定电流与电压的极性。如图 3.4(a)中的电路所示，如果把电流从上方流入电容定为正向，那么电容上偏压的定义则是上方电压减去下方电压。如果这个电容下端接地，那么式(3.3)中的偏压就是电容器上方的节点电压。

K 在系统思维(systems thinking)领域有两个基本的概念：增量和存量。利用电容的液体模型可以帮助人们理解这两个概念：与增量对应的是电流，而与存量对应的是总电

量，这两者的关系是对时间的积分和微分。其实，人们在学微积分的时候也可以参考这个模型。

在实际电路中，电容往往会与一个电阻相连，如图 3.5(a)所示。图中左侧的电压源输出一个电压在 $0 \sim V_S$ 变化的方波，如图 3.5(b)所示。假如最初电容中没有电荷，而电压源从 0 突然变化到 V_S，电荷就会被注入电容当中去，会使其电压逐渐增高。此时，电阻两端的偏压就会逐渐减小，从而导致电流减弱。所以，电容上的电压最初增加很快，但是随后会变得越来越慢。

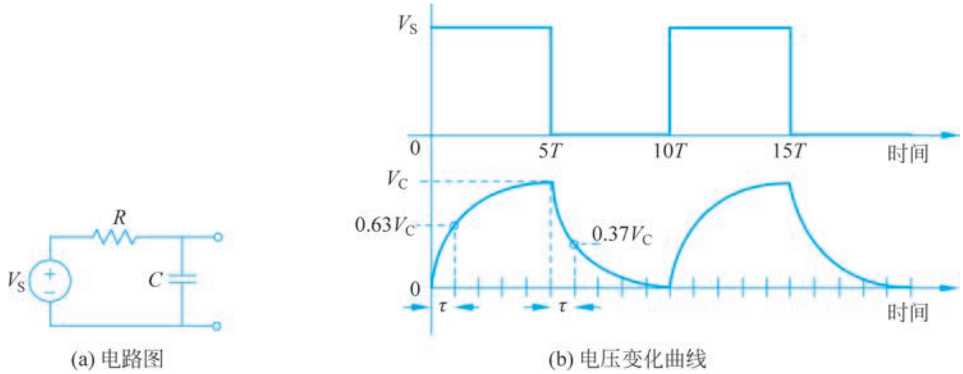


图 3.5　RC 电路充放电过程

这个过程可以用以下公式来表达：

$$i_R(t) = i_C(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{V_S - v_C(t)}{R} = C\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t} \tag{3.4}$$

其解不难求出：

$$v_C(t) = V_S(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}) \tag{3.5}$$

在普通物理课程中介绍过，$\tau = RC$ 所对应的是这个电路的时间常数。在流体模型中我们把电容比作一个容器，当其容量很大时，往往需要很长时间才能将其注满，因此时间常数与电容值成正比。此外，当电阻很大时则相当于一根很细的管子，所以时间常数也与电阻成正比。从图 3.5(b)中可以看出，当 $t = \tau$ 时，电容的电压达到了其最大值的 63.2%，也就是 $1 - \mathrm{e}^{-1}$。

当图 3.5(a)中的电压源从 V_S 突然降到 0 时，电容就开始了放电过程。此时，电容从负载变成了电压源，所以电阻中的电流方向发生了变化。为了简化公式，可以把时间的起点平移一下，这样就可以利用与式(3.4)同样的方程求出其解。

$$\frac{0 - v_C(t)}{R} = C\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad v_C(t) = V_S\mathrm{e}^{-t/\tau} \tag{3.6}$$

从图 3.5(b)中可以看出，在 $t = \tau$ 时，电容上的电压下降到初始值的 36.8%，也就是 e 的倒数。

从图 3.5(b)中还可以看出，电容上的电压是连续的。由于电容上存储的电荷和能量都与电压有关，所以这个参数不能发生跳变。此外，如果电压源的信号变化周期太短，那么电容就没有足够的时间来进行充放电。从式(3.5)和式(3.6)中可以算出，方波的周期至少要达到 RC 电路时间常数的 5 倍，电压才能趋于稳定值：$e^{-5}\approx 6.74\times 10^{-3}$。

K 在数字电路中各个部分都是按照同一个时钟的节奏来运行的，这个节奏越快信息处理的速度越高，但是它受到了电子器件响应时间的限制。在评估数字电路的性能时，这个时钟频率是一个核心参数。集成电路芯片的信息处理速度主要受两个因素制约：其一是晶体管的响应速度；其二是信号在导线上的传输速度。前者就可以用简单的 RC 电路来加以估算，而后者可以用分布的 RC 电路来分析。当晶体管的尺寸减小时，其对应的电容也会减小，但是电阻 R 可以基本保持不变，所以总的效果是延迟降低和响应速度提高。

其实，充电和放电过程可以用同一个公式来统一处理(如果系统有充足的响应时间的话)。这个过程可以分为 3 个阶段：

(1) 变迁发生以前($t\leqslant t_0$)，电容的电压处于初始值 V_I。

(2) 变迁过程之中($t_0< t<\infty$)，电容的电压以指数函数变化，时间常数 $\tau=RC$。

(3) 变迁发生以后($t\to\infty$)，电容的电压已经达到其终止值 V_F。

在确定了这些参数以后，变迁过程的函数就可以用以下公式来描述：

$$v_C(t)=V_F+(V_I-V_F)\exp[-(t-t_0)/\tau] \tag{3.7}$$

不妨检验一下这个表达式：当 $t=t_0$ 的时候，指数函数为 1，所以 V_F 被抵消，$v_C(t=t_0)=V_I$。在 $t\to\infty$的情况下，指数函数为 0，$v_C(t\to\infty)=V_F$。从另一个角度来看，指数函数前面的这个系数是初始值与终止值的差别，$V_D=V_I-V_F$；随着时间的流逝，这个差别以指数衰减的方式而逐渐消失。这个公式不仅可以用于简单的 RC 电路，而且可以用于复杂的电路，如下例所示。

在如图 3.6(a)所示的电路中，开关的状态在 $t_0=1\text{s}$ 时发生变化。在 $t<t_0$ 时接地，在 $t\geqslant t_0$时与 6V 电压源相连。首先需要找到那 3 个关键参数：V_I、V_F和时间常数 τ。

(1) 初始状态($t<t_0$)。

此时系统处于稳态，相当于直流电路，电容当作开路来处理：$V_I=0\text{V}$。

(2) 时间常数。

首先可以让 C_1 和 R_2 交换位置，然后用戴维南定理算出折合的电阻：

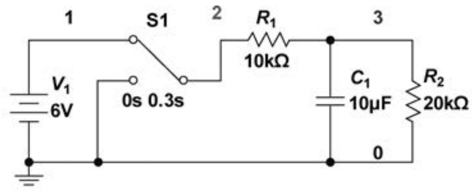
$R=R_1\parallel R_2=(20/3)\text{k}\Omega$，然后就可以算出时间常数：$\tau=RC=1/15(\text{s})$。

(3) 终止状态($t\to\infty$)。

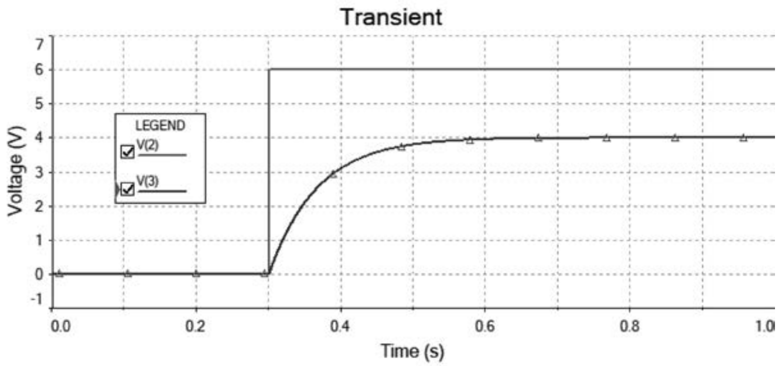
此时系统也处于稳态，电容相当于开路，利用串联分压电路可以得出：$V_F=4\text{V}$。

把这 3 个参数代入式(3.7)就可以求出电容上的电压变化函数：$v_C(t)=4[1-e^{-15(t-1)}]$。这个解只适用于开关过程以后($t>t_0$)的情况，它与仿真结果十分吻合。图 3.6(b)

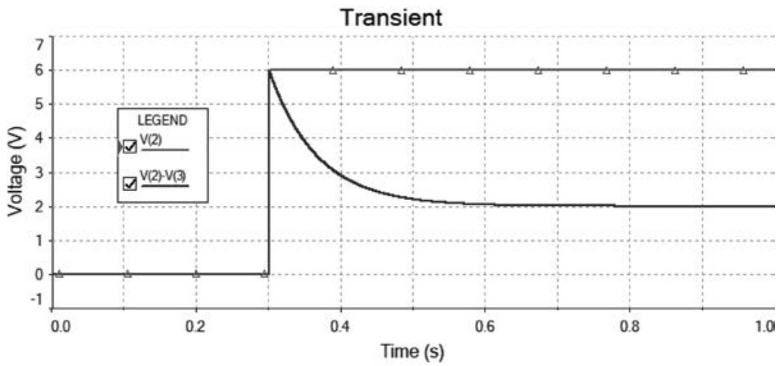
中的阶跃曲数是节点 2 处的电压，而另一条曲线是电容上方节点 3 处的电压。图 3.6(c)中的曲线所显示的是电阻 R_1 上的偏压，它与电容上的电压有互补的关系，因为两者之和就是电压源的电压。顺便解释一下，Multisim 的 Transient Analysis 除了可以显示节点电压、流经器件的电流以及消耗的功率这些基本参数以外，还可以展示由这些参量之间的数学运算而得出的新参数。例如，图 3.6(c)中所显示的偏压就是两个节点电压之差。



(a) 暂态电路



(b) 电容上的偏压



(c) R_1上的偏压

图 3.6 一阶电路的暂态过程

这个电路还有另一种解法，首先交换电容和电阻 R_2 的位置，然后利用戴维南定理把电容左侧的电路转化为其等效电路，结果就变成了简单的 RC 电路。电路中的开关在变换中保持不变，仅仅需要把直流电压源从 6V 变成 4V。

Q 如果需要求解电阻上的电压和电流，或者流经电容的电流，是否也可以使用式(3.7)这个通解？

原则上来说是可以的，但是并不像求解电容上的电压那么简单。其原因在于电容上的偏压在开关过程中不会跳变，满足 $V_C(t_0^+)=V_C(t_0^-)$ 这个条件，所以可以利用开关过程之前的稳态电路来求出 $V_C(t_0^+)$。然而，其他的变量则会发生跳变，如图 3.6(c)所示，因此求解其初始值($V(t_0^+)$或 $I(t_0^+)$)的过程变得复杂得多。

如果需要求解除了电容电压以外的其他变量，那么可以采用两种方法。

(1) **间接方法**：首先利用式(3.7)来求解电容上的电压($V_C(t)$)，然后把电容当作一个电压源来求解。当电路比较复杂时，可以利用线性叠加原理来分别计算电容和其他源的贡献。

(2) **直接方法**：直接使用式(3.7)，但是求初始值的过程有些复杂。例如，在计算电阻上的初始值的时候，电容相当于一个直流电压源，其电压取其初始值，$V_C(t_0^+)=V_C(t_0^-)=V_C(t<t_0)$。此外，在求解电阻参数的终止值时可以按照直流电路的解题方法来求解，此时电容相当于开路。

下面就用这两种方法来分别求解图 3.6(a)中流经电阻 R_1 的电流。

(1) 间接方法。

- 首先求出电容上的电压：$V_C(t)=4[1-e^{-15(t-1)}]$。
- 在 $t\geqslant t_0$ 的条件下，R_1 左端与 6V 电压源相连，而右端与电容相连，所以其偏压可以很容易求出：$V_{R1}(t)=V_S-V_C(t)=2+4e^{-15(t-1)}$(V)。
- 利用欧姆定律就可以求出电流的函数：$I_{R1}(t)=0.2+0.4e^{-15(t-1)}$(mA)。

(2) 直接方法。

- 计算初始值：首先计算电容在 $t\leqslant t_0$ 情况下的电压：$V_C(t\leqslant t_0)=0$。在 $t=t_0^+$ 时刻，R_1 的左右两侧的电压分别是 6V 和 0V，所以偏压是 6V，由此得出 $I_I=0.6$(mA)。
- 计算终止值：当 $t\to\infty$时，电容相当于开路，由此得出 $I_F=0.2$(mA)。
- 代入通解就可以得出暂态电流的表达式：

$$I_{R1}(t)=I_F+(I_I-I_F)\exp[-(t-t_0)/\tau]=0.2+0.4e^{-15(t-1)}\,(\text{mA})$$

在分析暂态过程中，初学者在求解时间常数时常常会出错。下面就介绍两种常见的等效电路，如图 3.7 所示。在如图 3.7(a)所示的电路中，电容的两侧各有一个串联电阻，而且还与一个直流电压源相连。在如图 3.7(b)所示的电路中，电容的两侧各有一个并联电阻，而且还与一个直流电流源相连。在求解时间常数时，首先需要关闭各种源；为了消除其影响，电压源要短路($V=0$)而电流源要开路($I=0$)。其次，在串联和并联电路中，器件的位置是可以互换的，所以电容可以挪到电路的一侧。经过这样的变换以后，时间常数就很容易求得了，它们分别是：$\tau_1=(R_1+R_2)C_1$，$\tau_2=(R_3\parallel R_4)C_2$。

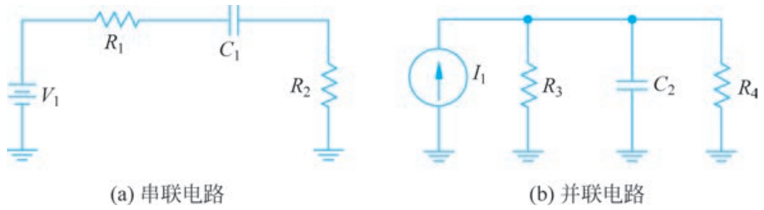


图 3.7 串联和并联 RCR 电路

3.3 电感的模型和时域分析

电感的一个实物模型类似于一个在运河上的水车，如图 3.8 所示。电感值可以与水车的转动惯量对应起来，所以高电感对应于比较大的水车。如果把运河的水流比喻为电流，那么水车前后的水面高度差则相当于电感上的偏压。当水流保持稳定时，水车前后的水面高度是相同的；因此，在电流恒定的直流状态，电感两端的偏压为零，此时电感就相当于短路。假设运河的通道与水车的叶轮十分吻合，当运河上游的流量突然发生变化的时候，其下游的流量不会立即改变，但会导致其前后的水面高度出现差别。例如，当上游的流量突然增加的时候，由于水车的惯性，它的转速不会立刻增大，所以水会在水车前积累起来。与这个过程相对应的就是电流的变化会导致电感两端出现偏压，下面将推导这个公式。

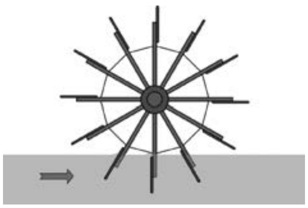


图 3.8 电感的“水车模型”

利用这个机械模型，电感上的能量类似于水车旋转的动能：$W=\frac{1}{2}I\omega^2$，其中，I 是转动惯量，而 ω 是角速度。如果把转动惯量换成电感，而把角速度变成电流，就可以得出电感的能量公式：$W_L(t)=\frac{1}{2}L\cdot i(t)^2$。从物理学的角度来看，在电感上存储的能量来自于空间中存储的磁场能：$W_L=\int w_m \mathrm{d}V$，其中的磁场能量密度是 $w_m=\frac{1}{2}\mu H^2$。

Q 有两根长度相同但是直径不同的直导线，哪根导线的电感更高一些？

细的导线比粗的导线电感更高一些。这个问题可以这样来思考：假如同样的电流通过这两根导线，它们分别产生的磁场有何区别？为了解释方便，假设细导线的半径为 R_1，而粗导线的半径为 R_2，$R_1<R_2$。根据安培定律，直导线外面的磁场与距离成反比：$H(r)=\frac{I}{2\pi r}$，其中 I 是导线中的电流。所以，在 $R>R_2$ 这个空间内两者产生的磁场完全一样。然而，在 $R<R_2$ 区域内，细导线产生的磁场更强，所以其电感值略高一些。尽管如此，细导线的寄生电阻也比较高，这会导致生热，同时也会降低其 Q 值。

3.1 节中定义了电容的能量，它实际上是在空间中存储的电场能量。在普通物理中介绍过，在空间中电场的能量密度是 $w_E=\frac{1}{2}\varepsilon E^2$，其中 $\varepsilon=\varepsilon_r\varepsilon_0$ 是介电常数。例如，在平行板电容器之间，其电场的强度是 $E=V/d$，d 是两个极板之间的距离。假设每个极板的面积为 A，那么在这两个极板之间的能量就是能量密度与体积的乘积：$W_C=w_E\cdot(Ad)=\frac{1}{2}\varepsilon E^2(Ad)$。如果把电场用电压来表示，就可以得出电容上的能量表达式：

$$W_C=\frac{1}{2}\varepsilon\frac{A}{d}V^2=\frac{1}{2}CV^2$$

从能量与功率的关系可以推导出电流与电压之间的关系：

$$p_C(t)=\frac{\mathrm{d}W_C}{\mathrm{d}t}\Rightarrow i_c(t)\cdot v_c(t)=C\cdot v_c(t)\frac{\mathrm{d}v_c(t)}{\mathrm{d}t}\Rightarrow i_c(t)=C\frac{\mathrm{d}v_c(t)}{\mathrm{d}t} \tag{3.8}$$

利用同样的方法也可以得出电感上电流与电压的关系：

$$p_L(t)=\frac{\mathrm{d}W_L}{\mathrm{d}t}\Rightarrow i_L(t)\cdot v_L(t)=L\cdot i_L(t)\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}\Rightarrow v_L(t)=L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} \tag{3.9}$$

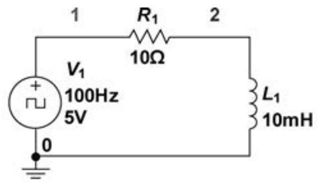
K 在第 2 章推导电容的电流与电压之间的关系时，使用的是流体模型，也就是把电荷想象为流体。然而，自然界中并没有与电荷所对应的“磁荷”，而与之所对应的是“磁通量”。在量子理论中磁通量是可以量子化的，在超导体中也可以观测到这种现象。换言之，磁通量也是可数的，就像电子一样。如果使用磁通量来推导，也可以看出这两种器件之间的对应关系。

$$\Phi(t)=L\cdot i(t)\Leftrightarrow Q(t)=C\cdot v(t)$$

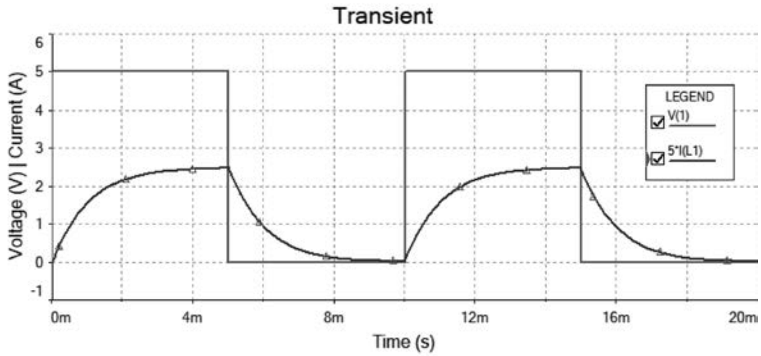
$$v(t)=\frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t}=L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}\Leftrightarrow i(t)=\frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t}=C\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}$$

加州大学伯克利分校的蔡少棠(Leon Ong Chua)教授在 1971 年注意到电荷与磁通量之间的对应关系。他认为应该存在第四种被动器件，并且命名为“忆阻器”(memristor)，它是电阻在磁场下的对应器件。在 2008 年惠普公司的研究团队终于开发出了实用的忆阻器，它可以被用于神经网络电路。

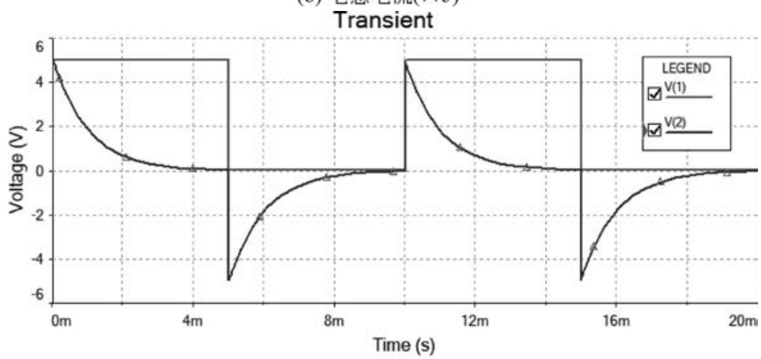
电感中的电流与电容上的偏压一样都不允许发生跳变，因为它们与存储的能量直接相关。图 3.9(a)是一个简单的 RL 串联电路，当电压源发生跳变时，流经这个回路的电流始终是连续的，如图 3.9(b)所示。然而，电感上的电压却是可以跳变的，如图 3.9(c)所示。图 3.9(d)所显示的就电阻上的偏压，其波形与如图 3.9(b)所示的电感中的电流十分相似。在串联电路中电流是处处相同的，而电阻的电流与偏压之间满足线性的欧姆定律，所以这两个波形是一致的。



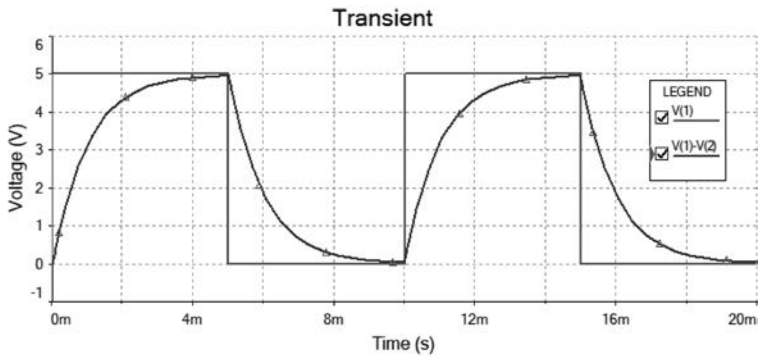
(a) RL串联电路



(b) 电感电流(×5)



(c) 电感偏压



(d) 电阻偏压

图 3.9　暂态特性分析

电容的充放电过程中对应着能量的存储和释放，在电感上也有同样的效应。当电流增强的时候，电感上存储的能量也在逐渐增大。如果外加的能量源突然消失，电感的作用就与电流源类似，但是其电流会随着能量的消耗而逐渐减小。在能量积累与释放的过程中也有一个时间常数，在串联 RL 电路中，其值为 $\tau=L/R$。代入图 3.9(a)中电路器件的参数，可以求出时间常数：$\tau=1\text{ms}$。

下面先定性地分析一下这个过程，此时 KCL 和 KVL 依然成立。换言之，流经电阻和电感的电流总是相同的，而且这两个器件上的偏压之和等于电源提供的电压。

(1) 当电压源从 0 跳变到 5V 时，电感不允许电流发生跳变，所以瞬间电流依旧为零。根据欧姆定律，电阻上的偏压也为零，此时电感承受着全部的偏压。

(2) 随着时间的推移，电流开始增加，电阻上的偏压也按比例增加，而电感上的偏压则在下降。在这个过程中，电感上存储的能量在增加。

(3) 经过一段时间以后，电流达到了稳定的最大值，电感上的偏压降为零而能量却达到了最大值，此时全部偏压落在了电阻上。

(4) 当电压源突然从 5V 跳变到 0 时，电感不允许电流发生跳变，所以瞬间电流依旧保持在高水平。根据欧姆定律，电阻上的偏压也保持不变，此时电感的偏压跳变到负值，只有这样二者相加才能为零。这时，电感起到了一个电流源的作用。

(5) 随着时间的推移，电感中的能量开始降低，电流开始缓慢减弱，电阻上的偏压也随之降低，而电感上的偏压则与之始终保持同步但符号相反。

(6) 最终存储在电感中的能量耗尽，电路中所有器件中的电流和电压都趋于零。

下面来进行定量的分析：由于电感的能量与电流直接相关，所以应该选择电流而不是电压来作为独立变量。然后利用欧姆定律可以把电流转化为电阻上的电压，最后利用 KVL 就可以得出电感上的电压。此外，这里的时间常数与电阻成反比，这与 RC 电路相反。为了适用于一般的情况，假设电压源产生的方波在 0 与 V_S 之间变化。

(1) 电压源：$0\to V_S$

$$v_L(t)+v_R(t)=V_S \quad\Rightarrow\quad L\frac{di_L(t)}{dt}+R\cdot i_L(t)=V_S$$

代入初始条件 $i_L(0)=0$ 就可以求出其解：

$$i_L(t)=\frac{V_S}{R}[1-\exp(-t/\tau)]$$

根据欧姆定律可以求出电阻上的电压：

$$V_R(t)=V_S[1-\exp(-t/\tau)]$$

利用 KVL 可以求出电感上的电压：

$$V_L(t)=V_S-V_R(t)=V_S\cdot\exp(-t/\tau)$$

(2) 电压源：$V_S\to 0$

$$v_L(t)+v_R(t)=0 \quad\Rightarrow\quad L\frac{di_L(t)}{dt}+R\cdot i_L(t)=0$$

代入初始条件 $i_L(t)=V_S/R$ 就可以求出其解：

$$i_L(t)=\frac{V_S}{R}\exp(-t/\tau)$$

根据欧姆定律可以求出电阻上的电压：

$$V_R(t)=V_S\exp(-t/\tau)$$

利用 KVL 可以求出电感上的电压：

$$V_L(t)=-V_R(t)=-V_S\cdot\exp(-t/\tau)$$

(3) 与 RC 电路相同，这两个过程也可以用一个统一的公式来描述：

$$i_L(t)=I_F+(I_I-I_F)\exp[-(t-t_0)/\tau] \tag{3.10}$$

其中，I_I 是开关过程之前的初始值，而 I_F 是开关过程结束很长时间以后达到的终止值。

暂态过程除了可以用来分析时钟信号驱动的电路以外，还可以用来分析开关过程。

在如图 3.10(a)所示的电路中，在 $t=1\text{ms}$ 之前开关与 6V 电压源相连，在此之后则接地。图 3.10(b)显示了节点 3 处的电压变化，在开关时刻此处电压出现了跳变。然而，在图 3.10(c)显示的节点 4 处的电压变化是连续的，因为流经 R_3 的电流受到了电感的限制。

与含有电容的一阶电路类似，求解含有电感的一阶电路也有两种方法。其一是间接方法：先求出流经电感上的电流，然后以此为电流源来求解电路。其二是直接方法：在使用式(3.10)时需要注意初始值的定义。

(1) 间接方法。

- 计算流经电感的初始和终止电流。

无论开关处于何种状态，只要电路处于稳态，电感都可以当作短路来处理。所以，$I_I=10\text{mA}$，$I_F=0\text{mA}$。其终止态参数可以直接得出，因为当开关接地很长时间以后，电感上存储的能量已经耗尽，所以电路中的电流也就消失了。

- 计算时间常数。

借助如图 3.7 所示的 RCR 电路，类似的规律也可以用于 RLR 电路。左侧的 R_1 和 R_2 是并联的，其等效电阻是 100Ω。因此可以计算出等效电阻：$R=100\Omega+200\Omega=300\Omega$。接下来就可以算出时间常数：$\tau=L/R=1/30\text{ms}\approx 33.3\mu\text{s}$。

- 电感上电流的表达式。

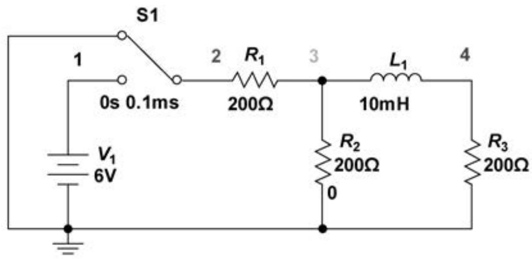
将以上 3 个参数代入式(3.10)：$i_L(t)=10\exp[-3\times10^4(t-0.001)](\text{mA})$。

- 节点 3 和节点 4 的电压表达式($t>1\text{ms}$)。

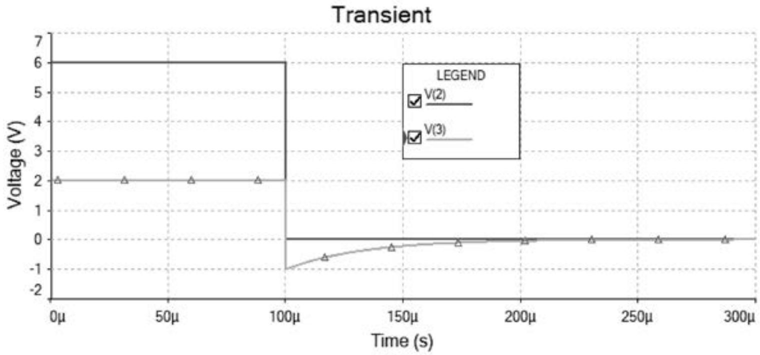
$$v_3(t)=-i_L(t)\cdot(R_1\parallel R_2)=-\exp[-3\times10^4(t-0.001)](\text{V})$$

$$v_4(t)=i_L(t)\cdot R_3=2\exp[-3\times10^4(t-0.001)](\text{V})$$

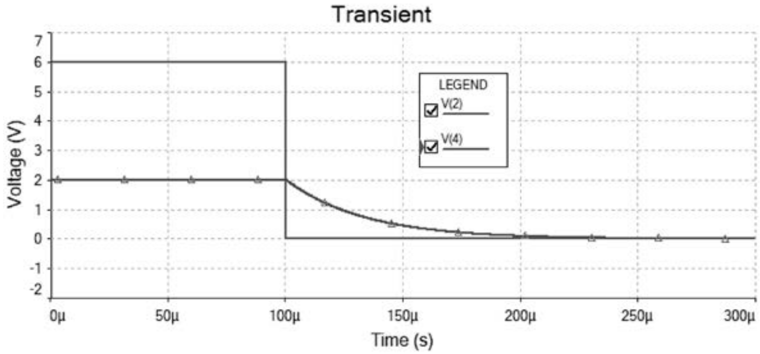
图 3.10(b)中的绿线和蓝线分别表示节点 3 和节点 4 处的电压，它们与解析结果十分吻合。在开关过程以前($t<1\text{ms}$)，电感相当于短路，R_2 和 R_3 是并联的，所以这两个节点上的电压是相同的：$V_3=V_4=2\text{V}$。然而，在开关突然切换以后，电感变成了电流源，此时流经 R_2 的电流方向发生了变化，所以其节点电压跳变为负值。



(a) 电路图



(b) 节点3处的电压



(c) 节点4处的电压

图 3.10　电感电路的暂态过程

（2）直接方法。

- 初始值。

在 $t=t_0^+$ 时刻，开关已经接地，所以 R_1 和 R_2 是并联的。此时电感相当于一个电流为 10mA 的电流源。由此可以求出 $V_{3I}=-1(\mathrm{V})$ 和 $V_{4I}=2(\mathrm{V})$。

- 终止值。

最终电感上存储的能量会耗尽，所以这两个节点电压的终止值都为零，$V_{3F}=V_{4F}=0$。

- 代入通解：

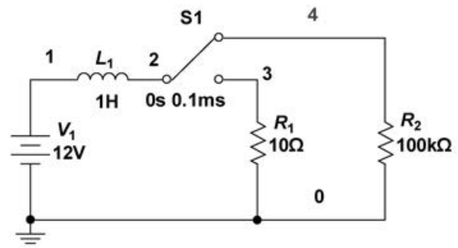
$$v(t)=V_F+(V_I-V_F)\exp[-(t-t_0)/\tau]$$

$$v_3(t) = -\exp[-3\times10^4(t-0.0001)](\mathrm{V}),$$

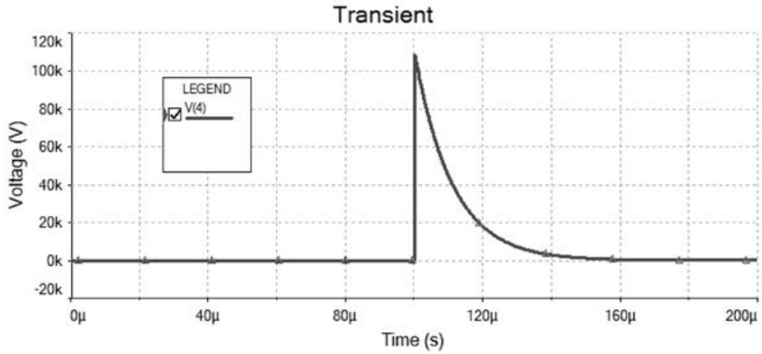
$$v_4(t) = 2\exp[-3\times10^4(t-0.0001)](\mathrm{V})。$$

K 内燃机可以根据使用的不同燃料而主要分为两类：汽油机和柴油机。前者主要用于轿车、摩托车和小型动力工具，而后者则主要用于卡车和拖拉机等重型动力机械。汽油机的气缸压缩比相对较低，所以需要火花塞来点火，其工作原理就可以通过电感电路来理解。

如图 3.11 所示，一开始开关与 10Ω 电阻相连，在电感中产生了 1.2A 的电流。在 $t=0.1\mathrm{ms}$ 时刻开关突然与一个 100kΩ 电阻相连，这个电阻用来模拟火花塞顶端两个电极之间的空气间隙。由于电感上的电流在瞬间需要保持恒定，所以在大电阻上产生了一个高压脉冲，它会击穿两个电极之间的空气从而产生一个电火花。



(a) 电路图



(b) 仿真放电的瞬间高压

图 3.11 简化的火花塞电路

在很多情况下，在开关过程中产生的电火花是十分有害的。例如，直导线的电感值与长度成正比，因此长距离的输电线具有很高的电感。因电路突然断开而产生的电弧有可能对开关器件造成严重损毁。早期的技术把开关浸在变压器油中，从而起到灭弧的作用。近年来，真空灭弧技术被广泛采用，它适用于频繁开关的情况。

3.4 二阶系统的暂态过程

第 2 章在分析 RLC 电路时，曾经与有阻尼的弹簧振子做过类比。其实，汽车的悬挂系

统也可以简化为这样的模型，从而可以分析其在冲击下的反应。此外，很多乐器是靠拨动琴弦来弹奏的，其过程也可以用这样的模型来描述。

图 3.12 是一个串联 RLC 电路，当 $t<0$ 时，开关接地；当 $t\geqslant 0$ 时，开关与电压源相连。因此，电阻左侧的节点电压可以用一个阶跃函数来表示：$v_S(t)=V_0\cdot u(t)$。如果以回路中的电流作为独立变量，借助 KVL 可以得出以下微分方程：

$$L\frac{\mathrm{d}^2 i(t)}{\mathrm{d}t^2}+R\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{C}i(t)=V_0\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}=V_0\delta(t) \tag{3.11}$$

上式左侧描述的是系统的特征，而右侧则是外界的冲击。首先可以来研究系统的特性，因此假设右侧为零。

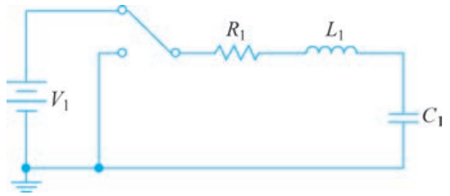


图 3.12　串联 RLC 电路

在进行一些简单的变换以后，式(3.11)可以写成如下形式：

$$\frac{\mathrm{d}^2 i(t)}{\mathrm{d}t^2}+2\zeta\omega_0\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2 i(t)=0 \tag{3.12}$$

其中，$\omega_0=\sqrt{\dfrac{1}{LC}}$，$\zeta=\dfrac{R}{2\omega_0 L}$。在第 2 章介绍其自然响应过程时，引进了衰减系数 α，这里将它拆成了两个因子：$\alpha=\zeta\omega_0$，其中，ζ 被称为阻尼比，它是一个无量纲参数。此外，阻尼比 ζ 与品质因子 Q 之间也有十分简单关系：$\zeta=1/(2Q)$。在 RLC 串联电路中，$Q=\sqrt{L/C}/R$，所以 $\zeta=(R/2)\sqrt{C/L}$。

图 3.13 是一个并联 RLC 电路，当 $t<0$ 时，开关接地；当 $t\geqslant 0$ 时，开关与电流源相连。因此，电流源与开关的组合也可以用一个阶跃函数来表示：$i_E(t)=I_0\cdot u(t)$。如果以上端的电压作为独立变量，借助 KCL 可以得出以下微分方程：

$$C\frac{\mathrm{d}^2 v(t)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{L}v(t)=I_0\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}=I_0\delta(t) \tag{3.13}$$

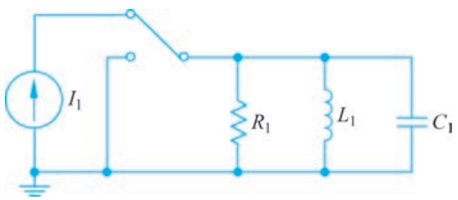


图 3.13　并联 RLC 电路

利用同样的方法，上式的特征方程也可以表示为如下形式：

$$\frac{d^2 v(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_0 \frac{dv(t)}{dt} + \omega_0^2 v(t) = 0 \tag{3.14}$$

其中 ω_0 的定义相同，阻尼比 ζ 与品质因子 Q 的关系也相同：$\zeta = 1/(2Q)$。由于 $Q = R\sqrt{C/L}$，所以阻尼比的表达式是：$\zeta = \sqrt{L/C}/(2R)$。

既然串联和并联 RLC 电路的特征方程具有相同的形式，它们就可以用一个统一的方程来描述：

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_0 \frac{dy(t)}{dt} + \omega_0^2 y(t) = 0 \tag{3.15}$$

这类微分方程的解应该具有这样的形式：$y(t) = Ae^{st}$。将此解代入微分方程，简化以后就可以得出以下的特征方程：

$$s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 = 0 \tag{3.16}$$

可以求出这个一元二次方程的一般解：

$$s = -\omega_0(\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}) \tag{3.17}$$

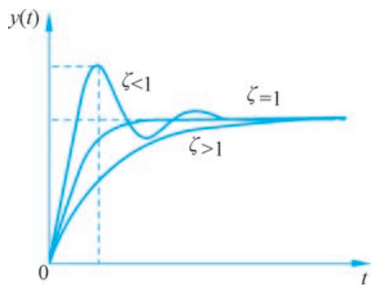


图 3.14　二阶系统对阶跃函数的响应

从这个表达式可以看出，$\zeta = 1$ 是其分界点，在此临界值的上下系统的响应是相当不同的。第 2 章介绍了品质因子 Q 的物理意义，它是能量耗散率的一个指标。换言之，Q 越大则能量耗散率越低，振荡过程的衰减会很慢。由于 ζ 与 Q 有倒数的关系，所以 ζ 越小则能量耗散率越低，系统也会出现振荡，如图 3.14 所示。

(1) $\zeta < 1$（欠阻尼）。

此时特征方程的解是共轭复数：

$$s = -\omega_0(\zeta \pm j\sqrt{1-\zeta^2})$$

因此微分方程的解可以表示为衰减的振荡函数：

$$y(t) = e^{-\zeta\omega_0 t}\left\{A_1 \cos\left[(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2})t\right] + A_2 \sin\left[(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2})t\right]\right\} \tag{3.18}$$

在初始条件为零的情况下，第一项不存在，结果就是一个衰减的正弦函数。如果初始条件改为其导数为零，结果就是一个衰减的余弦函数。欠阻尼系统的优点是响应时间很短，而缺点是会出现过冲和振荡。在很多系统设计中对过冲量是有限制的，因此阻尼比不能太低。

(2) $\zeta = 1$（临界阻尼）。

此时特征方程的解是重根：$s_1 = s_2 = -\omega_0$，因此微分方程的解可以表示为指数衰减的函数：

$$y(t) = A_1 e^{-\omega_0 t} + A_2 t e^{-\omega_0 t} \tag{3.19}$$

在一些系统的设计过程中，临界阻尼是最理想的状态，它可以实现在两种状态之间的快速而平稳的过渡。然而，很多控制系统对响应时间要求比较高，那就需要容忍一些过冲和振荡。

(3) $\zeta > 1$（过阻尼）。

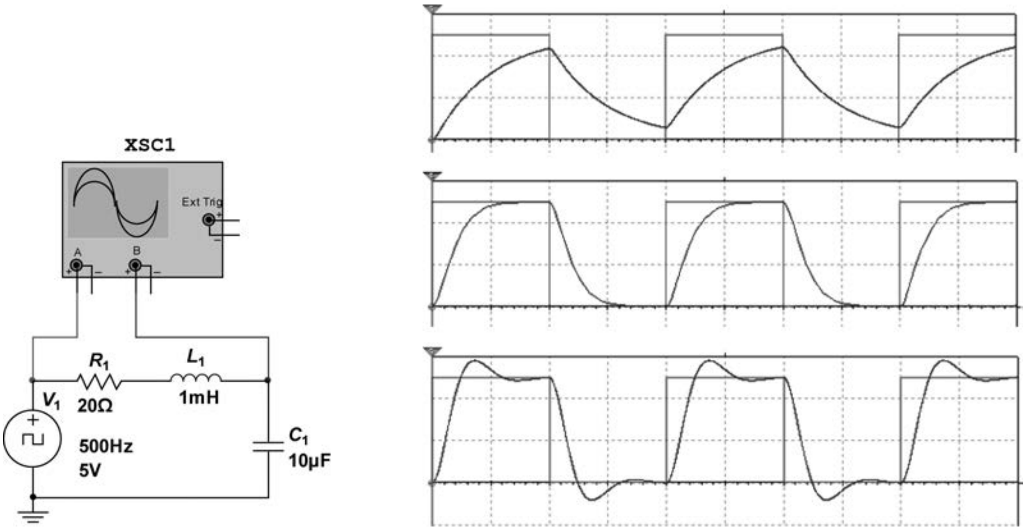
此时特征方程的解是两个负的实数：$s_1 = -\omega_0(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})$，$s_2 = -\omega_0(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})$，

因此微分方程的解可以表示为指数衰减函数：

$$y(t)=A_1\mathrm{e}^{-s_1t}+A_2\mathrm{e}^{-s_2t} \tag{3.20}$$

如果用时间常数来表示，它是特征方程解的倒数：$\tau=1/|s|$。由于 s_1 的绝对值比较大，它所对应的时间常数比较小，因此这一项可以很快衰减。然而，绝对值很小的 s_2 对应于很大的时间常数，结果会产生很慢的衰减过程。

下面通过电路模拟来进一步研究二阶系统的暂态过程。图 3.15(a)是一个 RLC 串联电路，电感和电容的参数保持不变，共振频率可以很容易计算出来：$\omega_0=10^4\,\mathrm{rad/s}$。电阻值分别为 50Ω、20Ω 和 10Ω；利用这个公式，$\zeta=(1/2)R\sqrt{C/L}$，可以算出其所对应的阻尼比分别是 2.5、1、0.5。电路中的信号源是 0～5V 的方波，其频率是 500Hz，所以周期是 2ms。



(a) RLC串联电路　　(b) 仿真结果

图 3.15　二阶系统对方波信号的响应

仿真的结果显示在图 3.15(b)中。最上面的结果所对应的参数是 $R_1=50\Omega$，$\zeta=2.5$，这是过阻尼的情况，所以第一个波形呈现出很缓慢的响应。中间的结果所对应的参数是 $R_1=20\Omega$，$\zeta=1$，在这种临界阻尼的情况下系统有较快的响应。最下面的结果所对应的参数是 $R_1=10\Omega$，$\zeta=0.5$，在欠阻尼的情况下出现了振荡的响应。如果阻尼比进一步降低，那么振荡的幅度会继续增大。

3.5　拉普拉斯变换简介

第 2 章在分析交流电路时，利用了时域与频域之间的转换，从而避免了求解微分方程的难题。类似的方法也可以用于暂态过程，只不过需要把频域做一个拓展。在交流电路的推导过程中曾经使用了欧拉公式：$\exp(\mathrm{j}\omega t)=\cos(\omega t)+\mathrm{j}\sin(\omega t)$。由于交流信号的强度并不

随时间变化，所以这个指数函数的变量是一个纯虚数。然而，在暂态电路中信号的强度会随时间而变化，因此需要将这个变量拓展为一般的复数。

$$s=\sigma+\mathrm{j}\omega \tag{3.21}$$

如果把 s 想象为复平面上的一个点，那么它所在的位置则对应着不同的信号类型。因此，s 域也被称为“复频域”，图 3.16 显示了位于不同区域的 s 所对应的时域函数。

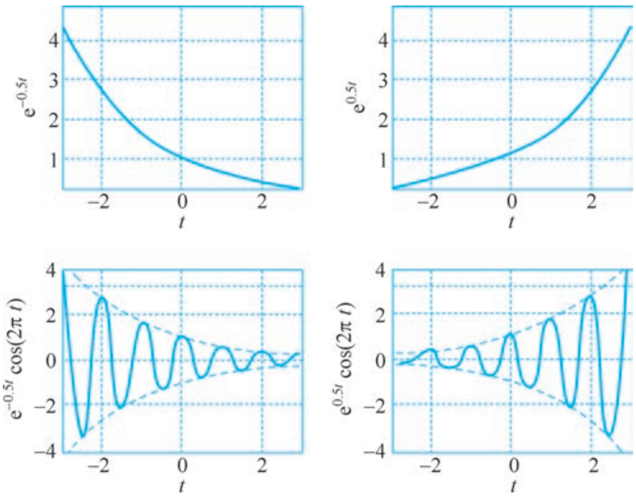


图 3.16 在复平面上 s 的位置与所对应的波形

首先分析一下当 s 位于横轴上的情况，如图 3.16 上面的两个子图所示。此时 $\omega=0$，所以没有振荡。如果 s 处在横轴的左侧（$\sigma<0$），所对应的函数就是指数衰减的。如果 s 在横轴的右侧（$\sigma>0$），所对应的函数就是指数增长的，这是一种不稳定的情况，在绝大多数情况下是需要避免的。如果 s 在原点上，它所对应的就是一个不随时间变化的常数。如果 s 不在横轴上，那么它所对应的是一个复函数：$x(t)=\mathrm{e}^{\sigma t}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$。当然，在实际应用中的时域函数都是实函数，所以需要把两个共轭的复数组合起来。后面将会看到，传递函数的复数极点都是成对出现的。图 3.16 下面的两个子图则对应于这对共轭复数位于左半平面和右半平面的情况。如果它们位于虚轴上，则对应正弦或余弦函数。

拉普拉斯变换就是时域函数与 s 域函数之间转换的一座桥梁，它的表达式如下：

$$\hat{X}(s)\equiv L\{x(t)\}\equiv\int_0^{\infty}x(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \tag{3.22}$$

在工程应用中，时域函数的测量都是从某一时刻开始的，所以上式的积分下限为零，因此，它也被称为“单侧拉普拉斯变换”。在数学领域，人们也使用所谓的“双侧拉普拉斯变换”，其积分下限是 $-\infty$。从某个角度来看，很多类似的“变换”实际上是在计算“相合度”或“相关度”，下面以指数函数为例进行说明。

$$x(t)=\mathrm{e}^{at}\Leftrightarrow X(s)=\frac{1}{s-a} \tag{3.23}$$

从上式右侧的表达式可以看出，$X(s=a)\to\infty$，这可以理解为当 s 接近 a 时，e^{-st} 与 e^{at} 正好

相消或相合。然而，随着 s 离开 a 越来越远，这两者之间的“相合度”或“关联度”变得越来越低，因此 $X(s)$ 的值也变得越来越小。

下面看另一个例子：

$$x(t)=\cos(\omega t)\Leftrightarrow X(s)=\frac{s}{s^2+\omega^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-\mathrm{j}\omega}+\frac{1}{s+\mathrm{j}\omega}\right) \tag{3.24}$$

其实，三角函数也可以转化为指数函数：$\cos(\omega t)=(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t})/2$。与拉普拉斯变换的函数做个比较就可以看出其相关性。与此类似，正弦函数也可以做类似的分析，大家回顾一下：$\sin(\omega t)=(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t})/(2\mathrm{j})$。

$$x(t)=\sin(\omega t)\Leftrightarrow X(s)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}=\frac{1}{2\mathrm{j}}\left(\frac{1}{s-\mathrm{j}\omega}-\frac{1}{s+\mathrm{j}\omega}\right) \tag{3.25}$$

最后对单位阶跃函数进行变换：

$$x(t)=u(t)\Leftrightarrow X(s)=\frac{1}{s} \tag{3.26}$$

前面介绍过，$s=0$ 所对应的是一个常数，这反映在上式的变换中。

拉普拉斯变换被广泛地用于分析系统的传递函数，在很多情况下它可以表示为有理函数：

$$H(s)=K\frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} \tag{3.27}$$

当分母为零的时候，其解$(p_1,p_2,\cdots,p_n)$被称为极点(poles)；而当分子为零的时候，其解$(z_1,z_2,\cdots,z_m)$被称为零点(zeros)。顺便提一下，并不是所有传递函数都可以写成这种有理函数的形式；例如，当系统有比较严重延迟的时候。

> **K** 如果把传递函数的绝对值$|H(S)|$在复平面上画出来，结果就像一顶帐篷一样：在零点处帐篷贴近地面，而在极点处则像柱子(pole 的本意)那样被高高地顶起。在实际应用中，极点和零点的位置对系统的响应有决定性的作用。

在实际应用中，简单函数的拉普拉斯变换可以通过查表来获得，如表 3.1 所示。如果函数变得复杂，那么可以需要借助计算机软件，例如 MATLAB。

表 3.1 拉普拉斯变换表

$f(t)$	$F(s)$	DOC
$\delta(t)$	1	所有的 $s\in\mathbf{C}$
$\mathrm{e}^{at}u(t)$	$\frac{1}{s-a}$	$\mathrm{Re}[s]>\mathrm{Re}[a]$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\mathrm{Re}[s]>0$

续表

$f(t)$	$F(s)$	DOC
$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\mathrm{Re}[s]>0$
$\cos(\omega t)u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\mathrm{Re}[s]>0$
$\sin(\omega t)u(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\mathrm{Re}[s]>0$

在表 3.1 中除了位于第一行的 δ 函数以外，其他的时域函数后面都加上了 $u(t)$，其含义是表明这是“单边拉普拉斯变换”。此外，在此表的右侧还列出了“收敛域”(Domain Of Convergence，DOC)。由于拉普拉斯变换涉及指数函数，因此当 s 在某些区域内积分会发散。

当输入信号是一个 δ 函数时，其传递函数就是其输出信号，因为 δ 函数的拉普拉斯变换为 1：$\hat{V}_o(s)=\hat{H}(s)\cdot\hat{V}_i(s)=\hat{H}(s)$，因此，系统的传递函数可以通过施加一个脉冲输入来直接进行观测。

除了表 3.1 中列出的变换公式以外，利用拉普拉斯变换的性质还可以推导出一些新的公式。首先，比较一下表 3.1 中第 2 行和第 3 行的变换，就可以推测出这样一个在 s 域进行平移的性质：

$$L\{e^{at}f(t)\}=F(s-a) \tag{3.28}$$

根据这个性质就可以推出以下公式：

$$L\{e^{-at}\cos(\omega_0 t)\}=\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2} \tag{3.29}$$

$$L\{e^{-at}\sin(\omega_0 t)\}=\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2} \tag{3.30}$$

如果平移发生在时域，那么在 s 域也会出现一个指数函数：

$$L\{f(t-t_0)u(t-t_0)\}=e^{-st_0}F(s) \tag{3.31}$$

例如，延迟的单位阶跃函数的拉普拉斯变换：$L\{u(t-t_0)\}=\frac{e^{-st_0}}{s}$。这里大家要注意符号的问题：在时域平移时，指数函数上的符号与时域平移的符号是一致的。然而，在 s 域平移时，指数函数上的符号与 s 域平移的符号是相反的；例如，$L\{e^{-at}u(t)\}=\frac{1}{s+a}$。

由于拉普拉斯变换是一个线性变换，因此可以进行线性叠加：

$$L\{a_1 f_1(t)+a_2 f_2(t)\}=a_1 F_1(s)+a_2 F_2(s) \tag{3.32}$$

其实，在讨论三角函数的拉普拉斯变换时已经使用了这一性质。此外，在利用变换对照表来求解逆拉普拉斯变换时，一个常用的方法就是将其转化为一些分数项之和，在这个过程中也需要利用这一线性特性。

Q 在了解了拉普拉斯变换以后，是否还需要了解其逆变换的公式？

大家在分析交流电路时，从时域到频域的变换被比喻为走上一个过街天桥，而最终还要从桥上走下来，也就是从频域再回到时域。在用拉普拉斯变换来分析电路的暂态过程时，这一步也是需要的。然而，逆拉普拉斯变换在数学上比较复杂，因此人们往往通过对照拉普拉斯变换表以及变换的性质来找到对应的逆变换。当然，也可以借助计算机软件来做逆变换。

与分析交流电路时从时域到频域进行变换一样，采用拉普拉斯变换的一大优势就是把微分和积分变换成代数运算的乘和除，如下式所示。

$$y(t)=\mathrm{d}x(t)/\mathrm{d}t \Leftrightarrow \hat{Y}(s)=sX(s)-x(0^+) \tag{3.33}$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\mathrm{d}\tau \Leftrightarrow \hat{Y}(s)=\frac{X(s)}{s} \tag{3.34}$$

为了避免混淆这两个公式，可以进行量纲分析。从其定义就可以看出 s 的量纲是时间的倒数：$[s]=[\omega]=1/[T]$。因此，一个函数对时间的微分需要乘以 s，而对时间的积分则需要除以 s。此外，拉普拉斯变换本身对时间进行了一次积分，所以式(3.33)右侧的两项量纲是一致的。

利用拉普拉斯变换的表达式可以很容易地求出时域函数的初值和终值，这在很多情况下是十分有用的。从量纲分析来看，s-t 之间有着互为倒数的关系，因此求初值时 $s\to\infty$，而求终值时 $s\to 0$。这两个公式分别被称为初值定理和终值定理。

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} f(t) &= \lim_{s\to\infty}[sF(s)]\\ \lim_{t\to\infty} f(t) &= \lim_{s\to 0}[sF(s)]\end{aligned} \tag{3.35}$$

3.6 拉普拉斯变换应用

电容和电感的电流与电压的关系式中有微分的关系，因此可以借助拉普拉斯变换来进行简化：

$$i_C(t)=C\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t} \Leftrightarrow \hat{I}_C(s)=sC\cdot\hat{V}_C(s)-C\cdot v_C(0^+) \tag{3.36}$$

$$v_L(t)=L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} \Leftrightarrow \hat{V}_L(s)=sL\cdot\hat{I}_L(s)-L\cdot i_L(0^+) \tag{3.37}$$

当初始值为零的时候，以上关系式与交流电路完全一致：$\hat{I}_C(s)=Y_C\cdot\hat{V}_C(s)$，$\hat{V}_L(s)=Z_L\cdot\hat{I}_L(s)$，因此可以利用这两种器件的“阻抗”和“导纳”来建立起电流与电压的关系。然而，如果初始值不为零，则需要使用上面的完整方程，也就是式(3.36)和式(3.37)。

对于电阻来说，时域和 s 域的关系式是相同的，也就是欧姆定律。为了完备起见，这里

也把它列出来：

$$\hat{V}(s)=R\cdot\hat{I}(s) \tag{3.38}$$

除了这3个被动器件以外，还需要找到电源和开关的拉普拉斯变换。对于前面所使用的电压源和开关的连接方式，如图3.17所示，可以用一个单位阶跃函数（unit step function）来表示。$v_S(t)=V_0u(t-t_0)$表示在$t=t_0$时刻接通电压源，而$v_S(t)=V_0[1-u(t-t_0)]$则表示在$t=t_0$时刻断开电压源。

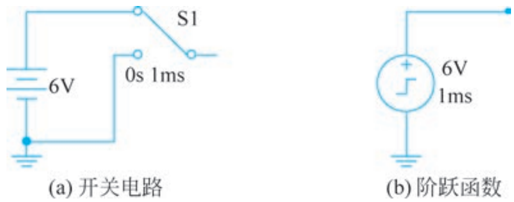


图3.17 开关过程的数学表达

E 用拉普拉斯变换来分析一个十分简单的RC电路，如图3.18所示。其中的电压源在$t_0=0$的时刻从0跳变到5V，假设电容上的初始电压为零，求解电容上电压的表达式。在3.2节分析过这类电路，其解是$v_C(t)=5(1-e^{-1000t})\cdot u(t)$。

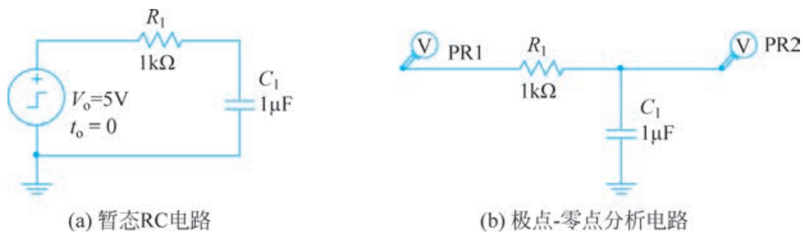


图3.18 简单电路分析

S 首先从时域转换到s域，然后利用KVL方程求解输出信号，最后再转化为时域信号。

（1）电源：$\hat{V}_S(s)=\dfrac{5}{s}$

（2）电容：$\hat{I}(s)=sC\cdot\hat{V}_C(s)-C\cdot v_C(0^+)=10^{-6}s\hat{V}_C(s)$

（3）电阻：$\hat{V}_R(s)=R\cdot\hat{I}(s)=10^{-3}s\hat{V}_C(s)$

（4）代入KVL方程$\hat{V}_S(s)=\hat{V}_R(s)+\hat{V}_C(s)$：$\dfrac{5}{s}=10^{-3}s\hat{V}_C(s)+\hat{V}_C(s)$。为了使其适用于电阻和电容的各种参数，可以用时间常数$\tau=RC$来取代式中的10^{-3}，从而可以得出一般的表达式：$\hat{V}_C(s)=\dfrac{5/\tau}{s(s+1/\tau)}$。

（5）在做逆变换之前，需要把这个表达式化简为简单有理式之和：$\hat{V}_C(s)=\dfrac{A}{s}+$

$\frac{B}{s+1/\tau}$。其中,处在分子位置的两个待定常数可以很容易求出:$A=5$,$B=-5$。

(6) 对照拉普拉斯变换表,就可以求出电压在时域的表达式:
$v_C(t)=5u(t)-5e^{-t/\tau}u(t)=5(1-e^{-t/\tau})u(t)$。代入 $\tau=10^{-3}(\mathrm{s})$,就可以得到最终答案。

这个方法看起来有些复杂,但是其适用性很强;无论电容的初始条件是否为零,都可以用这个方法来求解。

S 在第 2 章这个电路曾经被当作低通滤波器进行过分析,现在也可以从这个角度来对其进行研究。由于电容的初始电压为零,所以可以借助类似于交流电路的方法来求解。

(1) 求出输入信号的拉普拉斯变换:$\hat{V}_i(s)=5/s$。

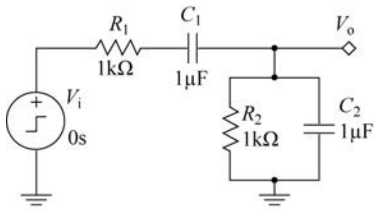
(2) 求出传递函数的表达式:$\hat{H}(s)=\hat{V}_o(s)/\hat{V}_i(s)=\frac{Z_C}{R+Z_C}=\frac{\omega_c}{s+\omega_c}$,其中 $\omega_c=1/\tau=1/(RC)=10^3(\mathrm{rad/s})$。

(3) 求出输出信号的表达式:$\hat{V}_o(s)=\hat{H}(s)\cdot\hat{V}_i(s)=\frac{10^3}{s+10^3}\frac{5}{s}$。

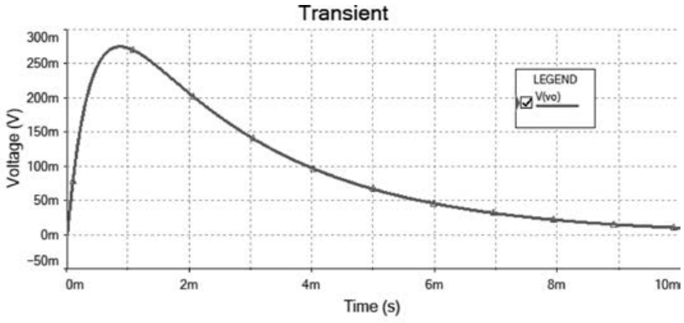
(4) 利用逆拉普拉斯变换求出时域输出信号:$v_o(t)=5(1-e^{-1000t})u(t)(\mathrm{V})$
这个方法看起来更简单明了,但是它只适用于初始条件为零的情况。如果其信号源是从 5V 跳变到 0V,这个方法则不适用。

由于极点和零点在系统响应分析中十分重要,Multisim 提供了一个分析传递函数 $\hat{H}(s)$的极点和零点的仿真工具(Pole Zero Analysis),图 3.18(b)是做此分析的电路图,其中的电压源需要从电路中移除,因为传递函数与输入信号无关。分析的结果显示:pole=-1k,这个值与理论值($-\omega_c$)是一致的。

E 如图 3.19(a)所示的电路被称为超前-滞后网络(lead-lag network),在不少领域都会遇到。信号源输出的是一个单位阶跃函数 $u(t)$。如果在初始状态电容里没有电荷,则可以借用类似于交流电路的方法来求解传递函数。



(a) 电路图



(b) 阶跃函数激励下的输出端信号

图 3.19 超前-滞后电路

S 解题步骤与上题类似，先在 s 域解题，然后再转换到时域。

(1) 先把(R_1,C_1)和(R_2,C_2)分别组合起来，然后计算它们的阻抗和导纳：$Z_1=R_1+1/sC_1=(1+sR_1C_1)/sC_1$，$Y_2=G_2+sC_2=(1+sR_2C_2)/R_2$。

(2) 利用串联分压电路的公式就可以求出传递函数：

$$H(s)=\frac{Z_2}{Z_1+Z_2}=\frac{1}{1+Z_1Y_2}=\frac{sR_2C_1}{(R_1R_2C_1C_2)s^2+(R_1C_1+R_2C_1+R_2C_2)s+1}$$

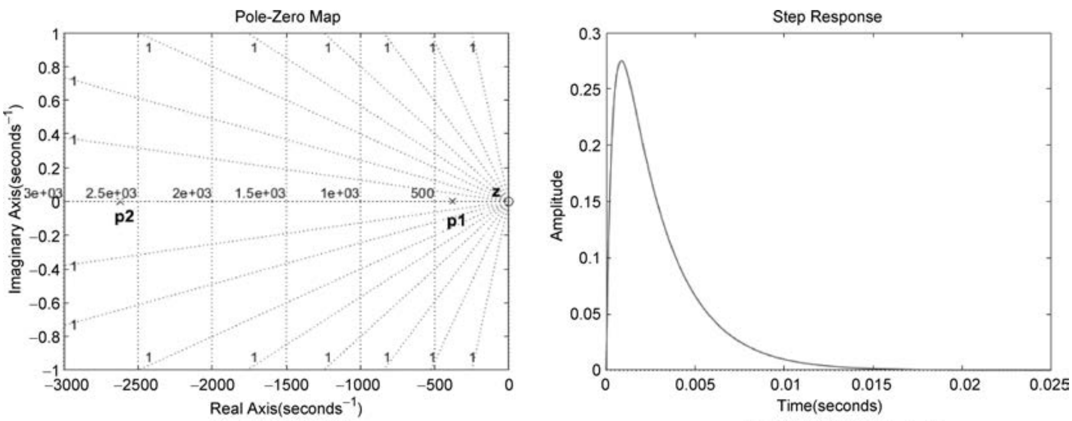
这个表达式比较复杂，可以分析其中一个特例：$R_1=R_2=R$，$C_1=C_2=C$，然后定义 $\omega_0=1/RC=10^3$(rad/s)。此时，传递函数就可以得到简化：$H(s)=\dfrac{\omega_0 s}{s^2+3\omega_0 s+\omega_0^2}$。

(3) 这个传递函数的零点一目了然：$z=0$。其极点也不难求出：$p_{1,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}\omega_0$。代入 $\omega_0=1000$rad/s，就可以算出极点的值：$p_1=-382$rad/s，$p_2=-2618$rad/s。

(4) 输出信号的表达式如下：$\hat{V}_o(s)=\hat{H}(s)\hat{V}_i(s)=\dfrac{\omega_0}{(s-p_1)(s-p_2)}=\dfrac{A}{s-p_1}+\dfrac{B}{s-p_2}$，两个待定系数分别是：$A=0.447$，$B=-0.447$。

(5) 转换到时域就可以得到输出信号：$v_o(t)=0.447(e^{-382t}-e^{-2618t})$。图 3.19(b)显示了用 Multisim 仿真的结果：在 $t=0$ 时，两个指数函数彼此抵消，所以输出信号为零。随后，第二项迅速衰减，在此之后的曲线是由第一项决定的指数衰减函数。

(6) 利用 MATLAB 也可以很方便地从传递函数的表达式求出零点和极点的位置并且将其在复平面上显示出来，如图 3.20(a)所示。其代码如下：{sys=tf([1e3　0],[1　3e3　1e6]);　h=pzplot(sys);}。其中，tf 是 transfer function 的缩写，第一个方括号里描述的是分子：$10^3 s+0$，而第二个方括号里描述的是分母：$s^2+3\times10^3 s+10^6$。此外，MATLAB

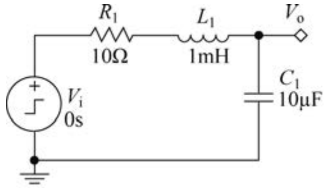


(a) 极点-零点图　　(b) 单位阶跃函数响应

图 3.20　MATLAB 仿真结果

还可以画出系统对单位阶跃函数的响应，如图 3.20(b)所示。其代码如下：{ sys=tf([1e3 0]，[1 3e3 1e6])；　step(sys)；}。如果与图 3.19(b)做个比较，就会发现它们十分吻合。

E 如图 3.21(a)所示的是串联 RLC 电路，其信号源是一个阶跃函数，其高度为 5V。利用 Multisim 的极点-零点分析就可以得出其结果，如图 3.21(b)所示。



(a) 电路图

Pole Zero Analysis

	Poles/Zeros	Real	Imaginary
1	pole(1)	-5.00000 k	8.66025 k
2	pole(2)	-5.00000 k	-8.66025 k

(b) 极点-零点分析的仿真结果

图 3.21　RLC 串联电路

S 如果电容和电感在初始状态下没有能量存储，那就可以按照上题的解法来做。不过，根据从极点-零点分析的结果也可以直接得到传递函数。图 3.21(b)中信息显示，它有两个共轭极点而没有零点。

(1) 传递函数表达式：$H(s)=\dfrac{C_0}{(s-p_1)(s-p_2)}$，其中 $p_{1,2}=(-5\pm \mathrm{j}8.66)\times 10^3$。由于存在两个位于左平面的共轭极点，所以这个系统对脉冲的响应特征是衰减的振荡。这两个极点可以写为这样的标准形式：$p_{1,2}=-\alpha\mp \mathrm{j}\omega_d$，其中衰减参数是 $\alpha=5\times 10^3$(Np/s)，而振荡角频率则是 $\omega_d=8.66\times 10^3$(rad/s)。

(2) 这个传递函数也可以写成另一种形式：$H(s)=\dfrac{C_0}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$。经过简单的推导就可以求出相应的参数：$\omega_n=\sqrt{p_1p_2}=10^4$ (rad/s)，$\zeta=0.5$。所以传递函数是：$H(s)=\dfrac{C_0}{s^2+10^4 s+10^8}$。

(3) 以上两种形式可以通过图 3.22(a)找到彼此之间的对应的关系，实际上就是复数的两种表达形式。例如，$p_1=-\alpha+\mathrm{j}\omega_d=\omega_n\angle\phi=\omega_n\angle(\pi-\theta)$。从直角坐标参数$(\alpha,\omega_d)$可以求出其极坐标参数$(\omega_n,\theta)$，反之亦然。

$$\omega_n=\sqrt{\alpha^2+\omega_d^2},\quad \theta=\arctan(\omega_d/\alpha) \tag{3.39}$$

此外，在欠阻尼的情况下，阻尼比可以从极点在复平面上所对应的角度求出：$\zeta=\cos(\theta)$。这个参数决定了过冲高度的比例，阻尼比越小过冲就越大。

(4) 求出待定系数 C_0：因为这个电路类似于一个二阶低通滤波器，所以在低频段其传递函数应为 1，由此可以得出分子上的待定常数：$s\to 0, C_0=p_1p_2=10^8$。此外，这个参数也可以利用拉普拉斯变换的终值定理来求出。

(5) 输入信号是一个高度为 5 的阶跃函数 $v_i(t)=5u(t)$，它的拉普拉斯变换就是 $\hat{V}_i(s)=5/s$。由此可以求出输出函数的表达式：$\hat{V}_o(s)=\hat{H}(s)\cdot\hat{V}_i(s)=\dfrac{10^8}{s^2+10^4 s+10^8}\dfrac{5}{s}$。

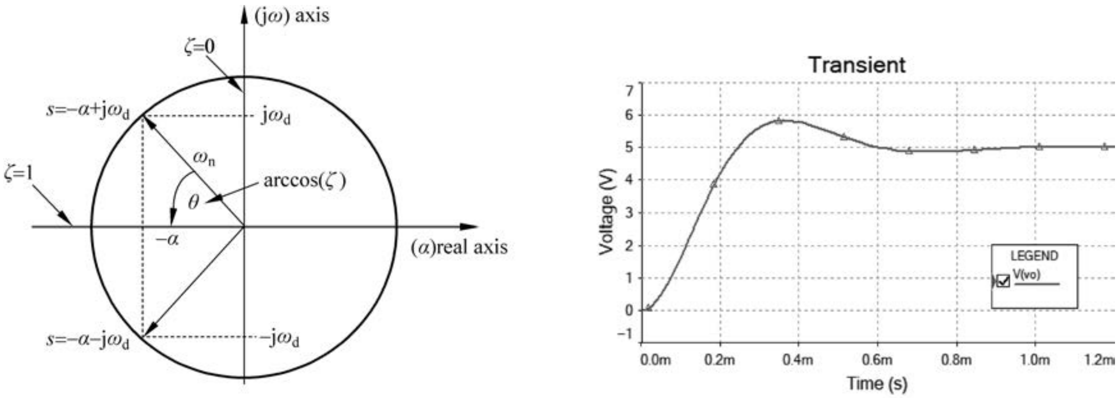
(6) 为了做逆变换，上式需要进行分解：$\hat{V}_o(s)=\dfrac{A}{s}+\dfrac{Bs+C}{s^2+10^4 s+10^8}$，其中的待定系数可以通过对比原表达式而求出：$A=5, B=-5, C=-5\times10^4$。

(7) 在求出了这些系数以后，就可以将这个表达式写成与衰减的三角函数相对应的格式：$\hat{V}_o(s)=\dfrac{5}{s}-\dfrac{5s}{(s+\alpha)^2+\omega_d^2}-\dfrac{5\times10^4}{(s+\alpha)^2+\omega_d^2}$。

(8) 这里可以分析一下所对应的时域信号：上式中的第一项对应于一个常数或阶跃函数，$v_{o1}(t)=5u(t)$；第二项和第三项则分别对应于一个衰减的余弦和正弦函数：$v_{o2}(t)=-5e^{-5000t}\cos(8.66\times10^3 t)u(t)$，$v_{o3}(t)=-5.77e^{-5000t}\sin(8.66\times10^3 t)u(t)$。

(9) 如图 3.22(b)所示的是用 Multisim 仿真的结果，它是前面求出的 3 项之和：$v_o(t)=v_{o1}(t)+v_{o2}(t)+v_{o3}(t)$。

(10) 这个求解过程尽管看起来有些复杂，其实从图 3.21(b)中提供的极点信息可以直接写出输出信号的函数，只不过需要确定一些系数而已。



(a) 极点的两种表达方式　　(b) 输出信号的仿真结果

图 3.22　极点位置与信号特性

K　二阶系统的极点位置与传递函数的关系在经典控制理论中扮演重要的角色。通过分析这个 RLC 电路读者可以获得一些感性的认知，将来在学习控制理论课程时会很有帮助。

延伸阅读

有兴趣的读者可以查阅和了解以下相关内容的资料：

（1）超级电容器及其应用。
（2）DRAM 和 SRAM 的结构以及性能比较。
（3）Elmore 延时模型在集成电路中的应用。
（4）超导体中磁通量的量子化。
（5）忆阻器的性能和应用。
（6）内燃机中火花塞的工作原理。
（7）阻尼比在汽车底盘悬挂系统的应用。
（8）拉普拉斯变换及其应用。
（9）拉普拉斯变换与傅里叶变换之间的关系。
（10）极点-零点分析在控制系统中的应用。