

第 3 章

计算机控制系统分析

与连续控制系统一样,离散控制系统的性能也包括稳定性、稳态性能和动态性能,下面将从这三方面对计算机控制系统的性能进行分析,并进一步讨论根轨迹法及频率法在计算机控制系统中的应用。

3.1 稳定性分析

3.1.1 离散系统的稳定性

若离散系统在有界输入序列作用下其输出序列也是有界的,则称该离散系统是稳定的。稳定的系统具有稳定性。

线性定常连续系统在时域稳定的充要条件是系统特征方程的根均具有负实部,线性定常离散系统在时域稳定的充要条件是系统特征方程的根均位于单位圆内,下面予以证明。

设线性定常离散系统的脉冲传递函数为

$$G(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j z^{-j}}{1 + \sum_{i=1}^n a_i z^{-i}} \quad (3-1)$$

则其特征方程为

$$1 + \sum_{i=1}^n a_i z^{-i} = 0 \quad (3-2)$$

将其进行因式分解,得到

$$\prod_{i=1}^n (z - p_i) = (z - p_1)(z - p_2) \cdots (z - p_n) = 0 \quad (3-3)$$

式中, p_1, p_2, \dots, p_n 为系统的特征根。假设其各不相同,则式(3-1)可写为

$$C(z) = R(z)G(z) = R(z) \frac{K \prod_{j=1}^m (z - z_j)}{\prod_{i=1}^n (z - p_i)} \quad (3-4)$$

式中, z_1, z_2, \dots, z_m 为系统的零点; $R(z)$ 为输入信号的 z 变换。

将式(3-4)展开成部分分式, 得到

$$C(z) = \frac{c_1 z}{z - p_1} + \frac{c_2 z}{z - p_2} + \dots + \frac{c_n z}{z - p_n} + C_R(z) \quad (3-5)$$

式中, $C_R(z)$ 为由输入信号极点得到的部分分式。

对式(3-5)进行 z 反变换, 则对应特征根 z_i 的反变换式为

$$\mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{c_i z}{z - p_i} \right] = c_i (p_i)^k \quad (3-6)$$

若 p_i 的模小于1, 即在单位圆内, 则可得到

$$\lim_{k \rightarrow \infty} c_i (p_i)^k = 0 \quad (3-7)$$

根据离散系统稳定性的定义, 若输入信号为有界序列, 则由 $C_R(z)$ 经 z 反变换得到的式子也有界; 若输出信号为有界序列, 则所有的特征根对应的 z 反变换均应满足式(3-7), 即所有特征根均位于单位圆内。上述结论对于 $G(z)$ 中有重根时仍然成立。

因此, 线性定常离散系统在时域稳定的充要条件为: 当脉冲传递函数的特征方程的所有特征根 p_i 的模 $|p_i| < 1 (i=1, 2, \dots, n)$, 即均处于 z 平面的单位圆内时, 该系统是稳定的。

3.1.2 离散系统的稳定性判据

已知线性定常离散系统在时域稳定的充要条件, 则可以通过求解系统特征方程的根从而判断系统是否稳定。当离散系统阶数较低时, 该方法非常简便。但是, 随着阶数的升高, 直接求解特征方程会很困难, 应用计算机软件可以很方便地解决这一问题, 如 MATLAB 中的 roots 命令。除了直接求解特征根的方法, 与连续系统类似, 对离散系统进行稳定性判断时也可以应用稳定判据。

1. 朱利(Jury)判据

朱利判据是直接 在 z 域内应用的稳定性判据, 类似于连续系统中的赫尔维茨(Hurwitz)判据。它是根据离散系统闭环特征方程 $D(z) = 0$ 的系数, 判别其根是否严格位于 z 平面的单位圆内, 从而判断该离散系统是否稳定。

设离散系统 n 阶闭环特征方程为

$$D(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n \quad (a_0 > 0)$$

朱利稳定判据的必要条件为

$$D(1) > 0, \quad (-1)^n D(-1) > 0$$

满足必要条件后, 构建朱利表如下:

行	列				
1	a_0	a_1	a_2	a_{n-1}	a_n
2	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_1	a_0
3	b_0	b_1	b_2	b_{n-1}	

续表

行	列
4	$b_{n-1} \quad b_{n-2} \quad b_{n-3} \quad b_1 \quad b_0$
5	$c_0 \quad c_1 \quad c_2 \quad c_{n-2}$
6	$c_{n-2} \quad c_{n-3} \quad c_{n-4} \quad c_1 \quad c_0$
...	
$m-2$	$l_0 \quad l_1$
$m-1$	$l_1 \quad l_0$
m	m_0

由表可见,第一行是由 $a_0 \sim a_n$ 的原有系数组成,第二行是由同样的系数按相反的顺序构成,1、2 行构成一个行对,3、4 行构成一个行对,注意到下一个行对系数的序号总比上一个行对小 1。

不同的系数可按下式估算:

$$b_i = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-i} \\ a_n & a_i \end{vmatrix} \quad (i=0,1,2,\dots,n-1)$$

$$c_i = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-1-i} \\ b_{n-1} & b_i \end{vmatrix} \quad (i=0,1,2,\dots,n-2)$$

$$d_i = \begin{vmatrix} c_0 & c_{n-2-i} \\ c_{n-2} & c_i \end{vmatrix} \quad (i=0,1,2,\dots,n-3)$$

$$\dots$$

$$m_0 = \begin{vmatrix} l_0 & l_1 \\ l_1 & l_0 \end{vmatrix}$$

若 $b_0 > 0, c_0 > 0, \dots, l_0, m_0 > 0$, 则离散系统就是稳定的; 否则, 系统不稳定。

对于二阶离散系统, 设其特征方程为

$$D(z) = a_0 z^2 + a_1 z + a_2 \quad (a_0 > 0)$$

满足必要条件

$$D(1) = a_0 + a_1 + a_2 > 0 \quad (a_0 > 0)$$

$$D(-1) = a_0 - a_1 + a_2 > 0 \quad (a_0 > 0)$$

可得 $a_0 + a_2 > a_1$ ($a_0 > 0$), 构造朱利表如下:

行	列	行	列
1	$a_0 \quad a_1 \quad a_2$	4	$b_1 \quad b_0$
2	$a_2 \quad a_1 \quad a_0$	5	c_0
3	$b_0 \quad b_1$		

$$b_0 = \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} = a_0^2 - a_2^2$$

$$b_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_2 & a_1 \end{vmatrix} = a_1(a_0 - a_2)$$

$b_0 > 0$, 可得 $a_0 > |a_2|$ 。

$$\begin{aligned} c_0 &= b_0^2 - b_1^2 = (a_0^2 - a_2^2)^2 - a_1^2(a_0 - a_2)^2 \\ &= (a_0 + a_2)^2(a_0 - a_2)^2 - a_1^2(a_0 - a_2)^2 \\ &= [(a_0 + a_2)^2 - a_1^2](a_0 - a_2)^2 \end{aligned}$$

由必要条件得到 $a_0 + a_2 > a_1$ ($a_0 > 0$), 可得 $c_0 > 0$ 。

因此, 二阶离散系统判断稳定的充要条件是 $D(1) > 0$ ($a_0 > 0$), $D(-1) > 0$ ($a_0 > 0$) 以及 $a_0 > |a_2|$ 。

例 3-1 已知系统的特征方程

$$D(z) = z^3 + 2z^2 + 1.9z + 0.8$$

试用朱利判据判断系统的稳定性。

解: 在构建朱利表前, 先检查 $D(1)$ 和 $D(-1)$, 即

$$D(1) = 1 + 2 + 1.9 + 0.8 = 5.7, \quad D(1) > 0$$

$$D(-1) = -1 + 2 - 1.9 + 0.8 = -0.1, \quad (-1)^n D(1) > 0$$

可见, 满足前两个条件, 构造朱利表如下:

行	列			
1	1	2	1.9	0.8
2	0.8	1.9	2	1
3	0.36	0.48	0.3	
4	0.3	0.48	0.36	
5	0.0396	0.0288		
6	0.0288	0.0396		
7	0.0007			

满足约束条件, 系统稳定。

2. 劳斯(Routh)稳定判据

为了使用劳斯判据, 需要在与 s 域类似的域上进行判断, 通过使用 ω 变换(双线性变换), 可以把 z 域单位圆内的部分映射到 ω 域的左半平面, 从而使应用劳斯判据判稳成为可能。

如果令

$$z = \frac{\omega + 1}{\omega - 1} \quad \text{或} \quad z = \frac{1 + \omega}{1 - \omega} \quad (3-8)$$

则有

$$\omega = \frac{z + 1}{z - 1} \quad \text{或} \quad \omega = \frac{z - 1}{z + 1} \quad (3-9)$$

式(3-8)和式(3-9)表明, 复变量 z 与 ω 互为线性变换, 故 ω 变换又称双线性变换。令

复变量

$$z = x + jy, \quad \omega = u + jv$$

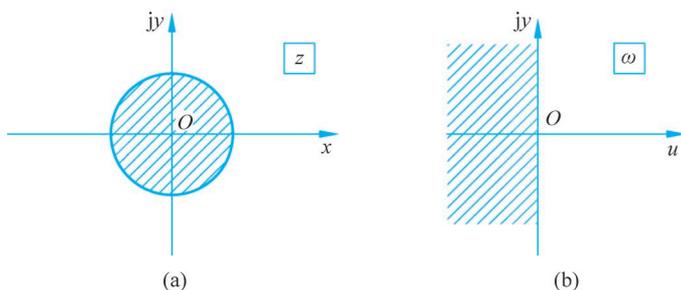
代入式(3-9)可得

$$u + jv = \frac{(x^2 + y^2) - 1}{(x - 1)^2 + y^2} - j \frac{2y}{(x - 1)^2 + y^2}$$

显然,有

$$u = \frac{(x^2 + y^2) - 1}{(x - 1)^2 + y^2}$$

由于上式中分母始终为正,因此 $u=0$ 等价于 $x^2 + y^2 = 1$, $u < 0$ 等价于 $x^2 + y^2 < 1$, $u > 0$ 等价于 $x^2 + y^2 > 1$ 。可见,经过变换, z 域单位圆映射为 ω 域的虚轴, z 域单位圆内映射为 ω 域左半平面, z 域单位圆外映射为 ω 域右半平面,如图 3-1 所示。

图 3-1 z 域到 w 域的映射

由 ω 变换可知,通过从 z 域到 ω 域的变换,线性定常离散系统 z 域的特征方程 $D(z)$ 转换为 ω 域特征方程 $D(\omega)$,则 z 域的稳定条件即所有特征根均处于单位圆内转换为 ω 域的稳定条件,特征方程的根严格位于左半平面。而该条件正是 s 平面上应用劳斯稳定判据的条件,所以根据 ω 域的特征方程系数直接应用劳斯判据即可以判断离散系统的稳定性,同时还能给出特征根处于单位圆外的个数。

例 3-2 设离散系统 z 域的特征方程为

$$D(z) = z^3 + 2z^2 + 1.9z + 0.8$$

使用双线性变换并用劳斯判据确定稳定性。

解: 对 $D(z)$ 作双线性变换,即将

$$z = \frac{\omega + 1}{\omega - 1}$$

代入 $D(z)$ 中,可得

$$D(z) = \left(\frac{\omega + 1}{\omega - 1}\right)^3 + 2\left(\frac{\omega + 1}{\omega - 1}\right)^2 + 1.9\left(\frac{\omega + 1}{\omega - 1}\right) + 0.8 = 0$$

化简后,可得 ω 域特征方程为

$$5.7\omega^3 + 0.7\omega^2 + 1.5\omega + 0.1 = 0$$

则构成劳斯表如下:

$$\begin{array}{ccc} \omega^3 & 5.7 & 1.5 \\ \omega^2 & 0.7 & 0.1 \\ \omega^1 & 0.69 & 0 \\ \omega^0 & 0.1 & \end{array}$$

由劳斯表第一列系数可以看出,没有符号变化,表明系统是稳定的。若在第一列中有符号变化,则变化的数目和 ω 域上处于右半平面的极点个数相同,也和 z 域上单位圆外特征根的个数相同。

例 3-3 设直流电动机位置控制系统结构如图 3-2 所示,采样周期 $T=0.1\text{s}$,控制器增益为 K ,直流电动机模型简化为 $\frac{K_m}{s(T_m s+1)}$,其中电动机时间常数 $T_m=0.1$,电动机增益时间常数 $K_m=1$,试求系统稳定时 K 的取值范围。

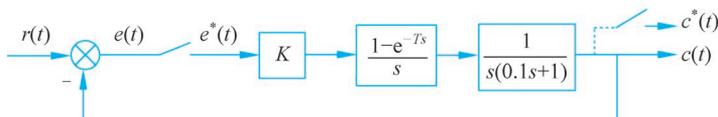


图 3-2 直流电动机位置控制系统结构图

解: 先求系统的开环脉冲传递函数 $G(z)$ 。由图中可以看出,连续环节包含零阶保持器,则由式(2-53)可得

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \cdot K \cdot \mathcal{Z} \left[\frac{10}{s^2(s+10)} \right] = 0.1 \cdot \frac{z-1}{z} \cdot K \cdot \mathcal{Z} \left[\frac{10}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+10} \right]$$

查 z 变换表并化简,可得

$$G(z) = 0.1 \cdot \frac{z-1}{z} \cdot K \cdot \left[\frac{10Tz}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-e^{-10T}} \right]$$

$T=0.1\text{s}$, $e^{-1}=0.368$,代入上式可得

$$G(z) = 0.1 \cdot K \cdot \frac{0.368z + 0.264}{(z-1)(z-0.368)}$$

再求闭环脉冲传递函数:

$$\phi(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{0.0368Kz + 0.0264K}{z^2 + (0.0368K - 1.368)z + 0.0264K + 0.368}$$

则特征方程为

$$D(z) = z^2 + (0.0368K - 1.368)z + 0.0264K + 0.368 = 0$$

作双线性变换,将 $z = \frac{\omega+1}{\omega-1}$ 代入上式化简后可得

$$0.0632K\omega^2 + (1.264 - 0.0528K)\omega + (2.736 - 0.0104K) = 0$$

则劳斯表为

$$\begin{array}{ccc} \omega^2 & 0.0632K & 2.736 - 0.0104K \\ \omega^1 & 1.264 - 0.0528K & 0 \\ \omega^0 & 2.736 - 0.0104K & 0 \end{array}$$

由劳斯表,系统稳定时, K 值应满足

$$K > 0, \quad 1.264 - 0.0528K > 0, \quad 2.736 - 0.0104K > 0$$

即 $0 < K < 24$ 。

故系统稳定的 K 值范围是 $0 < K < 24$ 。

对于 $G(s) = \frac{10K}{s(s+10)}$ 的单位反馈连续系统来说,只要 $K > 0$,系统总是稳定的。而

由例 3-3 的结论来看,加入采样开关,当 K 超过一定值时,将使系统变得不稳定。因此,采样周期一定时,加大开环增益会使离散系统的稳定性变差。

另外,当开环增益一定时,加大采样周期,会使系统的信息丢失增加,也可能使系统变得不稳定。

如例 3-3 中,取 $T=0.2$,则 $e^{-2}=0.135$,代入可得

$$G(z) = \frac{0.1135Kz + 0.0594K}{z^2 - 1.135z + 0.135}$$

特征方程为

$$D(z) = z^2 + (0.1135K - 1.135)z + 0.0594K + 0.135 = 0$$

做双线性变换后的特征方程为

$$0.1729K\omega^2 + (1.73 - 0.1188K)\omega + 2.27 - 0.0541K = 0$$

系统稳定的 K 值范围是 $0 < K < 14.56$ 。

可见,增大采样周期, K 值的稳定范围缩小了。

例 3-4 判断例 2-24 所示电阻加热炉炉温控制系统的稳定性。

解: 由例 2-24,闭环系统的脉冲传递函数为

$$\phi(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{D(z)G_1(z)}{1 + D(z)G(z)} = \frac{4(1 - e^{-0.5T})}{(z - e^{-0.5T}) + 0.16(1 - e^{-0.5T})}$$

当 $T=0.6$ 时,有

$$\phi(z) = \frac{1.04}{z - 0.6984}$$

只有一个特征根 $z_1=0.6984$,位于单位圆内,系统稳定。

3.2 稳态性能分析



离散系统的稳态性能是用稳态误差来表征的。与连续系统类似,离散系统稳态误差和系统本身及输入信号都有关系,在系统特性中起主要作用的是系统的型别以及开环增益。稳态误差既可用级数的方法求取,也可用终值定理求取。应用终值定理,方法简便,所以较常使用。

3.2.1 稳态误差计算

闭环系统如图 3-3 所示。图中 $G(s)$ 为连续部分的传递函数, $e(t)$ 为系统连续误差信号, $e^*(t)$ 为系统采样误差信号。由式(2-58)可知

$$\phi_e(z) = \frac{E(z)}{R(z)} = \frac{1}{1 + GH(z)}$$

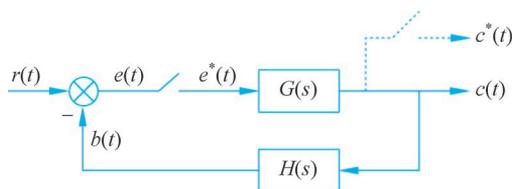


图 3-3 闭环系统

若 $\phi_e(z)$ 极点全部严格位于 z 平面上的单位圆内, 即系统稳定, 则应用 z 变换的终值定理可求出采样瞬时的终值误差, 即

$$e^*(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^*(t) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)R(z)}{[1 + GH(z)]} \quad (3-10)$$

由于离散系统没有唯一的典型结构图形式, 误差脉冲传递函数也给不出一般的计算公式, 因此在利用 z 变换终值定理求稳态误差时, 必须按实际系统求出 $\phi_e(z)$, 然后求取 $e^*(\infty)$ 。

利用 z 变换终值定理求取采样系统的稳态误差是一种基本方法, 与连续系统类似, 人们依然在寻求通过定义误差系数来简化稳态误差的计算过程。

对于一个采样系统, 设 $G_k(z) = GH(z) = \mathcal{Z}[G(s)H(s)]$, 其静态位置误差系数为

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} [1 + G_k(z)] \quad (3-11)$$

静态速度误差系数为

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G_k(z) \quad (3-12)$$

静态加速度误差系数为

$$K_a = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 G_k(z) \quad (3-13)$$

应用静态误差系数, 对于图 3-3 所示的典型误差采样系统, 可求出不同输入信号下稳态误差的值。

若

$$r(t) = 1(t), \quad R(z) = \frac{z}{z-1}$$

则有

$$e^*(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)R(z)}{[1 + G_k(z)]} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1 + G_k(z)} = \frac{1}{K_p} \quad (3-14)$$

若

$$r(t) = t, \quad R(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

则有

$$e^*(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)R(z)}{[1 + G_k(z)]} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T}{(z-1)G_k(z)} = \frac{T}{K_v} \quad (3-15)$$

$$\text{若} \quad r(t) = \frac{t^2}{2}, \quad R(z) = \frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$$

则有

$$e^*(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)R(z)}{[1+G_k(z)]} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T^2(z+1)}{2(z-1)^2[1+G_k(z)]} = \frac{T^2}{K_a} \quad (3-16)$$

由此可见,应用静态误差系数,根据系统结构和输入信号可以方便地表示出采样系统的稳态误差。

为了简化求误差系数的过程,和连续系统类似,需要考查静态误差系数和系统型别的关系。对于采样系统,按照开环极点在 $z=1$ 的个数定义系统的型别,若 $G(z)$ 在 $z=1$ 有 0 个、1 个、2 个...极点,则系统的型别分别是 0 型、I 型、II 型...。下面分析系统型别与静态误差系数的关系。

由式(3-11),即

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} [1 + G_k(z)]$$

可知:若 $G_k(z)$ 在 $z=1$ 的极点个数为 0,则 K_p 为有限值;若 $G_k(z)$ 在 $z=1$ 时的极点个数大于或等于 1,则 $K_p = \infty$ 。可见,对 0 型系统, $K_p \neq \infty$; 对于 I 型及以上系统, $K_p = \infty$ 。

由式(3-12),即

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G_k(z)$$

可知:若 $G_k(z)$ 在 $z=1$ 的极点个数为 0,则 $K_v = 0$;若 $G_k(z)$ 在 $z=1$ 的极点个数为 1,则 K_p 为有限值;若 $G_k(z)$ 在 $z=1$ 的极点个数大于或等于 2,则 $K_p = \infty$ 。可见,对 0 型及 I 型系统, $K_v \neq \infty$; 对于 II 型及以上系统, $K_v = \infty$ 。

同理,对于 0 型、I 型、II 型系统, $K_a \neq \infty$, 对于 III 型及以上系统, $K_a = \infty$ 。

对于图 3-3 所示的典型误差采样系统,考察不同类型的系统的静态误差系数及用静态误差系数表示稳态误差,可得到表 3-1。

表 3-1 典型误差采样系统的误差系数和稳态误差

$z=1$ 的开环 极点个数	系统型别	静态误差系数			稳态误差 $e(\infty)$		
		K_p	K_v	K_a	$1(t)$	t	$\frac{t^2}{2}$
0	0 型	F	0	0	$\frac{1}{K_p}$	∞	∞
1	I 型	∞	F	0	0	$\frac{T}{K_v}$	∞
2	II 型	∞	∞	F	0	0	$\frac{T^2}{K_a}$
3	III 型	∞	∞	∞	0	0	0

注: F 代表有限值且不为 0。

例 3-5 采样系统结构如图 3-4 所示,采样周期 $T=0.2\text{s}$,输入信号 $r(t)=1+t+\frac{1}{2}t^2$,试计算系统的稳态误差。

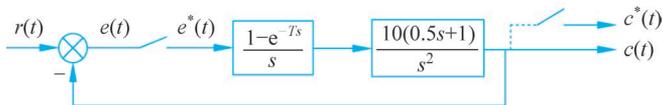


图 3-4 采样系统结构图

解: 由图 3-4 可知,该系统为单位反馈误差采样系统,且连续环节中包含有零阶保持器,在求其稳态误差时,可利用表 3-1 中的结果。

求 $e^*(\infty)$ 需分三步进行:

(1) 求 $G(z)$ 。系统中有零阶保持器,由式(2-53)可得

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left[\frac{10(0.5s+1)}{s^3} \right] = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left[\frac{10}{s^3} + \frac{5}{s^2} \right]$$

查 z 变换表,可得

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \left[\frac{5T^2 z(z+1)}{(z-1)^3} + \frac{5Tz}{(z-1)^2} \right]$$

将采样周期 $T=0.2\text{s}$ 代入并化简,可得

$$G(z) = \frac{1.2z - 0.8}{(z-1)^2}$$

(2) 判别系统的闭环稳定性。由式(2-60),闭环特征方程为

$$D(z) = 1 + G(z) = 0$$

展开可得

$$(z-1)^2 + 1.2z - 0.8 = 0$$

即

$$z^2 - 0.8z + 0.2 = 0$$

进行 ω 变换,将 $z = \frac{\omega+1}{\omega-1}$ 代入上式并整理,可得

$$0.4\omega^2 + 1.6\omega + 2 = 0$$

列劳斯表:

$$\begin{array}{ccc} \omega^2 & 0.4 & 2 \\ \omega^1 & 1.6 & 0 \\ \omega^0 & 2 & \end{array}$$

可见闭环系统稳定。

(3) 求 $e^*(\infty)$ 。先求静态误差系数。

$$G(z) = \frac{1.2z - 0.8}{(z-1)^2}$$

可见系统为 II 型系统,所以

$$K_p = \infty, \quad K_v = \infty, \quad K_a = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 G(z) = 0.4$$

由表 3-1 可知,对于 $r(t) = 1+t+\frac{1}{2}t^2$ 作用下的稳态误差为

$$e(\infty) = \frac{1}{K_p} + \frac{T}{K_v} + \frac{T^2}{K_a} = 0 + 0 + \frac{0.04}{0.4} = 0.1$$

3.2.2 典型计算机控制系统稳态误差计算

典型计算机控制系统结构图如图 3-5 所示。

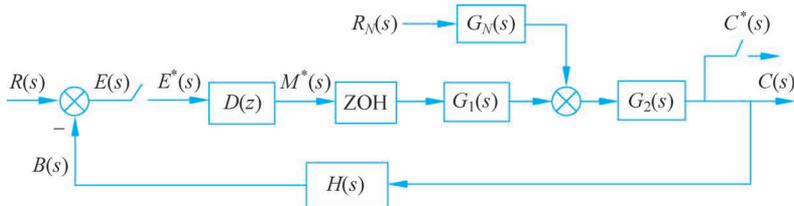


图 3-5 典型计算机控制系统结构图

由式(2-64)、式(2-65)和式(2-68)可知

$$G(z) = (1-z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{G_1(s)G_2(s)H(s)}{s} \right]$$

$$E_R(z) = \frac{1}{1+D(z)G(z)} R(z)$$

$$E_N(z) = -\frac{HG_N G_2 R_N(z)}{1+D(z)G(z)}$$

对于输入信号,对照典型采样系统图 3-3, $G_k(z) = D(z)G(z)$, 其静态误差系数的定义及不同输入信号下稳态误差的值依然如式(3-11)~式(3-16)所示,考查不同类型的系统的静态误差系数及用静态误差系数表示稳态误差仍然可应用表 3-1。

对于干扰信号,应用静态误差系数的方法不再适用,和连续系统相同,干扰信号的稳态误差只能采用终值定理求得,且由于很多系统并不能直接求出 $\phi_{en}(z)$, 而只能求出 $E_N(z)$, 故只能对 $E_N(z)$ 应用终值定理求稳态误差。

例 3-6 若输入信号及干扰信号均为单位阶跃信号, $T=0.6\text{s}$, 求例 2-24 所示炉温控制系统的稳态误差。

解: 由式(2-65)可知

$$E_R(z) = \frac{1}{1+D(z)G(z)} R(z)$$

由例 2-24 可知

$$G_k(z) = D(z)G(z) = \frac{0.16(1-e^{-0.5T})}{z-e^{-0.5T}}$$

系统为 0 型系统,对于阶跃输入信号的稳态误差为

$$e_{ssr}^* = \frac{1}{K_p}$$

由于

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} [1 + G_k(z)] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[1 + \frac{0.16(1 - e^{-0.5T})}{z - e^{-0.5T}} \right] = 1.16$$

则可得

$$e_{ssr}^* = \frac{1}{K_p} = 0.862$$

由式(2-68)可知

$$E_N(z) = -\frac{HG_N G_2 R_N(z)}{1 + D(z)G(z)}$$

由于

$$G_N(s) = \frac{2.5}{s + 0.5}, \quad H(s) = 0.04, \quad G_2(s) = 1$$

$$HG_N G_2 R_N(z) = 0.04 \mathcal{Z} \left[\frac{2.5}{s + 0.5} \cdot \frac{1}{s} \right] = 0.2 \mathcal{Z} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s + 0.5} \right] = \frac{0.2z(1 - e^{-0.5T})}{(z - 1)(z - e^{-0.5T})}$$

则可得

$$E_N(z) = -\frac{\frac{0.2z(1 - e^{-0.5T})}{(z - 1)(z - e^{-0.5T})}}{1 + \frac{0.16(1 - e^{-0.5T})}{(z - e^{-0.5T})}} = -\frac{0.2z(1 - e^{-0.5T})}{(z - 1)[z - e^{-0.5T} + 0.16(1 - e^{-0.5T})]}$$

由终值定理可得

$$\begin{aligned} e_{ssn}^* &= \lim_{t \rightarrow \infty} e_n^*(t) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)E_N(z) \\ &= -\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z - 1}{1} \frac{0.2z(1 - e^{-0.5T})}{(z - 1)[z - e^{-0.5T} + 0.16(1 - e^{-0.5T})]} = -\lim_{z \rightarrow 1} \frac{0.2}{1.16} = -0.1724 \end{aligned}$$

所以系统总的稳态误差为

$$e_{ss}^* = e_{ssr}^* + e_{ssn}^* = 0.862 - 0.1724 = 0.6896$$

3.3 动态性能分析

前两节主要介绍了离散系统稳定的充要条件及稳态误差的计算,但工程上不仅要求系统是稳定的,而且希望它具有良好的动态品质。通常,如果已知离散控制系统的数学模型(差分方程、脉冲传递函数等),通过递推计算及 z 变换法不难求出典型输入作用下的系统输出信号的脉冲序列 $c^*(t)$,通过对脉冲序列 $c^*(t)$ 进行分析可以很方便地得到系统的动态性能。

例 3-7 设直流电动机位置控制系统结构如图 3-2 所示,其中输入信号为单位阶跃信号 $r(t) = 1(t)$,采样周期 $T = 0.1s$,控制器增益 $K = 10$,直流电动机模型简化为 $\frac{K_m}{s(T_m s + 1)}$,其中电动机时间常数 $T_m = 0.1$,电动机增益时间常数 $K_m = 1$,试分析该系

统的动态性能。

解：由例 3-3 可得

$$\phi(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{0.0368Kz + 0.0264K}{z^2 + (0.0368K - 1.368)z + 0.0264K + 0.368}$$

将 $K=10$ 代入上式,可得

$$\phi(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{0.368z + 0.264}{z^2 - z + 0.632}$$

将 $R(z) = z/z-1$ 代入,可求出单位阶跃序列响应的 z 变换,即

$$C(z) = \phi(z)R(z) = \frac{0.368z^{-1} + 0.264z^{-2}}{1 - 2z^{-1} + 1.632z^{-2} - 0.632z^{-3}}$$

利用长除法将 $C(z)$ 展成无穷幂级数,即

$$C(z) = 0.368z^{-1} + z^{-2} + 1.4z^{-3} + 1.4z^{-4} + 1.147z^{-5} + 0.895z^{-6} + 0.802z^{-7} + 0.868z^{-8} + \dots$$

由 z 变换定义,输出序列 $c(nT)$ 为

$$C(0) = 0, \quad C(T) = 0.368, \quad C(2T) = 1$$

$$C(3T) = 1.4, \quad C(4T) = 1.4, \quad C(5T) = 1.147$$

$$C(6T) = 0.895, \quad C(7T) = 0.802, \dots$$

得到的 $T=0.1s$ 时单位阶跃响应曲线如图 3-6 所示。

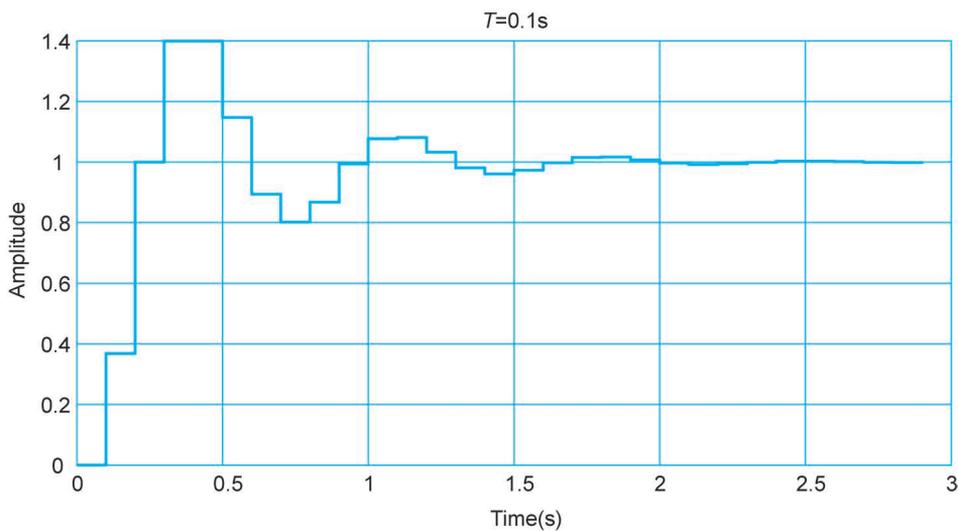


图 3-6 $T=0.1s$ 时单位阶跃响应曲线

由图 3-6 求得系统的近似性能指标: 上升时间 $t_r=0.2s$, 峰值时间 $t_p=0.4s$, 调节时间 $t_s=1.2s$ (5% 误差带), 超调量 $\sigma\%=40\%$ 。

如果该系统为连续系统, 即其开环传递函数为

$$G(s) = \frac{100}{s(s+10)}$$

则其闭环传递函数为

$$\phi(s) = \frac{100}{s^2 + 10s + 100}$$

连续系统单位阶跃响应曲线如图 3-7 所示。

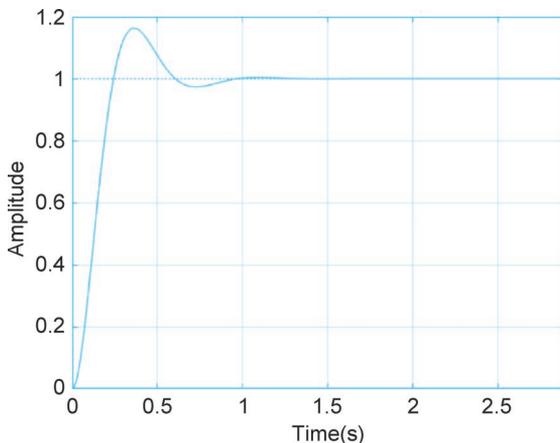


图 3-7 连续系统单位阶跃响应曲线

由二阶系统的性能指标与参数的对应关系可知,阻尼比 $\xi=0.5$,自然振荡角频率 $\omega_n=10$,性能指标:上升时间 $t_r=0.243s$,峰值时间 $t_p=0.3626s$,调节时间 $t_s=0.6s$,超调量 $\sigma\%=16.3\%$ 。对比可知,系统离散化后性能下降。

同样,如果改变离散系统的采样周期,如将例 3-7 中系统的采样周期增大为 $0.2s$,由例 3-3 可知,其开环传递函数为

$$G(z) = \frac{0.1135Kz + 0.0594K}{z^2 - 1.135z + 0.135}$$

同样,将 $K=10$ 代入可得

$$\phi(z) = \frac{1.135z + 0.6}{z^2 + 0.735}$$

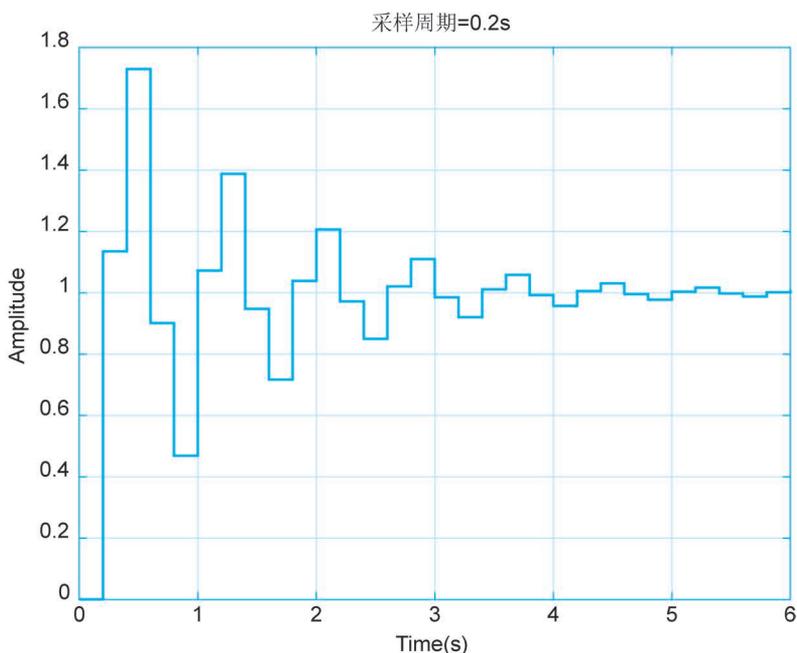
此时系统的单位阶跃响应曲线如图 3-8 所示。

由图 3-8 求得系统的近似性能指标:上升时间 $t_r=0.2s$,峰值时间 $t_p=0.5s$,调节时间 $t_s=4s$ (5%误差带),超调量 $\sigma\%=73\%$ 。由此可知,增大采样周期,系统的性能变差。

系统的性能不仅与采样周期有关,而且与系统的参数密切相关,如果系统的参数改变,那么系统的性能也会相应改变。

例 3-7 中,若直流电动机位置控制系统中电动机的时间常数存在误差,从而使其模型相应改变,如变为

$$G(s) = \frac{1}{s(0.2s + 1)}$$

图 3-8 $T=0.2\text{s}$ 时单位阶跃响应曲线

则系统的开环脉冲传递函数为

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left[\frac{5}{s^2(s+5)} \right] = 20 \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left[\frac{0.5}{s^2} - \frac{0.1}{s} + \frac{0.1}{s+5} \right]$$

查 z 变换表并化简, 可得

$$G(z) = 20 \frac{z-1}{z} \left[\frac{0.5Tz}{(z-1)^2} - \frac{0.1z}{z-1} + \frac{0.1z}{z-e^{-5T}} \right]$$

$T=0.1\text{s}$, $e^{-0.5}=0.606$, 代入上式可得

$$G(z) = \frac{0.212z + 0.182}{(z-1)(z-0.606)}$$

闭环脉冲传递函数为

$$\phi(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{0.212z + 0.182}{z^2 - 1.394z + 0.788}$$

此时的单位阶跃响应曲线与原系统的单位阶跃响应曲线对比如图 3-9 所示。

由图 3-9 可见, 参数改变后系统的近似性能指标: 上升时间 $t_r=0.3\text{s}$, 峰值时间 $t_p=0.5\text{s}$, 调节时间 $t_s=2.1\text{s}$, 超调量 $\sigma\%=55.6\%$ 。可见, 随着电动机时间常数增加, 系统的动态性能变差, 这一点和连续系统是一致的。

大多数情况下, 系统的参数受多种因素影响, 建模时只能取其近似值, 所以计算得到的系统性能只是实际性能指标的近似。当系统的参数和模型不能精确获得时, 如何估算系统的性能指标就是面临的一个实际问题。随着科学技术的发展, 基于数据驱动的机器学习和深度学习为系统建模提供了崭新的思路, 鉴于篇幅, 不再赘述, 读者可参阅相关

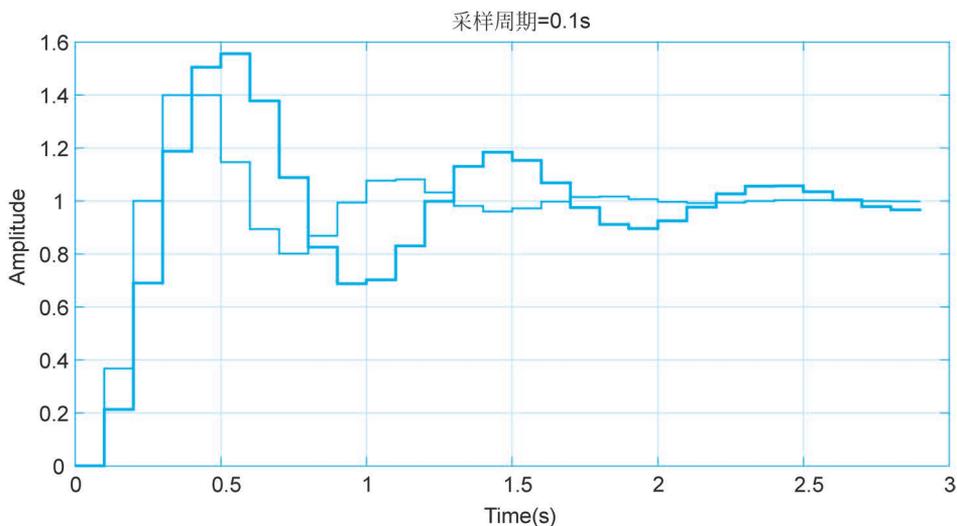


图 3-9 改变电动机参数后单位阶跃响应曲线对比

书籍。

由例 3-7 可见,通过求解系统输出信号的脉冲序列 $c^*(t)$ 可以定量地分析系统的动态性能,但有时需要对系统动态性能做定性分析,此时需要考查离散系统的闭环极点在 z 平面上的分布与系统动态性能的关系。

设闭环脉冲传递函数为

$$G(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j z^{-j}}{1 + \sum_{i=1}^n a_i z^{-i}} = \frac{K_0 \prod_{j=1}^m (z - z_j)}{\prod_{i=1}^n (z - p_i)} \quad (m \leq n)$$

式中, $z_j (j=1, 2, \dots, m)$ 表示 $\phi(z)$ 的零点, $p_i (i=1, 2, \dots, n)$ 表示 $\phi(z)$ 的极点,它们既可以是实数,也可以是共轭复数。若离散系统稳定,则所有闭环极点应严格位于 z 平面上的单位圆内,即 $|p_i| < 1 (i=1, 2, \dots, n)$ 。为便于讨论,假定 $\phi(z)$ 无重极点,且系统的输入为单位阶跃信号。此时

$$r(t) = 1(t), \quad R(z) = \frac{z}{z-1}$$

系统输出的 z 变换为

$$C(z) = \phi(z)R(z) = \phi(z) \frac{z}{z-1}$$

将 $\frac{C(z)}{z}$ 展成部分分式,则有

$$\frac{C(z)}{z} = \phi(1) \frac{1}{z-1} + \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{z-p_i}$$

式中, C_i 为 $\frac{C(z)}{z}$ 在各极点处的留数,其获得方法与拉普拉斯变换的相同。

于是

$$C(z) = \phi(1) \frac{z}{z-1} + \sum_{i=1}^n \frac{C_i z}{z-p_i}$$

对于上式取 z 反变换, 可得系统的输出脉冲序列为

$$c(k) = \phi(1)1(t) + \sum_{i=1}^n C_i (p_i)^k \quad (3-17)$$

式(3-17)等号右边第一项为输出脉冲序列的稳态分量, 第二项为动态分量, 根据 p_i 在 z 平面上分布的不同, 其对应的动态性能也不相同。下面分两种情况进行讨论:

1. 闭环极点为实轴上的单极点

若 p_i 位于实轴上, 则其对应的瞬态分量为

$$c_i(k) = c_i p_i^k \quad (3-18)$$

因此, 当 p_i 位于 z 平面上不同位置时, 其对应的脉冲响应序列也不相同:

- (1) 当 $p_i > 1$ 时, $c(k)$ 为发散脉冲序列。
- (2) 当 $p_i = 1$ 时, $c(k)$ 为等幅脉冲序列。
- (3) 当 $0 < p_i < 1$ 时, $c(k)$ 为单调衰减正脉冲序列, 且 p_i 越接近 0, 衰减越快。
- (4) 当 $-1 < p_i < 0$ 时, $c(k)$ 是交替变化符号的衰减脉冲序列。
- (5) 当 $p_i = -1$ 时, $c(k)$ 是交替变化符号的等幅脉冲序列。
- (6) 当 $p_i < -1$ 时, $c(k)$ 是交替变化符号的发散脉冲序列。

p_i 在 z 平面的位置与相应脉冲响应序列关系如图 3-10 所示。

2. 闭环极点为共轭复数极点

设 p_i 和 \bar{p}_i 为一对共轭复数极点, 其表达式为

$$p_i, \bar{p}_i = |p_i| e^{\pm j\theta_i}$$

式中, θ_i 为共轭复极点 p_i 的相角, 从 z 平面上的正实轴算起, 逆时针为正。

由式(3-18)可知, 一对共轭复数所对应的瞬态分量为

$$c_{i,i}(k) = c_i p_i^k + \bar{c}_i \bar{p}_i^k \quad (3-19)$$

由复变函数理论可知, 共轭复数极点所对应的留数 c_i 及 \bar{c}_i 也是共轭复数对。

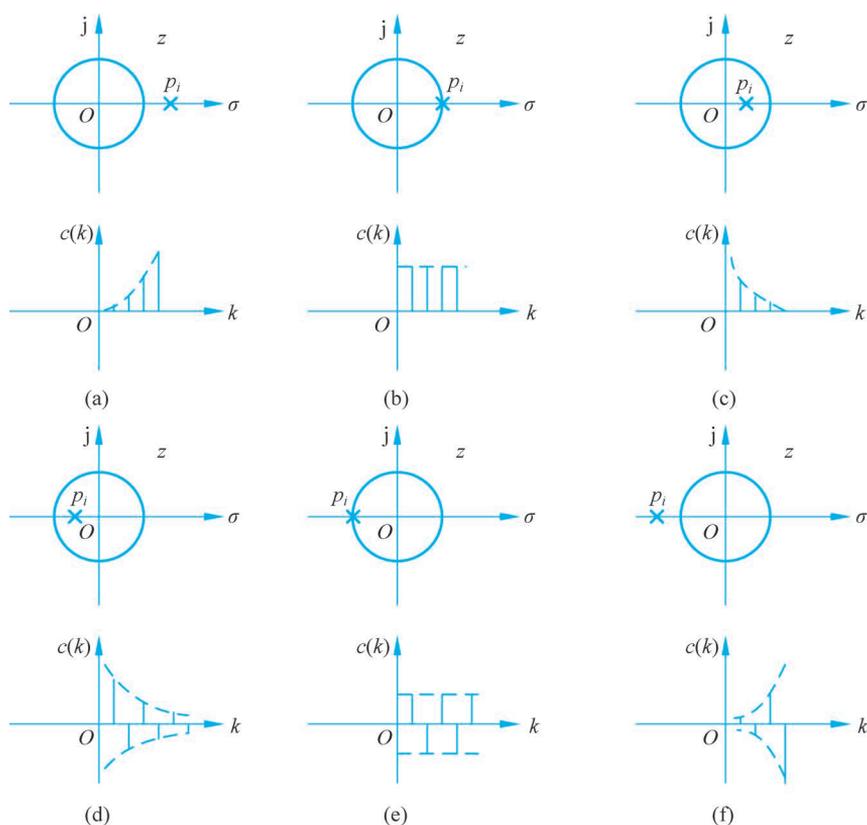
设 $c_i, \bar{c}_i = |c_i| e^{\pm j\varphi_i}$, 有

$$\begin{aligned} c_{i,i}(k) &= |c_i| |p_i|^k e^{j(k\theta_i + \varphi_i)} + |c_i| |p_i|^k e^{-j(k\theta_i + \varphi_i)} \\ &= 2 |c_i| |p_i|^k \cos(k\theta_i + \varphi_i) \end{aligned} \quad (3-20)$$

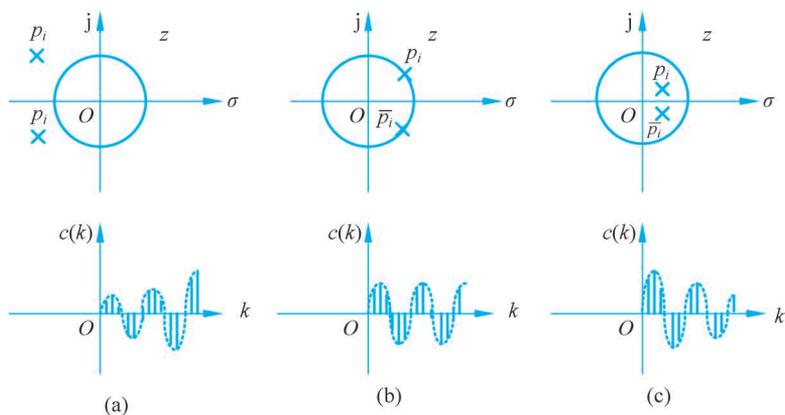
由式(3-20)可见, 一对共轭复数极点所对应的瞬态分量 $c_{i,i}(k)$ 按振荡规律变化, 其振荡的角频率与 θ_i 有关, θ_i 越大, 振荡的角频率就越高。

当 p_i 处于不同位置时, 其对应的脉冲响应序列如下:

- (1) 当 $|p_i| > 1$ 时, $c(k)$ 为发散振荡脉冲序列。
- (2) 当 $|p_i| = 1$ 时, $c(k)$ 为等幅振荡脉冲序列。
- (3) 当 $|p_i| < 1$ 时, $c(k)$ 为衰减振荡脉冲序列。


 图 3-10 p_i 为实轴上单极点所对应的脉冲响应序列

其对应关系如图 3-11 所示。


 图 3-11 p_i 为共轭复极点所对应的脉冲响应序列

综上所述,离散系统动态响应的基本特性取决于极点在 z 平面上的分布,极点越靠近原点,动态响应衰减得越快,极点的辐角越趋于零,动态响应振荡的频率越低,因此为使系统具有较为满意的动态性能,其闭环极点最好分布在单位圆的右半部且尽量靠近原点。

例 3-8 若输入信号及干扰信号均为单位阶跃信号,求例 2-24 所示电阻炉炉温控制系统的动态性能。

解: 由例 2-24,总的输出信号为

$$C(z) = C_R(z) + C_N(z) = \frac{1.04}{z - 0.6984} R(z) + \frac{z - 0.74}{z - 0.6984} R_N G_N(z)$$

$$G_N R_N(z) = \mathcal{Z} \left[\frac{2.5}{s + 0.5} \cdot \frac{1}{s} \right] = \frac{5z(1 - e^{-0.5T})}{(z - 1)(z - e^{-0.5T})}$$

将 $T = 0.6$ 代入上式,可得

$$G_N R_N(z) = \mathcal{Z} \left[\frac{2.5}{s + 0.5} \cdot \frac{1}{s} \right] = \frac{1.3z}{(z - 1)(z - 0.74)}$$

$$\begin{aligned} C(z) &= \frac{1.04}{z - 0.6984} \frac{z}{z - 1} + \frac{z - 0.74}{z - 0.6984} \frac{1.3z}{(z - 1)(z - 0.74)} \\ &= \frac{2.34z}{(z - 0.6984)(z - 1)} = \frac{7.759z}{z - 1} - \frac{7.759z}{z - 0.6984} \end{aligned}$$

$$c(kT) = 7.759(1 - 0.6984^k)$$

电阻炉炉温计算机控制系统的响应曲线如图 3-12 所示。

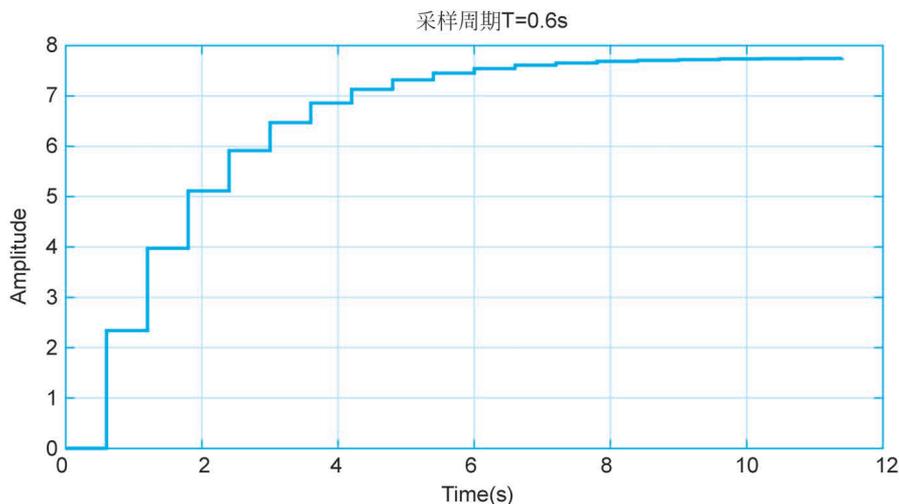


图 3-12 电阻炉炉温计算机控制系统的响应曲线

可以确定其上升时间为 4.2s,此时,当 $c(7T) = 7.759(1 - 0.081) = 7.13$ 。

3.4 根轨迹法的应用

离散系统的根轨迹法与连续系统类似,同样是研究当系统的某一个参数变化时闭环极点变化的轨迹。

在离散系统中,若特征方程定义为

$$D(z) = 1 + G_k(z) = 0$$

或

$$G_k(z) = -1 \quad (3-21)$$

$D(z)$ 为闭环离散系统的特征方程, $G_k(z)$ 为系统的等效开环脉冲传递函数,其一般表示形式为

$$G_k(z) = \frac{K_g \prod_{j=1}^m (z - z_{oj})}{\prod_{i=1}^n (z - p_{oi})} \quad (3-22)$$

式中, K_g 为开环根轨迹增益; z_{oj} 为系统的开环零点; p_{oi} 为系统的开环极点。

故离散系统的根轨迹方程为

$$\frac{K_g \prod_{j=1}^m (z - z_{oj})}{\prod_{i=1}^n (z - p_{oi})} = -1 \quad (3-23)$$

由于离散系统的根轨迹方程与连续系统的根轨迹方程在形式上完全类似,所依据的幅值条件和辐角条件也完全一致,因此连续系统根轨迹的绘图规则和方法可以不加改变地应用于离散系统。由于连续系统的开环传递函数 $G_k(s)$ 为 s 的有理分式函数,而离散系统的开环脉冲传递函数 $G_k(z)$ 为 z 的有理分式函数,因此根轨迹与系统特性之间的关系有所差异。例如,在连续系统中临界稳定点是根轨迹与虚轴的交点,而在离散系统中则是根轨迹与单位圆的交点。

例 3-9 直流电动机位置控制系统,其开环脉冲传递函数为

$$G_k(z) = 10 \cdot K \cdot \frac{(e^{-T} + T - 1)z + 1 - e^{-T} - Te^{-T}}{(z - 1)(z - e^{-T})}$$

分别绘出采样周期 T 为1s、2s,参数 K 变化时系统的根轨迹,并判断系统稳定时 K 的范围。

解: (1) 当采样周期 $T=1s$ 时,有

$$G_k(z) = 10 \cdot K \cdot \frac{0.368z + 0.264}{(z - 1)(z - 0.368)}$$

应用根轨迹的绘制方法,可以求得

- ① 根轨迹起点为 $z=0.368$ 及 $z=1$,终点为 $z=-0.7174$ 及 $z=-\infty$ 。
- ② 有两条根轨迹分支且根轨迹对称于实轴。
- ③ 渐近线角度为 π 。
- ④ 实轴上 $z=0.368$ 至 $z=1$, $z=-0.7174$ 至 $z=-\infty$ 为根轨迹部分。
- ⑤ 分离点由下式确定:

$$\frac{1}{d - 0.368} + \frac{1}{d - 1} = \frac{1}{d + 0.7174}$$

解得 $d_1 = -2.1, d_2 = 0.65$,复平面上的根轨迹是以 $z = -0.7174$ 为圆心、半径为1.38的圆。

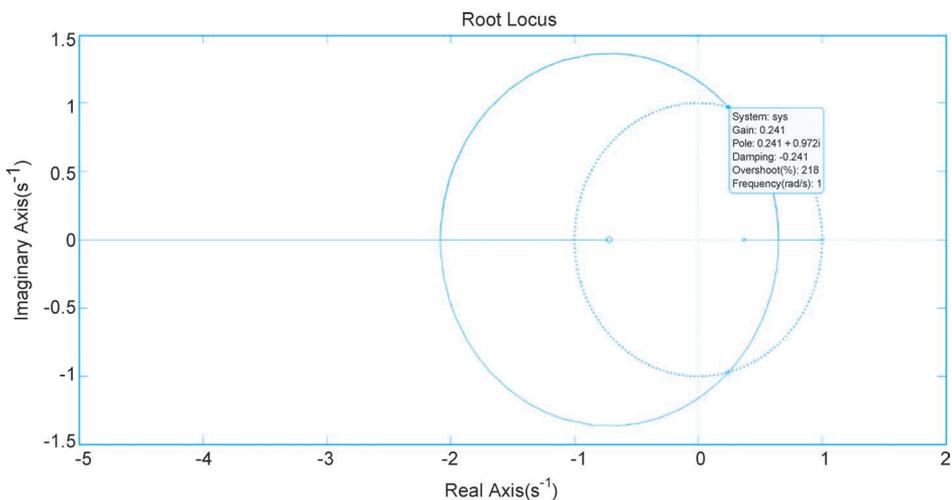
- ⑥ 和单位圆的交点。

根据幅值条件

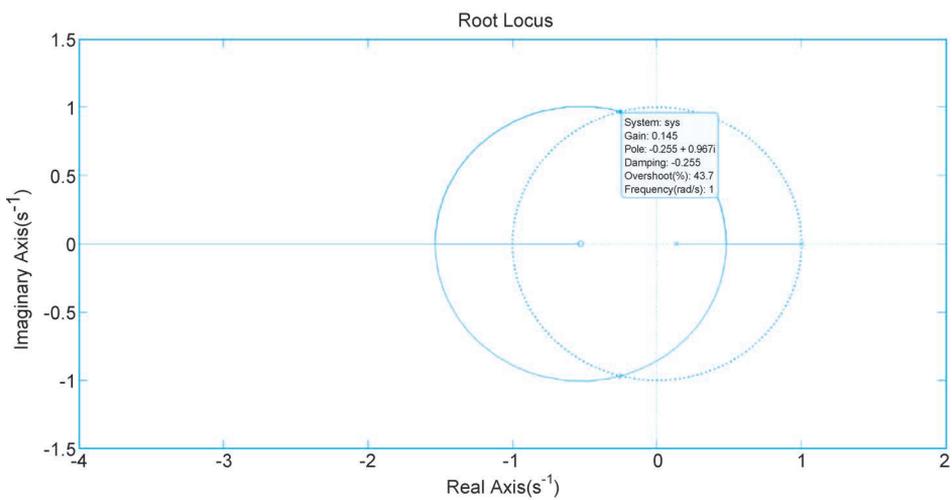
$$\left| 10 \cdot K \cdot \frac{0.368z + 0.264}{(z-1)(z-0.368)} \right| = 1$$

解得 $K = 0.24$ 。

也可以应用双线性变换,由劳斯判据求得 K 的稳定范围为 $0 < K < 0.24$ 。由以上绘出根轨迹图如图 3-13(a)所示,图中虚线小圆为单位圆。



(a) $T=1s$



(b) $T=2s$

图 3-13 根轨迹图

(2) 当采样周期 $T=2s$ 时,有

$$G(z) = 10 \cdot K \cdot \frac{1.135z + 0.6}{z^2 - 1.135z + 0.135}$$

① 根轨迹起点为 $z=0.135$ 及 $z=1$,终点为 $z=-0.53$ 及 $z=-\infty$ 。

- ② 有两条根轨迹分支且根轨迹对称于实轴。
- ③ 渐近线角度为 π 。
- ④ 实轴上 $z=0.135$ 至 $z=1$, $z=-0.53$ 至 $z=-\infty$ 为根轨迹部分。
- ⑤ 分离点为 $d_1=-1.54, d_2=0.48$ 。
- ⑥ 与单位圆的交点 $K=0.144$ 。

故系统稳定时 K 的范围是 $0 < K < 0.144$ 。

由以上给出根轨迹图如图 3-13(b) 所示。

由图中同样可以发现,系统的稳定性不仅与 K 有关,而且与采样周期 T 有关,在相同的 K 值时,采样周期越小,系统越容易稳定。

3.5 频率法的应用

频率法对于连续系统而言是很重要的分析方法,对于离散系统同样重要。但是正如 2.7 节提到的那样,绘制离散系统的频率特性曲线是非常烦琐的过程,直接在 z 域应用频率法并不方便,相反使用双线性变换到 ω 域后应用频率法的方法却发展起来。

前面介绍过,双线性变换将 z 域的单位圆之内和之外分别映射到 ω 域的左、右半平面,稳定的范围由单位圆内映射为虚轴左侧,因此映射后即可应用连续系统的频率法分析系统的性能。即映射后系统的频率特性是映射后的表达式 $G(\omega)$ 令 $\omega = j\omega_\omega$ 获得的,即

$$\begin{aligned} G(\omega) &= G(z) \Big|_{z = \frac{1+j\omega}{1-j\omega}} \\ G(j\omega_\omega) &= G(\omega) \Big|_{\omega = j\omega_\omega} \end{aligned} \quad (3-24)$$

式中, ω_ω 为虚频率。

虚频率 ω_ω 与实际频率 ω 的关系如下:

$$\omega \Big|_{\omega = j\omega_\omega} = \frac{z-1}{z+1} \Big|_{z = e^{j\omega T}} \quad (3-25)$$

即

$$j\omega_\omega = \frac{e^{j\omega T} - 1}{e^{j\omega T} + 1} = j \tan(\omega T / 2)$$

或

$$\omega_\omega = \tan(\omega T / 2) \quad (3-26)$$

既然 $T = 2\pi/\omega_s$ 则 $\omega_\omega = \tan(\pi\omega/\omega_s)$, 所以对应关系为

$$\omega = 0, \quad \omega_\omega = 0$$

$$\omega = \frac{\omega_s}{2}, \quad \omega_\omega = \infty$$

$$\omega = -\frac{\omega_s}{2}, \quad \omega_\omega = -\infty$$

由上可见,当 ω 从 $-\frac{\omega_s}{2}$ 到 $\frac{\omega_s}{2}$ 在 s 域变化时, ω_ω 相应的频率由 $-\infty$ 变化到 ∞ 。由于离散系统频率特性的周期性特点,只要考虑 $-\frac{\omega_s}{2} < \omega < \frac{\omega_s}{2}$ 的范围就足够。

这样由闭环采样系统的特征方程

$$1 + G_k(z) = 0$$

经 ω 变换并令 $\omega = j\omega_\omega$, 可得

$$1 + G_k(j\omega_\omega) = 0$$

它与连续系统中的奈奎斯特判据所依据的表达式

$$1 + G_k(j\omega) = 0$$

是一致的,因此在连续系统中讨论的频率响应分析法可用来分析离散系统的特性。

1. 波特图

波特图是按频率变化以 \log 标注幅值及相移的图形,用 $\omega = j\omega_\omega$ 代替频率变化,使用连续系统中的方法即可绘制波特图。

例 3-10 直流电动机位置控制系统,当采样周期 $T = 1\text{s}$, $K = 0.1$,其开环脉冲传递函数为

$$G_k(z) = \frac{0.368z + 0.264}{(z-1)(z-0.368)}$$

把 $G(z)$ 经双线性变换后绘制波特图。

解: 将 $z = \frac{1+\omega}{1-\omega}$ 代入, $G(z)$ 变为

$$G_k(\omega) = \frac{0.632 - 0.528\omega - 0.104\omega^2}{\omega(1.264 + 2.736\omega)}$$

将 $\omega = j\omega_\omega$ 代入上式,可得

$$G_k(j\omega_\omega) = \frac{0.632 - 0.528j\omega_\omega + 0.104\omega_\omega^2}{j\omega_\omega(1.264 + 2.736j\omega_\omega)}$$

幅频和相频函数分别为

$$|G_k(j\omega_\omega)| = \frac{\sqrt{(0.632 + 0.104\omega_\omega^2)^2 + (0.528\omega_\omega)^2}}{\omega_\omega \sqrt{1.264^2 + (2.736\omega_\omega)^2}}$$

$$\arg G_k(j\omega_\omega) = \arctan \frac{-0.528\omega_\omega}{0.632 + 0.104\omega_\omega^2} - 90^\circ - \arctan \frac{2.736\omega_\omega}{1.264}$$

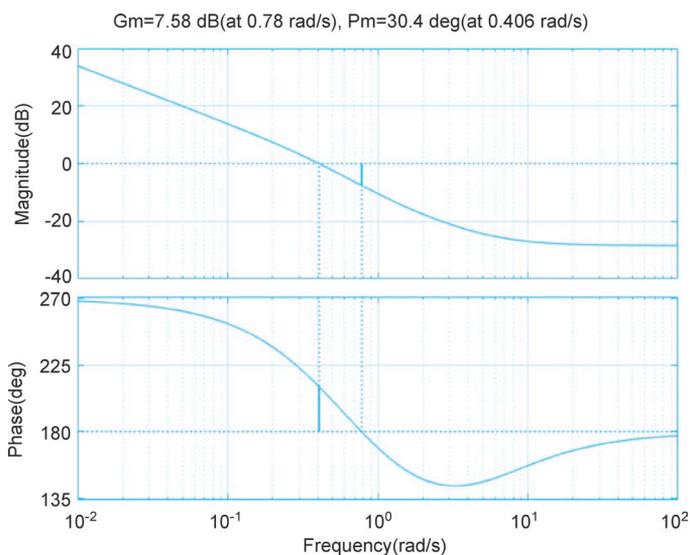
波特图如图 3-14 所示。

2. 奈奎斯特图

同样可以用连续系统的绘制方法绘制 ω 域上的奈奎斯特图。

例 3-11 电动机直流调速系统,当采样周期 $T = 1\text{s}$ 时,其开环脉冲传递函数为

$$G(z) = 10 \cdot K \cdot \frac{0.368z + 0.264}{(z-1)(z-0.368)}$$

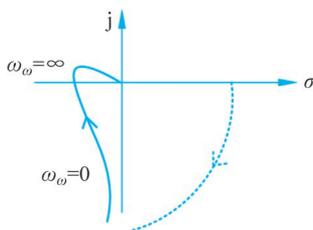
图 3-14 ω 域上的波特图

绘制其奈奎斯特图,并求系统稳定的 K 值范围。

解: 由双线性变换得

$$G_k(j\omega_\omega) = 10 \cdot K \cdot \frac{0.632 - 0.528j\omega_\omega + 0.104\omega_\omega^2}{j\omega_\omega(1.264 + 2.736j\omega_\omega)}$$

ω 域上的奈奎斯特图如图 3-15 所示。

图 3-15 ω 域上的奈奎斯特图

由图 3-15 可见,当

$$G_k(j\omega_\omega) = 10 \cdot K \cdot \frac{0.632 - 0.528j\omega_\omega + 0.104\omega_\omega^2}{j\omega_\omega(1.264 + 2.736j\omega_\omega)} = -1$$

时,系统临界稳定,此时 $K=0.24$ 为系统稳定的临界 K 值。该结论与根轨迹法及时域法得到的结果一致。

3.6 本章小结

本章主要对计算机控制系统的性能进行分析,包括系统的稳定性分析、稳态性能分析和动态性能分析。

对计算机控制系统稳定性可以使用朱利判据和劳斯判据进行判断,前者可直接在 z

域使用,后者需要使用双线性变换变换到 ω 域进行。

在对计算机控制系统的性能分析中,主要讨论了闭环极点对系统动态性能的影响及根轨迹法和频率响应法在计算机控制系统中的应用,其中根轨迹法可以直接应用于 z 域,而频率响应法则应通过双线性变换到 ω 域进行。

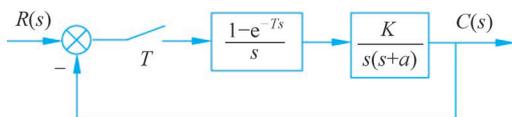
为了分析计算机控制系统的稳态性能,定义了系统的静态误差系数及稳态误差,应用静态误差系数,根据系统结构和输入信号可以很方便地求出系统的稳态误差。

习题

1. 离散系统的特征方程如下,用朱利判据判断系统的稳定性。

- (1) $z^2 - 1.2z + 0.3 = 0$ (2) $z^2 - 1.6z + 1 = 0$
 (3) $z^3 - 2.2z^2 + 1.55z - 0.35 = 0$ (4) $z^3 - 1.9z^2 + 1.4z - 0.45 = 0$

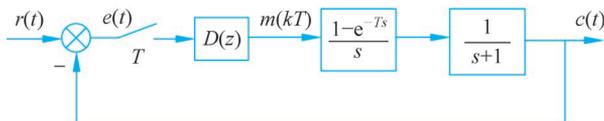
2. 系统如图所示,其中 $T=1s, a=2$,应用劳斯判据求使系统稳定的临界 K 值。



习题 2 图

3. 系统如图所示,其中 $T=1s, D(z)=K, K>0$ 。

- (1) 求使系统稳定的 K 值范围。
 (2) 若 $T=0.1s$,再求使系统稳定的 K 值范围。

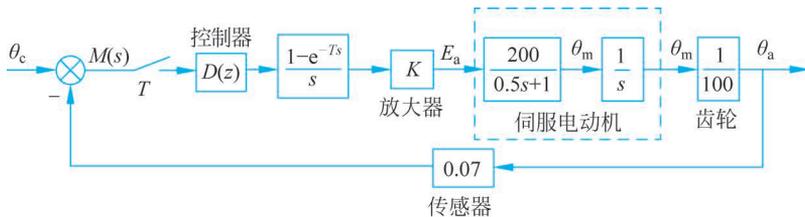


习题 3 图

4. 机器人臂关节控制系统如图所示,若 $T=0.1s, D(z)=1$,已知

$$\mathcal{Z} \left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{4}{s(s+2)} \right] = \frac{0.01873z + 0.0175}{(z-1)(z-0.8187)}$$

用劳斯判据和朱利判据判断 K 的稳定域。

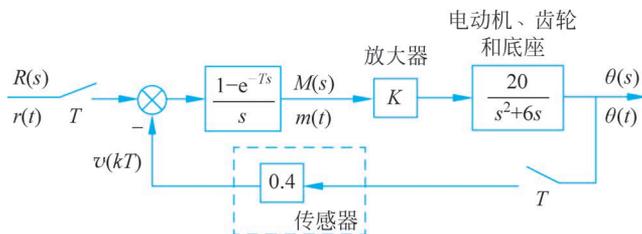


习题 4 图

5. 天线偏转角控制系统如图所示,其中 $\theta(t)$ 是偏转角,角度测量环节的输出 $v(kT) = 0.4\theta(kT), v(t)$ 为电压, $T=0.05s$,已知

$$\mathcal{Z} \left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{20}{s(s+6)} \right] = \frac{0.02268z + 0.0205}{(z-1)(z-0.7408)}$$

用劳斯判据和朱利判据判断 K 的稳定域。

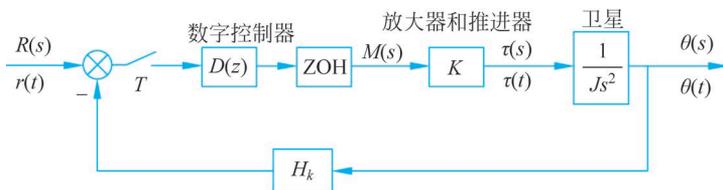


习题 5 图

6. 卫星方位角控制系统如图所示, $D(z)=1, T=0.1\text{s}, J=0.1, H_k=0.02$, 已知

$$\mathcal{Z} \left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{10}{s^2} \right] = \frac{0.05(z+1)}{(z-1)^2}$$

用劳斯判据和朱利判据判断 K 的稳定域。

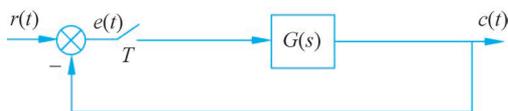


习题 6 图

7. 已知采样系统如图所示, $T=2\text{s}$, 已知

$$G(z) = \frac{K(z+0.8)}{(z-1)(z-0.6)}$$

用劳斯判据和朱利判据判断 K 的稳定域。

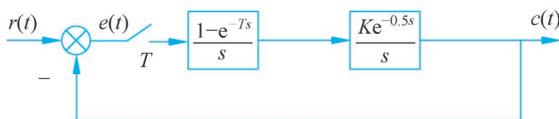


习题 7 图

8. 已知采样系统如图所示, $T=0.25\text{s}$ 。

(1) 求使系统稳定的 K 值范围。

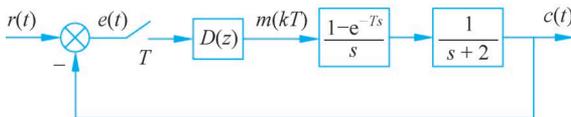
(2) 当 $r(t)=2+t$ 时, 欲使稳态误差小于 0.1, 试求 K 值。



习题 8 图

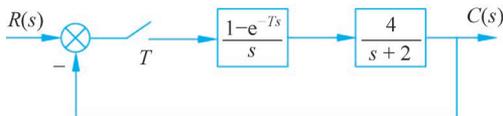
9. 系统如图所示, 其中 $T=1\text{s}, D(z)$ 的差分方程为 $m(kT) = Ke(kT), K > 0$, 确定

系统稳定 K 的取值范围,若稳定,求系统对于单位阶跃输入信号的稳态误差。



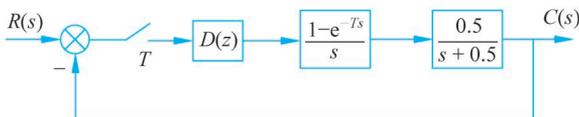
习题 9 图

10. 求如图所示系统对于单位阶跃输入信号的响应,设 $T=0.1\text{s}$ 。



习题 10 图

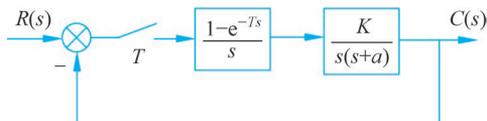
11. 如图所示系统。



习题 11 图

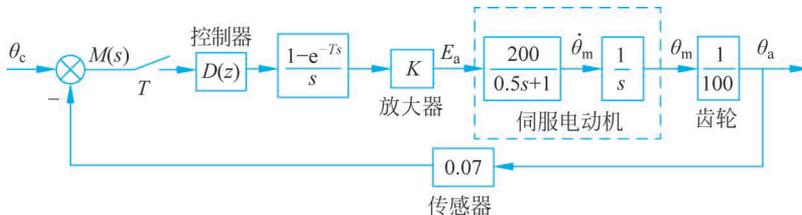
- (1) 设 $T=0.4\text{s}$, $D(z)=1$, 求系统对于单位阶跃输入信号的输出响应。
 - (2) 若系统为连续系统,即图中的采样开关, $D(z)$ 及零阶保持器均不存在,求系统对于单位阶跃输入信号的输出响应。
 - (3) 对比连续系统及离散系统在 t 为 2s 、 4s 、 6s 、 8s 、 10s 时输出响应的数值,并分别求系统的调节时间(2%的误差带)。
 - (4) 若 $T=2\text{s}$, $D(z)=1$, 重新回答上述问题。
12. 系统如图所示。

- (1) 设 $T=1\text{s}$, $K=1$, $a=2$, 求系统的单位阶跃响应。
- (2) 设 $T=1\text{s}$, $a=1$, 求使系统稳定的临界 K 值。



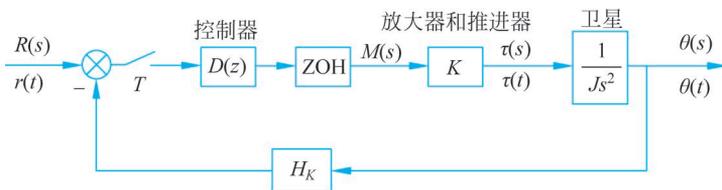
习题 12 图

13. 机器人臂关节控制系统如图所示, $D(z)=1$ 。



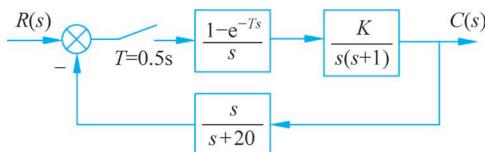
习题 13 图

- (1) 若 $K=10, T=0.1s$, 输入为 20 倍的单位阶跃信号, 求系统的输出 $\theta_a(z)$;
 (2) 判断系统的稳定性, 若稳定, 求其终值 $\theta_a(\infty)$ 。
 14. 卫星方位角控制系统如图所示, $D(z)=1, T=1s, K=2, J=0.2, H_K=0.04$ 。



习题 14 图

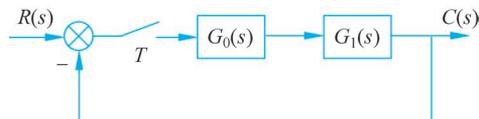
- (1) 求系统对于单位阶跃信号的输出响应 $\theta(z)$ 。
 (2) 判断系统的稳定性, 若稳定, 求其终值 $\theta(\infty)$ 。
 15. 绘出如图所示系统的 z 域根轨迹, 并确定使系统临界稳定的增益 K 值。



习题 15 图

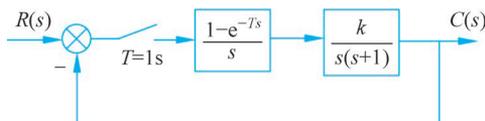
16. 如图所示闭环采样系统, 其中 $G_0(s)$ 为零阶保持器, 想要获得输出脉冲幅值为一个衰减振荡响应, 对 K 有什么要求, 假定

$$G_0 G_1(z) = \frac{K(z + 0.71)}{(z - 1)(z - 0.37)} \quad (T = 1s)$$



习题 16 图

17. 求如图所示系统的开环频率特性(波特图)。



习题 17 图