第3章 连续时间信号与系统的频域分析

CHAPTER 3

教学目标：

(1) 培养学生的科学精神、团队合作精神、工匠精神、规矩意识和系统观。

(2) 理解周期信号的频谱、频谱宽度和频谱图，掌握周期信号频谱的特点。

(3) 理解非周期信号的频谱、频谱宽度和频谱图，掌握信号的正、反傅里叶变换。

(4) 理解非周期信号激励下系统的零状态响应与全响应。

(5) 掌握周期信号的傅里叶变换及周期信号与非周期信号傅里叶变换之间的关系。

(6) 掌握频域系统函数的定义、物理意义、求法与应用。

(7) 掌握理想低通滤波器的定义、传输特性。

(8) 了解信号无失真传输的条件。

(9) 掌握采样信号的频谱及其求解。

(10) 掌握采样定理。

(11) 了解调制与解调的基本原理与应用。

(12) 培养学生具备数学概念、物理概念与工程概念相统一的意识。

学习重点：

(1) 周期信号的频谱分析及其频谱的特点。

(2) 傅里叶变换的定义、性质及其傅里叶变换的求解。

(3) 周期信号的傅里叶变换，频域系统函数的定义与求解。

(4) 非周期信号激励下系统的零状态响应的求解。

(5) 理想低通滤波器的定义及其传输特性。

(6) 信号无失真传输的条件，采样信号和采样定理。

(7) 调制与解调的基本原理与应用。

教学难点：

(1) 傅里叶级数系数的计算。

(2) 傅里叶变换的性质。

(3) 傅里叶变换的频谱分析应用。

(4) 系统函数的频域分析。

在第 2 章中讨论了连续时间系统的时域分析，以冲激函数为基本信号，任意输入信号都可分解为一系列冲激函数，而系统的零状态响应是输入信号与系统冲激响应的卷积。本章

将以正弦函数(正弦和余弦函数可统称为正弦函数)或虚指数函数 $e^{j\omega t}$ 为基本信号,将任意信号表示为不同频率的正弦函数或虚指数函数之和(对于周期信号)或积分(对于非周期信号)。把信号表示为不同频率正弦分量或虚指数分量的和称为信号的频域分析,也称信号的谱分析。用频谱分析的观点来分析系统,称为系统的频域分析。

3.1 周期信号的傅里叶级数分析

【科学家故事之二】　傅里叶

具体内容请扫描二维码查看。

傅里叶

周期信号是定义在$(-\infty,+\infty)$区间,每隔一定时间 T,按相同规律重复变化的信号,如图 3-1-1 所示。周期信号可以表示为

$$f(t)=f(t+mT) \tag{3-1-1}$$

式中,m 为任意整数。时间 T 称为该信号的重复周期,简称周期。周期的倒数称为该信号的频率。

周期信号 $f(t)$在区间(t_0,t_0+T)可以展开成在完备正交信号空间中的无穷级数。如果完备的正交函数集是三角函数集或指数函数集,那么,周期信号所展开的无穷级数就分别称为“三角形傅里叶级数”或“指数形傅里叶级数”,统称傅里叶级数。

需要指出,只有当周期信号满足狄利克雷条件时,才能展开成傅里叶级数。通常遇到的周期信号都满足该条件,以后不再特别说明。

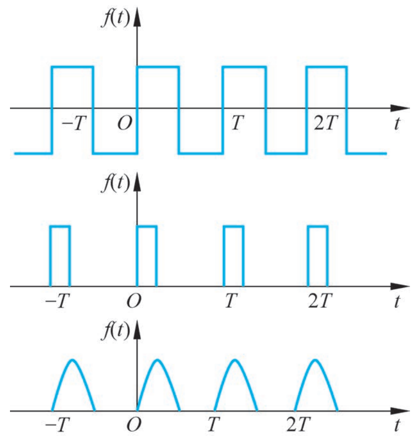

图 3-1-1　周期信号

3.1.1 周期信号的分解

【科学家故事之三】　欧拉

具体内容请扫描二维码查看。

欧拉

1. 信号分解为正交函数

信号分解为正交函数的原理与向量分解为正交向量的概念相似。例如,在平面上的向量 $\boldsymbol{A}$ 在直角坐标中可以分解为 x 方向分量和 y 方向分量,如图 3-1-2(a)所示。如令$\boldsymbol{v}_x$、$\boldsymbol{v}_y$,为各相应方向的正交单位向量,则向量 $\boldsymbol{A}$ 可写为

$$\boldsymbol{A}=C_1\boldsymbol{v}_x+C_2\boldsymbol{v}_y \tag{3-1-2}$$

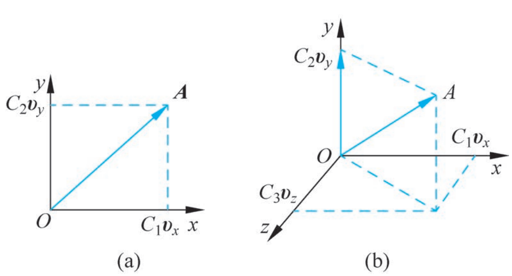

图 3-1-2　向量分解

为了便于研究向量分解,将相互正交的单位向量组成一个二维“正交向量集”。这样,在此平面上的任意向量都可用正交向量集的分量组合表示。

对于一个三维空间的向量 $\boldsymbol{A}$,可以用一个三维正交向量集$\{\boldsymbol{v}_x,\boldsymbol{v}_y,\boldsymbol{v}_z\}$的分量组合表示,如图 3-1-2(b)所示,它可写为

$$\boldsymbol{A}=C_1\boldsymbol{v}_x+C_2\boldsymbol{v}_y+C_3\boldsymbol{v}_z \tag{3-1-3}$$

空间向量正交分解的概念可以推广到信号空间，在信号空间找到若干相互正交的信号作为基本信号，使得信号空间中任一信号均可表示为它们的线性组合。

如有定义在(t_1,t_2)区间的两个函数$\varphi_1(t)$和$\varphi_2(t)$，若满足

$$\int_{t_1}^{t_2}\varphi_1(t)\varphi_2(t)\mathrm{d}t=0 \tag{3-1-4}$$

则称$\varphi_1(t)$和$\varphi_2(t)$在区间(t_1,t_2)内正交。

如有n个函数$\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t)$构成一个函数集，当这些函数在区间$(t_1,t_2)$内满足

$$\int_{t_1}^{t_2}\varphi_i(t)\varphi_j(t)=\begin{cases}0, & i\neq j\\ K_i\neq 0, & i=j\end{cases} \tag{3-1-5}$$

式中，K_i为常数，则称此函数集为在区间(t_1,t_2)的正交函数集。在区间(t_1,t_2)内相互正交的n个函数构成正交信号空间。

如果在正交函数集$\{\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t)\}$之外，不存在函数$\psi(t)$满足等式

$$\int_{t_1}^{t_2}\psi(t)\varphi_i(t)\mathrm{d}t=0,\quad i=1,2,3,\cdots,n \tag{3-1-6}$$

则此函数集称为完备正交函数集。也就是说，如能找到一个函数$\psi(t)$，使得式(3-1-6)成立，即$\psi(t)$与函数集$\{\varphi_i(t)\}$的每个函数都正交，那么它本身就应属于此函数集。显然，不包含$\psi(t)$的集是不完备的。

例如，三角函数集$\{1,\cos(\Omega t),\cdots,\cos(m\Omega t),\cdots,\sin(\Omega t),\cdots,\sin(n\Omega t),\cdots\}$在区间$(t_0,t_0+T)\left(T=\dfrac{2\pi}{\Omega}\right)$组成正交函数集，而且是完备的正交函数集。这是因为

$$\int_{t_0}^{t_0+T}\cos(m\Omega t)\cos(n\Omega t)\mathrm{d}t=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \dfrac{T}{2}, & m=n\neq 0\\ T, & m=n=0\end{cases}$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T}\sin(m\Omega t)\sin(n\Omega t)\mathrm{d}t=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \dfrac{T}{2}, & m=n\neq 0\end{cases}$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T}\sin(m\Omega t)\cos(n\Omega t)\mathrm{d}t=0,\quad \text{对于所有的 } m \text{ 和 } n \tag{3-1-7}$$

集合$\{\sin(\Omega t),\sin(2\Omega t),\cdots,\sin(n\Omega t),\cdots\}$在区间$(t_0,t_0+T)$内也是正交函数集，但它是不完备的，因为还有许多函数，如$\cos(\Omega t),\cos(2\Omega t),\cdots$，也与此集合中的函数正交。

如果是复函数集，则正交的定义如下。

若复函数集$\{\varphi_i(t)\}(i=1,2,\cdots,n)$在区间$(t_1,t_2)$满足

$$\int_{t_1}^{t_2}\varphi_i(t)\varphi_j^*(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}0, & i\neq j\\ K_i\neq 0, & i=j\end{cases} \tag{3-1-8}$$

则称此复函数集为正交函数集。式中，$\varphi_j^*(t)$为函数$\varphi_j(t)$的共轭复函数。

复函数集$\{\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega t}\}(n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$在区间$(t_0,t_0+T)$内是完备的正交函数集，式中，$T=\dfrac{2\pi}{\Omega}$。它在区间$(t_0,t_0+T)$内满足

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \mathrm{e}^{\mathrm{j}m\Omega t}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega t})^* \mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_0+T} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(m-n)\Omega t} \mathrm{d}t = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ T, & m = n \end{cases} \tag{3-1-9}$$

设有 n 个函数 $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \cdots, \varphi_n(t)$ 在区间 (t_1, t_2) 内构成一个正交函数空间。将任一函数 $f(t)$ 用这 n 个正交函数的线性组合来近似，可表示为

$$f(t) \approx C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t) + \cdots + C_n\varphi_n(t) = \sum_{j=1}^{n} C_j\varphi_j(t) \tag{3-1-10}$$

这里的问题是，如何选择 C_j 才能得到最佳近似。显然，应选取各系数 C_j 使实际函数与近似函数之间误差在区间 (t_1, t_2) 内为最小。这里“误差最小”不是指平均误差最小，因为在平均误差很小甚至等于零的情况下，也可能有较大的正误差和负误差在平均过程中相互抵消，以致不能正确反映两函数的近似程度。通常选择误差的均方值（或称方均值）最小，这时，可以认为已经得到了最好的近似。误差的均方值也称为均方误差，用符号 $\overline{\varepsilon^2}$ 表示。

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} \left[f(t) - \sum_{j=1}^{n} C_j\varphi_j(t)\right]^2 \mathrm{d}t \tag{3-1-11}$$

在 $j = 1, 2, \cdots, i, \cdots, n$ 时，为求得使均方误差最小的第 i 个系数 C_i，必须使

$$\frac{\partial \overline{\varepsilon^2}}{\partial C_i} = 0$$

即

$$\frac{\partial}{\partial C_i}\left\{\int_{t_1}^{t_2} \left[f(t) - \sum_{j=1}^{n} C_j\varphi_j(t)\right]^2 \mathrm{d}t\right\} = 0 \tag{3-1-12}$$

展开上式的被积函数，注意到由序号不同的正交函数相乘的各项，其积分均为零，而且所有不包含 C_i 的各项对 C_i 求导也等于零。这样，式(3-1-12)中只有两项不为零，它可以写为

$$\frac{\partial}{\partial C_i}\left\{\int_{t_1}^{t_2} [-2C_i f(t)\varphi_i(t) + C_i^2\varphi_i^2(t)]\mathrm{d}t\right\} = 0$$

交换微分与积分次序，得

$$-2\int_{t_1}^{t_2} f(t)\varphi_i(t)\mathrm{d}t + 2C_i\int_{t_1}^{t_2} \varphi_i^2(t)\mathrm{d}t = 0$$

于是，可求得

$$C_i = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)\varphi_i(t)\mathrm{d}t}{\int_{t_1}^{t_2} \varphi_i^2(t)\mathrm{d}t} = \frac{1}{K_i}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\varphi_i(t)\mathrm{d}t \tag{3-1-13}$$

式中，

$$K_i = \int_{t_1}^{t_2} \varphi_i^2(t)\mathrm{d}t \tag{3-1-14}$$

这就是在满足最小均方误差的条件下，式(3-1-10)中系数 C_i 的表示式。此时，$f(t)$ 能获得最佳近似。

当按式(3-1-13)选取系数 C_i 时，将 C_i 代入式(3-1-10)，可以求得最佳近似条件下的均方误差为

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} \left[f(t) - \sum_{j=1}^{n} C_j\varphi_j(t)\right]^2 \mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{t_2-t_1}\left[\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)\mathrm{d}t+\sum_{j=1}^{n} C_j^2\int_{t_1}^{t_2}\varphi_j^2(t)\mathrm{d}t-2\sum_{j=1}^{n} C_j\int_{t_1}^{t_2} f(t)\varphi_j(t)\mathrm{d}t\right]$$

考虑到 $K_j=\int_{t_1}^{t_2}\varphi_j^2(t)\mathrm{d}t, C_j=\frac{1}{K_j}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\varphi_j(t)\mathrm{d}t$，得

$$\begin{aligned}\overline{\varepsilon^2}&=\frac{1}{t_2-t_1}\left[\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)\mathrm{d}t+\sum_{j=1}^{n} C_j^2K_j-2\sum_{j=1}^{n} C_j^2K_j\right]\\&=\frac{1}{t_2-t_1}\left[\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)\mathrm{d}t-\sum_{j=1}^{n} C_j^2K_j\right]\end{aligned}\tag{3-1-15}$$

利用式(3-1-15)可直接求得在给定项数 n 的条件下的最小均方误差。

由均方误差的定义式(3-1-11)可见，由于函数平方后再积分，因而 $\overline{\varepsilon^2}$ 不可能为负，即恒有 $\overline{\varepsilon^2}\geqslant 0$。由式(3-1-15)可见，在用正交函数去近似(或逼真)$f(t)$时，所取的项数越多，即 n 越大，则均方误差越小。当 $n\to\infty$时，$\overline{\varepsilon^2}=0$。由式(3-1-15)可得，如 $\overline{\varepsilon^2}=0$，则有

$$\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)\mathrm{d}t=\sum_{j=1}^{+\infty} C_j^2K_j\tag{3-1-16}$$

式(3-1-16)称为帕斯瓦尔(Parseval)方程。

如果信号 $f(t)$是电压或电流，那么，式(3-1-16)等号左端就是在(t_1,t_2)区间信号的能量，等号右端是在(t_1,t_2)区间信号各正交分量的能量之和。式(3-1-16)表明，在区间(t_1,t_2)信号所含能量恒等于此信号在完备正交函数集中各正交分量能量的总和。与此相反，如果信号在正交函数集中的各正交分量能量总和小于信号本身的能量，这时式(3-1-16)不成立，则该正交函数集是不完备的。

这样，当 $n\to+\infty$时，均方误差 $\overline{\varepsilon^2}=0$，式(3-1-10)可写为

$$f(t)=\sum_{j=1}^{+\infty} C_j\varphi_j(t)\tag{3-1-17}$$

即函数 $f(t)$在区间(t_1,t_2)内可分解为无穷多项正交函数之和。

2. 周期信号的分解

设有周期信号 $f(t)$，它的周期是 T，角频率 $\Omega=2\pi F=\frac{2\pi}{T}$，它可以分解为

$$\begin{aligned}f(t)&=\frac{a_0}{2}+a_1\cos(\Omega t)+a_2\cos(2\Omega t)+\cdots+b_1\sin(\Omega t)+b_2\sin(2\Omega t)+\cdots\\&=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(n\Omega t)+\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\sin(n\Omega t)\end{aligned}\tag{3-1-18}$$

式(3-1-18)中的系数 a_n 和 b_n 称为傅里叶系数。为简便，式(3-1-7)的积分区间(t_0,t_0+T)取为$\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right)$或$(0,T)$。考虑到正、余弦函数的正交条件，由式(3-1-7)可得傅里叶系数

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\Omega t)\mathrm{d}t,\quad n=0,1,2,\cdots\tag{3-1-19}$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\Omega t)\mathrm{d}t,\quad n=1,2,\cdots\tag{3-1-20}$$

式中，T 为函数 $f(t)$的周期，$\Omega=\dfrac{2\pi}{T}$为角频率。由式(3-1-19)和式(3-1-20)可见，傅里叶系数 a_n 和 b_n 都是 n(或 $n\Omega$)的函数，其中 a_n 是 n 的偶函数，即有 $a_{-n}=a_n$；而 b_n 是 n(或 $n\Omega$)的奇函数，即有 $b_{-n}=-b_n$。

将式(3-1-18)中同频率项合并，可写成如下形式：

$$\begin{aligned} f(t)&=\frac{A_0}{2}+A_1\cos(\Omega t+\varphi_1)+A_2\cos(2\Omega t+\varphi_2)+\cdots \\ &=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}A_n\cos(n\Omega t+\varphi_n) \end{aligned} \tag{3-1-21}$$

式中，

$$\begin{aligned} &A_0=a_0 \\ &A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2},\quad n=1,2,\cdots \\ &\varphi_n=-\arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right),\quad n=1,2,\cdots \end{aligned} \tag{3-1-22}$$

如将式(3-1-21)的形式化为式(3-1-18)的形式，其系数之间的关系为

$$\begin{aligned} &a_0=A_0 \\ &a_n=A_n\cos\varphi_n,\quad n=1,2,\cdots \\ &b_n=-A_n\sin\varphi_n,\quad n=1,2,\cdots \end{aligned} \tag{3-1-23}$$

由式(3-1-22)可见，A_n 是 n(或 $n\Omega$)的偶函数，即有 $A_{-n}=A_n$；而 φ_n 是 n(或 $n\Omega$)的奇函数，即有 $\varphi_{-n}=-\varphi_n$。

式(3-1-21)表明，任何满足狄利克雷条件的周期函数可分解为直流和许多余弦(或正弦)分量。其中，第一项$\dfrac{A_0}{2}$是常数项，是周期信号中所包含的直流分量；第二项 $A_1\cos(\Omega t+\varphi_1)$称为基波或一次谐波，其角频率与原周期信号相同，$A_1$ 是基波振幅，φ_1 是基波初始相角；第三项 $A_2\cos(2\Omega t+\varphi_2)$称为二次谐波，其频率是基波频率的 2 倍，$A_2$ 是二次谐波振幅，φ_2 是其初始相角。以此类推，还有三次、四次等谐波。因此，式(3-1-21)表明，周期信号可以分解为各次谐波分量之和。

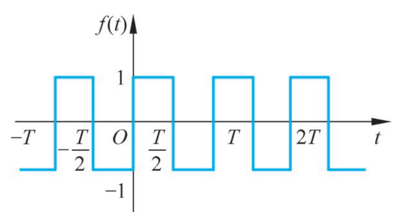

图 3-1-3　例 3-1 图

例 3-1　将图 3-1-3 所示的方波信号 $f(t)$展开为傅里叶级数。

解：由式(3-1-19)和式(3-1-20)，可得

$$\begin{aligned} a_n&=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos(n\Omega t)\mathrm{d}t \\ &=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0}(-1)\cos(n\Omega t)\mathrm{d}t+\frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}}(1)\cos(n\Omega t)\mathrm{d}t \\ &=\frac{2}{T}\,\frac{1}{n\Omega}[-\sin(n\Omega t)]\Big|_{-\frac{T}{2}}^{0}+\frac{2}{T}\,\frac{1}{n\Omega}[\sin(n\Omega t)]\Big|_{0}^{\frac{T}{2}} \end{aligned}$$

考虑到 $\Omega=\dfrac{2\pi}{T}$，可得

$$a_n=0$$

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0}-\sin(n\Omega t)\mathrm{d}t+\frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}}\sin(n\Omega t)\mathrm{d}t\\&=\frac{2}{T}\,\frac{1}{n\Omega}\cos(n\Omega t)\Big|_{-\frac{T}{2}}^{0}+\frac{2}{T}\,\frac{1}{n\Omega}[-\cos(n\Omega t)]\Big|_{0}^{\frac{T}{2}}\\&=\frac{2}{n\pi}[1-\cos(n\pi)]=\begin{cases}0, & n=2,4,6,\cdots\\ \dfrac{4}{n\pi}, & n=1,3,5,\cdots\end{cases}\end{aligned}$$

将它们代入式(3-1-18),得到如图3-1-3所示信号的傅里叶级数展开式为

$$f(t)=\frac{4}{\pi}\left[\sin(\Omega t)+\frac{1}{3}\sin(3\Omega t)+\frac{1}{5}\sin(5\Omega t)+\cdots+\frac{1}{n}\sin(n\Omega t)+\cdots\right],\quad n=1,3,5,\cdots \tag{3-1-24}$$

它只含有一次、三次、五次等奇次谐波分量。

这里顺便计算用有限项级数逼近 $f(t)$ 引起的均方误差。根据式(3-1-15),对于本例,考虑到 $t_2=\frac{T}{2}$,$t_1=-\frac{T}{2}$,$K_j=\frac{T}{2}$,均方误差为

$$\begin{aligned}\overline{\varepsilon^2}&=\frac{1}{T}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f^2(t)\mathrm{d}t-\sum_{j=1}^{n}b_j^2\,\frac{T}{2}\right]=\frac{1}{T}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\mathrm{d}t-\frac{T}{2}\sum_{j=1}^{n}b_j^2\right]\\&=1-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}b_j^2\end{aligned} \tag{3-1-25}$$

当只取基波时,

$$\overline{\varepsilon_1^2}=1-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{\pi}\right)^2=0.189$$

当取基波和三次谐波时,

$$\overline{\varepsilon_2^2}=1-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{\pi}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3\pi}\right)^2=0.0994$$

当取一次、三次、五次谐波时,

$$\overline{\varepsilon_2^2}=1-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{\pi}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3\pi}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5\pi}\right)^2=0.0669$$

当取一次、三次、五次、七次谐波时,

$$\overline{\varepsilon_2^2}=1-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{\pi}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3\pi}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5\pi}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{7\pi}\right)^2=0.0504$$

图3-1-4画出了一个周期的方波组成情况,其中图3-1-4(a)为基波,图3-1-4(b)为基波+三次谐波,图3-1-4(c)为基波+三次谐波+五次谐波,图3-1-4(d)为基波+三次谐波+五次谐波+七次谐波。由图3-1-4可见,当它包含的谐波分量越多时,波形越接近于原来的方波信号 $f(t)$(如图3-1-4中的虚线所示),其均方误差越小。可以看出,频率较低的谐波其振幅较大,它们组成方波的主体,而频率较高的高次谐波振幅较小,它们主要影响波形的细节。波形中所含的高次谐波越多,波形的边缘越陡峭。

由图3-1-4还可以看到,合成波形所包含的谐波分量越多时,除间断点附近外,它越接近于原方波信号。在间断点附近,随着所含谐波次数的增高,合成波形的尖峰越接近间断

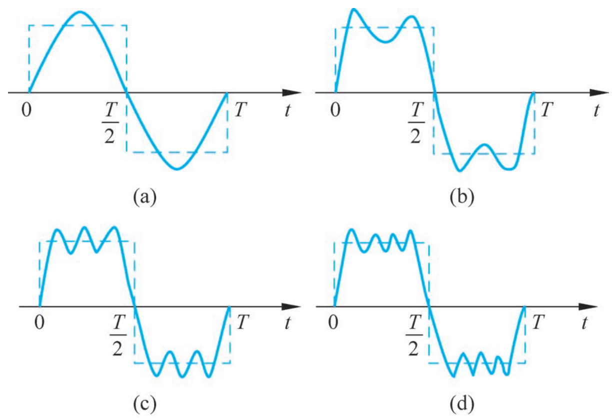

图 3-1-4　方波的组成

点，但尖峰幅度并未明显减小。可以证明，即使合成波形所含谐波次数 $n\to+\infty$ 时，在间断点处仍有约 9％的偏差，这种现象称为吉布斯(Gibbs)现象。在傅里叶级数的项数取得很大时，间断点处尖峰下的面积非常小以至于趋于零，因而在均方的意义上合成波形同原方波的真值之间没有区别。

3.1.2　奇、偶函数的傅里叶级数

视频讲解

若给定的函数 $f(t)$ 具有某些特点，那么，有些傅里叶系数将等于零，从而使傅里叶系数的计算较为简便。

1. $f(t)$ 为偶函数

若函数 $f(t)$ 是时间 t 的偶函数，即 $f(-t)=f(t)$，则波形对称于纵坐标轴，如图 3-1-5 所示。

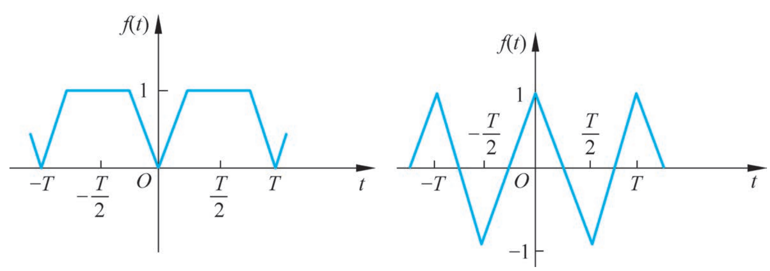

图 3-1-5　偶函数

当 $f(t)$ 是 t 的偶函数时，式(3-1-19)、式(3-1-20)中被积函数 $f(t)\cos(n\Omega t)$ 是 t 的偶函数，而 $f(t)\sin(n\Omega t)$ 是 t 的奇函数。当被积函数为偶函数时，在对称区间 $\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right)$ 的积分等于其半区间 $\left(0,\frac{T}{2}\right)$ 积分的 2 倍；而当被积函数为奇函数时，在对称区间的积分为零，故由式(3-1-19)、式(3-1-20)，得

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\Omega t)\mathrm{d}t, \\ b_n=0, \end{cases} \quad n=0,1,2,\cdots \tag{3-1-26}$$

进而由式(3-1-22),有

$$\begin{cases} A_n = |a_n| \\ \varphi_n = m\pi, \quad m \text{ 为整数} \end{cases} \quad n=0,1,2,\cdots \tag{3-1-27}$$

2. $f(t)$为奇函数

若函数 $f(t)$是时间 t 的奇函数,即 $f(-t)=-f(t)$,则波形对称于原点,如图 3-1-6所示。

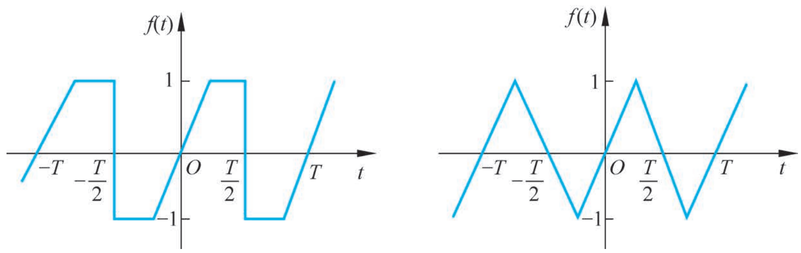

图 3-1-6 奇函数

这时有

$$\begin{cases} a_n = 0 \\ b_n = \dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\Omega t)\mathrm{d}t \end{cases} \quad n=0,1,2,\cdots \tag{3-1-28}$$

进而有

$$\begin{cases} A_n = |b_n| \\ \varphi_n = \dfrac{(2m+1)\pi}{2}, m \text{ 为整数} \end{cases} \quad n=0,1,2,\cdots \tag{3-1-29}$$

实际上,任意函数 $f(t)$都可分解为奇函数和偶函数两部分,即

$$f(t)=f_{\mathrm{od}}(t)+f_{\mathrm{ev}}(t)$$

式中,$f_{\mathrm{od}}(t)$表示奇函数部分,$f_{\mathrm{ev}}(t)$表示偶函数部分。由于

$$f(-t)=f_{\mathrm{od}}(-t)+f_{\mathrm{ev}}(-t)=-f_{\mathrm{od}}(t)+f_{\mathrm{ev}}(t)$$

所以有

$$f_{\mathrm{od}}(t)=\frac{f(t)-f(-t)}{2} \quad f_{\mathrm{ev}}(t)=\frac{f(t)+f(-t)}{2} \tag{3-1-30}$$

需要注意,某函数是否为奇(或偶)函数不仅与周期函数 $f(t)$的波形有关,而且与时间坐标原点的选择有关。

3.1.3 傅里叶级数的指数形式

三角函数形式的傅里叶级数含义比较明确,但运算不方便,因而经常采用指数形式的傅里叶级数。

由于

$$\cos x=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}x}}{2}$$

所以式(3-1-21)可写为

$$f(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{A_n}{2}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}(n\Omega t+\varphi_n)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(n\Omega t+\varphi_n)}]$$

$$=\frac{A_0}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}A_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_n}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega t}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}A_n\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi_n}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\Omega t}$$

将上式第三项中的 n 用 $-n$ 代换，并考虑到 A_n 是 n 的偶函数，即 $A_{-n}=A_n$；φ_n 是 n 的奇函数，即 $\varphi_{-n}=-\varphi_n$，则上式可写为

$$f(t)=\frac{A_0}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}A_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_n}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega t}+\frac{1}{2}\sum_{n=-1}^{-\infty}A_{-n}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi_{-n}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega t}$$

$$=\frac{A_0}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}A_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_n}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega t}+\frac{1}{2}\sum_{n=-1}^{-\infty}A_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_n}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega t}$$

如将上式中的 A_0 写成 $A_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_n}\mathrm{e}^{\mathrm{j}0\Omega t}$（其中，$\varphi_n=0$），则上式可以写为

$$f(t)=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}A_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_n}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega t}\tag{3-1-31}$$

令复数量 $\frac{1}{2}A_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_n}=|F_n|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_n}=F_n$，称其为复傅里叶系数，简称傅里叶系数，其模为 $|F_n|$，相角为 φ_n，则得傅里叶级数的指数形式为

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega t}\tag{3-1-32}$$

根据式(3-1-23)，傅里叶系数

$$F_n=\frac{1}{2}A_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_n}=\frac{1}{2}[A_n\cos\varphi_n+\mathrm{j}A_n\sin\varphi_n]=\frac{1}{2}(a_n-\mathrm{j}b_n)\tag{3-1-33}$$

将式(3-1-19)和式(3-1-20)代入式(3-1-33)，得

$$F_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos(n\Omega t)\mathrm{d}t-\mathrm{j}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\sin(n\Omega t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)[\cos(n\Omega t)\mathrm{d}t-\mathrm{j}\sin(n\Omega t)]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\Omega t}\mathrm{d}t,n=0,\pm1,\pm2,\cdots\tag{3-1-34}$$

这就是求指数形式傅里叶级数的复系数 F_n 的公式。

式(3-1-32)表明，任意周期信号 $f(t)$ 可分解为许多不同频率的虚指数信号($\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega t}$)之和，其各分量的复数幅度(或相量)为 F_n。

3.1.4　典型周期信号的傅里叶级数

先讨论一些常用周期信号的傅里叶级数。

1. 周期矩形脉冲信号

设周期矩形脉冲信号 $f(t)$ 的脉冲宽度为 τ，脉冲幅度为 1，重复周期为 T，如图 3-1-7 所示。

信号在一个周期内 $\left(-\frac{T}{2}\leqslant t\leqslant\frac{T}{2}\right)$ 的表示式为

$$f(t)=u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)$$

经计算，可以把周期矩形信号 $f(t)$ 展开成三角形式的傅里叶级数

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}[a_n\cos(n\Omega t)+b_n\sin(n\Omega t)]$$

可以求出各系数，其中直流分量

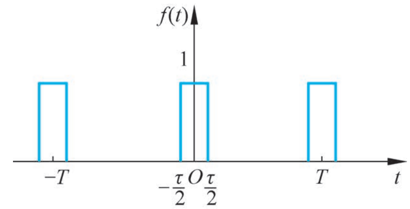

图 3-1-7　周期矩形信号的波形

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}\mathrm{d}t=\frac{\tau}{T} \tag{3-1-35}$$

余弦分量的幅度为

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos(n\Omega t)\mathrm{d}t=\frac{2}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}\cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)\mathrm{d}t=\frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right)$$

或写成

$$a_n=\frac{2\tau}{T}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right)=\frac{\tau\Omega}{\pi}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right) \tag{3-1-36}$$

其中，Sa 为采样函数，且

$$\mathrm{Sa}\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right)=\frac{\sin\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right)}{\frac{n\pi\tau}{T}}$$

由于 $f(t)$ 是偶函数，可得 $b_n=0$。这样，周期矩形信号的三角形式的傅里叶级数为

$$f(t)=\frac{\tau}{T}+\frac{2\tau}{T}\sum_{n=1}^{+\infty}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right)\cos(n\Omega t)$$

或写成

$$f(t)=\frac{\tau}{T}+\frac{\tau\Omega}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right)\cos(n\Omega t) \tag{3-1-37}$$

若将 $f(t)$ 展开成指数形式的傅里叶级数，可得

$$F_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\Omega t}\mathrm{d}t=\frac{\tau}{T}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right)$$

所以

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega t}=\frac{\tau}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega t} \tag{3-1-38}$$

对称方波信号如图 3-1-8 所示，对称方波信号是矩形的一种特殊情况，两者相比较，对称方波信号有以下两个特点。

(1) 它是正负交替的信号，其直流分量(a_0)等于零。

(2) 它的脉冲恰等于周期的一半，即 $\tau=\frac{T}{2}$。

这样，可以直接得到方波的傅里叶级数，即

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\left[\cos(\Omega t)-\frac{1}{3}\cos(3\Omega t)+\frac{1}{5}\cos(5\Omega t)-\cdots\right]$$

$$=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos(n\Omega t) \tag{3-1-39}$$

或写成

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\left[\cos(\Omega t)+\frac{1}{3}\cos(3\Omega t+\pi)+\frac{1}{5}\cos(5\Omega t)+\cdots\right]$$

其波形如图 3-1-8 所示。

对称方波的傅里叶级数只包含基波和奇次谐波，也称奇谐函数。

2. 周期锯齿脉冲信号

周期锯齿脉冲信号如图 3-1-9 所示，显然它是奇函数，因而 $a_n=0$，并可求出傅里叶级数的系数 b_n。这样，便可得到周期锯齿脉冲信号的傅里叶级数为

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\left[\sin(\Omega t)-\frac{1}{2}\sin(2\Omega t)+\frac{1}{3}\sin(3\Omega t)-\frac{1}{4}\sin(4\Omega t)+\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\sin(n\Omega t) \tag{3-1-40}$$

周期锯齿脉冲信号的频谱只包含正弦分量，谐波的幅度以 $\frac{1}{n}$ 的规律收敛。

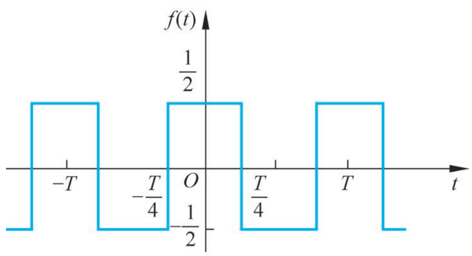

图 3-1-8　对称方波信号的波形

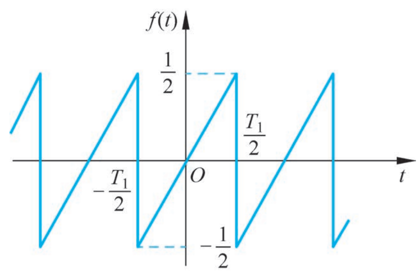

图 3-1-9　周期锯齿脉冲信号的波形

3. 周期三角脉冲信号

周期三角脉冲信号如图 3-1-10 所示，显然它是偶函数，因而 $b_n=0$，可以求出傅里叶级数的系数 a_n。这样，便可得到该信号的傅里叶级数为

$$f(t)=\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}\left[\cos(\Omega t)+\frac{1}{3^2}\cos(3\Omega t)+\frac{1}{5^2}\cos(5\Omega t)+\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos(n\Omega t) \tag{3-1-41}$$

周期三角脉冲的频谱只包含直流、基波和奇次波频率分量，谐波幅度以 $\frac{1}{n^2}$ 的规律收敛。

4. 周期半波余弦信号

周期半波余弦信号如图 3-1-11 所示。显然它是偶函数，因而 $b_n=0$，可以求出傅里叶级数的系数 a_n。这样便可得到该信号的傅里叶级数为

$$f(t)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\left[\cos(\Omega t)+\frac{4}{3\pi}\cos(2\Omega t)-\frac{4}{15\pi}\cos(4\Omega t)+\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n^2-1)}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos(n\Omega t) \tag{3-1-42}$$

其中，

$$\Omega=\frac{2\pi}{T}$$

周期半波余弦信号的频谱只含有直流、基波和偶次谐波分量。谐波的幅度以$\frac{1}{n^2}$的规律收敛。

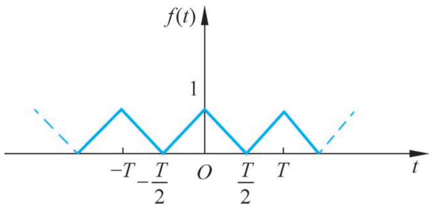

图 3-1-10　周期三角脉冲信号的波形

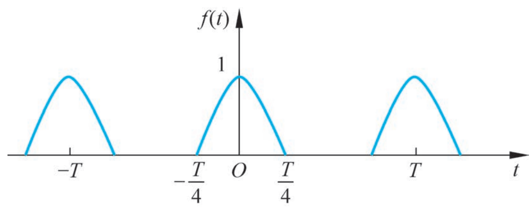

图 3-1-11　周期半波余弦信号的波形

5. 周期全波余弦信号

令余弦信号为

$$f_1(t)=\cos(\Omega t)$$

其中，

$$\Omega=\frac{2\pi}{T}$$

此时，全波余弦信号 $f(t)$为

$$f(t)=|f_1(t)|=|\cos(\Omega t)|$$

由图 3-1-12 可见，$f(t)$周期是 $f_1(t)$的一半。因为 $f(t)$是偶函数，所以 $b_n=0$，可以求出傅里叶级数的系数 $a_0\sim a_n$。这样，便可得到周期全波余弦信号的傅里叶级数为

$$\begin{aligned}f(t)&=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{3\pi}\cos(\Omega_1 t)-\frac{4}{15\pi}\cos(2\Omega_1 t)+\frac{4}{35\pi}\cos(3\Omega_1 t)-\cdots\\&=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{3\pi}\left[\frac{1}{3}\cos(2\Omega t)-\frac{1}{15\pi}\cos(4\Omega t)+\frac{1}{35\pi}\cos(6\Omega t)-\cdots\right]\\&=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(4n^2-1)}\cos(2n\Omega t)\end{aligned} \tag{3-1-43}$$

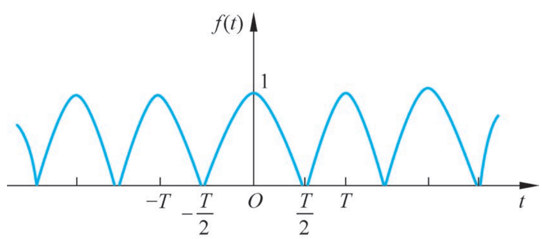

图 3-1-12　周期全波余弦信号的波形

可见，周期全波余弦信号的频谱包含直流分量及 Ω_1 的基波和各次谐波分量，或者说，只包含直流分量及 Ω 的偶次谐波分量。谐波幅度以$\frac{1}{n^2}$的规律收敛。

3.1.5　MATLAB 实现

各种周期信号的傅里叶级数展开可以运用 MATLAB 来实现。

例 3-2　周期矩形脉冲信号。

解：对于周期为 4，脉宽为 2，幅度为 1 的周期信号，首先建立 fourier. m 文件函数，其 MATLAB 程序如下。

```
function F = fourier
syms x;
T = input('T = ');
n = 10;
t = 0:0.001:16;
f = max(square(pi * 0.5 * t,50),0);
plot(t,f);
grid on;
hold on;
axis([0 4 * pi  - 0.5 1.5]);
A0 = 1/2;
F = 0;
Fx = 0;
for i = 1:n
        As = int(2 * cos(2 * pi * i * x/T)/T,x,0,T/2);
        Bs = int(2 * sin(2 * pi * i * x/T)/T,x,0,T/2);
        F = F + As * cos(2 * pi * i * t/T) + Bs * sin(2 * pi * i * t/T);
        Fx = Fx + As * cos(2 * pi * i * x/T) + Bs * sin(2 * pi * i * x/T);
end
F = F + A0;
Fx = Fx + A0;
Fx
plot(t,F)
```

单击运行 fourier. m 文件函数，在命令行窗口中输入 T=4，输出为

```
Fx = (2 * sin((pi * x)/2))/pi + (2 * sin((3 * pi * x)/2))/(3 * pi) + (2 * sin((5 * pi * x)/2))/
(5 * pi) + (2 * sin((7 * pi * x)/2))/(7 * pi) + (2 * sin((9 * pi * x)/2))/(9 * pi) + 1/2
```

即

$$\mathrm{Fx}=\frac{2\sin\frac{\pi x}{2}}{\pi}+\frac{2\sin\frac{3\pi x}{2}}{3\pi}+\frac{2\sin\frac{5\pi x}{2}}{5\pi}+\frac{2\sin\frac{7\pi x}{2}}{7\pi}+\frac{2\sin\frac{9\pi x}{2}}{9\pi}+\frac{1}{2}$$

则得到的波形如图 3-1-13 所示。

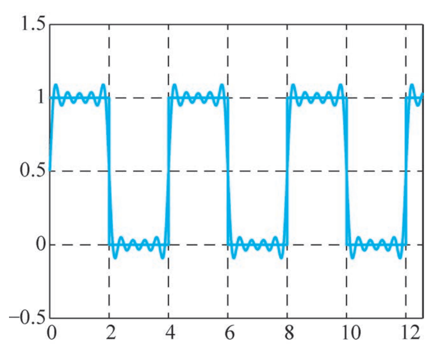

图 3-1-13　周期矩形脉冲信号傅里叶级数

视频讲解

3.2 周期信号的频谱

3.2.1 周期信号的频谱概述

周期信号可以分解成一系列正弦信号或虚指数信号之和,即

$$f(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}A_n\cos(n\Omega t+\varphi_n) \tag{3-2-1}$$

或写成

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega t} \tag{3-2-2}$$

其中,$F_n=\frac{1}{2}A_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_n}=|F_n|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_n}$。为了直观地表示信号所含各分量的振幅,以频率(或角频率)为横坐标,以各谐波的振幅 A_n 或虚指数函数的幅度 $|F_n|$ 为纵坐标,可画出如图 3-2-1(a)、(b)所示的线图,称为幅度(振幅)频谱,或称幅度谱。图 3-2-1 中每条竖线代表该频率分量的幅度,称为谱线。连接各谱线顶点的曲线(见图 3-2-1 中虚线),称为包络线,它反映了各分量幅度随频率变化的情况。需要说明的是,在图 3-2-1(a)中,信号分解为各余弦分量,图中的每一条谱线表示该次谐波的振幅(称为单边幅度谱),而在图 3-2-1(b)中,信号分解为各虚指数函数,图中的每一条谱线表示各分量的幅度 $|F_n|$ $\left(\text{称为双边幅度谱,其中,}|F_n|=|F_{-n}|=\frac{1}{2}A_n\right)$。

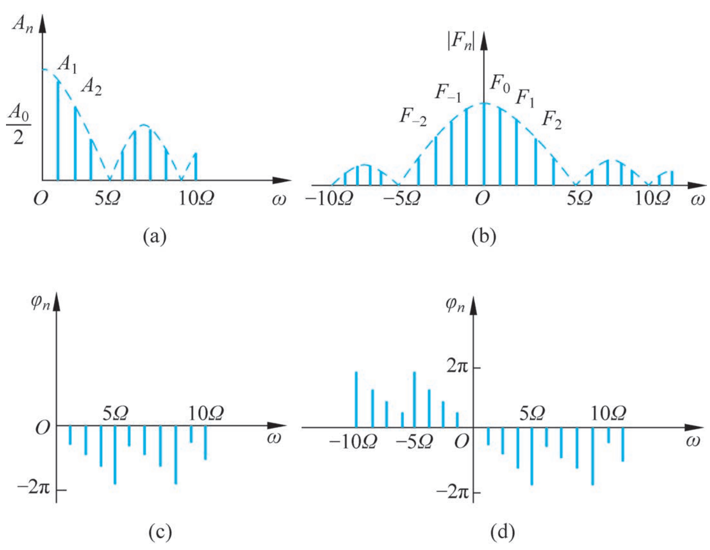

图 3-2-1 周期信号的频谱

类似地,也可画出各谐波初相角 φ_n 与频率(或角频率)的线图,如图 3-2-1(c)、(d)所示,称为相位频谱。如果 F_n 为实数,那么可用 F_n 的正负来表示 φ_n 为 0 或 π。

由图 3-2-1 可见,周期信号的谱线只出现在频率为 $0,\Omega,2\Omega,\cdots$ 的离散频率上,即周期信号的频谱是离散谱。

3.2.2 周期矩形脉冲信号的频谱

设有一幅度为 1,脉冲宽度为 τ 的周期性矩形脉冲,其周期为 T,如图 3-1-7 可以求得其傅里叶系数,见式(3-1-38)。

图 3-2-2 中画出了 $T=10\tau$ 的周期性矩形脉冲的频谱,由于本例中的 F_n 为实数,其相位为 0 或 π,故没有另外画出其相位谱。

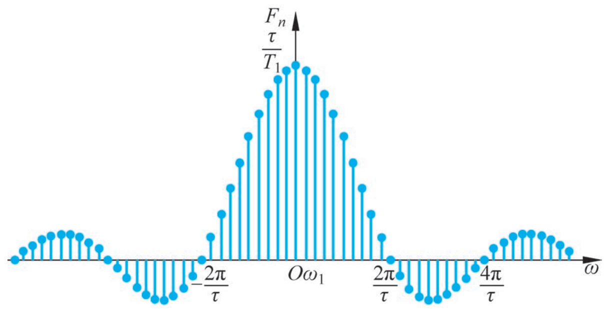

图 3-2-2 周期性矩形脉冲的频谱

由图 3-2-2 可见,周期性矩形脉冲信号的频谱具有一般周期信号频谱的共同特点,它们的频谱都是离散的。它仅含有 $\omega=n\Omega$ 各分量,其相邻两谱线的间隔是 $\Omega\left(\Omega=\frac{2\pi}{T}\right)$,脉冲周期 T 越长,谱线间隔越小,频谱越稠密;反之,则越稀疏。

对于周期矩形脉冲而言,其各谱线的幅度按包络线 $\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$ 的规律变化。在 $\frac{\omega\tau}{2}=m\pi(m=\pm1,\pm2,\cdots)$ 各处,即 $\omega=\frac{2m\pi}{\tau}$ 的各处包络为零,其相应的谱线,即相应的频率分量也等于零。

周期矩形脉信号包括无限多条谱线,也就是说,它可分为无限多个频率分量。实际上,由于各分量的幅度随频率增高而减小,其信号的能量主要集中在第一个零点以内,在允许一定失真的条件下,只需要传送频率较低的那些分量就够了。通常把 $0\leqslant f\leqslant\frac{1}{\tau}\left(0\leqslant\omega<\frac{2\pi}{\tau}\right)$ 这段频率范围称为周期矩形脉冲信号的频带宽度或信号的带宽,用符号 ΔF 表示,即周期矩形脉冲信号频带宽度(带宽)为

$$\Delta F=\frac{1}{\tau} \tag{3-2-3}$$

图 3-2-3 画出了周期相同、脉冲宽度不同的信号及其频谱。由图 3-2-3 可见,由于周期相同,因而相邻谱线的间隔相同;脉冲宽度越窄,其频谱包络线第一个零点的频率越高,即信号带宽越宽,频带内所含的分量越多。可见,信号的频带宽度与脉冲宽度成反比。由式(3-2-3)可见,信号周期不变而脉冲宽度减小时,频谱的幅度也相应地减小,图 3-2-3 中未按比例画出这种关系。

图 3-2-4 画出了脉冲宽度相同而周期不同的信号及其频谱。可见,这时频谱包络线的零点所在位置不变,而当周期增长时,相邻谱线的间隔减小,频谱变密。如果周期无限增长,那么,相邻谱线的间隔将趋于零,周期信号的离散频谱就过渡到非周期信号的连续频谱。

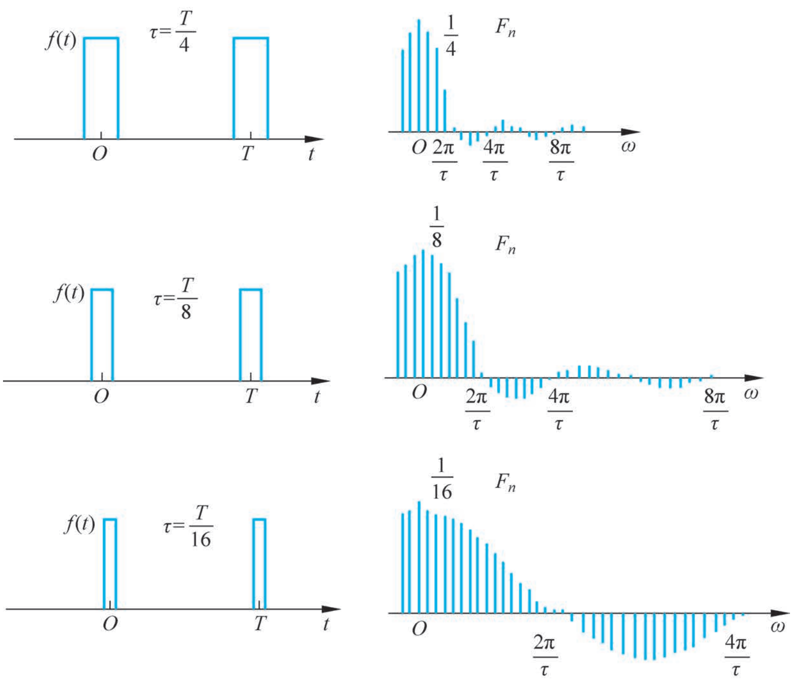

图 3-2-3　脉冲宽度与频谱的关系

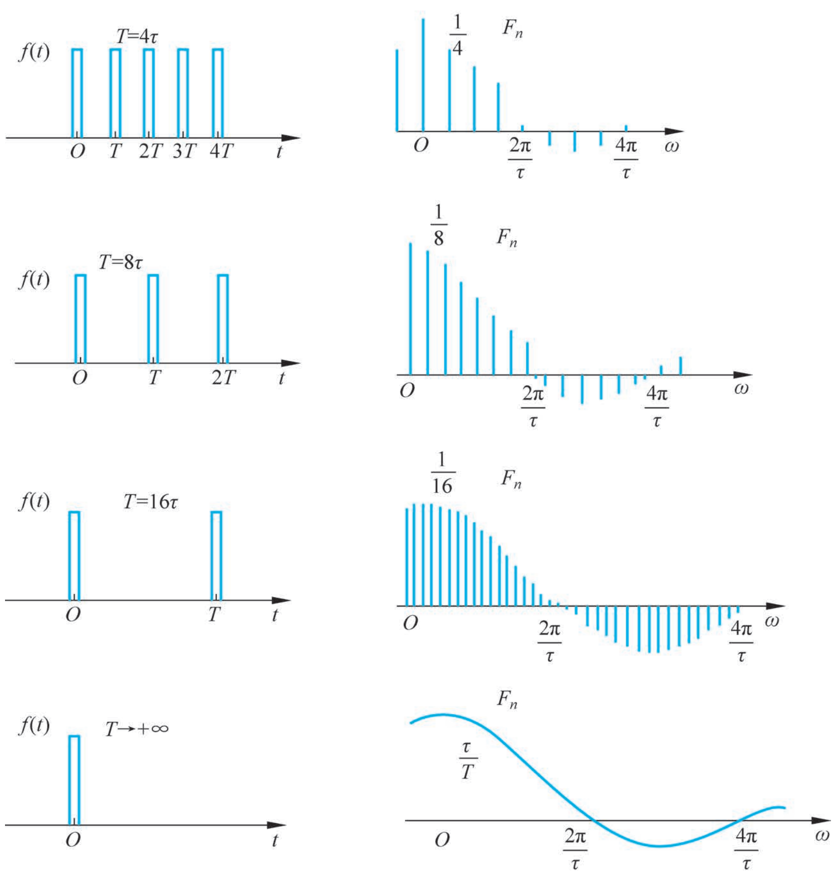

图 3-2-4　周期与频谱的关系

随着周期的增长，各谐波分量的幅度也相应减小，图 3-2-4 为示意图，未按比例画出这种关系。

3.2.3 周期信号的功率

周期信号是功率信号。为了方便，研究周期信号在 1Ω 电阻上消耗的平均功率，称为归一化平均功率。如果周期信号 $f(t)$是实数，那么无论它是电压信号还是电流信号，其平均功率都为

$$P=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f^2(t)\mathrm{d}t \tag{3-2-4}$$

将 $f(t)$的傅里叶级数展开式代入式(3-2-4)，得

$$P=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left[\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}A_n\cos(n\Omega t+\varphi_n)\right]^2\mathrm{d}t \tag{3-2-5}$$

将式(3-2-5)中的被积函数展开，在展开式中具有 $\cos(n\Omega t+\varphi_n)$形式的余弦项，其中一个周期内的积分等于零；具有 $A_n\cos(n\Omega t+\varphi_n)A_m\cos(m\Omega t+\varphi_m)$形式的项，当 $m\neq n$ 时，其积分值为零，对于 $m=n$ 的项，其积分值为$\frac{T}{2}A_n^2$，因此，式(3-2-5)的积分为

$$P=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f^2(t)\mathrm{d}t=\left(\frac{A_0}{2}\right)^2+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2}A_n^2 \tag{3-2-6}$$

式(3-2-6)等号右端的第一项为直流功率，第二项为各次谐波的功率之和。式(3-2-6)表明，周期信号的功率等于直流功率与各次谐波功率之和。由于$|F_n|$是 n 的偶函数，且$|F_n|=\frac{1}{2}A_n$，式(3-2-6)可改为

$$P=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f^2(t)\mathrm{d}t=|F_0|^2+2\sum_{n=1}^{+\infty}|F_n|^2=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|F_n|^2 \tag{3-2-7}$$

式(3-2-6)、式(3-2-7)称为帕斯瓦尔恒等式。帕斯瓦尔恒等式表明，对于周期信号，在时域中求得的信号功率与在频域中求得的信号功率相等。

例 3-3 试计算图 3-2-5 所示信号在频谱第一个零点以内各分量的功率所占总功率的百分比。

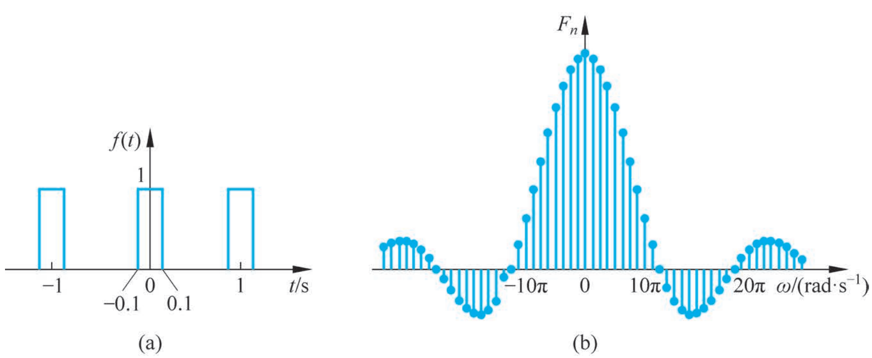

图 3-2-5 例 3-3 图

解：由图 3-2-5(a)可求得信号 $f(t)$的功率

$$P=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f^2(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{1}\int_{-0.1}^{0.1}(1)^2\mathrm{d}t=0.2$$

将 $f(t)$展开为指数形式傅里叶级数

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}F_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega t}$$

由式(3-1-38)知，其傅里叶系数

$$F_n=\frac{\tau}{T}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right)=0.2\mathrm{Sa}(0.2n\pi)$$

其频谱如图 3-2-5(b)所示，频谱的第一个零点在 $n=5$，这时，

$$\omega=5\Omega=\frac{10\pi}{T}=10\pi\mathrm{rad/s}$$

根据式(3-2-7)，在频谱第一个零点内的各分量的功率和为

$$P_{10\pi}=|F_0|^2+2\sum_{n=1}^{5}|F_n|^2$$

将$|F_n|$代入，得

$$\begin{aligned}P_{10\pi}&=(0.2)^2+2(0.2)^2[\mathrm{Sa}^2(0.2\pi)+\mathrm{Sa}^2(0.4\pi)+\mathrm{Sa}^2(0.6\pi)+\mathrm{Sa}^2(0.8\pi)+\mathrm{Sa}^2(\pi)]\\&=0.04+0.08(0.8751+0.5728+0.2546+0.05470+0)\\&=0.1806\end{aligned}$$

$$\frac{P_{10\pi}}{P}=\frac{0.1806}{0.2}=90.3\%$$

即频谱第一个零点以内各分量的功率占总功率的 90.3%。

3.2.4 MATLAB 实现

实现周期矩形脉冲信号频谱分析的程序如下。

```
t = - 10:0.01:10;
y = 0.5 * (square(0.4 * pi * (t + 0.5),20) + 1);
plot(t,y);
grid;
axis([ - 10,10, - 0.1,1.2]);
title('矩形脉冲周期信号'),xlabel('t'),ylabel('f(t)');
n = - 30:30;
e = 1;tao = 2;
zq = 5;
w = (2 * pi)/zq;
xr = (e * tao/zq). * sinc(n. * tao./zq);
xi = zeros(61,1);
figure(2)
subplot(2,1,1),stem(n,xr,'.');
grid;
title('矩形脉冲周期信号频谱: 实部'),xlabel('k'),ylabel('Real Part of X(k)');
subplot(2,1,2),stem(n,xi,'.');grid;
title('矩形脉冲周期信号频谱: 虚部'),xlabel('k'),ylabel('Imaginary Part of X(k)');
```

```
n = - 30:30;
e = 1;
tao = 2;
zq = 5;
w = (2 * pi)/zq;
x = abs((e * tao/zq). * sinc(n. * tao./zq));
y = atan2(0,(e * tao/zq). * sinc(n. * tao./zq));
figure(3)
subplot(2,1,1),stem(n,x,'.');grid;
xlabel('k'),ylabel('Magnitude Part of X(k)');
title('矩形脉冲周期信号频谱: 幅值');
subplot(2,1,2),stem(n,y,'.');grid;
xlabel('k'),ylabel('Phase Part of X(k)');
title('矩形脉冲周期信号频谱: 相位');
```

执行该程序,运行结果如图 3-2-6～图 3-2-8 所示。

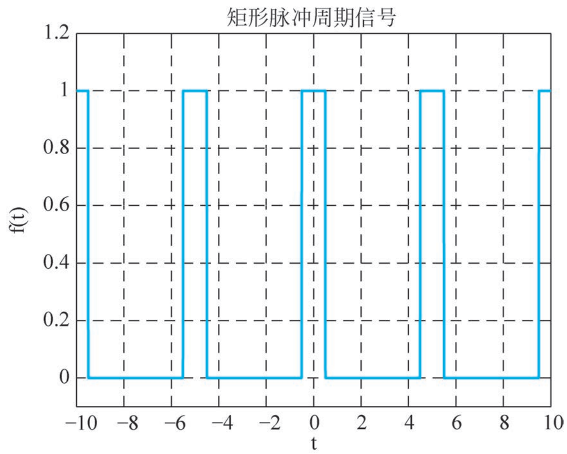

图 3-2-6　矩形脉冲周期信号波形

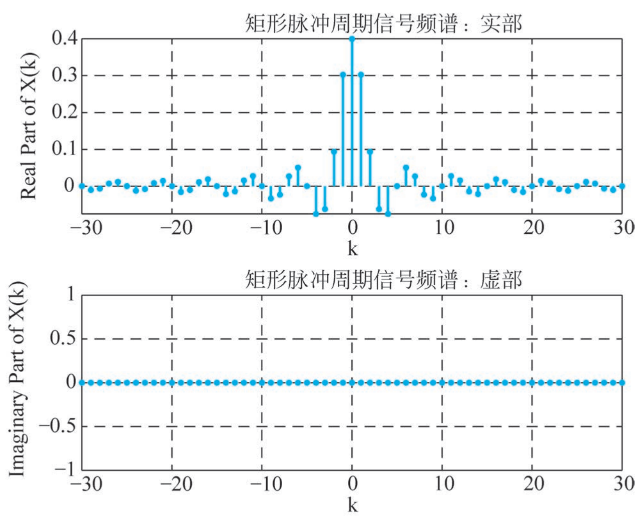

图 3-2-7　矩形脉冲周期信号频谱

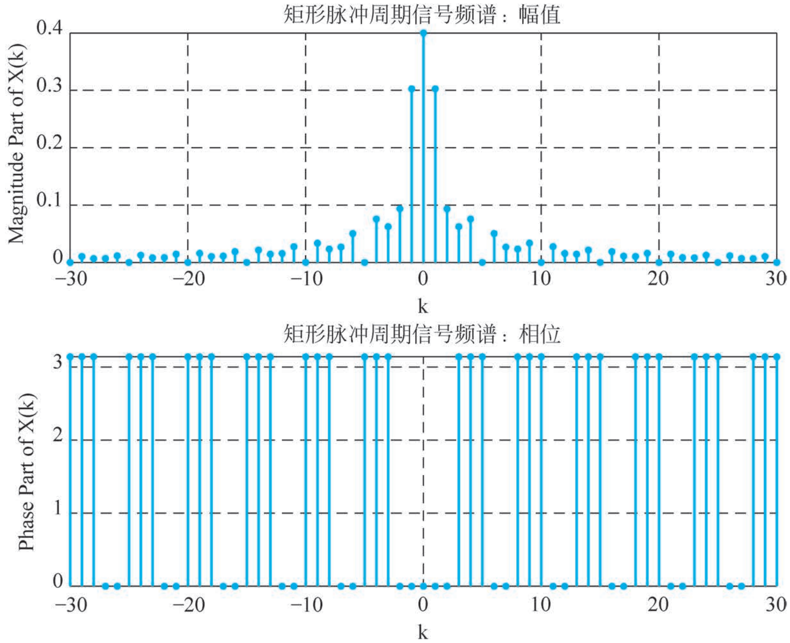

图 3-2-8　矩形脉冲周期信号频谱的幅值与相位

视频讲解

3.3 非周期信号的频谱

3.3.1 傅里叶变换

以周期矩形信号为例，如图 3-3-1 所示，当周期 T 增大时，谱线间隔 $\Omega=\dfrac{2\pi}{T}$变小，若周期 T 趋于无穷大，则谱线间隔趋于无穷小，此时，可以将周期信号视为非周期信号，离散频谱变为连续频谱。

周期信号 $f(t)$的复指数形式傅里叶级数为

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega t}$$

其傅里叶系数为

$$F_n=\frac{1}{T}\int_T f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\Omega t}\,\mathrm{d}t$$

可见，周期 T 趋于无穷大时，频谱的谱线长度 F_n 趋于零，但从物理意义上考虑，无论信号怎样分解，其所含能量是不变的，所以无论周期增大到什么程度，频谱依然存在。为了表达非周期信号的频谱，下面引入“频谱密度函数”的概念。

令

$$F(\mathrm{j}\omega)=\lim_{T\to+\infty}\frac{F_n}{1/T}=\lim_{T\to+\infty}\int_T f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\Omega t}\,\mathrm{d}t \tag{3-3-1}$$

当 T 趋于无穷大时，$F(\mathrm{j}\omega)$不趋于零而趋于有限值。在上式中$\dfrac{F_n}{\Omega}$表示单位频带的频谱值，即

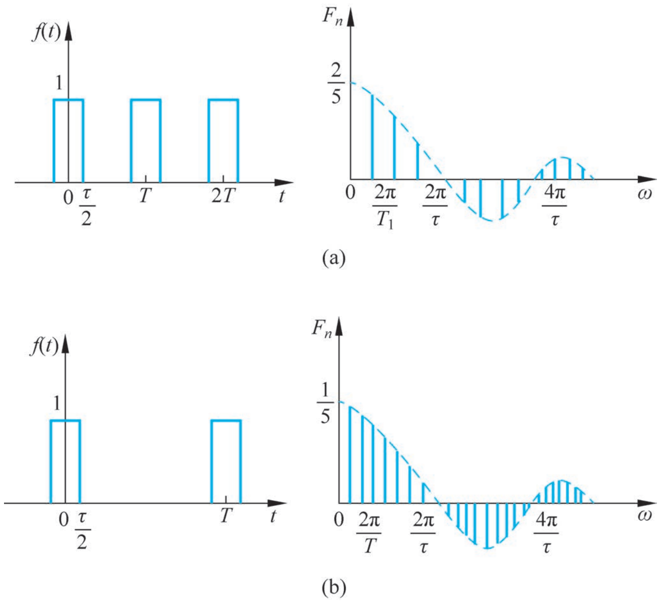

图 3-3-1 T 取不同值时矩形周期信号的频谱比较

频谱密度的概念。因此，$F(\mathrm{j}\omega)$称为原函数 $f(t)$的频谱密度函数，或简称为频谱函数。于是

$$F(\mathrm{j}\omega)=\lim_{T\to+\infty}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\Omega t}\,\mathrm{d}t$$

即

$$F(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t \tag{3-3-2}$$

同样，考虑当 T 趋于无穷大的情况下，Ω 趋于无穷小，取其为 $\mathrm{d}\omega$，而$\frac{1}{T}=\frac{\Omega}{2\pi}$趋于$\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}$。$n\Omega$ 是变量，当 Ω 趋于无穷小时它就称为连续变量，取为 ω，同时求和改为积分。即

$$\Delta(n\Omega)\to\mathrm{d}\omega$$

$$n\Omega\to\omega$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\to\int_{-\infty}^{+\infty}$$

于是，傅里叶级数变成积分形式，即

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega \tag{3-3-3}$$

这样，由周期信号的傅里叶级数通过极限的方法导出的非周期信号频谱的表达式如式(3-3-2)和式(3-3-3)所示，此过程称为傅里叶变换。通常，式(3-3-2)称为傅里叶正变换，即 $F(\mathrm{j}\omega)$是 $f(t)$傅里叶变换；式(3-3-3)称为傅里叶逆(反)变换，即 $f(t)$是 $F(\mathrm{j}\omega)$的原函数或傅里叶逆变换。

傅里叶正变换

$$F(\mathrm{j}\omega)=\mathcal{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t$$

傅里叶逆变换

$$f(t)=\mathcal{F}^{-1}[F(\mathrm{j}\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

式中，$F(\mathrm{j}\omega)$是 $f(t)$的频谱函数，一般为复函数，可以写成

$$F(\mathrm{j}\omega)=|F(\mathrm{j}\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}=R(\omega)+\mathrm{j}X(\omega)$$

其中，$|F(\mathrm{j}\omega)|$是 $F(\mathrm{j}\omega)$的模，代表信号中各频率分量的相对大小；$\varphi(\omega)$是 $F(\mathrm{j}\omega)$的相位函数，代表信号中各频率分量之间的相位关系。$|F(\mathrm{j}\omega)|\sim\omega$ 与 $\varphi(\omega)\sim\omega$ 曲线分别称为非周期信号的幅度频谱与相位频谱，它们都是频率 ω 的连续函数，其形状与相应的周期信号频谱包络线相同。

与周期信号相同，可将式(3-3-3)改写为三角函数形式，即

$$\begin{aligned}f(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\mathrm{j}\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}[\omega t+\varphi(\omega)]}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\mathrm{j}\omega)|\cos[\omega t+\varphi(\omega)]\mathrm{d}\omega+\frac{\mathrm{j}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\mathrm{j}\omega)|\sin[\omega t+\varphi(\omega)]\mathrm{d}\omega\end{aligned}$$

当 $f(t)$是实函数时，由式(3-3-2)可知，$F(\mathrm{j}\omega)$和 $\varphi(\omega)$分别为频率 ω 的偶函数与奇函数，则上式化简为

$$\begin{aligned}f(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\mathrm{j}\omega)|\cos[\omega t+\varphi(\omega)]\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}|F(\mathrm{j}\omega)|\cos[\omega t+\varphi(\omega)]\mathrm{d}\omega\end{aligned}$$

显然，非周期信号和周期信号一样，也可以分解为许多不同频率的余弦分量。它包含了频率从零至无限大的一切频率分量。

与周期信号一样，从理论上讲，上述傅里叶变换也必须满足一定条件。这种条件类似于狄利克雷条件，不同之处在于非周期信号的时间范围由一个周期变成无限的区间，即傅里叶变换存在的充分条件是，在无限区间内满足绝对可积条件，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\mathrm{d}t<+\infty$$

大部分常用的能量信号都满足上述条件，都存在傅里叶变换。而很多信号，如周期信号、阶跃信号、符号函数等，虽然不满足绝对可积条件，但在变换过程中借助奇异函数(如冲激函数)就能使这些不满足条件的信号存在傅里叶变换。这样，就有可能把傅里叶级数和傅里叶变换结合在一起。

3.3.2 典型非周期信号的傅里叶变换

1. 单边指数信号

已知单边指数信号的表示式为

$$f(t)=\mathrm{e}^{-\alpha t}u(t),\quad \alpha>0 \tag{3-3-4}$$

$$F(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\frac{1}{\alpha+\mathrm{j}\omega} \tag{3-3-5}$$

幅度频谱为

$$|F(\mathrm{j}\omega)|=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}} \tag{3-3-6}$$

相位频谱为

$$\varphi(\omega)=-\arctan\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) \tag{3-3-7}$$

单边指数信号的波形、幅度频谱和相位频谱如图 3-3-2 所示。

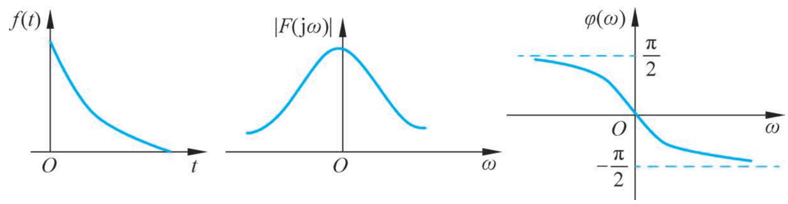

图 3-3-2　单边指数信号的波形及频谱

2. 偶双边指数信号

已知双边偶指数信号的表示式为

$$f(t)=\mathrm{e}^{-\alpha|t|},\quad \alpha>0 \tag{3-3-8}$$

$$\begin{aligned}F(\mathrm{j}\omega)&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{\alpha t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t+\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\alpha-\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{(\alpha-\mathrm{j}\omega)t}\Big|_{-\infty}^{0}-\frac{1}{\alpha+\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{-(\alpha+\mathrm{j}\omega)t}\Big|_{0}^{+\infty}\\&=\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}\end{aligned} \tag{3-3-9}$$

幅度频谱为

$$|F(\mathrm{j}\omega)|=\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2} \tag{3-3-10}$$

相位频谱为

$$\varphi(\omega)=0 \tag{3-3-11}$$

双边偶指数信号的波形和幅度频谱如图 3-3-3 所示。

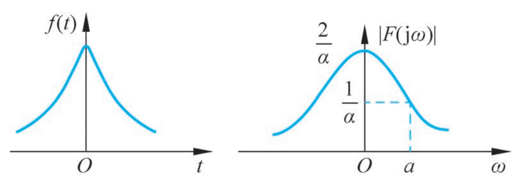

图 3-3-3　双边偶指数信号的波形及频谱

3. 奇双边指数信号

例 3-4　求图 3-3-4(a)所示信号的频谱函数。

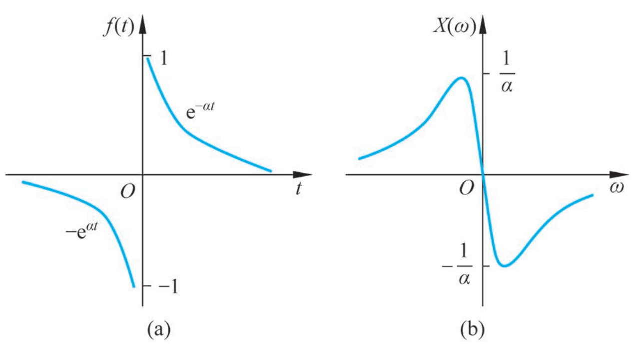

图 3-3-4　例 3-4 图

解：图 3-3-4(a)的信号可写为

$$f(t)=\begin{cases}-\mathrm{e}^{\alpha t}, & t<0\\ \mathrm{e}^{-\alpha t}, & t>0\end{cases}\quad(\text{其中 }\alpha>0)$$

由式(3-3-9)可得其频谱函数为

$$\begin{aligned}F(\mathrm{j}\omega)&=-\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{\alpha t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t+\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t\\&=-\frac{1}{\alpha-\mathrm{j}\omega}+\frac{1}{\alpha+\mathrm{j}\omega}=-\mathrm{j}\frac{2\omega}{\alpha^2+\omega^2}\end{aligned}$$

$F(\mathrm{j}\omega)$的实部$R(\omega)$和虚部$X(\omega)$分别为

$$\begin{cases}R(\omega)=0\\ X(\omega)=-\dfrac{2\omega}{\alpha^2+\omega^2}\end{cases}\tag{3-3-12}$$

$X(\omega)$曲线如图 3-3-4(b)所示。

由上可见，例 3-4 中 $f(t)$的相位频谱等于$\frac{3\pi}{2}$(当 $\omega>0$ 时)或$\frac{\pi}{2}$(当 $\omega<0$ 时)，因而只用一幅图就可表明其频谱特性。

4. 矩形脉冲信号

已知矩形脉冲信号的表达式为

$$f(t)=u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)$$

其中，脉冲幅度为 1，τ 为脉冲宽度。矩形脉冲信号的傅里叶变换为

$$\begin{aligned}F(\mathrm{j}\omega)&=\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{-\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}\\&=\frac{\tau}{\omega\frac{\tau}{2}}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\frac{\tau}{2}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\frac{\tau}{2}}}{2\mathrm{j}}=\tau\frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\omega\tau}{2}}=\tau\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\end{aligned}$$

所以，矩形脉冲信号的频谱为

$$F(\mathrm{j}\omega)=\tau\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\tag{3-3-13}$$

因此，矩形脉冲信号的幅度谱和相位谱分别为

$$|F(\mathrm{j}\omega)|=\tau\left|\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\right|$$

$$\varphi(\omega)=\begin{cases}0, & \dfrac{4n\pi}{\tau}<|\omega|<\dfrac{2(2n+1)\pi}{\tau}\\ \pm\pi, & \dfrac{2(2n+1)\pi}{\tau}<|\omega|<\dfrac{2(2n+2)\pi}{\tau}\end{cases}\quad n=0,1,2,\cdots$$

因为 $F(\mathrm{j}\omega)$是实函数，通常用一条 $F(\mathrm{j}\omega)$曲线同时表示幅度谱 $F(\omega)$和相位谱 $\varphi(\omega)$，如图 3-3-5 所示。

由以上分析可见，虽然矩形脉冲信号在时域集中于有限的范围内，然而它的频谱却以

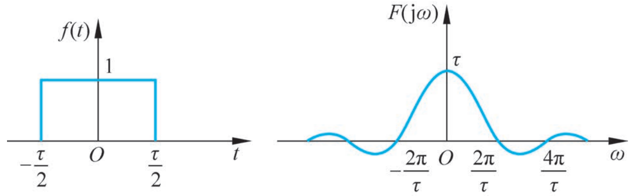

图 3-3-5 矩形脉冲信号的波形及频谱

$\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$的规律变化,分布在无限宽的频率范围上,但是其信号能量主要集中于 $f=0\sim\frac{1}{\tau}$范围内。因而,通常认为这种信号所占有的频率范围(频带)B 近似为$\frac{1}{\tau}$,即

$$B=\frac{1}{\tau} \tag{3-3-14}$$

5. 升余弦脉冲信号

升余弦脉冲信号的表示式为

$$f(t)=\frac{1}{2}\left[1+\cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right)\right],\quad 0\leqslant|t|\leqslant\tau \tag{3-3-15}$$

其波形如图 3-3-6(a)所示。

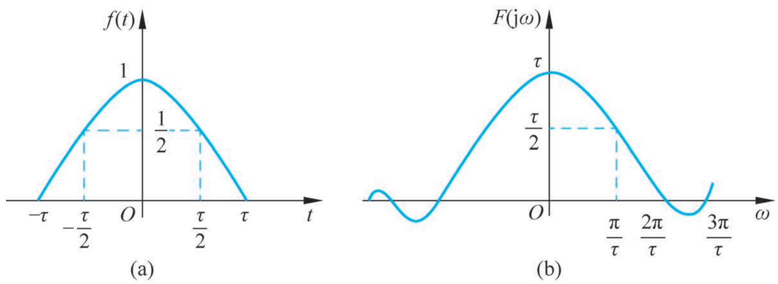

图 3-3-6 升余弦脉冲信号的波形及其频谱

因为

$$\begin{aligned}F(\mathrm{j}\omega)&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t=\int_{-\tau}^{\tau}\frac{1}{2}\left[1+\cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right)\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\int_{-\tau}^{\tau}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t+\frac{1}{4}\int_{-\tau}^{\tau}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{\tau}t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t+\frac{1}{4}\int_{-\tau}^{\tau}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{\tau}t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t\\&=\tau\mathrm{Sa}(\omega\tau)+\frac{\tau}{2}\mathrm{Sa}\left[\left(\omega-\frac{\pi}{\tau}\right)\tau\right]+\frac{\tau}{2}\mathrm{Sa}\left[\left(\omega+\frac{\pi}{\tau}\right)\tau\right]\end{aligned}$$

显然 $F(\mathrm{j}\omega)$是由 3 项构成的,它们都是矩形脉冲的频谱,只是有两项沿频率轴左、右平移了 $\omega=\frac{\pi}{\tau}$。把上式化简,则可以得到

$$F(\mathrm{j}\omega)=\frac{\sin(\omega\tau)}{\omega\left[1-\left(\frac{\omega\tau}{\pi}\right)^2\right]}=\frac{\tau\mathrm{Sa}(\omega\tau)}{1-\left(\frac{\omega\tau}{\pi}\right)^2} \tag{3-3-16}$$

其频谱如图 3-3-6(b)所示。

由上可见,升余弦脉冲信号的频谱比矩形脉冲的频谱更加集中。对于半幅度宽度为 τ

的升余弦脉冲信号，它的绝大部分能量集中在 ω 为 $0\sim\frac{2\pi}{\tau}$（即 f 为 $0\sim\frac{1}{\tau}$）范围内。

视频讲解

3.3.3 奇异函数傅里叶变换

1. 冲激函数

单位冲激函数 $\delta(t)$ 的傅里叶变换 $F(\mathrm{j}\omega)$ 为

$$F(\mathrm{j}\omega)=\mathcal{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t=1$$

可见，单位冲激函数的频谱等于常数，也就是说，在整个频率范围内频谱是均匀分布的。因此，这种频谱通常称为"均匀谱"或"白色谱"，如图 3-3-7 所示。

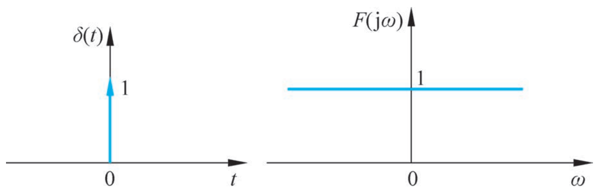

图 3-3-7 单位冲激函数及其频谱

2. 直流信号

直流信号的表达式为

$$f(t)=1,\quad -\infty<t<+\infty$$

利用冲激函数的采样特性求出的 $\delta(t)$ 频谱及傅里叶反变换公式得

$$\delta(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega \tag{3-3-17}$$

由于 $\delta(t)$ 是 t 的偶函数，所以式(3-3-17)可等价为

$$\delta(t)=\delta(-t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega \tag{3-3-18}$$

作变量代换 $\omega\Leftrightarrow t$，则式(3-3-18)可写为

$$\delta(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}1\times\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t$$

因此有

$$F(\mathrm{j}\omega)=\mathcal{F}^{-1}[1]=\int_{-\infty}^{+\infty}1\times\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t=2\pi\delta(\omega) \tag{3-3-19}$$

直流信号 $f(t)=1$，$-\infty<t<+\infty$ 及其频谱如图 3-3-8 所示。由图 3-3-8 可知，直流信号的频谱只在 $\omega=0$ 处有一冲激。

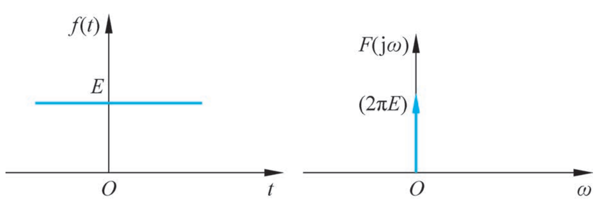

图 3-3-8 直流信号及其频谱

3. 符号函数

符号函数 $\mathrm{sgn}(t)$的定义为

$$\mathrm{sgn}(t)=\begin{cases}-1, & t<0\\ 0, & t=0\\ 1, & t>0\end{cases}$$

虽然符号函数不满足狄利克雷条件，但其傅里叶变换存在。因为

$$\mathrm{sgn}(t)=\lim_{\alpha\to 0}\mathrm{sgn}(t)\mathrm{e}^{-\alpha|t|}$$

因此可以借助符号函数与双边指数衰减函数相乘，先得乘积信号的频谱，然后取极限，从而得到符号函数的频谱。

下面先求乘积信号 $f_1(t)=\mathrm{sgn}(t)\mathrm{e}^{-\alpha|t|}$ 的频谱 $F_1(\mathrm{j}\omega)$。因为

$$\begin{aligned}F_1(\mathrm{j}\omega)&=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{0}-\mathrm{e}^{\alpha t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t+\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\\&=\frac{-1}{\alpha-\mathrm{j}\omega}+\frac{1}{\alpha+\mathrm{j}\omega}=\frac{-\mathrm{j}2\omega}{\alpha^2+\omega^2}\end{aligned}$$

所以，符号函数的频谱为

$$F(\mathrm{j}\omega)=\lim_{\alpha\to 0}F_1(\mathrm{j}\omega)=\lim_{\alpha\to 0}\frac{-\mathrm{j}2\omega}{\alpha^2+\omega^2}=\frac{2}{\mathrm{j}\omega}\tag{3-3-20}$$

幅度频谱

$$|F(\mathrm{j}\omega)|=\frac{2}{|\omega|}=\frac{2\mathrm{sgn}(\omega)}{\omega}\tag{3-3-21}$$

相位频谱

$$\varphi(\omega)=\left\{\begin{matrix}\pi/2, & \omega<0\\ -\pi/2, & \omega>0\end{matrix}\right\}=-\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(\omega)\tag{3-3-22}$$

符号函数的幅度频谱和相位频谱如图 3-3-9 所示。

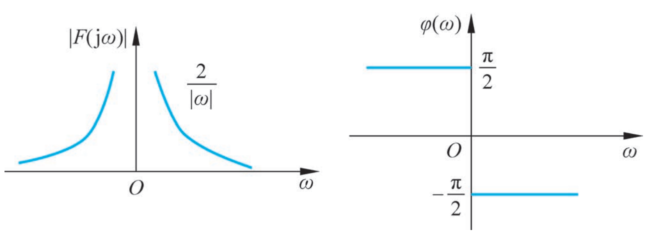

图 3-3-9　符号函数的幅度频谱和相位频谱

4. 单位阶跃信号

单位阶跃信号也不满足狄利克雷条件，但其傅里叶变换同样存在。可以利用符号函数和直流信号的频谱来求单位阶跃信号的频谱。单位阶跃信号可用直流信号和符号函数表示为

$$u(t)=\frac{1}{2}[u(t)+u(-t)]+\frac{1}{2}[u(t)-u(-t)]=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t)$$

因此，单位阶跃信号的频谱函数为

$$\mathcal{F}[u(t)]=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\tag{3-3-23}$$

单位阶跃信号的幅度频谱和相位频谱如图 3-3-10 所示。

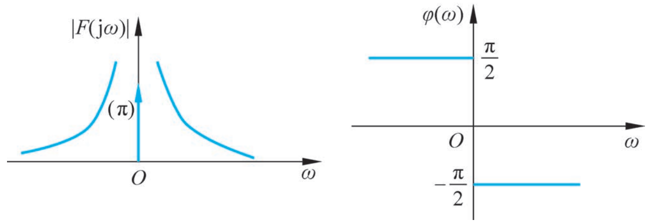

图 3-3-10　阶跃信号的幅度频谱和相位频谱

熟悉上述常用信号的傅里叶变换对进一步掌握信号与系统的频域分析将会带来很大的方便。

表 3-3-1 列出了常用傅里叶变换的形式。

表 3-3-1　部分常用傅里叶变换对

编号	名　称	$f(t)$	$F(j\omega)$
1	冲激函数	$\delta(t)$	1
2	直流信号	1	$2\pi\delta(\omega)$
3	矩形脉冲	$\begin{cases}1, & \|t\|<\frac{\tau}{2}\\ 0, & \|t\|>\frac{\tau}{2}\end{cases}$	$\tau\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$
4	采样脉冲	$\mathrm{Sa}(\omega_c t)$	$\begin{cases}\frac{\pi}{\omega_c}, & \|\omega\|<\omega_c\\ 0, & \|\omega\|>\omega_c\end{cases}$
5	单边指数脉冲	$e^{-\alpha t}u(t)(\alpha>0)$	$\frac{1}{\alpha+j\omega}$
6	双边指数脉冲	$e^{-\alpha\|t\|}u(t)(\alpha>0)$	$\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$
7	阶跃函数	$u(t)$	$\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$
8	符号函数	$\mathrm{sgn}=\begin{cases}1, & t>0\\ -1, & t<0\end{cases}$	$\frac{2}{j\omega}$
9	余弦函数	$\cos(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$
10	正弦函数	$\sin(\omega_0 t)$	$j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$
11	复指数函数	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
12	线性信号	$tu(t)$	$j\pi\delta'(\omega)-\frac{1}{\omega^2}$
13	冲激序列	$\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_1)$	$\omega_1\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-n\omega_1)\left(\omega_1=\frac{2\pi}{T_1}\right)$

3.3.4　MATLAB 实现

例 3-5　绘制信号 $f(t)=u(t+1)-u(t-1)$的频谱图。

解：编写的程序如下。

```
R = 0.02;
t = - 2:R:2;
f = heaviside(t + 1) - heaviside(t - 1);
W1 = 2 * pi * 5
N = 500;k = 0:N;W = k * W1/N;
F = f * exp( - j * t' * W) * R;
F = real(F);
W = [ - fliplr(W),W(2:501)];
F = [fliplr(F),F(2:501)];
subplot(2,1,1);plot(t,f);
xlabel('t');ylabel('f(t)');
title('f(t) = u(t + 1) - u(t - 1)');
subplot(2,1,2);plot(W,F);
xlabel('w');ylabel('F(w)');
title('f(t)的傅里叶变换 F(w)');
```

执行该程序,运行结果如图 3-3-11 所示。

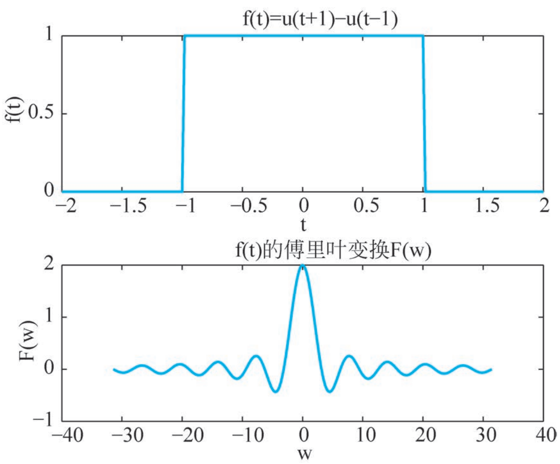

图 3-3-11 例 3-5 信号的幅度频谱

3.4 傅里叶变换的性质

3.4.1 傅里叶变换的性质概述

时间函数(信号)$f(t)$可以用频谱函数(频谱密度)$F(\mathrm{j}\omega)$表示,或者反之。也就是说,任一信号可以有两种描述方法,即时域的描述和频域的描述。本节将研究在某一域中对函数进行某种运算,在另一域中所引起的效应。譬如,在时域中信号延迟一定的时间,它的频谱将发生何种变化,等等。

为简便计,用 $f(t)\leftrightarrow F(\mathrm{j}\omega)$表示时域与频域之间的对应关系,它们二者之间的关系为

$$F(\mathrm{j}\omega)=\mathcal{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t \tag{3-4-1}$$

$$f(t)=\mathcal{F}^{-1}[F(\mathrm{j}\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega \tag{3-4-2}$$

1. 线性

若

$$f_1(t)\leftrightarrow F_1(\mathrm{j}\omega),\quad f_2(t)\leftrightarrow F_2(\mathrm{j}\omega)$$

则对任意常数 a_1 和 a_2,有

$$a_1 f_1(t)+a_2 f_2(t)\leftrightarrow a_1 F_1(\mathrm{j}\omega)+a_2 F_2(\mathrm{j}\omega) \tag{3-4-3}$$

以上关系很容易证明,这里从略。傅里叶变换的上述线性性质不难推广到有多个信号的情况。

线性性质有两个含义。

(1) 齐次性:它表明若信号 $f(t)$乘以常数 a(即信号增大 a 倍),则其频谱函数也乘以相同的常数 a(即其频谱函数也增大 a 倍)。

(2) 叠加性:它表明几个信号之和的频谱函数等于各个信号的频谱函数之和。

在求单位阶跃函数 $u(t)$的频谱函数时已经利用了线性性质。

2. 奇偶性

通常遇到的实际信号都是实信号,即它们是时间的实函数。现在研究时间函数 $f(t)$与其频谱 $F(\mathrm{j}\omega)$的奇偶虚实关系。

如果 $f(t)$是时间 t 的实函数,那么根据 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}=\cos(\omega t)-\mathrm{j}\sin(\omega t)$,式(3-4-1)可写为

$$\begin{aligned}F(\mathrm{j}\omega)=\mathcal{F}[f(t)]&=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\omega t)\mathrm{d}t-\mathrm{j}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(\omega t)\mathrm{d}t\\&=R(\omega)+\mathrm{j}X(\omega)=|F(\mathrm{j}\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}\end{aligned} \tag{3-4-4}$$

式中,频谱函数的实部和虚部分别为

$$\begin{aligned}R(\omega)&=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\omega t)\mathrm{d}t\\X(\omega)&=-\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(\omega t)\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{3-4-5}$$

频谱函数的模和相角分别为

$$\begin{aligned}|F(\mathrm{j}\omega)|&=\sqrt{R(\omega)^2+X(\omega)^2}\\\varphi(\omega)&=\arctan\left(\frac{X(\omega)}{R(\omega)}\right)\end{aligned} \tag{3-4-6}$$

由式(3-4-5)可见,由于 $\cos(-\omega t)=\cos(\omega t)$,$\sin(-\omega t)=-\sin(\omega t)$,故若 $f(t)$是时间 t 的实函数,则频谱函数 $F(\mathrm{j}\omega)$的实部 $R(\omega)$是角频率 ω 的偶函数,虚部 $X(\omega)$是 ω 的奇函数。进而由式(3-4-6)可知,$|F(\mathrm{j}\omega)|$是 ω 的偶函数,而 $\varphi(\omega)$是 ω 的奇函数。

由式(3-4-5)还可以看出,如果 $f(t)$是时间 t 的实函数并且是偶函数,则 $f(t)\sin(\omega t)$是 t 的奇函数,因此式(3-4-4)中第二个积分为零,即 $X(\omega)=0$;而 $f(t)\cos(\omega t)$是 t 的偶函数,于是有

$$F(\mathrm{j}\omega)=R(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\omega t)\mathrm{d}t=2\int_{0}^{+\infty} f(t)\cos(\omega t)\mathrm{d}t$$

这时频谱函数 $F(\mathrm{j}\omega)$等于 $R(\omega)$,它是 ω 的实函数和偶函数。

如果 $f(t)$是时间 t 的实函数并且是奇函数,则 $f(t)\cos(\omega t)$是 t 的奇函数,从而式(3-4-5)中的第一个积分为零,即 $R(\omega)=0$;而 $f(t)\sin(\omega t)$是 t 的偶函数,于是有

$$F(\mathrm{j}\omega)=\mathrm{j}X(\omega)=-\mathrm{j}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(\omega t)\mathrm{d}t=-\mathrm{j}2\int_{0}^{+\infty} f(t)\sin(\omega t)\mathrm{d}t$$

这时频谱函数 $F(\mathrm{j}\omega)$ 等于 $\mathrm{j}X(\omega)$，它是 ω 的虚函数和奇函数。

此外，由式(3-4-1)还可求得 $f(-t)$ 的傅里叶变换为

$$\mathcal{F}[f(-t)]=\int_{-\infty}^{+\infty} f(-t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t$$

令 $\tau=-t$，得

$$\mathcal{F}[f(-t)]=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau}\,\mathrm{d}(-\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau=F(-\mathrm{j}\omega)$$

考虑到 $R(\omega)$ 是 ω 的偶函数，$X(\omega)$ 是 ω 的奇函数，故有

$$F(-\mathrm{j}\omega)=R(-\omega)+\mathrm{j}X(-\omega)=R(\omega)-\mathrm{j}X(\omega)=F^{*}(\mathrm{j}\omega)$$

式中，$F^{*}(\mathrm{j}\omega)$ 是 $F(\mathrm{j}\omega)$ 的共轭复函数。于是 $f(-t)$ 的傅里叶变换为

$$\mathcal{F}[f(-t)]=F(-\mathrm{j}\omega)=F^{*}(\mathrm{j}\omega)$$

将以上结论归纳如下。

如果 $f(t)$ 是 t 的实函数，且设

$$f(t)\leftrightarrow F(\mathrm{j}\omega)=|F(\mathrm{j}\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}=R(\omega)+\mathrm{j}X(\omega)$$

则有

(1)

$$\begin{aligned}&R(\omega)=R(-\omega),\quad X(\omega)=-X(-\omega)\\&|F(\mathrm{j}\omega)|=|F(-\mathrm{j}\omega)|,\quad \varphi(\omega)=-\varphi(-\omega)\end{aligned}\tag{3-4-7}$$

(2)

$$f(-t)\leftrightarrow F(-\mathrm{j}\omega)=F^{*}(\mathrm{j}\omega)\tag{3-4-8}$$

(3) 如 $f(t)=f(-t)$，则

$$X(\omega)=0,\quad F(\mathrm{j}\omega)=R(\omega)\tag{3-4-9}$$

(4) 如 $f(t)=-f(-t)$，则

$$R(\omega)=0,\quad F(\mathrm{j}\omega)=\mathrm{j}X(\omega)\tag{3-4-10}$$

前面的许多实例可以作为以上性质的证明，这里不再重复。

以上结论适用于 $f(t)$ 是时间 t 的实函数情况。如 $f(t)$ 是 t 的虚函数，则有

(1)

$$\begin{aligned}&R(\omega)=-R(-\omega),\quad X(\omega)=X(-\omega)\\&|F(\mathrm{j}\omega)|=|F(-\mathrm{j}\omega)|,\quad \varphi(\omega)=-\varphi(-\omega)\end{aligned}\tag{3-4-11}$$

(2)

$$f(-t)\leftrightarrow F(-\mathrm{j}\omega)=-F^{*}(\mathrm{j}\omega)\tag{3-4-12}$$

根据以上分析，读者不难推出 $f(t)$ 为复函数的一般情况。

3. 对称性

若 $f(t)\leftrightarrow F(\mathrm{j}\omega)$，则

$$F(\mathrm{j}t)\leftrightarrow 2\pi f(-\omega)\tag{3-4-13}$$

式(3-4-13)表明，如果函数 $f(t)$ 的频谱函数为 $F(\mathrm{j}\omega)$，那么时间函数 $F(\mathrm{j}t)$ 的频谱函数是 $2\pi f(-\omega)$，这称为傅里叶变换的对称性，证明如下。

傅里叶逆变换式

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$

将上式中的自变量 t 换为 $-t$，得

$$f(-t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

将上式中的 t 换为 ω，将原有的 ω 换为 t，得

$$f(-\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\mathrm{j}t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

或

$$2\pi f(-\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}F(\mathrm{j}t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

上式表明，时间函数 $F(\mathrm{j}t)$ 的傅里叶变换为 $2\pi f(-\omega)$，即式(3-4-13)。

例如，时域冲激函数 $\delta(t)$ 的傅里叶变换为频域的常数 $1(-\infty<t<+\infty)$；由对称性可得，时域的常数 $1(-\infty<t<+\infty)$ 的傅里叶变换为 $2\pi\delta(-\omega)$，由于 $\delta(\omega)$ 是 ω 的偶函数，即 $\delta(\omega)=\delta(-\omega)$，故有

$$\delta(t)\leftrightarrow 1$$
$$1(-\infty<t<+\infty)\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

例 3-6 求采样函数 $\mathrm{Sa}(t)=\dfrac{\sin t}{t}$ 的频谱函数。

解： 直接利用式(3-4-1)不易求出 $\mathrm{Sa}(t)$ 的傅里叶变换，利用对称性则较为方便。从前面可知，宽度为 τ，幅度为 1 的门函数 $g_\tau(t)$ 的频谱函数为 $\tau\mathrm{Sa}\left(\dfrac{\omega\tau}{2}\right)$，即

$$g_\tau(t)\leftrightarrow\tau\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

取 $\dfrac{\tau}{2}=1$，即 $\tau=2$，且幅度为 $\dfrac{1}{2}$。根据傅里叶变换的线性性质，脉宽为 2，幅度为 $\dfrac{1}{2}$ 的门函数(如图 3-4-1(a)所示)的傅里叶变换为

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{2}g_2(t)\right]=\frac{1}{2}\times 2\mathrm{Sa}(\omega)=\mathrm{Sa}(\omega)$$

即

$$\frac{1}{2}g_2(t)\leftrightarrow\mathrm{Sa}(\omega)$$

注意到 $g_2(t)$ 是偶函数，根据对称性可得

$$\mathrm{Sa}(t)\leftrightarrow 2\pi\times\frac{1}{2}g_2(\omega)=\pi\times g_2(\omega) \tag{3-4-14}$$

即

$$\mathcal{F}[\mathrm{Sa}(t)]=\pi g_2(\omega)=\begin{cases}\pi, & |\omega|<1\\ 0, & |\omega|>1\end{cases}$$

其波形如图 3-4-1(b)所示。

例 3-7 求函数 t 和 $\dfrac{1}{t}$ 的频谱函数。

解：(1) 函数 t。

由前面的内容可知

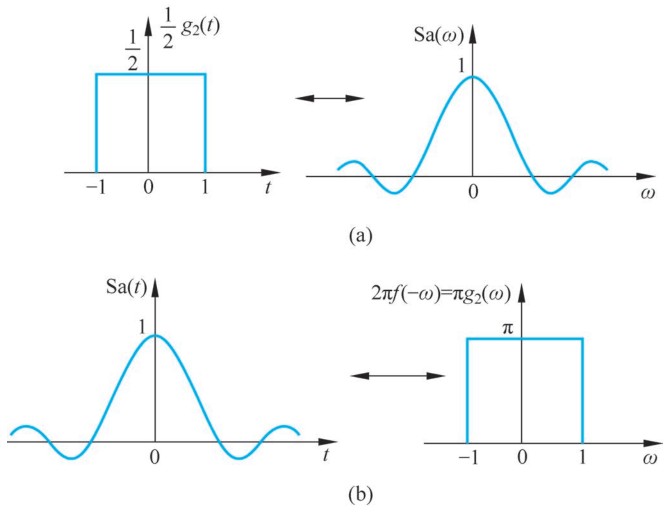

图 3-4-1　函数 Sa(t)及其频谱

$$\delta'(t)\leftrightarrow \mathrm{j}\omega$$

由对称性并考虑到 $\delta'(\omega)$是 ω 的奇函数，即 $\delta'(-\omega)=-\delta'(\omega)$，可得

$$\mathrm{j}t\leftrightarrow 2\pi\delta'(-\omega)=-2\pi\delta'(\omega)$$

根据线性性质，在时域乘以(−j)，相应的频域也乘以(−j)，得

$$t\leftrightarrow \mathrm{j}2\pi\delta'(\omega) \tag{3-4-15}$$

(2) 函数$\frac{1}{t}$。

$$\mathrm{sgn}(t)\leftrightarrow \frac{2}{\mathrm{j}\omega}$$

由对称性并考虑到

$$\mathrm{sgn}(-\omega)=-\mathrm{sgn}(\omega)$$

$$\frac{2}{\mathrm{j}t}\leftrightarrow 2\pi\mathrm{sgn}(-\omega)=-2\pi\mathrm{sgn}(\omega)$$

根据线性性质，时域、频域分别乘以 $\mathrm{j}\,\frac{1}{2}$，得

$$\frac{1}{t}\leftrightarrow -\mathrm{j}\pi\mathrm{sgn}(\omega) \tag{3-4-16}$$

4. 尺度变换

某信号 $f(t)$的波形如图 3-4-2(a)所示，若将该信号波形沿时间轴压缩到原来的$\frac{1}{a}$$\left(\text{例如}\frac{1}{3}\right)$，就成为图 3-4-2(c)所示的波形，它可表示为 $f(at)$，这里 a 是常数。如果 $a>1$，则波形压缩；如果 $1>a>0$，则波形展宽。如果 $a<0$，则波形反转并压缩或展宽。

尺度变换特性：若 $f(t)\leftrightarrow F(\mathrm{j}\omega)$，则对于实常数 $a(a\neq 0)$，有

$$f(at)\leftrightarrow \frac{1}{|a|}F\left(\mathrm{j}\,\frac{\omega}{a}\right) \tag{3-4-17}$$

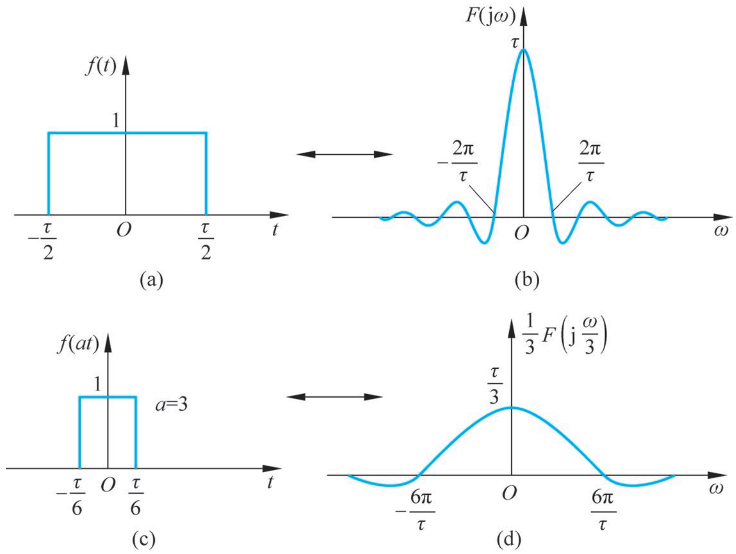

图 3-4-2　尺度变换

式(3-4-17)表明，若信号 $f(t)$在时间坐标上压缩到原来的$\frac{1}{a}$，那么其频谱函数在频率坐标上将展宽 a 倍，同时其幅度减小到原来的$\frac{1}{|a|}$。也就是说，在时域中信号占据时间的压缩对应于其频谱在频域中的扩展，或者反之，信号在时域中的扩展对应于其频谱在频域中的压缩。这一规律称为尺度变换特性或时频展缩特性。图 3-4-2 画出了 $f(t)$为门函数，$a=3$ 时的时域波形及频谱图。

式(3-4-17)可证明如下。

设 $f(t)\leftrightarrow F(\mathrm{j}\omega)$，则展缩后的信号 $f(at)$的傅里叶变换为

$$\mathcal{F}[f(at)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(at)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t$$

令 $x=at$，则 $t=\frac{x}{a}$，$\mathrm{d}t=\frac{1}{a}\mathrm{d}x$。

当 $a>0$ 时，

$$\mathcal{F}[f(at)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\frac{x}{a}}\ \frac{1}{a}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega}{a}x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a}F\left(\mathrm{j}\ \frac{\omega}{a}\right)$$

当 $a<0$ 时，

$$\mathcal{F}[f(at)]=\int_{+\infty}^{-\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\frac{x}{a}}\ \frac{1}{a}\mathrm{d}x=-\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega}{a}x}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{a}F\left(\mathrm{j}\ \frac{\omega}{a}\right)$$

综合以上两种情况，即得式(3-4-17)。

由尺度变换特性可知，信号的持续时间与信号的占有频带成反比。例如，对于门函数 $g_\tau(t)$，其频带宽度 $\Delta f=\frac{1}{\tau}$。在电子技术中，有时需要将信号持续时间缩短，以加快信息传输速度，这就不得不在频域内展宽频带。

顺便提及，式(3-4-17)中若令 $a=-1$，得

$$f(-t)\leftrightarrow F(-\mathrm{j}\omega)$$

这正是式(3-4-8)的左边。

5. 时移特性

时移特性也称为延时特性，它表述如下。

若 $f(t)\leftrightarrow F(\mathrm{j}\omega)$，且 t_0 为常数，则有

$$f(t\pm t_0)\leftrightarrow \mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}\omega t_0}F(\mathrm{j}\omega) \tag{3-4-18}$$

式(3-4-18)表示，在时域中信号沿时间轴右移(即延时)t_0，其在频域中所有频率"分量"相应落后相位 ωt_0，而其幅度保持不变。

这可证明如下。

若 $f(t)\leftrightarrow F(\mathrm{j}\omega)$，则迟延信号的傅里叶变换为

$$\mathcal{F}[f(t-t_0)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t-t_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

令 $x=t-t_0$，则上式可写为

$$\mathcal{F}[f(t-t_0)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(x+t_0)}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}F(\mathrm{j}\omega)$$

同理，可得

$$\mathcal{F}[f(t+t_0)]=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t_0}F(\mathrm{j}\omega)$$

不难证明，如果信号既有时移，又有尺度变换，则有如下结论。

若 $f(t)\leftrightarrow F(\mathrm{j}\omega)$，$a$ 和 b 为实常数，但 $a\neq 0$，则

$$f(at-b)\leftrightarrow \frac{1}{|a|}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{b}{a}\omega}F\left(\mathrm{j}\frac{\omega}{a}\right) \tag{3-4-19}$$

显然，尺度变换和时移特性是上式的两种特殊情况，当 $b=0$ 时，得式(3-4-17)，当 $a=1$ 时，得式(3-4-18)。

例 3-8　如已知图 3-4-3(a)的函数是宽度为 2 的门函数，即 $f_1(t)=g_2(t)$，其傅里叶变换 $F_1(\mathrm{j}\omega)=2\mathrm{Sa}(\omega)=\dfrac{2\sin\omega}{\omega}$，求图 3-4-3(b)、(c)中函数 $f_2(t)$、$f_3(t)$的傅里叶变换。

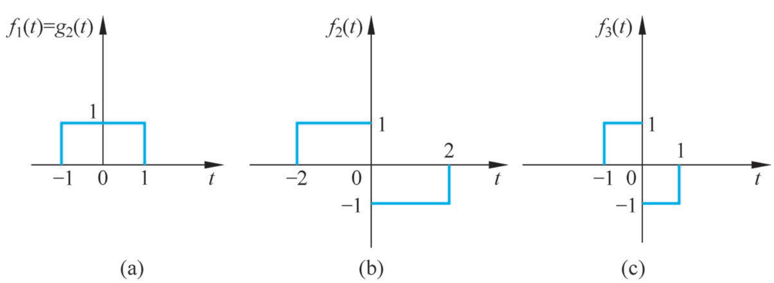

图 3-4-3　例 3-8 图

解：(1) 图 3-4-3(b)中的函数 $f_2(t)$可写为时移信号 $f_1(t+1)$与 $f_1(t-1)$之差，即

$$f_2(t)=f_1(t+1)-f_1(t-1)$$

由傅里叶变换的线性和时移性，可得 $f_2(t)$的傅里叶变换

$$F_2(\mathrm{j}\omega)=F_1(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}-F_1(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}=\frac{2\sin\omega}{\omega}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})=\mathrm{j}4\frac{\sin^2(\omega)}{\omega}$$

(2) 图 3-4-3(c)中的函数 $f_3(t)$是 $f_2(t)$的压缩,可写为

$$f_3(t)=f_2(2t)$$

由尺度变换可得

$$F_3(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{2}F_2\left(\mathrm{j}\frac{\omega}{2}\right)=\frac{1}{2}\mathrm{j}4\frac{\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\frac{\omega}{2}}=\mathrm{j}4\frac{\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\omega}$$

显然,$f_3(t)$也可写为

$$f_3(t)=f_1(2t+1)-f_1(2t-1)$$

由式(3-4-19)也可得到相同的结果。

例 3-9 若有 5 个波形相同的脉冲,其相邻间隔为 T,如图 3-4-4(a)所示,求其频谱函数。

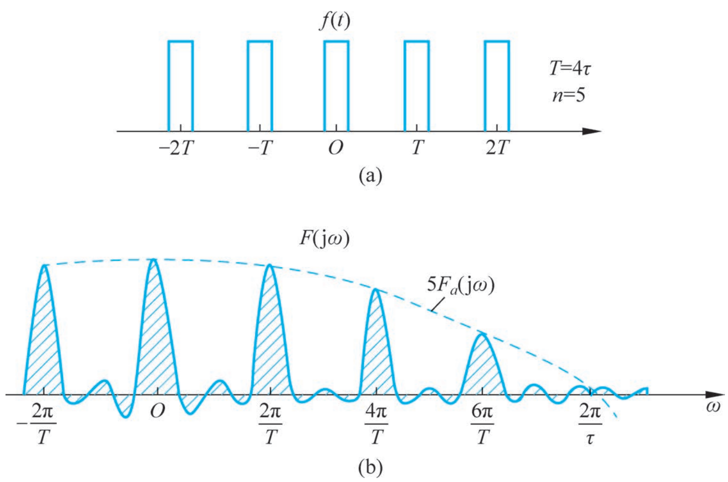

图 3-4-4 5 个矩形脉冲的波形及其频谱

解: 设位于坐标原点的单个脉冲表示式为 $f_a(t)$,其频谱函数为 $F_a(\mathrm{j}\omega)$,则图 3-4-4(a)中的信号可表示为

$$f(t)=f_a(t+2T)+f_a(t+T)+f_a(t)+f_a(t-T)+f_a(t-2T)$$

根据线性和时移特性,它的频谱函数为

$$F(\mathrm{j}\omega)=F_a(\mathrm{j}\omega)[\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega T}+\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T}+1+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega T}] \tag{3-4-20}$$

上式为等比数列,利用等比数列求和公式和欧拉公式得

$$F(\mathrm{j}\omega)=F_a(\mathrm{j}\omega)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega T}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}3\omega T}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T}}=F_a(\mathrm{j}\omega)\frac{\sin\left(\frac{5\omega T}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)} \tag{3-4-21}$$

由式(3-4-21)可以看出,当 $\omega=\frac{2m\pi}{T}(m=0,\pm1,\pm2,\cdots)$时,

$$\lim_{\omega\to\frac{2m\pi}{T}}\frac{\sin\left(\frac{5\omega T}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}=5$$

也就是说,在 $\omega=\frac{2m\pi}{T}$处,其频谱函数的幅度是 $F_a(\mathrm{j}\omega)$在该处幅度的 5 倍。这是由于在这些频率处 5 个单个脉冲的各频率“分量”同相的缘故。这只要将 $\omega=\frac{2m\pi}{T}$代入式(3-4-20)中就可明显地看出。

由式(3-4-21)还可看出,当 $\omega=\frac{2m\pi}{5T}$(m 为正数,但不为 5 的整数倍)时,式中分子为零,从而 $F(\mathrm{j}\omega)=0$,这是由于 5 个单个脉冲的各频率“分量”相互抵消的缘故。图 3-4-4(b)中画出了脉冲个数 $n=5$,相邻脉冲间隔 $T=4\tau$ 时的频谱图。由图可见,当多个脉冲间隔为 T 重复排列时,信号的能量将向 $\omega=\frac{2m\pi}{T}$处集中,在该频率处频谱函数的幅度增大,而在其他频率处幅度减小,甚至等于零。当脉冲个数无限增多时(这时就成为周期信号),则除 $\omega=\frac{2m\pi}{T}$的各谱线外,其余频率“分量”均等于零,从而变成离散频谱。

顺便指出,若有 N 个波形相同的脉冲$\left(N\text{ 为奇数,中间一个,即第}\frac{N+1}{2}\text{个位于原点}\right)$,其相邻间隔为 T,则其频谱函数为

$$F(\mathrm{j}\omega)=F_a(\mathrm{j}\omega)\frac{\sin\left(\frac{N\omega T}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)} \tag{3-4-22}$$

式中,$F_a(\mathrm{j}\omega)$为单个脉冲的频谱函数。

6. 频移特性

频移特性也称为调制特性,可表述如下。

若 $f(t)\leftrightarrow F(\mathrm{j}\omega)$,且 ω_0 为常数,则

$$f(t)\mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}\omega_0 t}\leftrightarrow F[\mathrm{j}(\omega\mp\omega_0)] \tag{3-4-23}$$

式(3-4-23)表明,将信号 $f(t)$乘以因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}$,对应于将频谱函数沿 ω 右移 ω_0;将信号 $f(t)$乘以因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}$,对应于将频谱函数左移 ω_0。式(3-4-23)容易证明,这里从略。

例 3-10 如已知信号 $f(t)$的傅里叶变换为 $F(\mathrm{j}\omega)$,求信号 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}4t}f(3-2t)$的傅里叶变换。

解: 由已知 $f(t)\leftrightarrow F(\mathrm{j}\omega)$,利用时移特性,有

$$f(t+3)\leftrightarrow F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}3\omega}$$

根据尺度变换,令 $a=-2$,得

$$f(-2t+3)\leftrightarrow\frac{1}{|2|}F\left(-\mathrm{j}\frac{\omega}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}3\left(\frac{\omega}{-2}\right)}=\frac{1}{2}F\left(-\mathrm{j}\frac{\omega}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{3\omega}{2}}$$

由频移特性,得

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}4t}f(-2t+3)\leftrightarrow\frac{1}{2}F\left(-\mathrm{j}\frac{\omega-4}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{3(\omega-4)}{2}}$$

频移特性在各类电子系统中应用广泛,如调幅、同步解调等都是在频谱搬移基础上实现的。

7. 卷积定理

卷积定理在信号和系统分析中占有重要地位。它说明的是两个函数在时域(或频域)中的卷积积分,对应于频域(或时域)中二者的傅里叶变换(或逆变换)应具有的关系。

1)时域卷积定理

若 $f_1(t)\leftrightarrow F_1(\mathrm{j}\omega)$,$f_2(t)\leftrightarrow F_2(\mathrm{j}\omega)$,则

$$f_1(t)*f_2(t)\leftrightarrow F_1(\mathrm{j}\omega)F_2(\mathrm{j}\omega) \tag{3-4-24}$$

式(3-4-24)表明,在时域中两个函数的卷积积分,对应于在频域中两个函数频谱的乘积。

2)频域卷积定理

若 $f_1(t)\leftrightarrow F_1(\mathrm{j}\omega)$,$f_2(t)\leftrightarrow F_2(\mathrm{j}\omega)$,则

$$f_1(t)f_2(t)\leftrightarrow \frac{1}{2\pi}F_1(\mathrm{j}\omega)*F_2(\mathrm{j}\omega) \tag{3-4-25}$$

其中,

$$F_1(\mathrm{j}\omega)*F_2(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(\mathrm{j}\eta)F_2(\mathrm{j}\omega-\mathrm{j}\eta)\mathrm{d}\eta \tag{3-4-26}$$

式(3-4-25)表明,在时域中两个函数的乘积,对应于在频域中两个频谱函数之卷积积分的$\frac{1}{2\pi}$倍。

时域卷积定理证明如下。

根据卷积积分的定义

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

其傅里叶变换为

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f_1(t)*f_2(t)]&=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(t-\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{3-4-27}$$

由时移特性知

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(t-\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t=F_2(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}$$

将它代入式(3-4-27)中,得

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f_1(t)*f_2(t)]&=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)F_2(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau=F_2(\mathrm{j}\omega)\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau\\&=F_1(\mathrm{j}\omega)F_2(\mathrm{j}\omega)\end{aligned}$$

频域卷积定理的证明类似,这里从略。

例 3-11 求三角形脉冲的频谱函数。

$$f_\Delta(t)=\begin{cases}1-\dfrac{2}{\tau}|t|, & |t|<\dfrac{\tau}{2}\\[2mm] 0, & |t|>\dfrac{\tau}{2}\end{cases}$$

解:两个完全相同的门函数卷积可得到三角形脉冲。这里三角形脉冲的宽度为 τ,幅度为 1,为此选宽度为$\frac{\tau}{2}$,幅度为$\sqrt{\frac{2}{\tau}}$的门函数,即令 $f(t)=\sqrt{\frac{2}{\tau}}g_{\frac{\tau}{2}}(t)$,如图 3-4-5(a)所示,即 $f(t)*f(t)=f_\Delta(t)$。

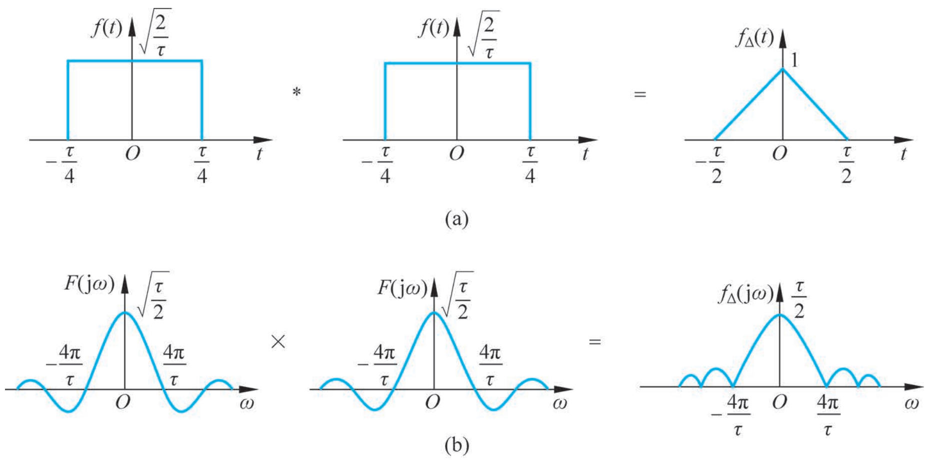

图 3-4-5　例 3-11 图

由于门函数 $g_\tau(t)$ 与其频谱函数的对应关系为

$$g_\tau(t) \leftrightarrow \tau \mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

利用尺度变换特性，令 $a=2$，将 $g_\tau(t)$ 压缩，得

$$g_{\frac{\tau}{2}}(t) \leftrightarrow \frac{\tau}{2}\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

于是得到信号 $f(t)$ 的频谱函数

$$F(\mathrm{j}\omega)=\mathcal{F}\left[\sqrt{\frac{2}{\tau}}g_{\frac{\tau}{2}}(t)\right]=\sqrt{\frac{\tau}{2}}\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

最后，由时域卷积定理可得三角形脉冲 $f_\Delta(t)$ 的频谱函数

$$\begin{aligned}F_\Delta(\mathrm{j}\omega)&=\mathrm{FT}[f_\Delta(t)]=\mathrm{FT}[f(t)*f(t)]\\&=F(\mathrm{j}\omega)F(\mathrm{j}\omega)=\frac{\tau}{2}\mathrm{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)\end{aligned}\tag{3-4-28}$$

其频谱如图 3-4-5(b)所示。

例 3-12　求斜升函数 $r(t)=tu(t)$ 和函数 $|t|$ 的频谱函数。

解：(1) 求 $r(t)=tu(t)$ 的频谱函数。

由式(3-4-15)知

$$t \leftrightarrow \mathrm{j}2\pi\delta'(\omega)$$

根据频域卷积定理，并利用卷积运算的规则，可得 $tu(t)$ 的频谱函数

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[tu(t)]&=\frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[t]*\mathcal{F}[u(t)]=\frac{1}{2\pi}\mathrm{j}2\pi\delta'(\omega)*\left[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\right]\\&=\mathrm{j}\pi\delta'(\omega)*\delta(\omega)+\delta'(\omega)*\frac{1}{\omega}=\mathrm{j}\pi\delta'(\omega)-\frac{1}{\omega^2}\end{aligned}$$

即

$$tu(t)\leftrightarrow -\frac{1}{\omega^2}+\mathrm{j}\pi\delta'(\omega)\tag{3-4-29}$$

(2) 求$|t|$的频谱函数。

由于 t 的绝对值可写为

$$|t|=tu(t)+(-t)u(-t)$$

对式(3-4-29)利用奇偶性中的式(3-4-8),有

$$(-t)u(-t)\leftrightarrow -\frac{1}{\omega^2}-\mathrm{j}\pi\delta'(\omega)$$

利用线性性质,可得函数$|t|$与其频谱函数的对应关系为

$$|t|\leftrightarrow -\frac{2}{\omega^2} \tag{3-4-30}$$

8. 时域微分和积分

这里研究信号 $f(t)$对时间 t 的导数和积分的傅里叶变换。$f(t)$的导数和积分可用下述符号表示。

$$f^n(t)=\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n} \tag{3-4-31}$$

$$f^{(-1)}(t)=\int_{-\infty}^{t} f(x)\mathrm{d}x \tag{3-4-32}$$

(1) 时域微分(定理)。

若 $f(t)\leftrightarrow F(\mathrm{j}\omega)$,则

$$f^{(n)}(t)\leftrightarrow(\mathrm{j}\omega)^n F(\mathrm{j}\omega) \tag{3-4-33}$$

(2) 时域积分(定理)。

若 $f(t)\leftrightarrow F(\mathrm{j}\omega)$,则

$$f^{(-1)}(t)\leftrightarrow\pi F(0)\delta(\omega)+\frac{F(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{j}\omega} \tag{3-4-34}$$

其中,$F(0)=F(\mathrm{j}\omega)|_{\omega=0}$,它也可以根据傅里叶变换定义(见式(3-4-1))令 $\omega=0$ 得到,即

$$F(0)=F(\mathrm{j}\omega)\,|_{\omega=0}=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \tag{3-4-35}$$

如果 $F(0)=0$,则式(3-4-34)为

$$f^{(-1)}(t)\leftrightarrow\frac{F(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{j}\omega} \tag{3-4-36}$$

式(3-4-33)、式(3-4-34)可证明如下。

由第 2 章卷积的微分运算知,$f(t)$的一阶导数可写为

$$f'(t)=f'(t)*\delta(t)=f(t)*\delta'(t)$$

根据时域卷积定理,考虑到 $\delta'(t)\leftrightarrow\mathrm{j}\omega$,有

$$\mathcal{F}[f'(t)]=\mathcal{F}[f(t)]\,\mathcal{F}[\delta'(t)]=\mathrm{j}\omega F(\mathrm{j}\omega)$$

重复运用以上结果,得

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(t)]=(\mathrm{j}\omega)^n F(\mathrm{j}\omega)$$

即式(3-4-33)得证。

函数 $f(t)$的积分可写为

$$f^{-1}(t)=f^{(-1)}(t)*\delta(t)=f(t)*u(t)$$

根据时域卷积定理并考虑到冲激函数的采样性质,得

$$\mathcal{F}[f^{-1}(t)]=\mathcal{F}[f(t)]\,\mathcal{F}[u(t)]=F(\mathrm{j}\omega)\left[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\right]$$
$$=\pi F(0)\delta(\omega)+\frac{F(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{j}\omega}$$

即式(3-4-34)得证。

例 3-13 求三角形脉冲的频谱函数。

$$f_{\Delta}(t)=\begin{cases}1-\dfrac{2}{\tau}|t|, & |t|<\dfrac{\tau}{2}\\ 0, & |t|>\dfrac{\tau}{2}\end{cases}$$

解：三角形脉冲 $f_{\Delta}(t)$及其一阶、二阶导数如图 3-4-6(a)、图 3-4-6(b)、图 3-4-6(c)所示。若令 $f(t)=f''_{\Delta}(t)$，则三角形脉冲 $f_{\Delta}(t)$是函数 $f(t)$的二重积分，即

$$f_{\Delta}(t)=\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{x}f(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

式中，x 和 y 都是时间变量，引用它们是为了避免把积分限与被积函数相混淆。

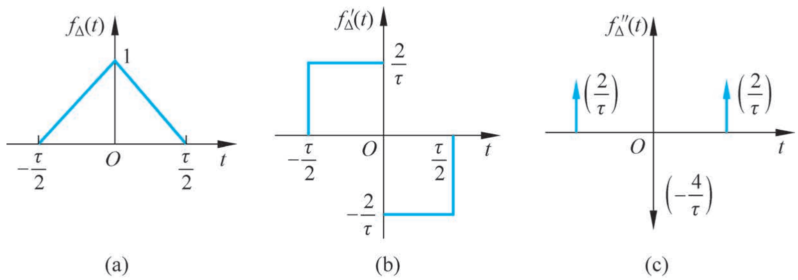

图 3-4-6 $f_{\Delta}(t)$及其导数

图 3-4-6(c)的函数由 3 个冲激函数组成，它可以写为

$$f(t)=\frac{2}{\tau}\delta\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-\frac{4}{\tau}\delta(t)+\frac{2}{\tau}\delta\left(t-\frac{\tau}{2}\right)$$

由于$\mathcal{F}[\delta(t)]=1$，根据时移特性，$f(t)$的频谱函数可以写为

$$F(\mathrm{j}\omega)=\frac{2}{\tau}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\omega\tau}{2}}-\frac{4}{\tau}+\frac{2}{\tau}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega\tau}{2}}=\frac{2}{\tau}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\omega t}{2}}-2+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega\tau}{2}})$$

$$=\frac{4}{\tau}\left[\cos\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)-1\right]=-\frac{8\sin^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)}{\tau}$$

由图 3-4-6(b)、图 3-4-6(c)可见，显然有$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t=0$和$\int_{-\infty}^{+\infty}f'_{\Delta}(t)\mathrm{d}t=0$，利用式(3-4-36)，得 $f_{\Delta}(t)$的频谱函数

$$F_{\Delta}(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{(\mathrm{j}\omega)^2}F(\mathrm{j}\omega)=\frac{8\sin^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)}{\omega^2\tau}=\frac{\tau}{2}\frac{\sin^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)}{\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)^2}=\frac{\tau}{2}\mathrm{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

可见结果与例 3-11 相同。

例 3-14 求门函数 $g_\tau(t)$ 积分的频谱函数。

$$f(t)=\frac{1}{\tau}\int_{-\infty}^{t} g_\tau(x)\mathrm{d}x$$

解： 门函数 $g_\tau(t)$ 及其积分 $\frac{1}{\tau}g_\tau^{-1}(t)$ 的波形如图 3-4-7 所示。门函数的频谱为

$$\mathcal{F}[g_\tau(t)]=\tau\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

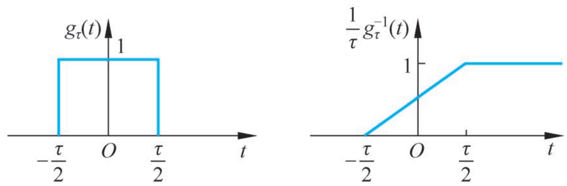

图 3-4-7 门函数 $g_\tau(t)$ 及其积分 $\frac{1}{\tau}g_\tau^{-1}(t)$ 的波形

由于 $\mathrm{Sa}(0)=1$，由式(3-4-34)得到 $f(t)$ 的频谱函数为

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(t)]&=\mathcal{F}\left[\frac{1}{\tau}g_\tau^{-1}(t)\right]=\pi\mathrm{Sa}(0)\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\\&=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\end{aligned} \tag{3-3-37}$$

需要指出的是，在欲求某函数 $g(t)$ 的傅里叶变换时，常可根据其导数的变换，利用积分特性求得 $\mathcal{F}[g(t)]$，如例 3-13、例 3-14。需要注意的是，对某些函数，虽然有 $f(t)=g'(t)$，但有可能 $g(t)\neq f^{-1}(t)=\int_{-\infty}^{t}f(x)\mathrm{d}x$，这是因为若设 $f(t)=\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t}$，则有

$$\mathrm{d}g(t)=f(t)\mathrm{d}t$$

对上式从 $-\infty$ 到 t 积分，有

$$g(t)-g(-\infty)=\int_{-\infty}^{t}f(x)\mathrm{d}x$$

即

$$g(t)=\int_{-\infty}^{t}f(x)\mathrm{d}x+g(-\infty) \tag{3-4-38}$$

式(3-4-38)表明，式(3-4-32)的约定中隐含着 $f^{-1}(-\infty)=0$。当常数 $g(-\infty)\neq 0$ 时，对式(3-4-38)进行傅里叶变换，得

$$G(\mathrm{j}\omega)=\pi F(0)\delta(\omega)+\frac{F(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{j}\omega}+2\pi g(-\infty)\delta(\omega) \tag{3-4-39}$$

例 3-15 求图 3-4-8(a)、图 3-4-8(b)所示信号的傅里叶变换。

解：(1) 图 3-4-8(a)的函数可写为

$$g_1(t)=2u(t+1)$$

其导数 $g_1'(t)=f(t)=2\delta(t+1)$，如图 3-4-8(c)所示。容易求得

$$f(t)\leftrightarrow F(\mathrm{j}\omega)=2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega},\quad F(0)=2$$

故可得

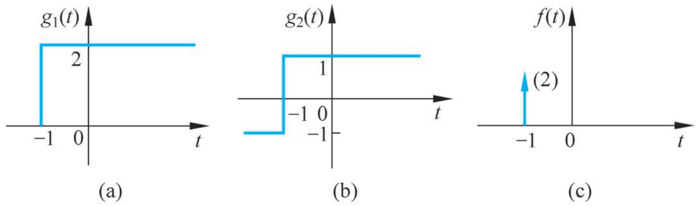

图 3-4-8　例 3-15 图

$$G_1(\mathrm{j}\omega)=2\pi\delta(\omega)+\frac{2}{\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}$$

（2）图 3-4-8(b)的函数可写为

$$g_2(t)=\operatorname{sgn}(t+1)=2u(t+1)-1$$

其导数也是 $f(t)=2\delta(t+1)$。由图 3-4-8(b)可见，$g_2(-\infty)=-1$，故可得

$$G_2(\mathrm{j}\omega)=2\pi\delta(\omega)+\frac{2}{\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}-2\pi\delta(\omega)=\frac{2}{\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}$$

9. 频域微分和积分

设

$$F^{n}(\mathrm{j}\omega)=\frac{\mathrm{d}^{n}F(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{d}\omega^{n}} \tag{3-4-40}$$

$$F^{-1}(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{\omega}F(\mathrm{j}\eta)\mathrm{d}\eta \tag{3-4-41}$$

与前类似，式(3-4-41)也隐含 $F^{-1}(-\infty)=0$。

1）频域微分

若 $f(t)\leftrightarrow F(\mathrm{j}\omega)$，则

$$(-\mathrm{j}t)^{n}f(t)\leftrightarrow F^{n}(\mathrm{j}\omega) \tag{3-4-42}$$

2）频域积分

若 $f(t)\leftrightarrow F(\mathrm{j}\omega)$，则

$$\pi f(0)\delta(t)+\frac{1}{-\mathrm{j}t}f(t)\leftrightarrow F^{-1}(\mathrm{j}\omega) \tag{3-4-43}$$

式中，

$$f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{d}\omega \tag{3-4-44}$$

如果 $f(0)=0$，则有

$$\frac{1}{-\mathrm{j}t}f(t)\leftrightarrow F^{-1}(\mathrm{j}\omega) \tag{3-4-45}$$

频域微分和积分的结果可用频域卷积定理证明，其方法与时域类似，这里从略。

例 3-16　求斜升函数 $tu(t)$的频谱函数。

解：单位阶跃信号 $u(t)$及其频谱函数为

$$u(t)\leftrightarrow\pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}$$

可得

$$-\mathrm{j}tu(t)\leftrightarrow\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\right]=\pi\delta'(\omega)-\frac{1}{\mathrm{j}\omega^2}$$

再根据线性性质,得

$$tu(t)\leftrightarrow-\frac{1}{\omega^2}+\mathrm{j}\pi\delta'(\omega)$$

与例 3-12 完全相同。

例 3-17 求函数 $\mathrm{Sa}(t)=\dfrac{\sin t}{t}$的频谱函数。

解: 首先求 $\sin t$ 的频谱函数,令

$$f(t)=\sin t=\frac{1}{2\mathrm{j}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}t})$$

由于$\mathcal{F}(1)=2\pi\delta(\omega)$,根据线性和频移特性,可得

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\sin t)&=\frac{1}{2\mathrm{j}}[\mathcal{F}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}t})-\mathcal{F}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}t})]=\frac{1}{2\mathrm{j}}[2\pi\delta(\omega-1)-2\pi\delta(\omega+1)]\\&=\mathrm{j}\pi[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)]\end{aligned}$$

由于 $f(t)=\sin t$,显然有 $f(0)=0$,故根据式(3-4-45),有

$$\mathcal{F}\left(\frac{f(t)}{-\mathrm{j}t}\right)=\mathcal{F}\left(\frac{\sin t}{-\mathrm{j}t}\right)=\mathrm{j}\pi\int_{-\infty}^{\omega}[\delta(\eta+1)-\delta(\eta-1)]\mathrm{d}\eta=\begin{cases}0, & \omega<-1\\ \mathrm{j}\pi, & -1<\omega<1\\ 0, & \omega>1\end{cases}$$

在时域、频域分别乘以$-\mathrm{j}$,得

$$\mathcal{F}\left(\frac{\sin t}{t}\right)=\begin{cases}0, & \omega<-1\\ \pi, & -1<\omega<1\\ 0, & \omega>1\end{cases}$$

或写为

$$\frac{\sin t}{t}\leftrightarrow\pi g_2(\omega)$$

所得结果与例 3-6 相同。

例 3-18 求 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(a\omega)}{\omega}\mathrm{d}\omega$ 的值。

解: 令 $\tau=2a$(显然 $\tau=2a>0$),可得幅度为 1,宽度为 $2a$ 的门函数 $g_{2a}(t)$与其傅里叶变换的对应关系为

$$g_{2a}(t)\leftrightarrow\frac{2\sin(a\omega)}{\omega}$$

根据傅里叶逆变换表示式,有

$$g_{2a}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\sin(a\omega)}{\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(a\omega)}{\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$

令 $t=0$,注意到 $g_{2a}(0)=1$,以及被积函数是 ω 的偶函数,得

$$1=g_{2a}(0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(a\omega)}{\omega}\mathrm{d}\omega=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin(a\omega)}{\omega}\mathrm{d}\omega$$

以上结果也可直接求得。上式为 $a>0$ 的结果;若 $a<0$,则 $\sin(a\omega)=-\sin(|a|\omega)$,于是得到

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(a\omega)}{\omega} d\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & a > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & a < 0 \end{cases}$$

3.4.2 相关定理

通常相关的概念是从研究随机信号的统计特性而引入的。本书从确定信号的相似性引出相关系数与相关函数的概念，为学习后续课程做好准备。

1. 相关系数与相关函数

在信号分析问题中，有时要求比较两个信号波形是否相似，希望给出二者相似程度的统一描述。例如，对于图 3-4-9(a)中的两个波形，从直观上很难说明它们的相似程度，它们在任何瞬间的取值似乎都是彼此不相关的($\rho_{xy}=0$)。图 3-4-9(b)是一对完全相似的波形，它们或是形状完全一致，或是变化规律相同而幅度成某一倍数关系($\rho_{xy}=1$)。图 3-4-9(c)的两个波形极性相反，二者幅度成负系数相乘的关系($\rho_{xy}=-1$)。对于这些不同组合的波形如何定量衡量它们之间的相关性，需要引出相关系数的概念。

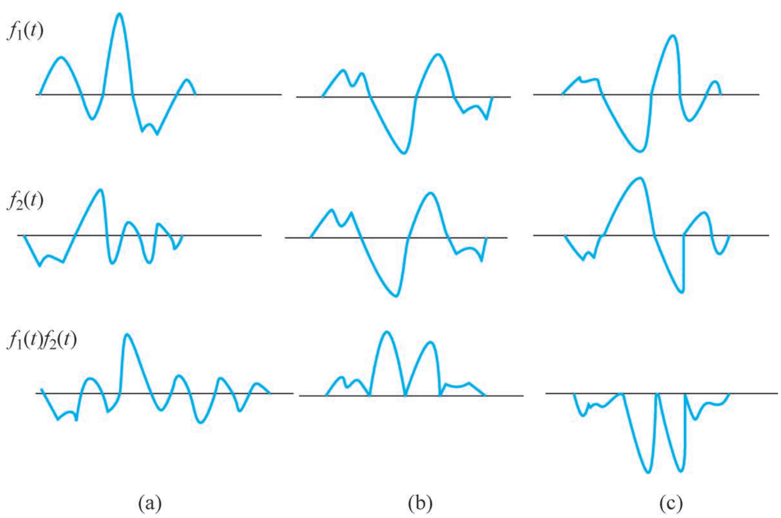

图 3-4-9 两个不相同、相同及相反波形

假定 $f_1(t)$和 $f_2(t)$是能量有限的实信号，选择适当的系数 c_{12} 使 $c_{12}f_2(t)$去逼近 $f_1(t)$，利用方均误差 $\overline{\varepsilon^2}$ 来说明二者的相似程度。令

$$\overline{\varepsilon^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} [f_1(t) - c_{12}f_2(t)]^2 dt$$

选择 c_{12} 使误差 $\overline{\varepsilon^2}$ 最小，即要求

$$\frac{d\overline{\varepsilon^2}}{dc_{12}} = 0$$

可得

$$c_{12} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)f_2(t)dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_2^2(t)dt}$$

此时,能量误差为

$$\overline{\varepsilon^2}=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[f_1(t)-f_2(t)\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t)f_2(t)\mathrm{d}t}{\int_{-\infty}^{+\infty}f_2^2(t)\mathrm{d}t}\right]^2\mathrm{d}t$$

将被积函数展开并化简,得到

$$\overline{\varepsilon^2}=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1^2(t)\mathrm{d}t-\frac{\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t)f_2(t)\mathrm{d}t\right]^2}{\int_{-\infty}^{+\infty}f_2^2(t)\mathrm{d}t}$$

令相对能量误差为

$$\frac{\overline{\varepsilon^2}}{\int_{-\infty}^{+\infty}f_1^2(t)\mathrm{d}t}=1-\rho_{12}^2$$

式中,

$$\rho_{12}=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t)f_2(t)\mathrm{d}t}{\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f_1^2(t)\mathrm{d}t\int_{-\infty}^{+\infty}f_2^2(t)\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{2}}}$$

通常把 ρ_{12} 称为 $f_1(t)$与 $f_2(t)$的相关函数。不难发现,借助柯西-施瓦茨不等式,可以求得

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t)f_2(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f_1^2(t)\mathrm{d}t\int_{-\infty}^{+\infty}f_2^2(t)\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$|\rho_{12}|\leqslant 1$$

由上述分析可以看出,对于两个能量有限信号,相关系数 ρ_{12} 的大小由两信号的内积决定。

$$\rho_{12}=\frac{\langle f_1(t),f_2(t)\rangle}{[\langle f_1(t),f_1(t)\rangle\langle f_2(t),f_2(t)\rangle]^{1/2}}=\frac{\langle f_1(t),f_2(t)\rangle}{\|f_1(t)\|_2\|f_2(t)\|_2}$$

对于图 3-4-9(b)、(c)所示的两个相同或相反的波形,由于它们的形状完全一致,内积的绝对值最大,ρ_{12} 分别等于$+1$ 或-1,此时 $\overline{\varepsilon^2}$ 等于零。一般情况下,ρ_{12} 取值为-1~$+1$。当 $f_1(t)$与 $f_2(t)$为正交函数时 $\rho_{12}=0$,此时 $\overline{\varepsilon^2}$ 最大。相关系数 ρ_{12} 从信号之间能量误差的角度描述了它们的相关特性,利用向量空间的内积运算给出了定量说明。

上面对两个固定信号波形的相关性进行了研究,然而经常会遇到更复杂的情况,信号 $f_1(t)$和 $f_2(t)$由于某种原因产生了时差,例如,雷达站接收到两个不同距离目标的反射信号,这就需要专门研究两信号在时移过程中的相关性,为此需引出相关函数的概念。

如果 $f_1(t)$与 $f_2(t)$是能量有限信号且为实函数,它们之间的相关函数定义为

$$R_{12}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t)f_2(t-\tau)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t+\tau)f_2(t)\mathrm{d}t \tag{3-4-46}$$

$$R_{21}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t-\tau)f_2(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t)f_2(t+\tau)\mathrm{d}t \tag{3-4-47}$$

显然,相关函数 $R(\tau)$是两信号之间时差的函数,注意上两式中下标顺序不能互换,一般情况下,$R_{12}(\tau)\neq R_{21}(\tau)$。不难证明

$$R_{12}(\tau)=R_{21}(-\tau)$$

若 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 是同一信号，即 $f_1(t)=f_2(t)=f(t)$，此时相关函数无须加注下标，以 $R(\tau)$ 表示，称为自相关函数。

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)f(t-\tau)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t+\tau)f(t)\mathrm{d}t$$

与自相关函数相对照，一般的两信号之间的相关函数也称为互相关函数。显然，对自相关函数有如下性质：

$$R(\tau)=R(-\tau)$$

可见，实函数的自相关函数是时移 τ 的偶函数。

2. 相关与卷积的比较

函数 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的卷积表达式为

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

为便于和相关函数表达式相比较，把式(3-4-46)中的变量 t 与 τ 互换，这样，实函数的互相关函数表达式可写作

$$R_{12}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(\tau-t)\mathrm{d}\tau$$

借助变量置换方法，容易求得

$$R_{12}(t)=f_1(t)*f_2(-t)$$

可见，将 $f_2(t)$ 反折(变量取负号)与 $f_1(t)$ 卷积积分，即得 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的相关函数 $R_{12}(t)$。

3. 相关定理

在前面已经讨论了傅里叶变换的 9 个性质，这里介绍的相关定理作为其第 10 个性质。

若已知 $\mathcal{F}[f_1(t)]=F_1(\mathrm{j}\omega)$，$\mathcal{F}[f_2(t)]=F_2(\mathrm{j}\omega)$，则

$$\mathcal{F}[R_{12}(\tau)]=F_1(\mathrm{j}\omega)F_2^*(\mathrm{j}\omega) \tag{3-4-48}$$

证明： 由相关函数定义可知

$$R_{12}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t)f_2(t-\tau)\mathrm{d}t$$

取傅里叶变换

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[R_{12}(\tau)]&=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{12}(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t)f_2(t-\tau)\mathrm{d}t\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(t-\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t)F_2^*(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$\mathcal{F}[R_{12}(\tau)]=F_1(\mathrm{j}\omega)F_2^*(\mathrm{j}\omega)$$

同理可得

$$\mathcal{F}[R_{21}(\tau)]=F_1^*(\mathrm{j}\omega)F_2(\mathrm{j}\omega) \tag{3-4-49}$$

若 $f_1(t)=f_2(t)=f(t)$，$\mathcal{F}[f(t)]=F(\mathrm{j}\omega)$，则自相关函数为

$$\mathcal{F}[R(\tau)]=|F(\mathrm{j}\omega)|^2 \tag{3-4-50}$$

可见,两信号互相关函数的傅里叶变换等于其中第一个信号的变换与第二个信号变换取共轭二者的乘积,这就是相关定理。

3.4.3 MATLAB 实现

1. 傅里叶变换数值计算

连续时间信号的傅里叶变换涉及函数的数值计算问题。MATLAB 提供了多种计算数值积分的函数,如 quad()、quadl()、dblquad()、triplequad()、inline()等函数。下面以较常用的 quadl()函数为例,说明其在信号傅里叶变换计算中的应用。

quadl()函数的调用格式有以下两种:

```
y = quadl('F',a,b)
y = quadl('F',a,b,[ ],[ ],P)
```

其中,F 是被积函数的文件名,a、b 是积分的上下限,P 为传给函数 F 的参数。

例 3-19 试用数值计算方法计算非周期矩形脉冲信号 $p_2(t)$的频谱。

解: 在调用 quadl()函数之前,需要定义被积函数。对于非周期矩形脉冲信号 $p_2(t)$,其函数定义如下。

```
function y = f1(t,w);
y = (t >= -1&t <= 1). * exp(-j * w * t);
```

上述函数中的参数 w 为角频率,由调用它的程序规定其取值;t 为积分变量。将上述被积函数的 MATLAB 程序用文件名 f1.m 保存在与调用它的程序相同的位置。

计算非周期矩形脉冲信号 $p_2(t)$频谱的 MATLAB 程序如下。

```
w = linspace(-6 * pi,6 * pi,512);
N = length(w);
F = zeros(1,N);
for k = 1:N
    F(k) = quadl('f1',-1,1,[ ],[ ],w(k));
end
figure(1);
plot(w,real(F));
xlabel('\omega');
ylabel('F(j\omegal)');
```

该程序的运行结果如图 3-4-10 所示。已知脉冲宽度为 2 的非周期矩形脉冲信号 $p_2(t)$频谱为 $\mathcal{F}[p_2(t)]=2\mathrm{Sa}(\omega)$。可见,由 MATLAB 程序计算所得频谱与理论频谱是一致的。

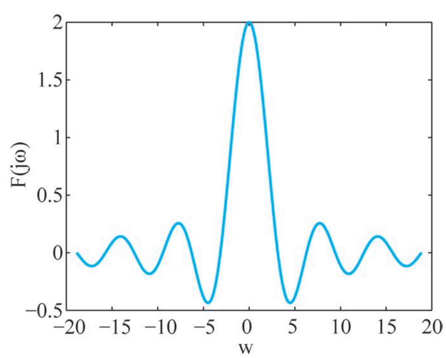

图 3-4-10 非周期矩形脉冲信号 $p_2(t)$的频谱

2. 傅里叶变换和傅里叶逆变换

例 3-20 已知 $f(t)=\mathrm{e}^{-2|t|}$,求其傅里叶变换。

解: MATLAB 程序如下。

```
syms t;
F = fourier(exp(-2 * abs(t)))
ezplot(F);
```

执行该程序,运行结果为

```
F =
4/(4 + w^2)
```

即

$$e^{-2|t|} \leftrightarrow \frac{4}{4+\omega^2}$$

绘制的图形如图 3-4-11 所示。

例 3-21 试画出信号 $f(t)=\frac{2}{3}e^{-3t}u(t)$的波形及其幅频特性曲线。

解： MATLAB 程序如下。

```
syms t w f;
f = 2/3 * exp( - 3 * t) * str2sym('heaviside(t)');
F = fourier(f,t,w);
subplot(2,1,1);
ezplot(f);
subplot(2,1,2);
ezplot(abs(F));
```

执行该程序，运行结果如图 3-4-12 所示。

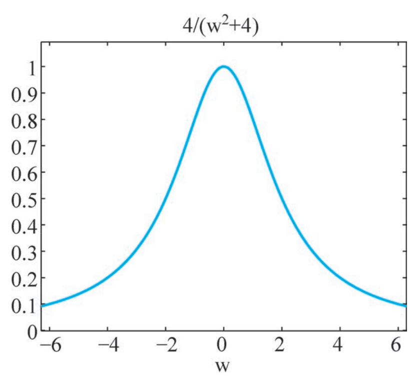

图 3-4-11 信号 $f(t)$的傅里叶变换

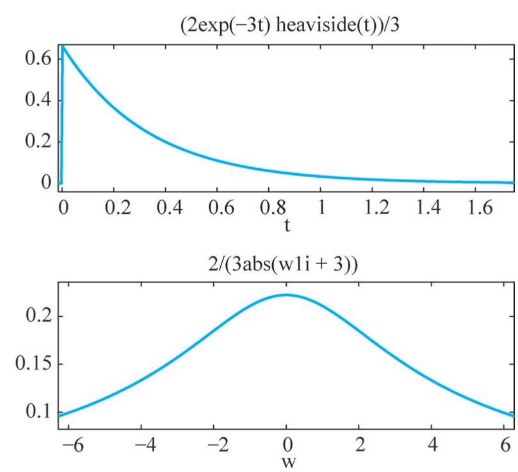

图 3-4-12 信号 $f(t)$的波形及其幅频特性曲线

例 3-22 已知 $F(j\omega)=\frac{1}{1+\omega^2}$，求其傅里叶逆变换。

解： MATLAB 程序如下。

```
syms t w;
f = ifourier(1/(1 + w^2),w,t)
```

执行该程序，运行结果为

```
f =
1/2 * exp( - t) * heaviside(t) + 1/2 * exp(t) * heaviside( - t)
```

即

$$\frac{1}{1+\omega^2} \leftrightarrow \left(\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{t}\right)u(t)$$

3. 傅里叶变换的时移特性

分别绘制信号 $f(t)=\frac{1}{2}e^{-2t}u(t)$ 与信号 $f(t-1)$ 的频谱图,并观察信号时移对信号频谱的影响。

1) 信号 $f(t)=\frac{1}{2}e^{-2t}u(t)$ 的频谱

MATLAB 程序如下。

```
t = - 5:0.02:5;N = 200;W = 2 * pi;k = - N:N;w = k * W/N;
f1 = 1/2 * exp( - 2 * t). * stepfun(t,0);
F = 0.02 * f1 * exp( - j * t' * w);
F1 = abs(F);P1 = angle(F);
subplot(3,1,1);plot(t,f1);grid;
xlabel('t');ylabel('f(t)');title('f(t)');
subplot(3,1,2);plot(w,F1);grid;
xlabel('w');ylabel('F(jw)');title('模');
subplot(3,1,3);plot(w,P1 * 180/pi);grid,
xlabel('w');ylabel('相位');title('相位(度)');
```

执行该程序,运行结果如图 3-4-13 所示。

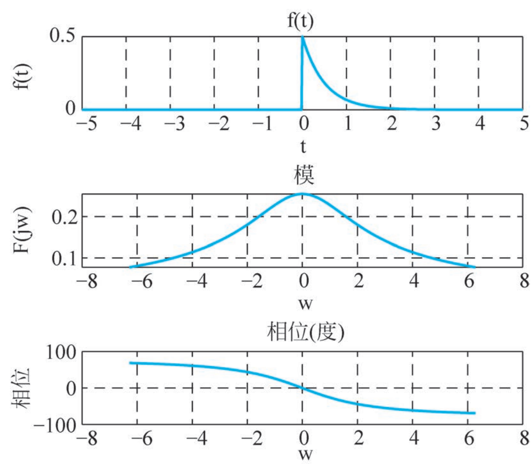

图 3-4-13 傅里叶变换的时移特性

2) 信号 $f(t-1)$ 的频谱

MATLAB 程序如下。

```
t = - 5:0.02:5;N = 200;W = 2 * pi;k = - N:N;w = k * W/N;
f1 = 1/2 * exp( - 2 * (t - 1)). * stepfun(t,1);
F = 0.02 * f1 * exp( - j * t' * w);
F1 = abs(F);P1 = angle(F);
subplot(3,1,1);plot(t,f1);grid on;
xlabel('t');ylabel('f(t)');title('f(t - 1)');
subplot(3,1,2);plot(w,F1);grid on;
xlabel('w');ylabel('F(jw)');title('F(jw)的模');
subplot(3,1,3);plot(w,P1 * 180/pi);grid,
xlabel('w');ylabel('相位');title('相位(度)');
```

执行该程序,运行结果如图 3-4-14 所示。

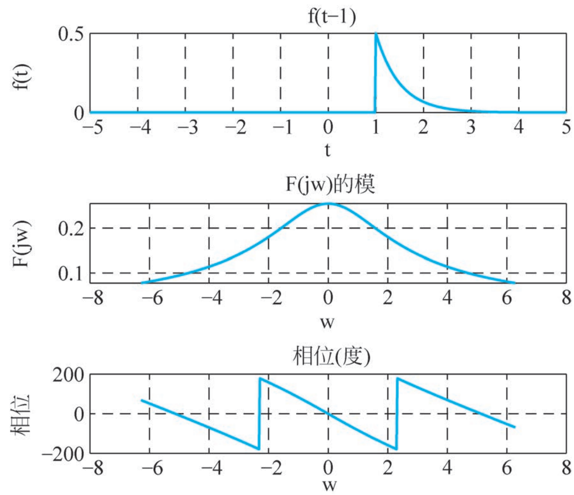

图 3-4-14　傅里叶变换的时移特性

4. 傅里叶变换的频移特性

信号 $f(t)=g_2(t)$为门信号,试绘制信号 $f_1(t)=f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}10t}$ 以及信号 $f_2(t)=f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}10t}$ 的频谱图,并与原信号频谱图进行比较。

MATLAB 程序如下。

```
t = - 2:0.02:2;f = stepfun(t, - 1) - stepfun(t,1);
f1 = f. * exp( - j * 10 * t);f2 = f. * exp(j * 10 * t);
W1 = 2 * pi * 5;N = 500;k = - N:N;W = k * W1/N;
F1 = f1 * exp( - j * t' * W) * 0.02;
F2 = f2 * exp( - j * t' * W) * 0.02;
F1 = real(F1);F2 = real(F2);
subplot(2,1,1);plot(W,F1);
xlabel('w');ylabel('F1(jw)');title('F1(jw)频谱');
subplot(2,1,2);plot(W,F2);
xlabel('w');ylabel('F2(jw)');title('F2(jw)频谱');
```

执行该程序,运行结果如图 3-4-15 所示。

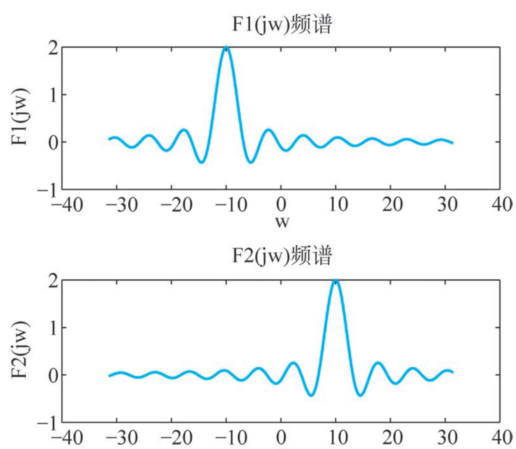

图 3-4-15　傅里叶变换的频移特性

视频讲解

3.5 周期信号的傅里叶变换

在前面讨论周期信号的傅里叶级数和非周期信号的傅里叶变换的基础上，本节将研究周期信号的傅里叶变换，以及傅里叶级数与傅里叶变换之间的关系。这样，就能把周期信号与非周期信号的分析方法统一起来，使傅里叶变换的应用范围更加广泛。

1. 正、余弦函数的傅里叶变换

由于常数1(即幅值为1的直流信号)的傅里叶变换

$$\mathcal{F}(1)=2\pi\delta(\omega) \tag{3-5-1}$$

根据相移特性，可得

$$\mathcal{F}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t})=2\pi\delta(\omega-\omega_0) \tag{3-5-2}$$

$$\mathcal{F}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t})=2\pi\delta(\omega+\omega_0) \tag{3-5-3}$$

利用式(3-5-2)和式(3-5-3)，可得正、余弦函数的傅里叶变换

$$\mathcal{F}[\cos(\omega_0 t)]=\mathcal{F}\left[\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t})\right]=\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)] \tag{3-5-4}$$

$$\mathcal{F}[\sin(\omega_0 t)]=\mathcal{F}\left[\frac{1}{2\mathrm{j}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t})\right]=\mathrm{j}\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)] \tag{3-5-5}$$

正、余弦信号的波形及频谱如图3-5-1所示。

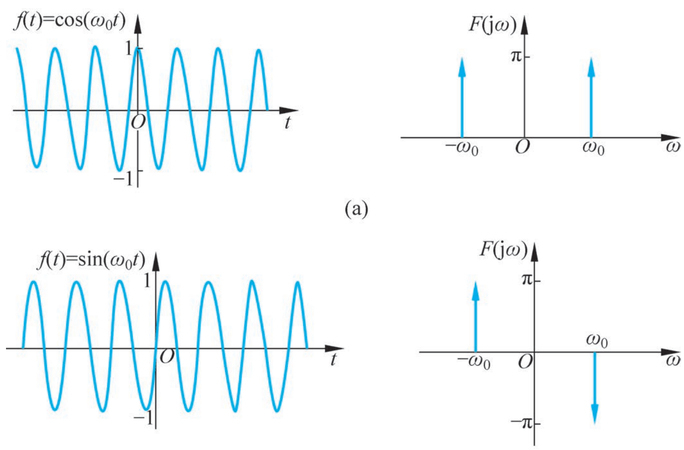

图3-5-1 正、余弦函数及其频谱

2. 一般周期函数的傅里叶变换

对于一般周期为 T 的周期信号 $f(t)$，其指数型傅里叶级数展开式为

$$f_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega t} \tag{3-5-6}$$

式中，$\Omega=\dfrac{2\pi}{T}$是基波分量，F_n 是傅里叶系数。

$$F_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\Omega t}\,\mathrm{d}t \tag{3-5-7}$$

对式(3-5-6)两边取傅里叶变换,并利用其线性和频移性,且考虑到 F_n 与时间 t 无关,可得

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f_T(t)]&=\mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega t}\right]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_n\,\mathcal{F}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega t}]\\&=2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_n\delta(\omega-n\Omega)\end{aligned}\tag{3-5-8}$$

式(3-5-8)表明,一般周期信号的傅里叶变换(频谱函数)是由无穷多个冲激函数组成的,这些冲激函数位于信号的各谐波频率 $n\Omega(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$处,其强度为相应傅里叶级数系数 F_n 的 2π 倍。

例 3-23　周期性矩形脉冲信号 $p_T(t)$如图 3-5-2(a)所示,其周期为 T,脉冲宽度为 τ,幅度为 1,试求其频谱函数。

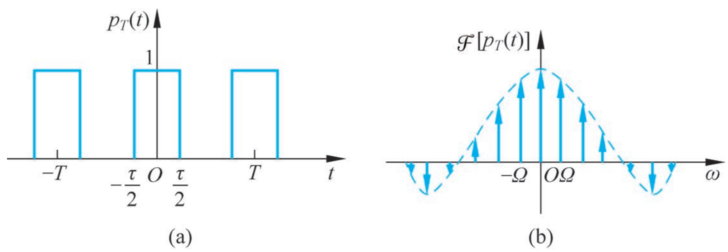

图 3-5-2　周期性矩形脉冲信号及其频谱

解: 在前面已经求得图 3-5-2(a)所示周期性矩形脉冲信号 $f(t)=p_T(t)$的傅里叶系数为

$$F_n=\frac{\tau}{T}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right)\tag{3-5-9}$$

代入式(3-5-8),得

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[p_T(t)]&=\frac{2\tau\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right)\delta(\omega-n\Omega)\\&=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{2\sin\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right)}{n}\delta(\omega-n\Omega)\end{aligned}\tag{3-5-10}$$

式中,$\Omega=\frac{2\pi}{T}$。可见,周期矩形脉冲信号 $p_T(t)$的傅里叶变换由位于 $\omega=0,\pm\Omega,\pm2\Omega,\cdots$处的冲激函数所组成,其在 $\omega=\pm n\Omega$ 处的强度为$\frac{2\sin\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right)}{n}$。图 3-5-2(b)给出了 $T=4\tau$ 情况下的频谱图。由图 3-5-2(b)可见,周期信号的频谱密度是离散的。

需要注意的是,虽然从频谱的图形看,这里的 $F(\mathrm{j}\omega)$与前面的 F_n 是极相似的,但是二者含义不同。当对周期函数进行傅里叶变换时,得到的是频谱;而将该函数展开为傅里叶级数时,得到的是傅里叶系数,它代表虚指数分量的幅度和相位。

在引入了冲激函数以后,对周期函数也能进行傅里叶变换,从而对周期函数和非周期函数可以用相同的观点和方法进行分析运算,这给信号和系统分析带来了很大方便。

例 3-24 图 3-5-3(a)画出了周期为 T 的周期性单位脉冲函数序列 $\delta_T(t)$：

$$\delta_T(t)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\delta(t-mT) \tag{3-5-11}$$

式中，m 为整数。求其傅里叶变换。

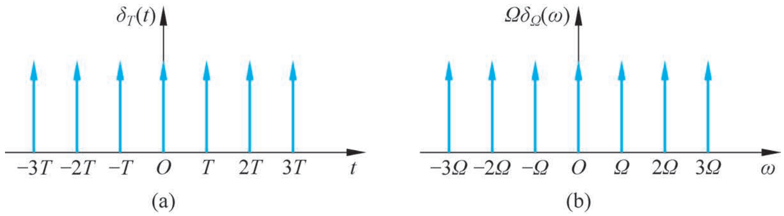

图 3-5-3 周期脉冲序列及其傅里叶变换

解：首先求出周期性脉冲函数序列的傅里叶系数。由式(3-5-7)知

$$F_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\Omega t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\delta_T(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\Omega t}\,\mathrm{d}t$$

由图 3-5-3(a)可见，函数 $\delta_T(t)$在区间$\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right)$内只有一个冲激函数 $\delta(t)$。考虑到冲激函数的采样性质，上式可写为

$$F_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\delta(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\Omega t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{T} \tag{3-5-12}$$

将它代入式(3-5-8)，得 $\delta_T(t)$的傅里叶变换为

$$\mathcal{F}[\delta_T(t)]=\frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-n\Omega)=\Omega\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-n\Omega) \tag{3-5-13}$$

令

$$\delta_\Omega(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-n\Omega) \tag{3-5-14}$$

它是在频域内周期为 Ω 的冲激函数序列。这样，时域周期为 T 单位冲激函数序列 $\delta_T(t)$与其傅里叶变化的关系为

$$\delta_T(t)\leftrightarrow\Omega\delta_\Omega(\omega) \tag{3-5-15}$$

式(3-5-15)表明，在时域中周期为 T 的单位冲激函数序列 $\delta_T(t)$的傅里叶变换是一个在频域中周期为 Ω、强度为 Ω 的冲激序列。图 3-5-3 中画出了 $\delta_T(t)$及其频谱函数。

如有周期信号 $f_T(t)$，从该信号中截取一个周期，例如$\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right)$，就得到单脉冲信号，令其为 $f_0(t)$，如图 3-5-4 所示。

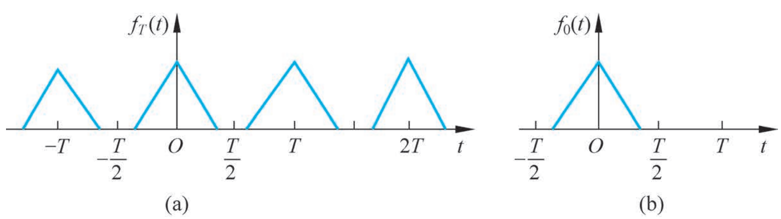

图 3-5-4 从周期信号中截取一个周期

由前面的内容可以知道，周期为 T 的周期信号 $f_T(t)$ 可看作 $f_0(t)$ 与周期为 T 的冲激序列 $\delta_T(t)$ 的卷积，即

$$f_T(t)=f_0(t)*\delta_T(t) \tag{3-5-16}$$

式中，$\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)$。设 $f_0(t)$ 的傅里叶变换为 $F_0(\mathrm{j}\omega)$，根据时域卷积定理可得周期信号 $f_T(t)$ 的傅里叶变换为

$$\mathcal{F}[f_T(t)]=F_0(\mathrm{j}\omega)\Omega\delta_\Omega(\omega)=\Omega\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_0(\mathrm{j}n\Omega)\delta(\omega-n\Omega) \tag{3-5-17}$$

式(3-5-17)表明，利用信号 $f_0(t)$ 的傅里叶变换 $F_0(\mathrm{j}\omega)$，很容易求得周期信号 $f_T(t)$ 的傅里叶变换。

3. 傅里叶系数与傅里叶变换

式(3-5-8)和式(3-5-17)都是周期信号 $f_T(t)$ 的傅里叶变换表示式，比较两式可得，周期信号 $f_T(t)$ 的傅里叶系数 F_n 与其第一个周期脉冲的单脉冲信号频谱 $F_0(\mathrm{j}\omega)$ 的关系为

$$F_n=\frac{1}{T}F_0(\mathrm{j}n\Omega)=\frac{1}{T}F_0(\mathrm{j}\omega)\Big|_{\omega=n\Omega} \tag{3-5-18}$$

式(3-5-18)表明，周期信号的傅里叶系数 F_n 等于 $F_0(\mathrm{j}\omega)$ 在频率为 $n\Omega$ 处的值乘以 $\frac{1}{T}$。

由傅里叶系数的定义式可得

$$F_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\Omega t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_0(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\Omega t}\,\mathrm{d}t$$

由傅里叶变换的定义式可得

$$F_0(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_0(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_0(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t$$

比较以上两式可得到式(3-5-18)。这表示，傅里叶变换中的许多性质和定理也可以用于傅里叶级数，这提供了一种求周期信号傅里叶系数的方法。

例 3-25 将如图 3-5-5(a)所示的周期信号 $f_T(t)$ 展开成指数形式的傅里叶级数。

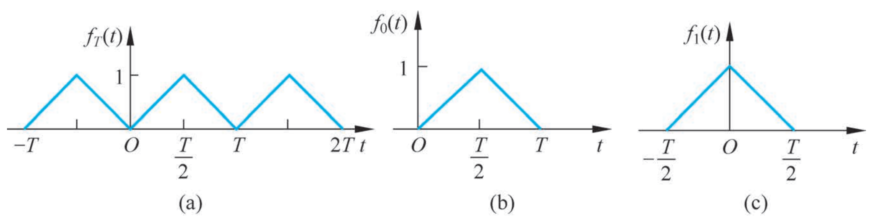

图 3-5-5 例 3-25 图

解： 周期信号 $f_T(t)$ 的一个周期波形 $f_0(t)$ 如图 3-5-5(b)所示。图 3-5-5(c)所示信号 $f_1(t)$ 的傅里叶变换为

$$F_1(\mathrm{j}\omega)=\frac{T}{2}\mathrm{Sa}^2\left(\frac{\omega T}{4}\right)$$

图 3-5-5(b)的信号 $f_0(t)$ 比 $f_1(t)$ 延迟 $\frac{T}{2}$，即

$$f_0(t)=f_1\left(t-\frac{T}{2}\right)$$

根据时移特性,信号 $f_0(t)$ 的傅里叶系数为

$$F_0(\mathrm{j}\omega)=F_1(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega T}{2}}=\frac{T}{2}\mathrm{Sa}^2\left(\frac{\omega T}{4}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega T}{2}}$$

由式(3-5-18),可得周期信号 $f_T(t)$ 的傅里叶系数为

$$F_n=\frac{1}{2}\mathrm{Sa}^2\left(\frac{n\Omega T}{4}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{n\Omega T}{2}}=\frac{1}{2}\mathrm{Sa}^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\pi}$$

即

$$F_n=2\frac{\sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2\pi^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\pi}$$

于是得到周期信号 $f_T(t)$ 的傅里叶展开式为

$$f_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}2\frac{\sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2\pi^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega t}$$

视频讲解

3.6 采样定理

采样定理论述了在一定条件下,一个连续时间信号完全可以用该信号在等时间间隔上的瞬时值(或称样本值)来表示。这些样本值包含了该连续时间信号的全部信息,可以利用这些样本值把信号完全恢复过来。采样定理为连续时间信号与离散时间信号的相互转换提供了理论依据。由于离散时间信号(或数字信号)的处理更为灵活、方便,在许多实际应用中(如数字通信系统等),首先将连续信号转换为相应的离散信号,并进行加工处理,然后再将处理后的离散信号转换为连续信号。在数字信号处理技术和计算机广泛应用的今天,连续时间信号的离散处理显得日益重要。

3.6.1 采样信号的频谱

所谓"采样",就是利用采样脉冲序列 $s(t)$ 从连续时间信号 $f(t)$ 中抽取一系列离散样本值的过程,这样得到的信号为采样信号,如图 3-6-1 所示。

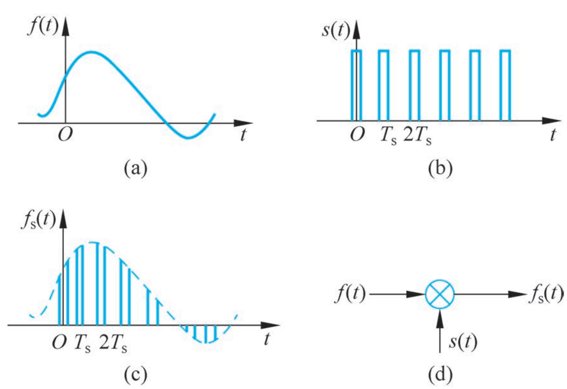

图 3-6-1 信号的采样

采样信号 $f_s(t)$ 可写为

$$f_s(t)=f(t)s(t) \tag{3-6-1}$$

若采用均匀采样，采样周期为 T_s，则采样频率为 $\omega_s=2\pi f_s=\dfrac{2\pi}{T_s}$。

令 $F(j\omega)=\mathcal{F}[f(t)]$，$S(j\omega)=\mathcal{F}[s(t)]$，则根据频域卷积定理得到采样信号 $f_s(t)$ 的频谱函数为

$$F_s(j\omega)=\frac{1}{2\pi}F(j\omega)*S(j\omega) \tag{3-6-2}$$

1. 冲激采样

若采样脉冲取周期为 T_s 的冲激函数序列 $\delta_{T_s}(t)$，则称为冲激采样。冲激序列的频谱函数也为周期冲激序列，有

$$S(j\omega)=\mathcal{F}[\delta_{T_s}(t)]=\mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_s)\right]=\omega_s\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-n\omega_s) \tag{3-6-3}$$

函数 $\delta_{T_s}(t)$ 及其频谱如图 3-6-2(c)、(d)所示。

如果信号 $f(t)$ 的频带是有限的，也就是说，信号 $f(t)$ 的频谱只在区间 $(-\omega_m,\omega_m)$ 为有限值，而在此区间外为零，这样的信号称为频带有限信号。

将式(3-6-3)代入式(3-6-2)，得

$$\begin{aligned}F_s(j\omega)&=\frac{1}{2\pi}F(j\omega)*S(j\omega)=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(j\omega)*\delta(\omega-n\omega_s)\\&=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F[j(\omega-n\omega_s)]\end{aligned} \tag{3-6-4}$$

式(3-6-4)说明 $F_s(j\omega)$ 以 ω_s 为周期等幅重复，如图 3-6-2 所示。

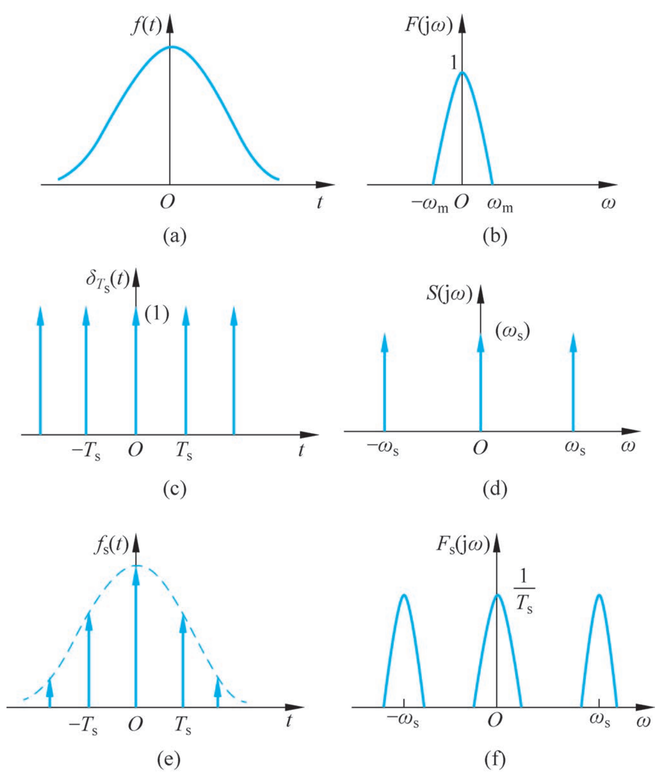

图 3-6-2 冲激采样

2. 矩形脉冲采样

若采样脉冲取幅度为 1,脉宽为 $\tau(\tau<T_s)$的单位矩形脉冲序列 $p_{T_s}(t)$,则采样脉冲的频谱函数为

$$P(\mathrm{j}\omega)=\mathcal{F}[p_{T_s}(t)]=\frac{2\pi\tau}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_s\tau}{2}\right)\delta(\omega-n\omega_s) \tag{3-6-5}$$

将式(3-6-5)代入式(3-6-2),得

$$\begin{aligned}F_s(\mathrm{j}\omega)&=\frac{1}{2\pi}F(\mathrm{j}\omega)*S(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{2\pi}F(\mathrm{j}\omega)*\frac{2\pi\tau}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_s\tau}{2}\right)\delta(\omega-n\omega_s)\\&=\frac{\tau}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_s\tau}{2}\right)F[\mathrm{j}(\omega-n\omega_s)]\end{aligned} \tag{3-6-6}$$

矩形脉冲采样信号如图 3-6-3 所示。显然,冲激采样是矩形脉冲采样的一种极限情况($\tau\to0$)。

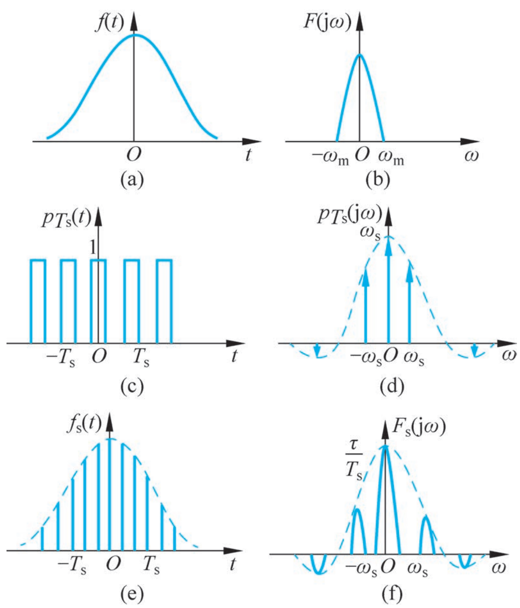

图 3-6-3 矩形脉冲采样

综上所述,时域采样在时域使信号离散化,同时,在频域使原信号频谱进行加权的周期延拓,即时域采样对应着频域的周期重复。

3.6.2 时域采样定理

【科学家故事之四】 奈奎斯特

奈奎斯特

具体内容请扫描二维码查看。

时域采样定理可表示如下。

若连续信号 $f(t)$的频谱占据$(-\omega_m,\omega_m)$的范围,则此信号称为频谱受限信号,用等间隔采样值唯一表示 $f(t)$的条件为,采样角频率 ω_s 必须大于或等于 $2\omega_m$,即

$$\omega_s\geqslant2\omega_m \tag{3-6-7}$$

或采样周期

$$T_s \leqslant \frac{1}{2f_m} \tag{3-6-8}$$

式(3-6-7)可等效为最小采样角频率或最小采样频率为

$$\omega_s = 2\omega_m, \quad f_s = 2f_m \tag{3-6-9}$$

式中，$f_s = \frac{\omega_s}{2\pi}$，$f_m = \frac{\omega_m}{2\pi}$。

从前面的分析结果可知，若信号 $f(t)$ 的频谱 $F(j\omega)$ 限制在 $(-\omega_m, \omega_m)$ 的范围内，则以间隔 $T_s\left(\text{或重复角频率 } \omega_s = \frac{2\pi}{T_s}\right)$ 对信号进行采样后，信号 $f_s(t)$ 的频谱 $F_s(j\omega)$ 是 $F(j\omega)$ 以 ω_s 为周期重复的频谱。此时，只有满足采样定理，$F_s(j\omega)$ 才不会产生频谱的重叠。这样，采样信号保留了原信号的全部信息，因此可以由 $f_s(t)$ 唯一地表示或恢复出 $f(t)$。若 $\omega_s < 2\omega_m$，则频谱产生混叠，如图 3-6-4 所示。

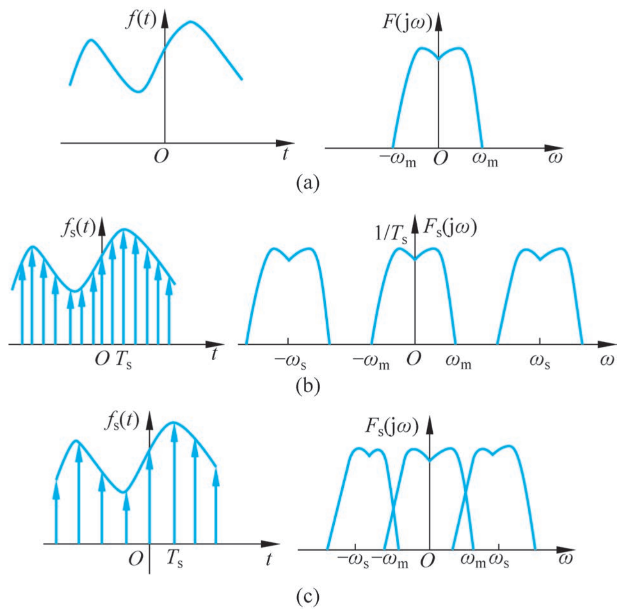

图 3-6-4　采样定理

通常把最低允许的采样频率 $f_s = 2f_m$ 称为“奈奎斯特频率”，把最大允许的采样间隔 $T_s = \frac{\pi}{\omega_m} = \frac{1}{2f_m}$ 称为“奈奎斯特间隔”。

3.6.3　频域采样定理

根据时域与频域的对称性，可以由时域采样定理直接推出频域采样定理。

频域采样定理表述为：一个时间受限信号 $f(t)$，若它集中在 $(-t_m, t_m)$ 的时间范围内，则该信号的频谱 $F(j\omega)$ 在频域中以间隔为 ω_s 的冲激序列进行采样，采样后的频谱 $F_s(j\omega)$ 可以唯一表示原信号的条件为重复周期 $T_s \geqslant 2t_m$，或频域间隔 $f_s = \frac{\omega_s}{2\pi} \leqslant \frac{1}{2t_m}\left(\text{其中，} \omega_s = \frac{2\pi}{T_s}\right)$。

3.6.4 MATLAB 实现

1. 正弦信号的采样

MATLAB 程序如下。

```
clf;
t = 0:0.0005:1;f = 13;
xa = cos(2 * pi * f * t);
subplot(2,1,1);plot(t,xa);grid;
xlabel('时间,msec');ylabel('幅值');title('连续时间信号 xa(t)');
axis([0 1 -1.2 1.2]);
subplot(2,1,2);T = 0.1;n = 0:T:1;
xs = cos(2 * pi * f * n);
k = 0:length(n) - 1;
stem(k,xs);grid;
xlabel('时间,msec');ylabel('幅值');title('离散时间信号 x(n)');
axis([0 (length(n) - 1) -1.2 1.2]);
```

执行该程序,正弦信号的采样结果如图 3-6-5 所示。

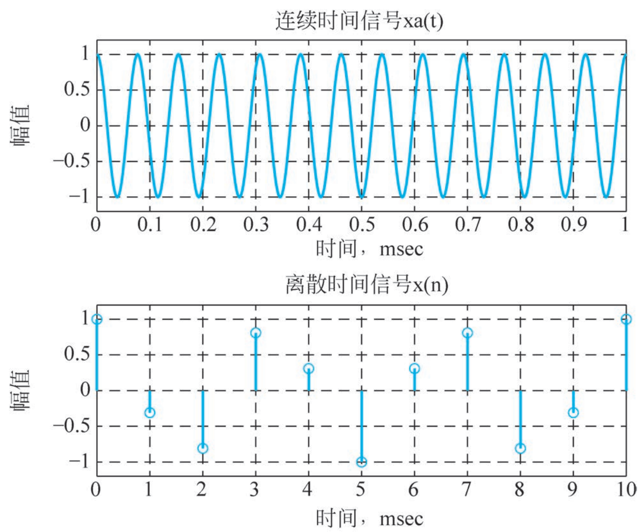

图 3-6-5 正弦信号的采样

2. 采样与重构

MATLAB 程序如下。

```
clf;
T = 0.1;f = 13;n = (0:T:1)';
xs = cos(2 * pi * f * n);
t = linspace( - 0.5,1.5,500)';
ya = sinc((1/T) * t(:,ones(size(n))) - (1/T) *
n(:,ones(size(t)))') * xs;
plot(n,xs,'o',t,ya);grid;
xlabel('时间,msec');ylabel('幅值');
title('重构连续时间信号 ya(t)');
axis([0 1 -1.2 1.2]);
```

执行该程序,正弦信号的采样与重构结果如图 3-6-6 所示。

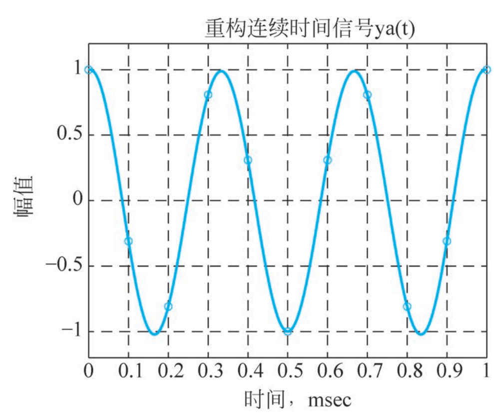

图 3-6-6 正弦信号的采样与重构

3. 采样的性质

MATLAB 程序如下。

```
clf;
t = 0:0.005:10;
xa = 2 * t. * exp( - t);
subplot(2,2,1);plot(t,xa);grid;
xlabel('时间,msec');ylabel('幅值');title('连续时间信号 x_{a}(t)');
subplot(2,2,2);wa = 0:10/511:10;
ha = freqs(2,[1 2 1],wa);
plot(wa/(2 * pi),abs(ha));grid;
xlabel('频率,kHz');ylabel('幅值');title('|X_{a}(j\omega)|');
axis([0 5/pi 0 2]);
subplot(2,2,3);T = 1;n = 0:T:10;
xs = 2 * n. * exp( - n);k = 0:length(n) - 1;
stem(k,xs);grid;
xlabel('时间,n');ylabel('幅值');title('离散时间信号 x[n]');
subplot(2,2,4);wd = 0:pi/255:pi;
hd = freqz(xs,1,wd);
plot(wd/(T * pi),T * abs(hd));grid;
xlabel('频率,kHz');ylabel('幅值');title('|X(e^{j\omega})|');
axis([0 1/T 0 2]);
```

执行该程序,信号的采样性质如图 3-6-7 所示。

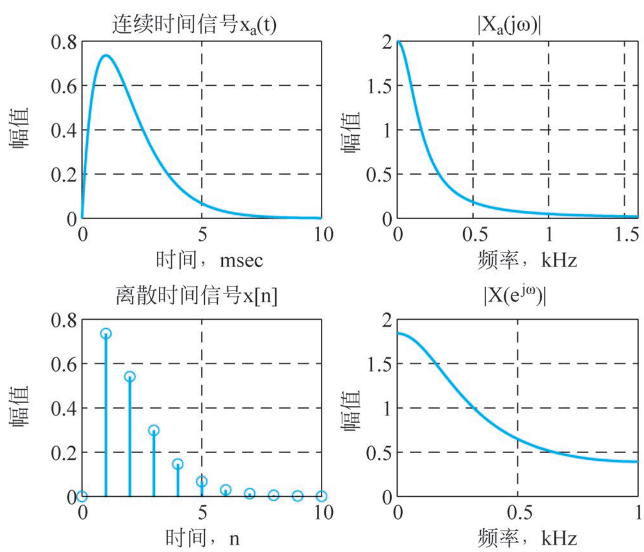

图 3-6-7 信号采样的性质

4. 频域过采样

MATLAB 程序如下。

```
freq = [0 0.45 0.5 1];
mag = [0 1 0 0];
x = fir2(99,freq,mag);
[Xz,w] = freqz(x,1,512);
subplot(2,1,1);
plot(w/pi,abs(Xz));axis([0 1 0 1]);grid;
```

```
title('输入谱');
subplot(2,1,2);
L = input('过采样因子 = ');
y = x([1:L:length(x)]);
[Yz,w] = freqz(y,1,512);
plot(w/pi,abs(Yz));axis([0 1 0 1]);grid;
title('输出谱');
过采样因子 = 2
```

执行该程序,信号的频域过采样结果如图 3-6-8 所示。

5. 频域欠采样

MATLAB 程序如下。

```
clf;
freq = [0 0.42 0.48 1];
mag = [0 1 0 0];
x = fir2(101,freq,mag);
[Xz,w] = freqz(x,1,512);
subplot(2,1,1);
plot(w/pi,abs(Xz));grid;
title('输入谱');
M = input('欠采样因子 = ');
y = x([1:M:length(x)]);
[Yz,w] = freqz(y,1,512);
subplot(2,1,2);
plot(w/pi,abs(Yz));grid;
title('输出谱');
欠采样因子 = 3
```

执行该程序,信号的频域欠采样结果如图 3-6-9 所示。

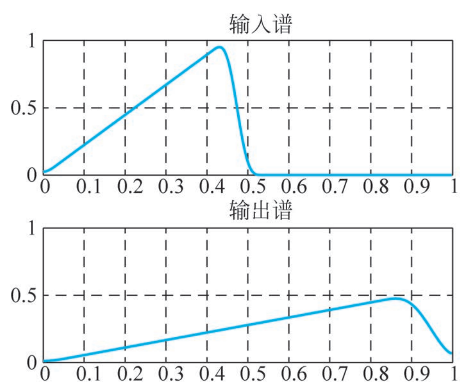

图 3-6-8 信号的频域过采样

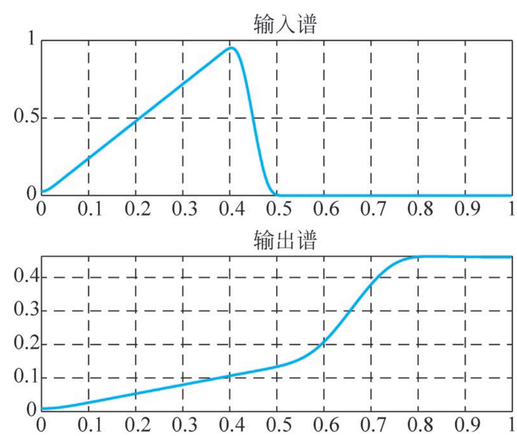

图 3-6-9 信号的频域欠采样

3.7 连续时间系统的频域分析

线性时不变系统的频域分析法是一种变换域分析法,它把时域中求解响应的问题通过傅里叶变换转换成频域中的问题。整个分析过程在频域内进行,因此它主要研究信号频谱

通过系统后产生的变化，利用频域分析法可分析系统的频率响应、波形失真、物理可实现等实际问题。

3.7.1 频域系统函数

设 LTI 系统的冲激响应为 $h(t)$，当激励是角频率为 ω 的虚指数函数 $f(t)=e^{j\omega t}$ 时，其零状态响应为

$$y(t)=h(t)*f(t) \tag{3-7-1}$$

根据卷积的定义，得

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)e^{j\omega(t-\tau)}d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\cdot e^{j\omega t}$$

令 $H(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$，则上式写为

$$y(t)=H(j\omega)e^{j\omega t} \tag{3-7-2}$$

式(3-7-2)表明，当激励是幅度为 1 的复指数函数时，系统的响应是系数为 $H(j\omega)$ 的同频率的复指数函数，$H(j\omega)$ 反映了响应 $y(t)$ 的幅度和相位。

当激励为任意信号 $f(t)$ 时，可以认为该信号是若干不同频率的虚指数分量的线性组合，即

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F(j\omega)}{2\pi}e^{j\omega t}d\omega$$

由于线性系统满足叠加性与齐次性，因此将所有这些响应分量求和(积分)，就得到系统的响应，即

$$y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(j\omega)H(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

令响应 $y(t)$ 的频谱函数为 $Y(j\omega)$，激励的频谱函数为 $F(j\omega)$，则

$$Y(j\omega)=H(j\omega)F(j\omega) \tag{3-7-3}$$

可见，冲激响应 $h(t)$ 反映了系统的时域特性，而频率响应 $H(j\omega)$ 反映了系统的频域特性，$H(j\omega)$ 为系统冲激响应 $h(t)$ 的傅里叶变换。

通常，系统函数(即频率响应函数)可以定义为系统零状态响应的傅里叶变换 $Y(j\omega)$ 与激励的傅里叶变换 $F(j\omega)$ 之比，即

$$H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{F(j\omega)} \tag{3-7-4}$$

也可以写为

$$H(j\omega)=|H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)} \tag{3-7-5}$$

其中，$|H(j\omega)|=\dfrac{|Y(j\omega)|}{|F(j\omega)|}$，$\varphi(\omega)=\theta_y(\omega)-\theta_f(\omega)$。

可见，$|H(j\omega)|$ 是角频率 ω 的输出与输入信号幅度之比，称为幅频。

3.7.2 系统对非周期信号的响应

通常，非周期信号只是在一定的时间区间内存在。为了说明在非周期信号激励下求解系统响应的方法，假设所有起始状态为零，即讨论零状态响应。

若在图 3-7-1(a)所示的 RC 低通网络的输入端输入一矩形脉冲信号 $u_i(t)$，其波形如图 3-7-1(b)所示，则 RC 网络的频率响应(电压传输比)可由其阻抗分压比得到，即 $H(j\omega)$ 为

$$H(j\omega)=\frac{\frac{1}{j\omega C}}{R+\frac{1}{j\omega C}}=\frac{\frac{1}{RC}}{j\omega+\frac{1}{RC}}$$

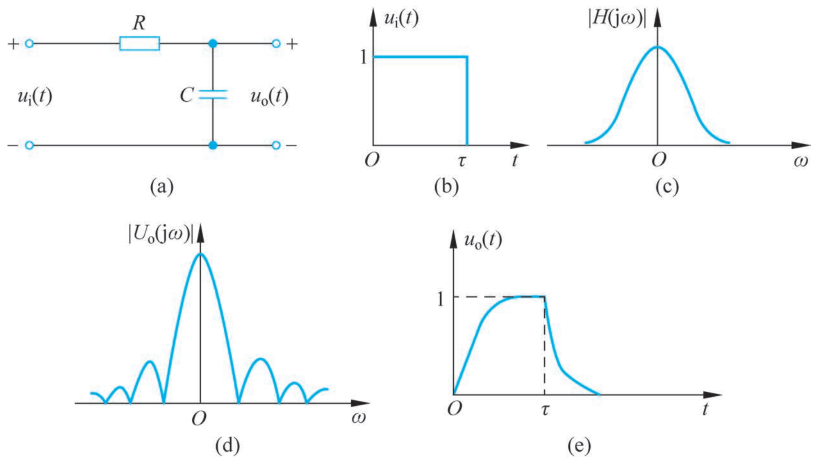

图 3-7-1 矩形脉冲激励下的 RC 网络的响应

若令 $\frac{1}{RC}=\alpha$，则

$$H(j\omega)=\frac{\alpha}{\alpha+j\omega}=|H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$$

可以得到

$$|H(j\omega)|=\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}$$

$|H(j\omega)|$ 的波形如图 3-7-1(c)所示。输入信号 $u_i(t)$ 的傅里叶变换，可求得

$$u_i=g_\tau\left(t-\frac{\tau}{2}\right)$$

$$U_i(j\omega)=\frac{1}{j\omega}(1-e^{-j\omega\tau})=\tau\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)e^{-j\frac{\omega\tau}{2}} \tag{3-7-6}$$

于是，$u_o(t)$ 的傅里叶变换 $U_o(j\omega)$ 为

$$U_o(j\omega)=H(j\omega)U_i(j\omega)=\frac{\alpha}{\alpha+j\omega}\left[\tau\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\right]e^{-j\frac{\omega\tau}{2}}$$

其振幅为

$$|U_o(j\omega)|=\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}\tau\left|\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\right| \tag{3-7-7}$$

$|U_o(j\omega)|$ 的图形如图 3-7-1(d)所示。为了得到系统的响应 $u_o(t)$，需将 $U_o(j\omega)$ 进行反变换，为便于计算，将 $U_o(j\omega)$ 表示为

$$U_o(j\omega)=\frac{\alpha}{\alpha+j\omega}\frac{1}{j\omega}(1-e^{-j\omega\tau})=\left(\frac{1}{j\omega}-\frac{1}{\alpha+j\omega}\right)(1-e^{-j\omega\tau})$$

$$=\frac{1}{\mathrm{j}\omega}(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau})-\frac{1}{\alpha+\mathrm{j}\omega}(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau})$$

于是得到

$$u_o(t)=u(t)-u(t-\tau)-[\mathrm{e}^{-\alpha t}u(t)-\mathrm{e}^{-\alpha(t-\tau)}u(t-\tau)]$$

$$=(1-\mathrm{e}^{-\alpha t})u(t)-[1-\mathrm{e}^{-\alpha(t-\tau)}]u(t-\tau)$$

图 3-7-1(e)示出 $u_o(t)$的波形。比较图 3-7-1(e)与图 3-7-1(b)可看出，输出信号的波形与输入信号相比，已产生了失真，输入信号在 $t=0$ 时上升陡峭，在 $t=\tau$ 处急剧下降，这种快速变化的波形表示具有较高的频率分量，由于 RC 网络的低通特性，高频分量有较大的衰减，故输出波形不能迅速变化，不再表现为矩形脉冲信号，而是以指数规律逐渐上升和下降，若减小 RC 时间常数，即增大 α，则 RC 网络的低通带宽增加，允许更多的高频分量通过，输出波形的上升与下降时间缩短，和输入信号波形相比，失真减小。

3.7.3 系统对周期信号的响应

周期信号是在$(-\infty,+\infty)$的时间区间内定义的，因此，当周期信号作用于系统时，可以认为信号是在 $t=-\infty$时刻接入系统的，因而在考查系统时认为系统只存在稳态响应。

通常，我们所遇到的周期信号都是满足狄利克雷条件的，因此，可以把它们分解成傅里叶级数。这样，周期性激励信号即可看作由一系列谐波分量所组成。根据叠加原理，周期性激励在系统中产生的响应等于各谐波分量单独作用时所产生的响应之和。如果能求出系统函数 $H(\mathrm{j}\omega)$，那么利用式(3-7-4)便可求得各谐波作用时所产生的响应。最后，把各个响应叠加起来，就得到系统对周期性激励的稳态响应。

设激励信号为 $f_0(t)=\sin\omega_0 t$，则

$$\mathcal{F}[f_0(t)]=F_0(\mathrm{j}\omega)=\mathrm{j}\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$$

若系统函数等于

$$H(\mathrm{j}\omega)=|H(\mathrm{j}\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$$

则在$\pm\omega_0$ 点有

$$H(\mathrm{j}\omega_0)=|H(\mathrm{j}\omega_0)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega_0)},\quad H(-\mathrm{j}\omega_0)=|H(\mathrm{j}\omega_0)|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi(\omega_0)}$$

所以系统响应的频谱为

$$Y_0(\mathrm{j}\omega)=H(\mathrm{j}\omega)F_0(\mathrm{j}\omega)=\mathrm{j}\pi H(\mathrm{j}\omega)[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$$

$$=\mathrm{j}\pi[H(-\mathrm{j}\omega_0)\delta(\omega+\omega_0)-H(\mathrm{j}\omega_0)\delta(\omega-\omega_0)]$$

$$=\mathrm{j}\pi|H(\mathrm{j}\omega_0)|[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi_0}\delta(\omega+\omega_0)-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_0}\delta(\omega-\omega_0)]$$

$$y_0(t)=\mathcal{F}^{-1}[Y_0(\mathrm{j}\omega)]=|H(\mathrm{j}\omega_0)|\sin(\omega_0 t+\varphi_0)\qquad(3\text{-}7\text{-}8)$$

式(3-7-8)说明，响应为激励的同频率正弦波，其幅度$|H(\mathrm{j}\omega_0)|$和相移 φ_0 均由系统函数在 ω_0 点的值决定。

利用频域分析方法也可求解周期信号激励下系统的响应。由于傅里叶变换的积分下限从负无穷大开始，若激励信号从 $t=-\infty$时接入，则求得的响应即稳态解。

设输入信号为周期正弦信号，即 $u_i(t)=\sin(\omega_0 t)$，则其频谱为

$$U_i(\mathrm{j}\omega)=\mathrm{j}\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$$

将输入信号加至如图 3-7-1(a)所示的 RC 网络，已知 RC 低通网络的频率响应 $H(\mathrm{j}\omega)$为

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{\alpha}{\alpha+\mathrm{j}\omega}=|H(\mathrm{j}\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$$

且在 $\omega=\pm\omega_0$ 处

$$H(\mathrm{j}\omega_0)=|H(\mathrm{j}\omega_0)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega_0)},\quad H(-\mathrm{j}\omega_0)=|H(\mathrm{j}\omega_0)|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi(\omega_0)}$$

于是,输出 $U_o(\mathrm{j}\omega)$可求得为

$$\begin{aligned}U_o(\mathrm{j}\omega)&=H(\mathrm{j}\omega)U_i(\mathrm{j}\omega)=\mathrm{j}\pi H(\mathrm{j}\omega)[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]\\&=\mathrm{j}\pi[H(-\mathrm{j}\omega_0)\delta(\omega+\omega_0)-H(\mathrm{j}\omega_0)\delta(\omega-\omega_0)]\\&=\mathrm{j}\pi|H(\mathrm{j}\omega_0)|[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi_0}\delta(\omega+\omega_0)-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_0}\delta(\omega-\omega_0)]\end{aligned}$$

于是得到

$$u_o(t)=\mathcal{F}^{-1}[U_o(\mathrm{j}\omega)]=|H(\mathrm{j}\omega_0)|\sin(\omega_0 t+\varphi_0) \tag{3-7-9}$$

由式(3-7-9)可知,在正弦信号激励下,RC 网络的输出仍为同频正弦波,其幅度乘以振幅响应$|H(\mathrm{j}\omega_0)|$,且相移为 $\varphi(\omega_0)$。$|H(\mathrm{j}\omega_0)|$及 $\varphi(\omega_0)$均由 $\omega=\omega_0$ 处的频率响应 $H(\mathrm{j}\omega_0)$决定。

由以上分析可见,傅里叶分析方法从频谱改变的角度解释输入与输出波形的变化,物理概念清楚,但求解过程相对比较麻烦,特别是求反变换时会有一定的困难。

3.7.4 MATLAB 实现

1. 系统频率特性分析的 MATLAB 实现

系统的频率特性 $H(\mathrm{j}\omega)$描述了系统的性能特征。频率特性 $H(\mathrm{j}\omega)$由幅频特性$|H(\mathrm{j}\omega)|$和相频特性 $\varphi(\omega)$组成,即

$$H(\mathrm{j}\omega)=|H(\mathrm{j}\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$$

一般情况下,$H(\mathrm{j}\omega)$为 $\mathrm{j}\omega$ 的有理多项式,即

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{b_1(\mathrm{j}\omega)^m+b_2(\mathrm{j}\omega)^{m-1}+\cdots+b_{m-1}(\mathrm{j}\omega)+b_m}{a_1(\mathrm{j}\omega)^n+a_2(\mathrm{j}\omega)^{n-1}+\cdots+a_{n-1}(\mathrm{j}\omega)+a_n}$$

此时可用 MATLAB 信号处理工具箱提供的 freqs()函数来计算 $H(\mathrm{j}\omega)$,其调用格式为

```
H = freqs(b,a,w)
```

式中,a 和 b 分别是 $H(\mathrm{j}\omega)$的分母和分子多项式的系数向量;w 为计算 $H(\mathrm{j}\omega)$的采样点(至少包含 2 个采样点)。

例 3-26 设某低通滤波器的频率响应为

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{(\mathrm{j}\omega)^2+3(\mathrm{j}\omega)+1}$$

试画出该系统的幅频特性$|H(\mathrm{j}\omega)|$和相频特性 $\varphi(\omega)$。

解:计算该低通滤波器频率特性的 MATLAB 程序如下。

```
w = linspace(0,10,500);
b = [1];
a = [1,3,1];
H = freqs(b,a,w);
subplot(2,1,1);
```

```
plot(w,abs(H));
set(gca,'xtick',[0,2,4,6,8,10]);
set(gca,'ytick',[0,0.4,0.707,1]);grid;
xlabel('\omega(rad/s)');
ylabel('|H(j\omega)|');
subplot(2,1,2);
plot(w,angle(H));
set(gca,'xtick',[0,2,4,6,8,10]);grid;
xlabel('\omega(rad/s)');
ylabel('phi(j\omega)');
```

该程序的运行结果如图 3-7-2 所示。

2. 系统频域响应的 MATLAB 实现

系统在某一信号作用下的响应可以在时域中求取，也可以在频域中求取，还可以在复频域中求取。但对于滤波器系统来说，只能在频域中进行输出响应的求解，再通过傅里叶逆变换求出相应的时域解。

例 3-27　已知某理想高通滤波器的频率特性为

$$H(\mathrm{j}\omega)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}, & |\omega|>4\pi\\ 0, & |\omega|<4\pi\end{cases}$$

若滤波器的输入为 $f(t)=\mathrm{Sa}(6\pi t)$，$-\infty<t<+\infty$，求其输出响应 $y(t)$。

解： 可求解

$$y(t)=\mathrm{Sa}[6\pi(t-2)]-\frac{2}{3}\mathrm{Sa}[4\pi(t-2)]$$

其 MATLAB 计算程序如下。

```
t = - 8:0.001:8;
y = sinc(6 * (t - 2)) - (2/3) * sinc(4 * (t - 2));
plot(t,y,'k');
xlabel('Time(s)');
ylabel('y(t)');
```

该程序的运行结果如图 3-7-3 所示。

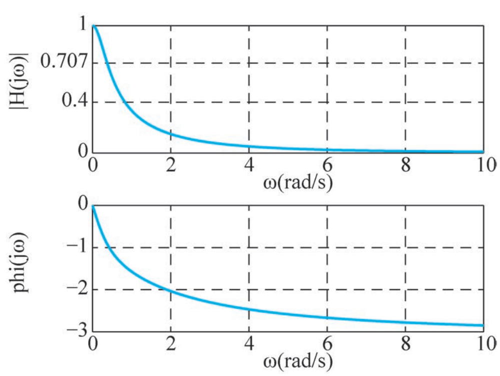

图 3-7-2　频率响应特性曲线

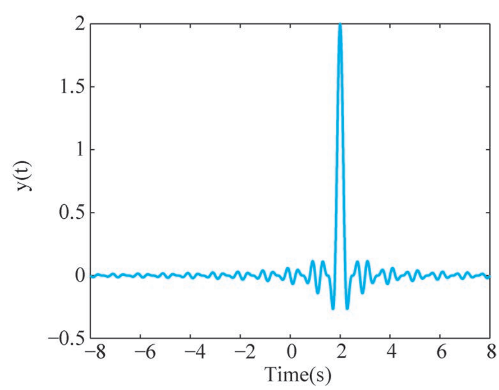

图 3-7-3　系统响应

视频讲解

3.8 无失真传输

一般情况下,系统的响应波形与激励波形不相同,信号在传输过程中将产生失真。

线性系统的信号失真由两方面因素造成,一方面,系统对信号中各频率分量幅度产生不同程度的衰减,使响应各频率分量的相对幅度产生变化,引起幅度失真。另一方面,系统对各频率分量产生的相移不与频率成正比,使响应的各频率分量在时间轴上的相对位置产生变化,引起相位失真,这方面的问题前面未做研究,本节将结合实例讨论。

必须指出,线性系统的幅度失真与相位失真都不产生新的频率分量。对非线性系统来说,其非线性特性对于所传输信号产生非线性失真,非线性失真可能产生新的频率分量。现在只研究有关线性系统的幅度失真和相位失真问题。

在实际应用中,有时需要有意识地利用系统进行波形变换,这时必然产生失真。然而在某些情况下,则希望传输过程中使信号失真最小。现在研究无失真传输的条件。

所谓无失真传输,是指响应信号与激励信号相比,只是其大小与出现的时间不同,而无波形上的变化。设激励信号为 $f(t)$,响应信号为 $y(t)$,无失真传输的条件是

$$y(t)=Kf(t-t_0) \tag{3-8-1}$$

式中,K 是一个常数,t_0 为滞后时间。满足此条件时,$y(t)$波形是 $f(t)$波形经 t_0 时间的滞后,虽然,幅度方面有系数 K 倍的变化,但波形形状不变,举例如图 3-8-1 所示。

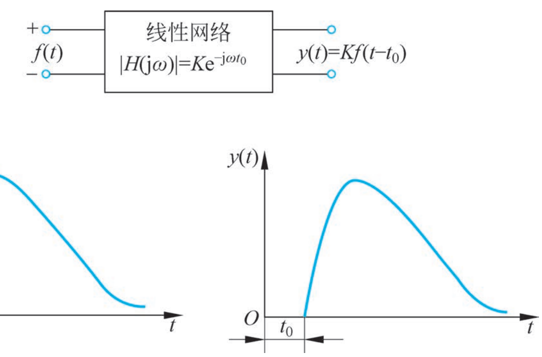

图 3-8-1 线性网络的无失真传输

下面讨论为满足式(3-8-1),实现无失真传输,对系统函数 $H(\mathrm{j}\omega)$应提出怎样的要求?

设 $f(t)$与 $y(t)$的傅里叶变换式分别为 $Y(\mathrm{j}\omega)$与 $F(\mathrm{j}\omega)$。借助傅里叶变换的延时定理,式(3-8-1)可以写出

$$Y(\mathrm{j}\omega)=KF(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0} \tag{3-8-2}$$

此外,还有

$$Y(\mathrm{j}\omega)=H(\mathrm{j}\omega)F(\mathrm{j}\omega)$$

所以,为满足无失真传输,有

$$H(\mathrm{j}\omega)=K\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0} \tag{3-8-3}$$

式(3-8-3)就是对系统的频率响应特性提出的无失真传输条件。欲使信号在通过线性系统时不产生任何失真,必须在信号的全部频带内要求系统频率响应的幅度特性是一个常数,相位特性是一条通过原点的直线。如图 3-8-2 所示,图中幅度特性的常数为 K,相位特

性的斜率为$-t_0$。

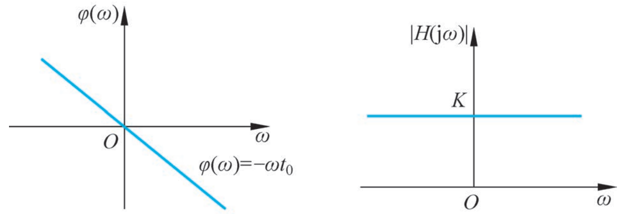

图 3-8-2 无失真传输系统的幅度和相位特性

式(3-8-3)或图 3-8-2 的要求可以从物理概念上得到直观的解释。由于系统函数的幅度$|H(\mathrm{j}\omega)|$为常数 K,响应中各频率分量幅度的相对大小将与激励信号的情况一样,因而没有幅度失真。要保证没有相位失真,必须使响应中各频率分量与激励中各对应分量滞后同样的时间,这一要求反映到相位特性是一条通过原点的直线。下面举例说明。

设激励信号 $f(t)$波形如图 3-8-3(a)所示。它由基波与二次谐波两个频率分量组成,表示为

$$f(t)=\sin(\Omega t)+\sin(2\Omega t) \tag{3-8-4}$$

根据式(3-7-9),响应 $y(t)$的表示式为

$$\begin{aligned} y(t)&=K\sin(\Omega t-\varphi_1)+K\sin(2\Omega t-\varphi_2)\\ &=K\sin\left[\Omega\left(t-\frac{\varphi_1}{\Omega}\right)\right]+K\sin\left[2\Omega\left(t-\frac{\varphi_2}{2\Omega}\right)\right] \end{aligned} \tag{3-8-5}$$

为了使基波与二次谐波得到相同的延迟时间,以保证不产生相位失真,应有

$$\frac{\varphi_1}{\Omega}=\frac{\varphi_2}{2\Omega}=t_0=\text{常数} \tag{3-8-6}$$

因此,各谐波分量的相移须满足以下关系:

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2}=\frac{\Omega}{2\Omega} \tag{3-8-7}$$

这个关系很容易推广到其他高次谐波,于是,可以得到结论,为使信号传输时不产生相位失真,信号通过线性系统时谐波的相移必须与其频率成正比,即系统的相位特性应该是一条经过原点的直线,写作

$$\varphi(\omega)=-\omega t_0 \tag{3-8-8}$$

这正是式(3-8-1)与图 3-8-2 所得到的结果。显然,信号通过系统的延迟时间 t_0 即为相位特性的斜率

$$\frac{\mathrm{d}\varphi(\omega)}{\mathrm{d}\omega}=-t_0 \tag{3-8-9}$$

在图 3-8-3(b)中画出了无失真传输的 $y(t)$波形。而图 3-8-3(c)则是相位失真的情况,可以看到,$y_1(t)$与 $f(t)$或者 $y(t)$的波形是不一样的。

对于传输系统相移特性的另一种描述方法是以“群时延”(或称群延时)特性来表示的。群时延 τ 的定义为

$$\tau=-\frac{\mathrm{d}\varphi(\omega)}{\mathrm{d}\omega} \tag{3-8-10}$$

即群时延定义为系统相频特性对频率的导数并取负号。在满足信号传输不产生相位失真的条件下,其群时延特性也为常数。

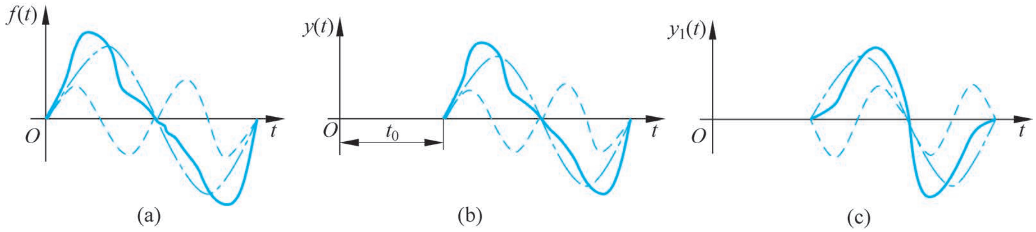

图 3-8-3　无失真传输系统与有相位失真传输波形比较

对于实际的传输系统$\dfrac{\mathrm{d}\varphi(\omega)}{\mathrm{d}\omega}$为负值,因而 τ 为正值,通常为简化表达式与计算,在一些文献和著作中也定义 $\tau=\left|\dfrac{\mathrm{d}\varphi(\omega)}{\mathrm{d}\omega}\right|$,这时 τ 取正值。通常利用 $\Delta\varphi(\omega)$与 $\Delta\omega$ 之比(当 $\Delta\omega$ 足够小)近似计算或测量 τ 值。与直接用 $\varphi(\omega)$描述相位特性相比较,用群时延间接表达相位特性的好处是便于实际测量,而且有助于理解调幅波传输过程的波形变化。

式(3-8-3)说明了为满足无失真传输对于系统函数 $H(\mathrm{j}\omega)$的要求,这是就频域方面提出的。如果用时域特性表示,即对式(3-8-3)作傅里叶逆变换,可以写出系统的冲激响应

$$h(t)=K\delta(t-t_0) \tag{3-8-11}$$

此结果表明,当信号通过线性系统时,为了不产生失真,冲激响应也应该是冲激函数,而时间延后 t_0。

在实际应用中,与无失真传输这一要求相反的另一种情况是有意识地利用系统引起失真来形成某种特定波形,这时,系统传输函数 $H(\mathrm{j}\omega)$则应根据所需具体要求来设计。现在说明利用冲激信号作用于系统产生某种特定波形的方法。当希望得到 $y(t)$波形时,若已知 $y(t)$的频谱为 $Y(\mathrm{j}\omega)$,那么,使系统函数满足

$$H(\mathrm{j}\omega)=Y(\mathrm{j}\omega) \tag{3-8-12}$$

于是,在系统输入端加入激励函数为冲激信号

$$f(t)=\delta(t)$$

输出端就得到响应 $H(\mathrm{j}\omega)$也即 $Y(\mathrm{j}\omega)$,它的逆变换就是所需的 $y(t)$。

例如,当需要产生底宽为 τ 的升余弦脉冲时,如图 3-8-4 所示。其表达式为

$$y(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left[1+\cos\left(\dfrac{2\pi t}{\tau}\right)\right], & -\dfrac{\tau}{2}<t<\dfrac{\tau}{2}\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{3-8-13}$$

频谱函数为

$$Y(\mathrm{j}\omega)=\frac{\tau}{2}\frac{\sin\left(\dfrac{\omega\tau}{2}\right)}{\dfrac{\omega\tau}{2}}\frac{1}{1-\left(\dfrac{\omega\tau}{2\pi}\right)^2} \tag{3-8-14}$$

频谱特性曲线如图 3-8-4 所示。

如果使系统函数 $H(\mathrm{j}\omega)$等于升余弦信号的频谱函数,则

$$H(\mathrm{j}\omega)=Y(\mathrm{j}\omega)=\frac{\tau}{2}\frac{\sin\left(\dfrac{\omega\tau}{2}\right)}{\dfrac{\omega\tau}{2}}\frac{1}{1-\left(\dfrac{\omega\tau}{2\pi}\right)^2} \tag{3-8-15}$$

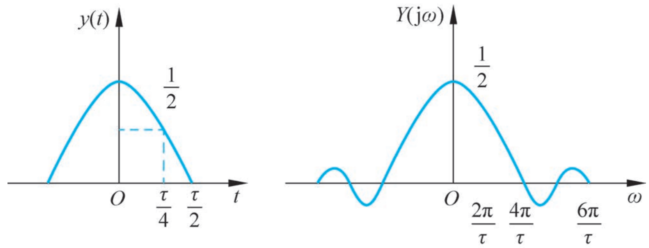

图 3-8-4 升余弦信号波形和频谱

那么,在冲激信号 $\delta(t)$的作用下,系统响应即为升余弦脉冲。在实际应用中,$\delta(t)$函数波形无法实现,只要脉冲足够窄,所得到输出信号基本上可近似为升余弦函数。此外,实际实现的 $H(\mathrm{j}\omega)$还应包含一定的相移 $\varphi(\omega)$,这意味着波形 $Y(\mathrm{j}\omega)$在时间上的滞后。

图 3-8-5 画出用上述方法产生升余弦脉冲的方框图。

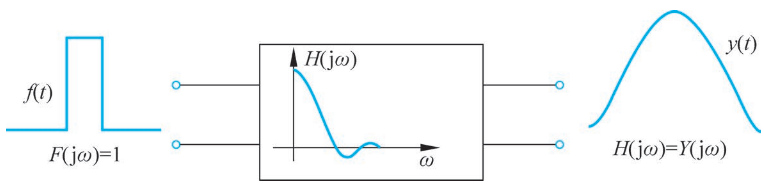

图 3-8-5 利用系统的冲激响应产生升余弦脉冲

3.9 理想低通滤波器

视频讲解

在实际应用中,常常希望改变一个信号所含各频率分量的组成,提取或增加所希望的频率分量,滤除或衰减不希望的频率成分,这样一个处理过程称为信号的滤波。对于 LTI 系统,由于输出信号的频谱等于输入信号的频谱乘以系统的频率响应,因此在 LTI 系统中,只要适当地选择系统的频率响应,就可以实现所希望的滤波功能,这是 LTI 系统的重要应用。

在实际应用中,按照允许通过的频率分量划分,滤波器可分为低通、高通、带通、带阻等几种,它们的幅频特性分别如图 3-9-1 所示。其中,ω_c 为低通、高通滤波器的截止角频率;ω_{c1} 和 ω_{c2} 分别为带通和带阻滤波器的截止角频率。

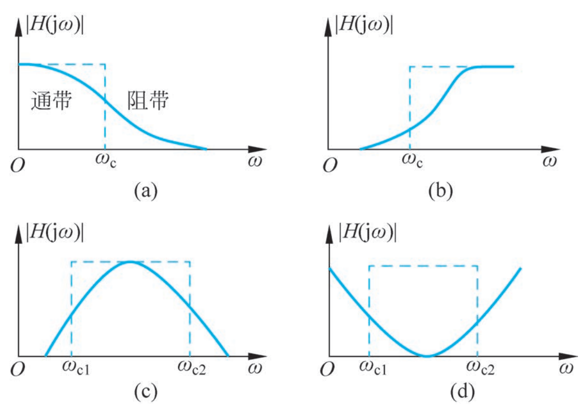

图 3-9-1 滤波器的幅频特性

若系统的幅频特性$|H(\mathrm{j}\omega)|$在某一段频带保持为常数,而在频带外为零,且相频特性$\varphi(\omega)$始终为过原点的一条直线,则这样的系统称为理想滤波器。也就是说,对于理想滤波器,可以让允许的频率分量全部通过,不允许通过的频率分量则全部抑制掉。

3.9.1 理想低通滤波器的冲激响应

对于理想低通滤波器,它将低于某一角频率ω_c的信号无失真的传输,而阻止角频率高于ω_c的信号通过。其频率响应特性如图3-9-2所示。

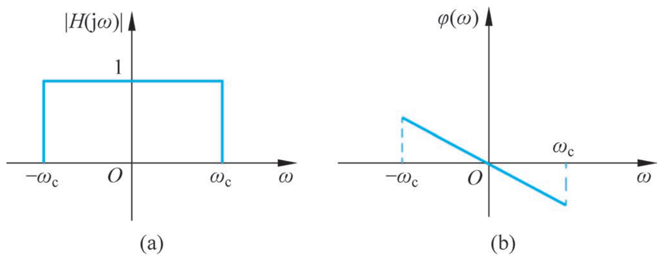

图3-9-2 理想低通滤波器幅频响应

理想低通滤波器的幅度响应为

$$|H(\mathrm{j}\omega)|=\begin{cases}1, & |\omega|\leqslant\omega_c\\ 0, & |\omega|>\omega_c\end{cases}\tag{3-9-1}$$

由于这种滤波器允许信号通过的频带以$\omega=0$为中心,因此称为理想低通滤波器。滤波器通过的频率范围称为滤波器的通带,不能通过的频率范围称为阻带,频率ω_c称为截止频率。为了满足无失真传输的要求,理想低通滤波器的相位特性为一通过原点的直线,即

$$\varphi(\omega)=-\omega t_0\tag{3-9-2}$$

于是可得理想低通滤波器的频率响应$H(\mathrm{j}\omega)$为

$$H(\mathrm{j}\omega)=|H(\mathrm{j}\omega)|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}, & |\omega|\leqslant\omega_c\\ 0, & |\omega|>\omega_c\end{cases}\tag{3-9-3}$$

将系统函数$H(\mathrm{j}\omega)$进行傅里叶逆变换,不难得到理想低通滤波器的冲激响应$h(t)$。

$$h(t)=\mathcal{F}^{-1}H(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}H(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{+\omega_c}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left.\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(t-t_0)}}{\mathrm{j}(t-t_0)}\right|_{-\omega_c}^{+\omega_c}=\frac{\omega_c}{\pi}\frac{\sin[\omega_c(t-t_0)]}{\omega_c(t-t_0)}=\frac{\omega_c}{\pi}\mathrm{Sa}[\omega_c(t-t_0)]$$

其波形如图3-9-3所示。

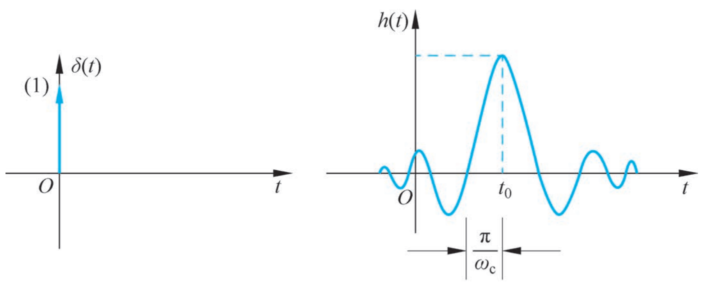

图3-9-3 理想低通滤波器的冲激响应

根据图 3-9-3，比较输入和输出，理想低通滤波器的冲激响应的峰值比输入的 $\delta(t)$ 延迟了 t_0，而且输出脉冲在其建立之前已出现。对于实际的物理系统，当 $t<0$ 时，输入信号尚未接入，不可能有输出。这个结果是采用了理想化传输特性所致。

3.9.2　理想低通滤波器的阶跃响应

对于理想低通滤波器，激励信号为阶跃信号 $u(t)$ 时，激励信号的频谱为

$$u(t)\leftrightarrow \pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}$$

而理想低通滤波器的系统函数为

$$H(\mathrm{j}\omega)=|H(\mathrm{j}\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}, & -\omega_c<\omega<\omega_c\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

所以，阶跃响应的频谱

$$G(\mathrm{j}\omega)=H(\mathrm{j}\omega)F(\mathrm{j}\omega)=\left[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0},\quad -\omega_c<\omega<\omega_c$$

取其傅里叶逆变换，就可得到理想低通的阶跃响应为

$$g(t)=\mathcal{F}^{-1}G(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{+\omega_c}\left[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{+\omega_c}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(t-t_0)}}{\mathrm{j}\omega}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{+\omega_c}\frac{\cos[\omega(t-t_0)]}{\mathrm{j}\omega}\mathrm{d}\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{+\omega_c}\frac{\sin[\omega(t-t_0)]}{\omega}\mathrm{d}\omega$$

式中，被积函数 $\dfrac{\cos[\omega(t-t_0)]}{\mathrm{j}\omega}$ 是 ω 的奇函数，所以在对称区间内的积分为零；被积函数 $\dfrac{\sin[\omega(t-t_0)]}{\omega}$ 为 ω 的偶函数，所以

$$g(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\omega_c}\frac{\sin[\omega(t-t_0)]}{\omega}\mathrm{d}\omega\xlongequal{\text{令 }x=\omega(t-t_0)}\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\omega_c(t-t_0)}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

这里函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 的积分称为“正弦积分”，其函数值可以从正弦积分表中查得，以符号 $S_i(y)$ 表示：

$$S_i(y)=\int_0^y\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

因此，理想低通的阶跃响应为

$$g(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}S_i[\omega_c(t-t_0)]$$

阶跃信号 $u(t)$ 和阶跃响应 $g(t)$ 的波形如图 3-9-4 所示。

由图 3-9-4 可见，理想低通滤波器的阶跃响应的延迟时间为 t_0。阶跃响应最小值出现在 $t_0-\dfrac{\pi}{\omega_c}$ 时刻，最大值出现在 $t_0+\dfrac{\pi}{\omega_c}$ 时刻，阶跃响应从最小值上升到最大值所需时间称为上升时间 $t_r=\dfrac{2\pi}{\omega_c}$。可见理想低通滤波器的截止角频率 ω_c 越低，系统响应 $g(t)$ 上升越缓

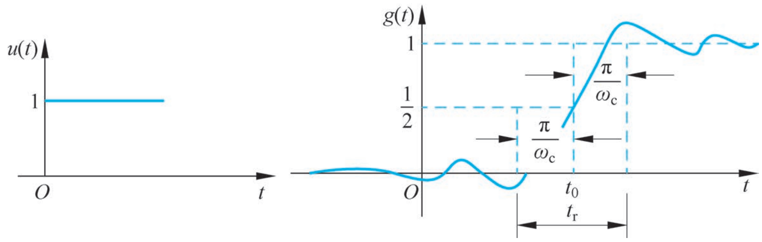

图 3-9-4 理想低通滤波器的阶跃响应

慢。令 $B=\frac{\omega_c}{2\pi}=\frac{1}{t_r}$，表示将角频率折合为频率的滤波器带宽(截止频率)，可以得到一个重要的结论，理想低通滤波器的阶跃响应的上升时间与系统的截止频率(带宽)成反比，即 $Bt_r=1$。

虽然理想低通滤波器是物理不可实现的，但传输特性接近于理想特性的电路却不难构成。如图 3-9-5(a)所示是二阶低通滤波器，其中 $R=\sqrt{\frac{L}{2C}}$。电路的频率响应函数为

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{U_R(\mathrm{j}\omega)}{U_S(\mathrm{j}\omega)}=\frac{\dfrac{1}{\dfrac{1}{R}+\mathrm{j}\omega C}}{\mathrm{j}\omega L+\dfrac{1}{\dfrac{1}{R}+\mathrm{j}\omega C}}=\frac{1}{1-\omega^2 LC+\mathrm{j}\omega\dfrac{L}{R}}$$

考虑到 $R=\sqrt{\frac{L}{2C}}$，并令截止角频率 $\omega_c=\frac{1}{\sqrt{LC}}$，上式可写为

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)^2+\mathrm{j}\sqrt{2}\,\dfrac{\omega}{\omega_c}}=|H(\mathrm{j}\omega)|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$$

其幅频和相频特性分别为

$$|H(\mathrm{j}\omega)|=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)^4}}$$

$$\varphi(\omega)=-\arctan\left[\frac{\sqrt{2}\,\dfrac{\omega}{\omega_c}}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)^2}\right]$$

图 3-9-5(b)画出了图 3-9-5(a)电路的幅频和相频特性。在 $\omega=\pm\omega_c$ 处，$|H(\pm\mathrm{j}\omega_c)|=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\varphi(\pm\omega_c)=\mp\frac{\pi}{2}$。由图 3-9-5(a)可见，其幅频、相频特性与理想低通滤波器相似。实际上，电路的阶数越高，其幅频、相频特性越逼近理想特性。图 3-9-5(c)、(d)分别画出了图 3-9-5(a)电路的冲激响应和阶跃响应，也与理想特性相似。不过，这里的响应是从 $t=0$ 开始的，在 $t<0$ 时，$h(t)=g(t)=0$。这是由于图 3-9-5(a)电路是物理可实现的。

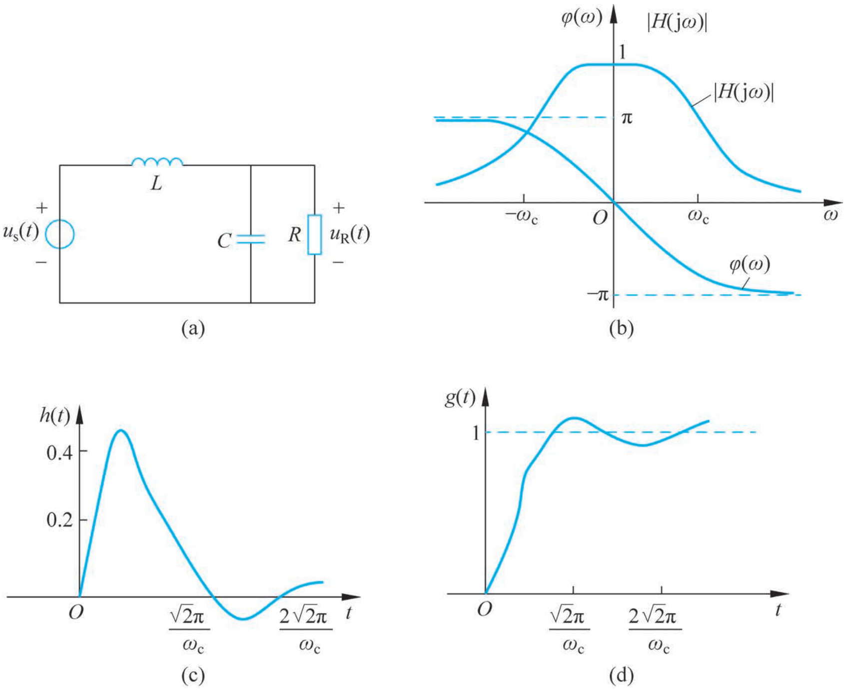

图 3-9-5　二阶低通滤波器的特性

3.10 调制与解调

视频讲解

3.10.1　调制与解调的原理

调制与解调是通信技术中最主要的技术之一，在几乎所有的通信系统中为实现信号的有效、可靠和远距离传输，都需要进行调制和解调。任何一个特定的通信信道都有一个最适合信号传输的频率范围。例如，地球大气层对音频范围（10Hz～20kHz）的信号剧烈衰减，但对某一个较高频率范围的信号则衰减很小，使其能传播很远的距离。因此，如果需要通过大气层在某一个通信信道内传输语音和音乐那样的音频信号，则调制系统就是用一个更高频率的载频信号来携带需要传输的音频信号。为此目的，常用到的调制系统就是正弦幅度调制，此时载有信息的信号，如语言或音乐，被用于改变一个正弦载波信号的振幅，而此载波信号的频率则位于某一频率范围之内。

从另一方面考虑，如果不进行调制而是把需要传输的信号直接发射出去，那么各电台所发出的信号频率就会相同，它们混合在一起，收信者就无法简单地选择所要接收的信号。通过调制信号的频谱产生位移，使它们互不重叠地占据不同的频率范围，接收机就可利用带通滤波器分别处理所需频率的信号，不产生相互干扰。利用调制可以在一个信道中传输多路信号，即所谓的“多路复用”。在简单的通信系统中，只能在一对通话者之间使用，而“多路复用”技术将多路信号的频谱分别搬到不同的频带范围，从而实现在一个信道内传送多路信号，近代通信系统都广泛采用多路复用技术。

此外，在自动控制和电子测量系统中，将极低频的信号进行直接放大将产生诸如零、极

点漂移和自激振荡等问题。为此,可以利用调制方法将需要放大的低频信号频谱搬移到适宜的高频范围,经放大后再还原为低频信号。

实现调制的原理图如图 3-10-1(a)所示。如调制信号 $g(t)$ 的频谱记为 $G(\mathrm{j}\omega)$,占据 $-\omega_m \sim \omega_m$ 的有限频带,如图 3-10-1(b)所示,将 $g(t)$ 与 $\cos(\omega_0 t)$ 进行时域相乘,如图 3-10-1(a)所示,即可得到已调信号 $f(t)=g(t)\cos(\omega_0 t)$。

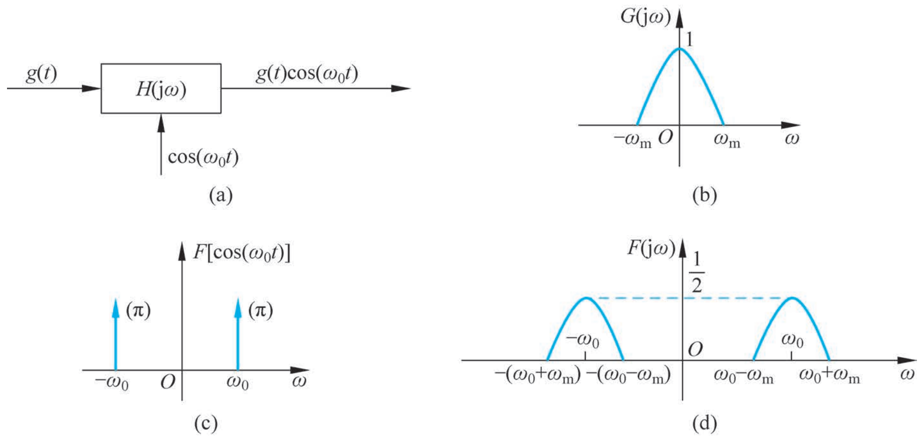

图 3-10-1 调制原理方框图及其频谱图

设载波信号为 $\cos(\omega_0 t)$,其傅里叶变换为

$$\cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$$

如图 3-10-1(c)所示。

根据卷积定理,易求得已调信号的频谱

$$\begin{aligned} F(\mathrm{j}\omega) &= \mathcal{F}[f(t)] = \frac{1}{2\pi} G(\mathrm{j}\omega) * [\pi\delta(\omega+\omega_0)+\pi\delta(\omega-\omega_0)] \\ &= \frac{1}{2}[G(\mathrm{j}\omega+\mathrm{j}\omega_0)+G(\mathrm{j}\omega-\mathrm{j}\omega_0)] \end{aligned} \tag{3-10-1}$$

其频谱图如图 3-10-1(d)所示。可见,信号的频谱被搬移到载频 ω_0 附近。

由已调信号 $f(t)$ 恢复原始信号 $g(t)$ 的过程称为解调。图 3-10-2(a)所示为实现解调的一种原理方框图,这里 $\cos(\omega_0 t)$ 信号是接收端的本地载波信号,它与发送端的载波同频同相,因此该解调方案又称为同步解调。$f(t)$ 与 $\cos(\omega_0 t)$ 相乘的结果使频谱 $F(\mathrm{j}\omega)$ 向左、右分别移动 $\pm\omega_0$ $\left(\text{并乘以系数}\frac{1}{2}\right)$,得到如图 3-10-2(d)所示的频谱 $G_0(\mathrm{j}\omega)$,此图可以从时域的相乘关系得到解释。

$$\begin{aligned} g_0(t) &= [g(t)\cos(\omega_0 t)]\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}g(t)[1+\cos(2\omega_0 t)] \\ &= \frac{1}{2}g(t)+\frac{1}{2}g(t)\cos(2\omega_0 t) \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}[g_0(t)] = G_0(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{2}G(\mathrm{j}\omega)+\frac{1}{4}[G(\mathrm{j}\omega+\mathrm{j}2\omega_0)+G(\mathrm{j}\omega-\mathrm{j}2\omega_0)] \tag{3-10-2}$$

再利用一个带宽为 $\omega_d(\omega_m \leqslant \omega_d \leqslant 2\omega_0-\omega_m)$ 的低通滤波器,滤除在频率为 $2\omega_0$ 附近的分量,即可取出 $g(t)$,完成解调。

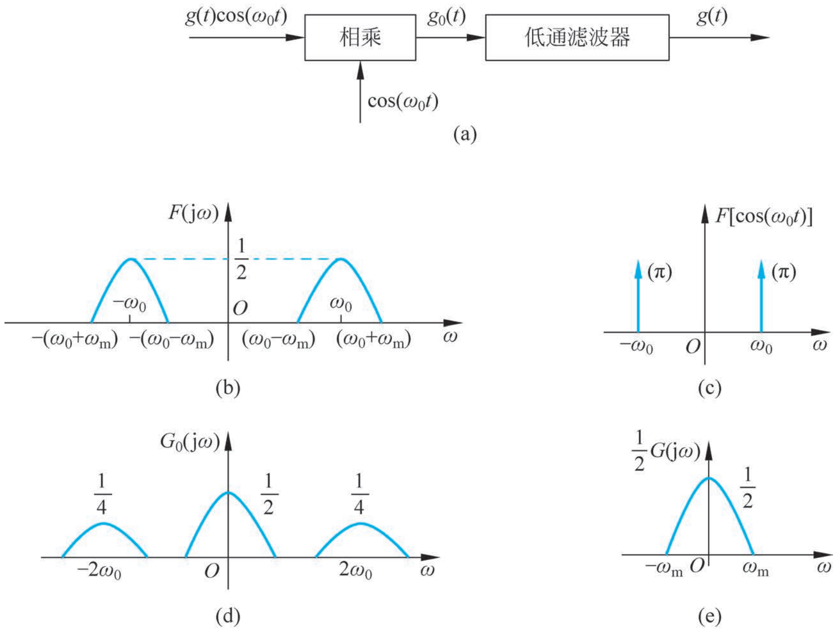

图 3-10-2 解调原理方框图及其频谱图

这种解调器称为同步解调(或相乘解调),需要在接收端产生与发送端频率相同的本地载波,这将使接收机复杂化。为了在接收端省去本地载波,可采用如下几种方法。在发射信号中加入一定强度的载波信号 $A\cos\omega_0 t$,这时,发送端的合成信号为$[A+g(t)]$,如果 A 足够大,那么对于全部 t,有 $A+g(t)>0$,于是,已调信号的包络就是 $A+g(t)$。这时,利用简单的包络检波器(由二极管、电阻、电容组成)即可以从图 3-10-3 相应的波形中提取包络、恢复 $g(t)$,不需要本地载波。此方法常用于民用通信设备,如广播接收机。因为要降低接收机的成本,所以要使用昂贵的发射机来提供足够强的信号 $A\cos\omega_0 t$ 的附加功率。这对于民用是十分经济的,对于大批接收机只有一个发射机。由图 3-10-3 波形可见,在这种调制方法中,载波的振幅随信号 $g(t)$成比例地改变,因而称为"振幅调制"或"调幅"(AM);前述不传送载波的方案则称为"抑制载波振幅调制"(AM-SC)。此外还有"单边带调制"(SSB)、"残留边带调制"(VSB)等。

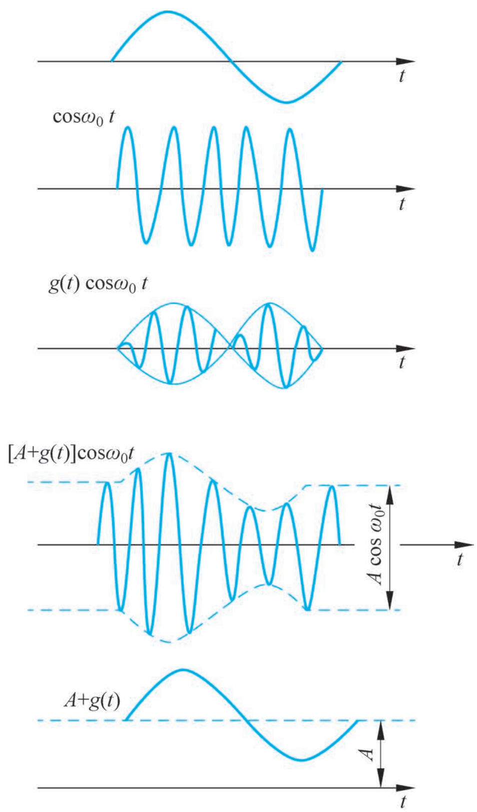

图 3-10-3 调幅、抑制载波调幅及其解调波形

还可以控制载波的频率或相位,使它们随信号 $g(t)$成比例地变化,这两种调制方法分别称为"频率调制"或"调频"(FM)与"相位调制"

或“调相”(PM)。它们的原理也是使 $g(t)$ 的频谱 $G(\omega)$ 搬移，但搬移以后的频谱不再与原始频谱相似。

3.10.2 MATLAB 实现

设载波信号的表达式为 $\cos(\omega_0 t)$，调制信号的表达式为 $m(t)=A_0 m\cos(\omega_0 t)$，则调幅信号的表达式为 $s(t)=[A_0+m(t)]\cos(\omega_0 t)$，下面用 MATLAB 运行调制与解调的分析。

1. 载波信号

```
t = -1:0.00001:1;
A0 = 10;
f = 6000;
w0 = f * pi;
Uc = A0 * cos(w0 * t);
figure(1);
Subplot(2,1,1);
plot(t,Uc);
title('载频信号波形');
axis([0,0.01,-15,15]);
subplot(2,1,2);
Y1 = fft(Uc);
plot(abs(Y1));
title('载波信号频谱');
axis([5800,6200,0,1000000])
```

执行该程序，运行结果如图 3-10-4 所示。

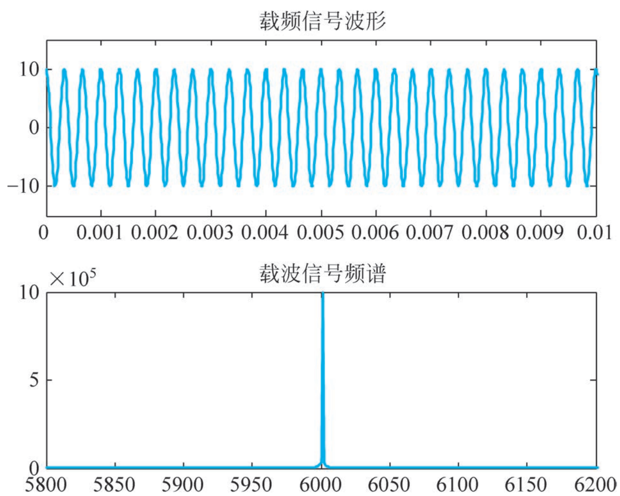

图 3-10-4 载波信号波形与频谱

2. 调制信号

```
t = -1:0.00001:1;
A1 = 5;
f = 6000;
w0 = f * pi;
mes = A1 * cos(0.001 * w0 * t);
subplot(2,1,1);
plot(t,mes);
```

```
xlabel('t'),title('调制信号');
subplot(2,1,2);
Y2 = fft(mes);
plot(abs(Y2));
title('调制信号频谱');
axis([198000,202000,0,1000000]);
```

执行该程序，运行结果如图 3-10-5 所示。

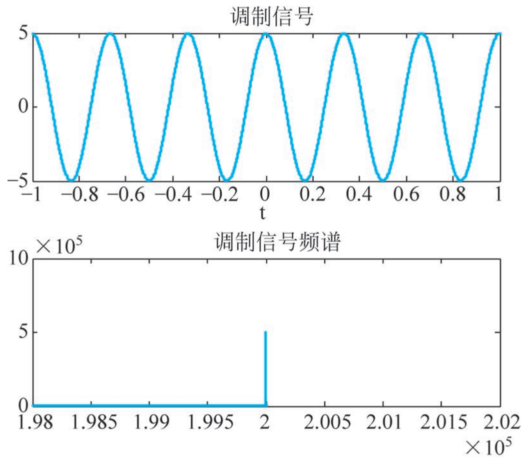

图 3-10-5　调制信号波形与频谱

3. AM 调制信号

```
t = -1:0.00001:1;
A0 = 10;
A1 = 5;
A2 = 3;
f = 3000;
w0 = 2 * f * pi;
m = 0.15;
mes = A1 * cos(0.001 * w0 * t);
Uam = A2 * (1 + m * mes). * cos((w0). * t);
subplot(2,1,1);
plot(t,Uam);
grid on;
title('AM 调制信号波形');
subplot(2,1,2);
Y3 = fft(Uam);
plot(abs(Y3)),grid;
title('AM 调制信号频谱');
axis([5950,6065,0,500000]);
```

执行该程序，运行结果如图 3-10-6 所示。

4. FIR 低通滤波器

```
Ft = 2000;
fpts = [100 120];
mag = [1 0];
dev = [0.01 0.05];
[n21,wn21,beta,ftype] = kaiserord(fpts,mag,dev,Ft);
b21 = fir1(n21,wn21,kaiser(n21 + 1,beta));
```

```
[h,w] = freqz(b21,1);
plot(w/pi,abs(h));
grid on
title('FIR 低通滤波器')
```

执行该程序,运行结果如图 3-10-7 所示。

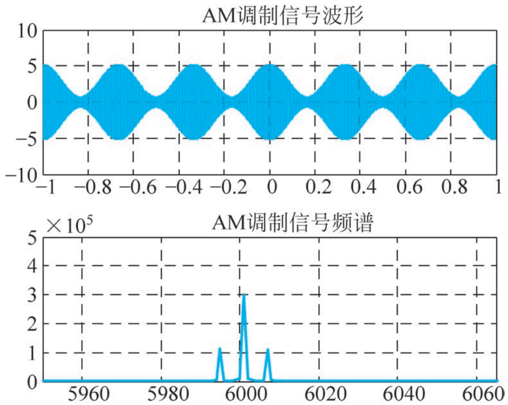

图 3-10-6　AM 调制信号波形与频谱

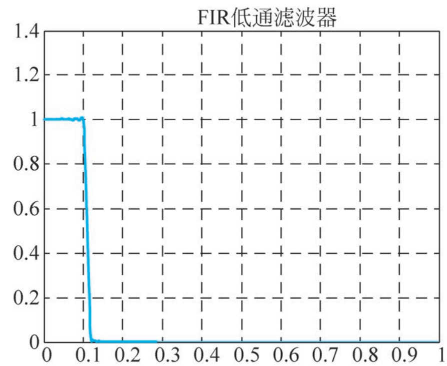

图 3-10-7　FIR 低通滤波器

5. 滤波前 AM 解调信号

```
t = -1:0.00001:1;
A0 = 10;
A1 = 5;
A2 = 3;
f = 3000;
w0 = 2 * f * pi;
m = 0.15;
k = 0.5;
mes = A1 * cos(0.001 * w0 * t);
Uam = A2 * (1 + m * mes). * cos((w0). * t);
Dam = Uam. * cos(w0 * t);
subplot(2,1,1);
plot(t,Dam);
title('滤波前 AM 解调信号波形');
subplot(2,1,2);
axis([187960,188040,0,200000]);
Y5 = fft(Dam);
plot(abs(Y5)),grid;
title('滤波前 AM 调解信号频谱');
```

执行该程序,运行结果如图 3-10-8 所示。

6. 滤波后 AM 解调信号

```
z21 = fftfilt(b21,Dam);
subplot(2,1,1);
plot(t,z21);
title('滤波后的 AM 解调信号波形');
T5 = fft(z21);
subplot(2,1,2);
plot(abs(Y5));
title('滤波后的 AM 解调信号频谱');
axis([198000,202000,0,100000]);
```

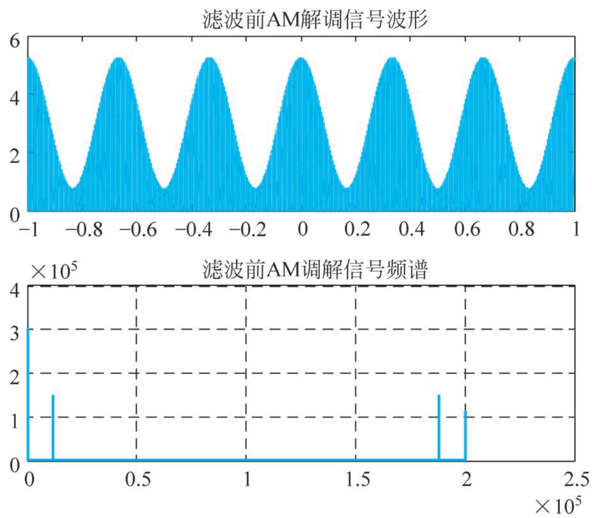

图 3-10-8 滤波前 AM 解调信号波形与频谱

执行该程序，运行结果如图 3-10-9 所示。

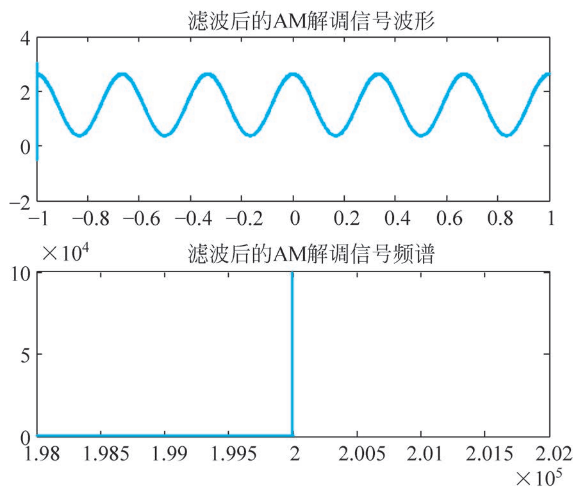

图 3-10-9 滤波后 AM 解调信号波形与频谱

3.11 从采样信号恢复连续时间信号

3.11.1 从采样信号恢复连续时间信号的原理

前面已经研究了傅里叶变换应用于通信系统的两个重要方面，即滤波和调制。现在介绍从冲激采样信号恢复连续时间信号的时域分析。

根据前面介绍过的冲激采样信号的采样原理，若带限信号 $f(t)$ 的傅里叶变换为 $F(\mathrm{j}\omega)$，则经冲激序列采样之后 $f_s(t)$ 的傅里叶变换为 $F_s(\mathrm{j}\omega)$，在满足采样定理的条件下 $F_s(\mathrm{j}\omega)$ 的图形是 $F(\mathrm{j}\omega)$ 的周期重复，而且不会产生混叠。利用理想低通滤波器取出 $F_s(\mathrm{j}\omega)$ 在 $\omega=0$ 两侧的频率分量即可恢复 $F(\mathrm{j}\omega)$，从而无失真地恢复 $f(t)$，如图 3-11-1 所示。这种

频域分析方法简洁、直观,但是如何从时域角度解释这一过程需进一步分析。假设理想低通滤波器的频域特性为

$$H(\mathrm{j}\omega)=\begin{cases}T_s, & |\omega|<\omega_c\\ 0, & |\omega|>\omega_c\end{cases} \tag{3-11-1}$$

式中,ω_c 是滤波器的截止频率;T_s 是冲激采样序列的周期。为方便以下分析,取相位特性为零。

设有冲激采样信号 $f_s(t)$,其采样角频率 $\omega_s>2\omega_m$(ω_m 为原信号的最高角频率)。$f_s(t)$ 及其频谱 $F_s(\mathrm{j}\omega)$ 如图 3-11-1(d)、(a)所示。为了从 $F_s(\mathrm{j}\omega)$ 中无失真地恢复 $F(\mathrm{j}\omega)$,选择一个理想低通滤波器,其频率响应的幅度为 T_s,截止角频率为 ω_c($\omega_m<\omega_c\leqslant\omega_s-\omega_m$),即

$$F(\mathrm{j}\omega)=F_s(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)$$

不难求出滤波器冲激响应 $h(t)$ 表达式为

$$h(t)=T_s\cdot\frac{\omega_c}{\pi}\mathrm{Sa}(\omega_c t) \tag{3-11-2}$$

若冲激序列采样信号 $f_s(t)$ 为

$$f_s(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f(nT_s)\delta(t-nT_s) \tag{3-11-3}$$

利用时域卷积关系可求得输出信号,即原连续时间信号 $f(t)$。

$$\begin{aligned}f(t)=f_s(t)*h(t)&=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f(nT_s)\delta(t-nT_s)*T_s\frac{\omega_c}{\pi}\mathrm{Sa}(\omega_c t)\\&=T_s\frac{\omega_c}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f(nT_s)\mathrm{Sa}[\omega_c(t-nT_s)]\end{aligned} \tag{3-11-4}$$

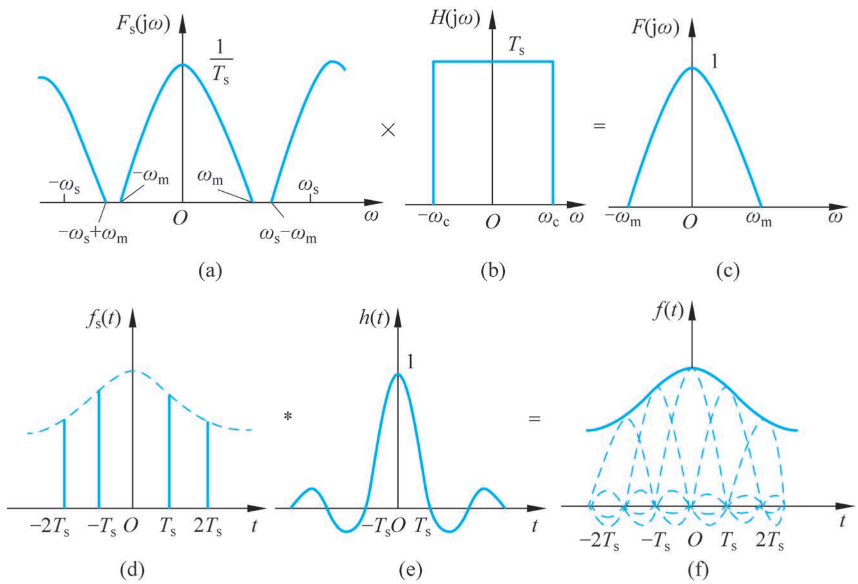

图 3-11-1 由采样信号恢复连续信号

参看图 3-11-1 说明上述结果,图中对照给出从时域和频域恢复 $f(t)$ 和 $F(\mathrm{j}\omega)$ 的过程。式(3-11-4)表明,连续信号 $f(t)$ 可展开成正交采样 Sa 函数的无穷级数,级数的系数等于采

样值 $f(nT_s)$。也就是说，若在采样信号 $f_s(t)$ 的每个样点处画一个最大峰值为 $f(nT_s)$ 的 Sa 函数波形，那么其合成波形就是原信号 $f(t)$，如图 3-11-1(f)所示。因此，只要已知各采样值 $f(nT_s)$，就能唯一地确定出原信号 $f(t)$。

3.11.2 MATLAB 实现

用程序实现对信号 $\mathrm{Sa}(t)=\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{\pi}\right)$ 的采样及由该采样信号恢复重建。

```
wm = 1;
wc = wm;
Ts = pi/wm;
ws = 2 * pi/Ts;
n = - 100:100;
nTs = n * Ts;
f = sinc(nTs/pi);
Dt = 0.005;t = - 15:Dt:15;
fa = f * Ts * wc/pi * sinc((wc/pi) * (ones(length(nTs),1) * t - nTs' * ones(1,length(t))));
t1 = - 15:0.5:15;
f1 = sinc(t1/pi);
subplot(211);
stem(t1,f1);
xlabel('kTs');
xlabel('f(kTs)');
title('sa(t) = sinc(t/pi)的临界采样信号');
subplot(212);
plot(t,fa)
xlabel('t');
ylabel('fa(t)');
title('由 sa(t) = sinc(t/pi)的临界采样信号重构 sa(t)');
grid;
```

执行该程序，运行结果如图 3-11-2 所示。

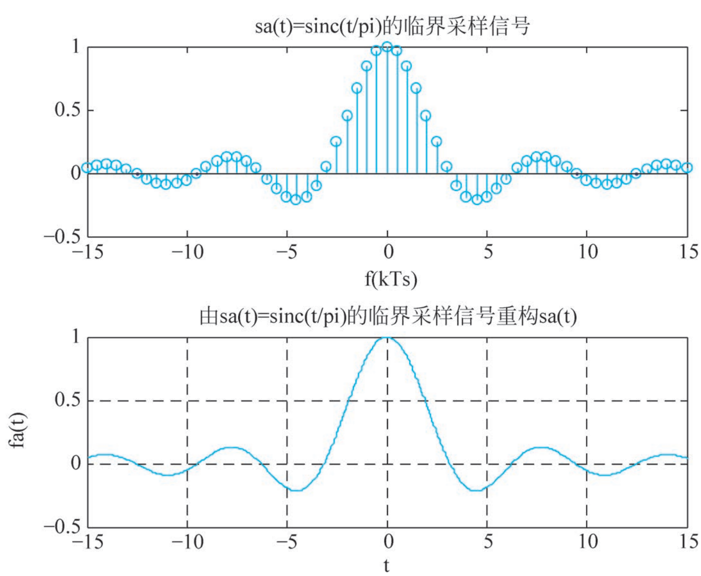

图 3-11-2 信号的采样与重构

3.12 典型题目解析

例 3-28 已知连续周期信号的频谱如图 3-12-1 所示，试写出三角形式的傅里叶级数($\omega_0=3$)。

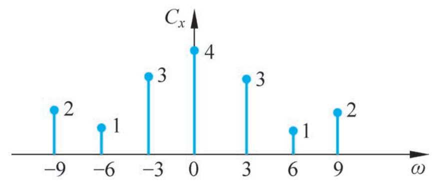

图 3-12-1 例 3-28 图

解： 由图可知 $c_0=4, c_{\pm1}=3, c_{\pm2}=1, c_{\pm3}=2$，其他项为 0，所以

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \\
&= 4+3(e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t})+(e^{j2\omega_0 t}+e^{-j2\omega_0 t})+2(e^{j3\omega_0 t}+e^{-j3\omega_0 t}) \\
&= 4+6\cos(\omega_0 t)+2\cos(2\omega_0 t)+4\cos(3\omega_0 t)
\end{aligned}
$$

例 3-29 已知周期信号 $f(t)=2\cos(2\pi t-3)+\sin(6\pi t)$，试求 $f(t)$ 的傅里叶级数表示式，并画出频谱。

解： $\omega_0=2\pi$，根据欧拉公式，$f(t)$ 可以写为

$$
\begin{aligned}
f(t) &= e^{j(2\pi t-3)}+e^{-j(2\pi t-3)}-0.5je^{j6\pi t}+0.5je^{-j6\pi t} \\
&= e^{-j3}e^{j\omega_0 t}+e^{j3}e^{-j\omega_0 t}-0.5je^{j3\omega_0 t}+0.5je^{-j3\omega_0 t}
\end{aligned}
$$

所以

$$
c_1=e^{-j3}, c_{-1}=e^{j3}, c_3=-0.5j, c_{-3}=0.5j(c_n=0, n\neq\pm1,\pm3)
$$

将 c_n 用模和相角表示为 $C_n=|C_n|e^{j\phi_n}$，可得

$$
|C_{\pm1}|=1,\quad \varphi_1=-3,\quad \varphi_{-1}=3,\quad |C_{\pm3}|=0.5,\quad \varphi_3=-\frac{\pi}{2},\quad \varphi_{-3}=\frac{\pi}{2}
$$

由此可画出信号 $f(t)$ 的幅度频谱和相位频谱，分别如图 3-12-2(a)、(b)所示。

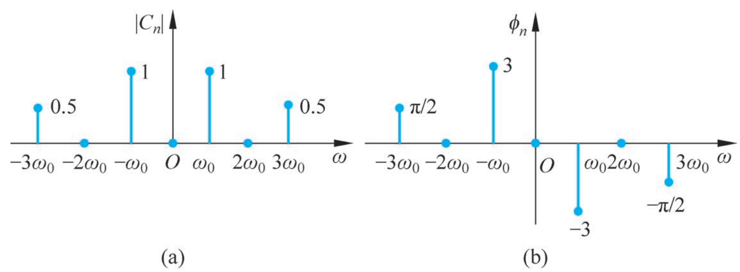

图 3-12-2 例 3-29 图

例 3-30 如图 3-12-3 所示，已知 $\mathcal{F}[f_1(t)]=F_1(j\omega)$，试求信号 $f_2(t)$ 的频谱函数。

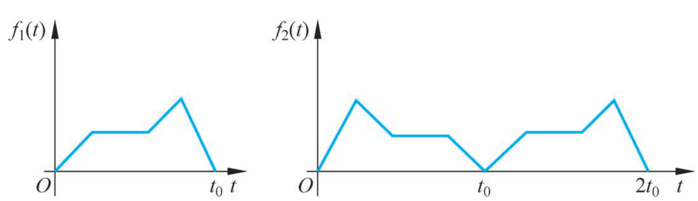

图 3-12-3 例 3-30 图

解： 由于

$$f_2(t)=f_1(-t+t_0)+f_1(t-t_0)$$

因此

$$F_2(\mathrm{j}\omega)=[F_1(-\mathrm{j}\omega)+F_1(\mathrm{j}\omega)]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}$$

例 3-31　已知信号的频谱 $F(\mathrm{j}\omega)$如图 3-12-4 所示，试求 $f(t)$。

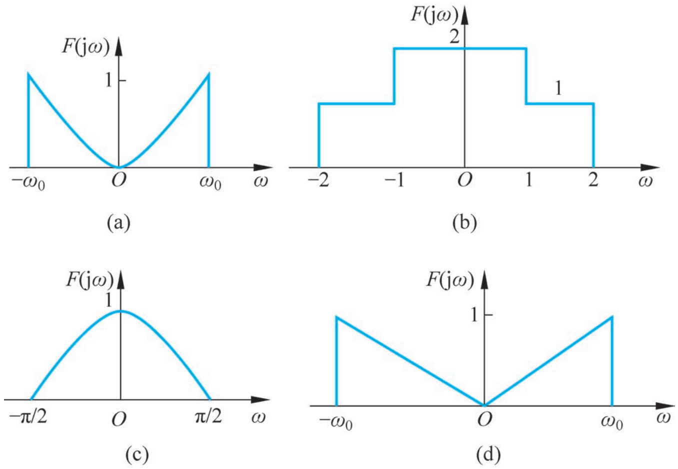

图 3-12-4　例 3-31 图

解：(a) 由于

$$tf(t)\leftrightarrow \mathrm{j}\frac{\mathrm{d}F(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{d}\omega},\quad -t^2f(t)\leftrightarrow \mathrm{j}\frac{\mathrm{d}^2F(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{d}^2\omega},\quad \omega_0=1$$

$$F''(\mathrm{j}\omega)=2p_2(\omega)+\delta'(\omega+1)-2\delta(\omega+1)-\delta'(\omega-1)-2\delta(\omega-1)$$

又

$$\mathrm{Sa}(\omega_0 t)\leftrightarrow \frac{\pi}{\omega_0}p_{2\omega_0}(\omega),\quad \mathrm{Sa}(t)\leftrightarrow \pi p_2(\omega)$$

$$1\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega),\quad -\mathrm{j}t\leftrightarrow 2\pi\delta'(\omega)$$

利用傅里叶变换的频域微分性质与对称性质，得

$$-t^2f(t)=\frac{2}{\pi}\mathrm{Sa}(t)-\frac{\mathrm{j}t}{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}t}-\frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}t}+\frac{\mathrm{j}t}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}t}=\frac{2}{\pi}\mathrm{Sa}(t)-\frac{2}{\pi}\cos(t)-\frac{t}{\pi}\sin(t)$$

所以

$$f(t)=\frac{2\cos(t)}{\pi t^2}+\frac{\mathrm{Sa}(t)}{\pi}-\frac{2\mathrm{Sa}(t)}{\pi t^2}$$

(b) 将频谱分解成两个方波：

$$F(\mathrm{j}\omega)=p_4(\omega)+p_2(\omega)$$

由于 $\mathrm{Sa}(\omega_0 t)\leftrightarrow \frac{\pi}{\omega_0}p_{2\omega_0}(\omega)$，因此 $f(t)=\frac{2}{\pi}\mathrm{Sa}(2t)+\frac{1}{\pi}\mathrm{Sa}(t)$。

(c) 利用对称性质，得

$F(\mathrm{j}t)=p_\pi(t)\cos(t)$，　又 $p_\pi(t)\leftrightarrow \pi\mathrm{Sa}(\omega\pi/2)$，　$\mathrm{Sa}(\pi t/2)\leftrightarrow 2p_\pi(\omega)$

$F(\mathrm{j}t)\leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$，　又 $p_\pi(t)\cos(t)\leftrightarrow \frac{\pi}{2}[\mathrm{Sa}(\pi(\omega-1)/2)+\mathrm{Sa}(\pi(\omega+1)/2)]$

所以

$$2\pi f(-\omega)=\frac{\pi}{2}[\mathrm{Sa}(\pi(\omega-1)/2)+\mathrm{Sa}(\pi(\omega+1)/2)]$$

用 t 替换 $-\omega$,得

$$f(t)=\frac{1}{4}\mathrm{Sa}(\pi(t+1)/2)+\frac{1}{4}\mathrm{Sa}(\pi(t-1)/2)$$

(d) 将频谱分解成一个方波和一个三角波之差:

$$F(\mathrm{j}\omega)=p_{2\omega_0}(\omega)-\Delta_{2\omega_0}(\omega)$$

又

$$\mathrm{Sa}(\omega_0 t)\leftrightarrow\frac{\pi}{\omega_0}p_{2\omega_0}(\omega),\quad \mathrm{Sa}^2(\omega_0 t)\leftrightarrow\frac{\pi}{\omega_0}\Delta_{4\omega_0}(\omega)$$

所以

$$f(t)=\frac{\omega_0}{\pi}\mathrm{Sa}(\omega_0 t)-\frac{\omega_0}{2\pi}\mathrm{Sa}^2(\omega t/2)$$

例 3-32 已知一个 LTI 连续系统的频率特性为

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{\mathrm{j}4\omega}{(\mathrm{j}\omega)^2+\mathrm{j}6\omega+8}$$

求出描述该系统的微分方程,并计算在输入 $f(t)=\cos(3t)u(t)$激励下系统的稳态响应 $y(t)$。

解:由于

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{Y(\mathrm{j}\omega)}{F(\mathrm{j}\omega)}=\frac{\mathrm{j}4\omega}{(\mathrm{j}\omega)^2+\mathrm{j}6\omega+8}$$

$$Y(\mathrm{j}\omega)[(\mathrm{j}\omega)^2+\mathrm{j}6\omega+8]=F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{j}4\omega$$

对以上方程两边进行傅里叶逆变换,并利用傅里叶变换的时域微分性质,可得

$$y''(t)+6y'(t)+8y(t)=4f'(t),\quad t>0$$

系统的稳态相响应为

$$y(t)=|H(\mathrm{j}3)|\cos(3t+\varphi(3))=0.6656\cos(3t-0.0555)$$

例 3-33 已知一个 LTI 连续系统的动态方程为 $y'(t)+3y(t)=f(t)$,若输入信号 $f(t)$是如图 3-12-5 所示的周期方波,求系统的输出 $y(t)$。

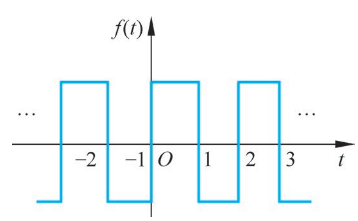

图 3-12-5 例 3-33 图

解:对微分方程两边进行傅里叶变换,可得

$$Y(\mathrm{j}\omega)(\mathrm{j}\omega+3)=F(\mathrm{j}\omega)$$

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{Y(\mathrm{j}\omega)}{F(\mathrm{j}\omega)}=\frac{1}{\mathrm{j}\omega+3}$$

将周期信号展开为傅里叶级数形式:

$$f(t)=\sum_{n=-\infty,n\neq0}^{+\infty}10\mathrm{Sa}(n\pi/2)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(n\pi t-n\pi/2)},\quad \omega_0=2\pi/T_0=\pi$$

所以系统输出为

$$y(t)=\sum_{n=-\infty,n\neq0}^{+\infty}10\mathrm{Sa}(n\pi/2)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(n\pi t-n\pi/2)}H(\mathrm{j}n\pi)=\sum_{n=-\infty,n\neq0}^{+\infty}10\mathrm{Sa}(n\pi/2)\mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}(n\pi t-n\pi/2)}}{\mathrm{j}n\pi+3}\right)$$

例 3-34 已知一个 LTI 连续系统的频率特性为

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{\mathrm{j}\omega+2}$$

求在输入 $f(t)=u(t)$的激励下系统的零状态响应 $y(t)$。

解：

$$F(\mathrm{j}\omega)=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}$$

$$Y(\mathrm{j}\omega)=H(\mathrm{j}\omega)F(\mathrm{j}\omega)=\left(\frac{1}{\mathrm{j}\omega+2}\right)\left(\pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\right)$$

$$=\frac{\pi\delta(\omega)}{2}+\frac{1}{(\mathrm{j}\omega+2)\mathrm{j}\omega}=0.5\pi\delta(\omega)+\frac{0.5}{\mathrm{j}\omega}-\frac{0.5}{\mathrm{j}\omega+2}$$

系统零状态响应为

$$y(t)=\mathcal{F}^{-1}Y[(\mathrm{j}\omega)]=0.5(1-\mathrm{e}^{-2t})u(t)$$

例 3-35 已知一个 LTI 连续系统的动态方程如下，输入信号 $f(t)=\mathrm{e}^{-4t}u(t)$，求输出响应的频谱函数 $Y(\mathrm{j}\omega)$。

(1) $y'(t)+3y(t)=2f(t),t>0$；

(2) $y''(t)+5y'(t)+6y(t)=3f'(t)+5f(t),t>0$。

解：(1) 由于

$$\mathrm{j}\omega Y(\mathrm{j}\omega)+3Y(\mathrm{j}\omega)=2F(\mathrm{j}\omega),\quad F(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{4+\mathrm{j}\omega}$$

因此

$$Y(\mathrm{j}\omega)=\frac{2}{\mathrm{j}\omega+3}F(\mathrm{j}\omega)=\frac{2}{(\mathrm{j}\omega+3)(\mathrm{j}\omega+4)}$$

(2) 由于

$$(\mathrm{j}\omega)^2Y(\mathrm{j}\omega)+5\mathrm{j}\omega Y(\mathrm{j}\omega)+6Y(\mathrm{j}\omega)=3\mathrm{j}\omega 2F(\mathrm{j}\omega)+5F(\mathrm{j}\omega)$$

因此

$$Y(\mathrm{j}\omega)=\frac{3\mathrm{j}\omega+5}{(\mathrm{j}\omega+2)(\mathrm{j}\omega+3)}F(\mathrm{j}\omega)=\frac{3\mathrm{j}\omega+5}{(\mathrm{j}\omega+2)(\mathrm{j}\omega+3)(\mathrm{j}\omega+4)}$$

例 3-36 根据给定的输入信号 $f(t)$与输出信号 $y(t)$，判断下列系统是否为无失真传输系统。

(1) $f(t)=u(t),y(t)=-2u(t+2)$；

(2) $f(t)=u(t-t_0)+\delta(t),y(t)=3u(t-t_0-10)+3\delta(t-10)$。

解：无失真传输系统的输入输出关系应满足 $y(t)=Kf(t-t_d)$，其中，K 是一个正常数，t_d 是输入信号通过系统后的时间延迟。因此，无失真传输系统的频率响应为 $H(\mathrm{j}\omega)=K\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_d}$，单位冲激响应为 $h(t)=K\delta(t-t_d)$。

(1) 由于 $y(t)=-2u(t+2)=-2f(t+2),k=-2$，不是一个正常数，不满足无失真传输系统的条件，故系统不是无失真传输系统。

(2) 由于 $y(t)=3f(t-10)$，因此 $h(t)=3\delta(t-10)$，满足无失真传输条件，故系统为无失真传输系统。

例 3-37 已知理想低通滤波器的频率特性为

$$H(\mathrm{j}\omega)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}, & |\omega|<2\pi\\ 0, & |\omega|>2\pi\end{cases}$$

(1) 求该滤波器的单位冲激响应 $h(t)$;

(2) 输入 $f(t)=\mathrm{Sa}(\pi t)$,$-\infty<t<+\infty$,求输出 $y(t)$;

(3) 输入 $f(t)=\mathrm{Sa}(3\pi t)$,$-\infty<t<+\infty$,求输出 $y(t)$。

解: (1) $H(\mathrm{j}\omega)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}, & |\omega|<2\pi\\ 0, & |\omega|>2\pi\end{cases}=p_{4\pi}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}$,故有 $h(t)=2\mathrm{Sa}[2\pi(t-2)]$。

(2)

$$f(t)=\mathrm{Sa}(\pi t),\quad F(\mathrm{j}\omega)=p_{2\pi}(\omega)$$

$$Y(\mathrm{j}\omega)=H(\mathrm{j}\omega)F(\mathrm{j}\omega)=p_{2\pi}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}$$

$$y(t)=\mathcal{F}^{-1}[Y(\mathrm{j}\omega)]=\mathrm{Sa}(\pi(t-2))$$

(3)

$$f(t)=\mathrm{Sa}(3\pi t),\quad F(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{3}p_{6\pi}(\omega)$$

$$Y(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{3}p_{4\pi}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}$$

$$y(t)=\mathcal{F}^{-1}[Y(\mathrm{j}\omega)]=\frac{2}{3}\mathrm{Sa}[2\pi(t-2)]$$

3.13 习题

3.13.1 自测题

一、填空题

1. 周期信号的傅里叶级数的两种表示形式是________和________。
2. 信号的频谱包括两部分,它们分别是________谱和________谱。
3. 从信号频谱的连续性和离散性来考虑,非周期信号的频谱是________的。
4. 从信号频谱的连续性和离散性来考虑,周期信号的频谱是________的。
5. 时域为 1 的信号傅里叶变换是________。
6. 已知 $x(t)$的傅里叶变换为 $X(\mathrm{j}\omega)$,则 $x_1(t)=x(3t)$的傅里叶变换为 ________。
7. 频谱函数 $F(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{2}[u(\omega+2)-u(\omega-2)]$的原函数 $f(t)=$________。
8. 频谱函数 $F(\mathrm{j}\omega)=\delta(\omega-2)+\delta(\omega+2)$傅里叶逆变换 $f(t)=$________。
9. 已知 $f(t)$的频谱函数为 $F(\mathrm{j}\omega)$,则频谱函数$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}=$________。
10. 若 $f(t)$的傅里叶变换为 $F(\mathrm{j}\omega)$,则 $f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}$ 傅里叶变换为________,$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$的傅里叶变换为________。
11. $\delta(t)$的傅里叶变换是________。
12. $x(t)$的傅里叶变换为 $X(\mathrm{j}\omega)$,则 $y(t)=x\left(\frac{1}{3}t\right)$的傅里叶变换为________。
13. 常见的滤波器有________、________、________。

14. 对带宽为 20kHz 的信号 $f(t)$进行采样,其奈奎斯特间隔 $T_s=$________μs;信号 $f(2t)$的带宽为________kHz,其奈奎斯特频率 $f_s=$________kHz。

15. 人的声音频率为 300～3400Hz,若对其采样,则采样频率应为________。

16. 对频带为 0～20kHz 的信号 $f(t)$进行采样,最低采样频率为________。

17. 无失真传输系统的频域表达式是________。

二、单项选择题

1. 狄利克雷条件是傅里叶级数存在的(　　)。

A. 充分条件　B. 必要条件　C. 充要条件　D. 以上均否

2. 当周期信号的周期增大时,频谱图中谱线的间隔(　　)。

A. 增大　B. 减小　C. 不变　D. 无法回答

3. 当周期信号的持续时间减少时,频谱图中谱线的幅度(　　)。

A. 增大　B. 减小　C. 不变　D. 无法回答

4. 当信号 $f(t)$的带宽为 $\Delta\omega$,则信号 $f(2t)$的带宽为(　　)。

A. $\Delta\omega$　B. $2\Delta\omega$　C. $\frac{1}{2}\Delta\omega$　D. $4\Delta\omega$

5. 信号经时移后,其频谱函数的变化为(　　)。

A. 幅度频谱不变,相位频谱变化　B. 幅度频谱变化,相位频谱不变

C. 幅度频谱相位频谱均不变　D. 幅度频谱相位频谱均变化

6. 已知信号 $f(t)$刚好不失真通过某一系统,则信号 $f\left(\frac{1}{2}t\right)$(　　)不失真通过该系统。

A. 不能　B. 能　C. 不一定　D. 无法回答

7. 信号的频带宽度与信号的持续时间成(　　)。

A. 反比　B. 正比　C. 不变　D. 无法回答

8. 频谱搬移后,信号的带宽(　　)。

A. 增大　B. 减小　C. 不变　D. 无法回答

9. 系统频域分析的基础是(　　)。

A. 线性特性　B. 频域卷积特性　C. 时域卷积特性　D. 频移特性

10. 设滤波器的频率特性为 $H(j\omega)=ke^{-j2\pi t_0\omega}$,则系统的单位冲激响应 $h(t)=$(　　)。

A. $k\delta(t)$　B. $k\delta(t+2\pi t_0)$　C. $k\delta(t-2\pi t_0)$　D. $k\delta(t-\pi t_0)$

11. 无失真传输系统的含义是(　　)。

A. 输出信号与输入信号完全一致

B. 输出信号与输入信号相比,波形相同,起始位置不同

C. 输出信号与输入信号相比,波形不同,起始位置相同

D. 输出信号与输入信号相比,波形和起始位置都不同

12. 无失真传输系统的频率特性是(　　)。

A. 幅度特性为 ω 的线性函数,相频特性为常数

B. 幅度特性为常数,相频特性为 ω 的线性函数

C. 幅度特性和相频特性均为 ω 的线性函数

D. 幅度特性和相频特性均为常数

13. 信号 $e^{-2(t-1)}u(t-1)$的频谱为(　　)。

A. $\frac{e^{-2}}{2+j\omega}$　　B. $\frac{e^{-2}}{-2+j\omega}$　　C. $\frac{e^{-j\omega}}{2+j\omega}$　　D. $\frac{e^{-2}}{-2-j\omega}$

14. 信号 $e^{-(2+5j)t}u(t)$的频谱为(　　)。

A. $\frac{e^{j\omega}}{2-j5}$　　B. $\frac{e^{j\omega}}{2+j5}$　　C. $\frac{1}{2+j(\omega+5)}$　　D. $\frac{1}{-2+j(\omega+5)}$

15. 函数$\frac{d}{dt}[e^{-2t}\omega(t)]$的傅里叶变换为(　　)。

A. $\frac{1}{2+j\omega}$　　B. $\frac{1}{-2+j\omega}$　　C. $\frac{j\omega}{2+j\omega}$　　D. $\frac{j\omega}{-2+j\omega}$

16. 周期信号 $f(t)=1+2\cos t+\frac{1}{2}\sin 3t$ 的傅里叶变换为(　　)。

A. $\delta(\omega)+2\delta(\omega+3)+\frac{1}{2}\delta(\omega-3)$

B. $2\pi\delta(\omega)+\frac{j}{2}\pi[\delta(\omega+3)-\delta(\omega-3)]$

C. $2\pi\delta(\omega)+2\pi[\delta(\omega+1)+\delta(\omega-1)]+\frac{j}{2}\pi[\delta(\omega+3)-\delta(\omega-3)]$

D. $\delta(\omega)+2[\delta(\omega+1)+\delta(\omega-1)]+\frac{j}{2}[\delta(\omega+3)-\delta(\omega-3)]$

17. 若 $f(t)\leftrightarrow F(j\omega)$,则 $f(at-b)$的傅里叶变换为(　　)。

A. $\frac{1}{|a|}F\left(j\frac{\omega}{a}\right)e^{-j\omega\frac{b}{a}}$　　B. $\frac{1}{a}F(ja\omega)e^{-j\omega\frac{b}{a}}$

C. $\frac{1}{|a|}F\left(j\frac{\omega}{a}\right)e^{j\omega\frac{b}{a}}$　　D. $\frac{1}{|a|}F\left(j\frac{\omega}{a}\right)e^{-j\omega b}$

18. 求信号 $f(t)=\delta(t)-2e^{-2t}u(t)$的频谱(　　)。

A. $\frac{j\omega}{2-j\omega}$　　B. $1-\frac{2}{2-j\omega}$　　C. $\frac{j\omega}{2+j\omega}$　　D. $\frac{2}{2-j\omega}$

19. 求信号 $g_\tau\left(t-\frac{\tau}{2}\right)$的频谱(　　)。

A. $\mathrm{Sa}\left(\frac{\tau}{2}\omega\right)e^{-j\frac{\tau}{2}\omega}$　　B. $\tau\mathrm{Sa}\left(\frac{\tau}{2}\omega\right)e^{-j\frac{\tau}{2}\omega}$

C. $\tau\mathrm{Sa}\left(\frac{\tau}{2}\omega\right)e^{-j\omega\tau}$　　D. $\tau\mathrm{Sa}\left(\frac{\tau}{2}\omega\right)e^{j\omega\tau}$

20. 信号经微分后,频谱中高频分量的比重(　　)。

A. 增大　　B. 减小　　C. 不变　　D. 无法回答

21. 理想低通滤波器(LPF)的频率特性为 $H(j\omega)=G_{2\pi}(\omega)$,输入信号为 $f(t)=\mathrm{Sa}(\pi t)$,输出信号 $y(t)=$(　　)。

A. $G_{2\pi}(t)$　　B. $2\pi\mathrm{Sa}(\pi t)$　　C. $\mathrm{Sa}(\pi t)$　　D. $2\pi G_{2\pi}(t)$

22. 如果 $f_1(t)=\begin{cases}1, & |t|<1\\ 0, & |t|>1\end{cases}$,$f_2(t)=\cos(4\pi t)$,则 $f_1(t)f_2(t)$的频谱为(　　)。

A. $\mathrm{Sa}(\omega+4\pi)*\mathrm{Sa}(\omega-4\pi)$　　B. $\mathrm{Sa}^2(\omega-4\pi)$

C. $\mathrm{Sa}^2(\omega+4\pi)$　　D. $\mathrm{Sa}(\omega+4\pi)+\mathrm{Sa}(\omega-4\pi)$

23. 如图 3-13-1 所示系统，当输入信号为 $e(t)=1+\cos t+\frac{1}{2}\sin 3t$ 时的响应为(　　)。

A. $y(t)=1+2\cos t+\frac{1}{2}\sin 3t$　　B. $y(t)=1+\frac{1}{2}\cos t$

C. $y(t)=1+\cos t+\frac{1}{4}\sin 3t$　　D. $y(t)=2+4\cos t\,|H(\mathrm{j}\omega)|$

图 3-13-1　题 23 图

3.13.2　基础题、提高题、MATLAB 习题和小结

第 3 章基础题　　第 3 章提高题　　第 3 章 MATLAB 习题　　第 3 章小结