

关 系

集合为描述系统中的各类对象提供了数学工具,而映射为描述事物之间的一种单值依赖关系提供了工具。单值依赖联系是事物之间比较简单的联系,通过这种联系,研究事物的运动规律和状态变化。现实世界中,事物不是孤立的,事物之间都有联系,不仅有单值依赖关系,更有多值依赖关系。“关系”这个概念就提供了一种描述事物之间的多值依赖关系的数学工具。映射是关系的一个特例。这样,集合、映射和关系等概念都是描述自然现象及其相互联系的有力工具,为建立系统和技术过程的数学模型提供了描述工具和方法。

本章系统地研究关系的概念及其性质,将给出关系的定义,特别给出了二元关系的几种等价定义和性质、二元关系的运算,其中特别讨论在计算机科学中具有重要应用的关系闭包运算、等价关系与偏序关系。

3.1 关系的概念

数学中“关系”的概念是从自然界中的一般关系里抽象出来的,如父子关系、兄妹关系、国家间的外交关系、整数间的大于关系等。这些都是具体关系,都涉及了一些具体事物和某种性质。因此,关系是事物间的联系,至少指两个事物,并且具有一定的顺序。形式地定义关系如下。

定义 3.1 设 A 和 B 是两个集合,一个从 $A \times B$ 到 $\{\text{是}, \text{否}\}$ 的映射 R 称为从 A 到 B 的一个二元关系。 $\forall (a, b) \in A \times B$, 如果 (a, b) 在 R 作用下的象为“是”,则 a 与 b 符合关系 R , 记为 aRb ; 如果 (a, b) 在 R 作用下的象为“否”,则 a 与 b 不符合关系 R , 记为 $a \not R b$ 。如果 $A = B$, 则称 R 为 A 上的二元关系。

令 $f: A \rightarrow B$, 则有 $R_f: A \times B \rightarrow \{\text{是}, \text{否}\}$, 对于 $\forall (x, y) \in A \times B$, $xR_f y$ 当且仅当 $f(x) = y$ 。于是,映射 f 是 A 到 B 的一个二元关系。映射是二元关系的特例。于是,映射 f 作为二元关系仍记为 f , $\forall x \in A$, 存在唯一 $y \in B$ 使 $f(x) = y$, 即 xfy 。但对 A 到 B 的任意二元关系 R 未必有此性质,即对于 $\forall x \in A$, 未必有 $y \in B$ 使 xRy 。若某个 $x \in A$ 有 $y \in B$ 使 xRy , 那么 y 也可能不唯一,甚至有多,乃至无穷多个。

例 3.1 整数集合 $\mathbf{Z}$ 上的整除关系记为 $|$ 。 $\forall m, n \in \mathbf{Z}, m | n$ 当且仅当 m 能除尽 n , 于是, $|$ 是 $\mathbf{Z}$ 上的二元关系。

在通常的应用中, 某个具体的二元关系总是用具体事物之间的某种联系来确定。由于直观的联系并不总是清楚的, 因此有必要给出一个精确的定义。当抽去事物的属性和联系的属性时, 剩下的就是一个序对对应的是“是”还是“否”了。于是, 有二元关系的更形式化的等价定义如下。

定义 3.2 设 A 和 B 是两个集合, $A \times B$ 的任一子集 R 称为从 A 到 B 的一个二元关系。如果 $(a, b) \in R$, 则 a 与 b 符合关系 R , 记为 aRb ; 如果 $(a, b) \notin R$, 则 a 与 b 不符合关系 R , 记为 $a \not R b$ 。如果 $A = B$, 则称 R 为 A 上的二元关系。

定义 3.1 说明了二元关系就是某种性质, 而定义 3.2 告诉我们, 这种性质就是 $A \times B$ 的一个子集, 即满足这种性质的那些序对的集合。从形式逻辑角度看, 定义 3.1 是使用揭示事物内涵的方法来定义二元关系的, 而定义 3.2 是使用揭示二元关系的外延的方法来定义二元关系的, 因此定义 3.2 比定义 3.1 更抽象。在抽象讨论二元关系时, 使用定义 3.2 比较方便, 在讨论具体问题中的具体二元关系时, 使用定义 3.1 比较方便。

按照定义 3.2, $A \times B$ 的任一子集 R 都是从 A 到 B 的二元关系。若 $|A| = m, |B| = n$, 则 $|A \times B| = m \times n$, $A \times B$ 共有 $2^{m \times n}$ 个子集, 所以, 从 A 到 B 的二元关系共有 $2^{m \times n}$ 个。

特别地, $A \times B$ 也是从 A 到 B 的二元关系, 而空集 $\emptyset$ 称为从 A 到 B 的空关系, 集合 $\{(a, a) | a \in A\}$ 称为 A 上的恒等关系或相等关系, 记为 I_A 。

定义 3.3 设二元关系 $R \subseteq A \times B$, 集合 $\{x | x \in A \text{ 且 } \exists y \in B \text{ 使 } (x, y) \in R\}$ 称为 R 的定义域, 并记为 $\text{dom}(R)$; 而集合 $\{y | y \in B \text{ 且 } \exists x \in A \text{ 使 } (x, y) \in R\}$ 称为 R 的值域, 并记为 $\text{ran}(R)$ 。

一般地, $\text{dom}(R) \subseteq A, \text{ran}(R) \subseteq B$ 。

例 3.2 集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 上的关系 $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 4), (4, 4)\}$, 则 $\text{dom}(R) = \{1, 2, 4\}, \text{ran}(R) = \{2, 3, 4\}$ 。

在日常生活以及数学、计算机科学中, 常常要考虑 3 个事物、4 个事物等之间的联系, 例如, 在考虑城市之间的位置关系时, 长春位于哈尔滨和沈阳之间。因此, 有必要将关系的概念推广到 n 元关系。

定义 3.4 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是 n 个集合, $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ 的一个子集 R 称为 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 间的一个 n 元关系, 每个 A_i 称为 R 的一个域。

在数据库中, 把 n 元关系 R 看成一个二维表, 表中的每一行是关系 R 的一个 n 元组, 表中有 n 列, 每一列取一个名字, 称为属性, 而每个域 A_i 就是对应属性的取值范围, 或者说是 A_i 代表的属性。因此, 以 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为属性的 n 元关系 R , 记为 $R(A_1, A_2, \dots, A_n)$, 称为一个关系模式。 n 元关系是关系数据模型的核心, 而关系数据模型是关系数据库的基础。

例 3.3 设 A_1 为某单位的职工姓名的集合, A_2 为性别的集合, A_3 为年龄的集合, A_4 为学历的集合, A_5 为工资的集合。于是, 表 3.1 就是该单位的职工情况表, 它是 $A_1, A_2, \dots, A_5$ 间的一个五元关系。

表 3.1

姓 名	性 别	年 龄	学 历	工 资
冯霆	男	21	高中	1800
赵悦	女	24	本科	2300
蒋睿	女	29	本科	2900
周枫	男	33	硕士研究生	3600

由于在数学和计算机科学中主要使用二元关系,因此,本章以后各节主要讨论二元关系的运算及性质。

习题

1. 用枚举法表示从 A 到 B 的二元关系 R 。

(1) $A = \{0, 1, 2\}, B = \{0, 2, 4\}, R = \{(x, y) \mid x, y \in A \cap B\}$ 。

(2) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{1, 2, 3\}, R = \{(x, y) \mid x = y^2\}$ 。

2. 用枚举法表示 $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ 上的二元关系 R 。

(1) $R = \{(x, y) \mid x + y = 4\}$ 。

(2) $R = \{(x, y) \mid x = 2y\}$ 。

3. 设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 上的二元关系 $R = \{(1, 2), (2, 4), (3, 3)\}, S = \{(1, 3), (2, 4), (4, 2)\}$ 。

(1) 求 $R \cup S, R \cap S, R \setminus S, R^c$ 。

(2) 求 $\text{dom}(R), \text{ran}(S), \text{dom}(R \cup S), \text{ran}(R \cup S)$ 。

4. 证明: 集合 A 上的任意二元关系 R 和 S , 有:

(1) $\text{dom}(R \cup S) = \text{dom}(R) \cup \text{dom}(S)$;

(2) $\text{ran}(R \cap S) = \text{ran}(R) \cap \text{ran}(S)$ 。

5. 设 A 是 n 个元素的集合, 证明 A 上有 2^{n^2} 个二元关系。

3.2 关系矩阵和关系图

关系的概念对于计算机科学以及其他学科极其重要, 因此, 如何表示关系, 使其直观、形象、便于计算机处理就显得十分重要。关系图及关系矩阵就是针对上述需要而提出来的, 关系图直观形象, 具有启发性; 关系矩阵便于计算机存储与处理。本节介绍有穷集合上二元关系的关系矩阵及关系图。

定义 3.5 设有穷集合 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 和 $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$, R 是从 A 到 B 的一个二元关系, R 的关系矩阵定义为一个 $n \times m$ 矩阵 $M = (m_{ij})$, 其中

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & a_i R b_j \\ 0 & a_i \not R b_j \end{cases}$$

例 3.4 集合 $A = \{1, 2, 3\}$ 和 $B = \{a, b, c, d\}$, 从 A 到 B 的一个二元关系 $R = \{(1, b), (1, c), (2, a), (2, c), (3, b)\}$, 则 R 的关系矩阵为

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

例 3.5 集合 $A = \{a, b, c, d\}$, A 上的一个二元关系 $R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, b), (b, d), (c, a), (c, c)\}$, 则 R 的关系矩阵为

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

显然, 从 A 到 B 的一个二元关系 R 的矩阵是以 0 或 1 为项的矩阵, 这种矩阵称为布尔矩阵。在建立 R 的矩阵时, 首先要确定集合 A 和 B 中元素的顺序, 一般情况下, 不同的元素顺序得到的矩阵是不相等的, 但是都能忠实地反映关系的全部信息。尽管不同的元素顺序得到的关系矩阵不相同, 但是可以相互转化, 就是在行和列的同样变换下, 可以将一种矩阵表示变为另一种矩阵表示。

对于具体的关系 R , 如何确定元素的顺序, 使关系矩阵成为某种形式的简单矩阵, 要根据关系 R 的具体情况而定。关系矩阵包含关系的全部信息, 从关系矩阵很容易看出关系具有某些性质。

关系除了可以用关系矩阵表示外, 还可以用关系图表示。从有穷集合 A 到有穷集合 B 的二元关系 R 用图表示时, 首先用点表示 A 和 B 的元素, 并在旁边标注元素的名字, 然后用从点 x 到点 y 的矢线表示 R 中的序对 (x, y) 。若 $(x, x) \in R$, 则画一条从点 x 指向自身的线, 称为环。这样由点和线组成的有向图称为 R 的关系图。

例 3.6 例 3.4 中的关系 R 的关系图如图 3.1(a) 所示, 例 3.5 中的关系 R 的关系图如图 3.1(b) 所示。

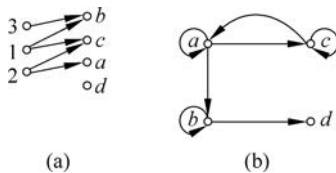


图 3.1

关系图也包含关系的全部信息, 而且直观、形象, 从关系图可以很容易地看出关系的一些性质。

习题

1. 画出下列二元关系的关系图。

(1) $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $R: A \rightarrow A$, $R = \{(x, y) \mid x^2 = y\}$ 。

(2) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $R: A \rightarrow A$, $R = \{(x, y) \mid x = 2y\}$ 。

(3) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$, $R: A \rightarrow B$, $R = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B, x + y = 8\}$ 。

(4) $A = \{5, 6, 7, 8\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $R: A \rightarrow B$, $R = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B, 1 \leq x - y < 7\}$ 。

2. 写出下列二元关系的关系矩阵。

(1) $A = \{1, 2, 3\}, R: A \rightarrow A, R = \{(1, 2), (2, 2), (3, 1)\}$ 。

(2) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, R: A \rightarrow A, R = \{(x, y) \mid x < y \text{ 或 } x \text{ 是质数}\}$ 。

(3) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, R: A \rightarrow A, R = \{(x, y) \mid 2x = y\}$ 。

(4) $A = \{1, 2, 3\}, B = \{4, 5, 6, 7, 8\}, R: A \rightarrow B, R = \{(1, 5), (1, 7), (2, 4), (2, 8), (3, 6)\}$ 。

3.3 关系的性质

在实际问题中,我们感兴趣的关系往往具有一些特殊的性质,如自反性、反自反性、对称性、反对称性、传递性等。本节讨论集合 A 上的二元关系 R 可能具有的一些特殊性质。

定义 3.6 集合 A 上的二元关系 R 称为自反的,如果 $\forall x \in A$, 则有 xRx 。

在这个定义中要求 A 的每个元素 x 都有 xRx , 即 $(x, x) \in R$, 这并不排斥某个序对 (x, y) , 当 $x \neq y$ 时, 仍有 $(x, y) \in R$ 。显然, R 是自反的, 当且仅当 $I_A \subseteq R$ 。

例 3.7 集合 A 上的恒等关系 I_A 是自反的, 但 I_A 的任一真子集均不是 A 上的自反关系。

例 3.8 集合 $A = \{1, 2, 3\}$ 上的二元关系 $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$ 是自反的, $S = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 2)\}$ 不是自反的, $T = \{(1, 3), (2, 3)\}$ 也不是自反的。

定义 3.7 集合 A 上的二元关系 R 称为反自反的, 如果 $\forall x \in A$, 则有 $x \not R x$ 。

显然, R 是反自反的, 当且仅当 $R \cap I_A = \emptyset$ 。

例 3.9 自然数集上的小于关系是反自反的。

例 3.10 例 3.8 中 R 不是反自反的, S 也不是反自反的, 但 T 是反自反的。

显然, 非空集合上的一个二元关系是自反的, 必不是反自反的; 反之亦然。但是, 一个二元关系不是自反的, 未必是反自反的; 反之亦然, 即存在既不是自反的也不是反自反的二元关系。

定义 3.8 集合 A 上的二元关系 R , 如果 $\forall x, y \in A$, 只要 xRy 就有 yRx , 则称 R 是对称的。

例 3.11 人之间的朋友关系是对称的。

例 3.12 集合 $A = \{1, 2, 3\}$ 上的二元关系 $R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)\}$ 是对称的, $S = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3)\}$ 不是对称的, $T = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3)\}$ 也不是对称的。

定义 3.9 集合 A 上的二元关系 R , 对 $\forall x, y \in A$, 如果 xRy 且 yRx , 则 $x = y$, 则称 R 是反对称的。

例 3.13 集合 A 上的恒等关系 I_A 是对称的, 也是反对称的。

例 3.14 例 3.12 中 R 不是反对称的, S 也不是反对称的, T 是反对称的。

显然, 二元关系的对称性和反对称性不是矛盾的, 即存在既是对称的也是反对称的二元关系。

例 3.15 证明: 集合 A 上的二元关系 R 既是对称的也是反对称的, 当且仅当 $R \subseteq I_A$ 。

证 若 $R \subseteq I_A$, 则显然 R 既是对称的也是反对称的。

若 R 既是对称的也是反对称的, 则对于 xRy , 由 R 的对称性有 yRx , 再由 R 的反对称

性有 $x=y$ 。这表明 $\forall xRy$ 均有 $x=y$, 故 $\forall (x,y) \in R$ 均为 $(x,x) \in R$, 从而 $(x,x) \in I_A$, 因此 $R \subseteq I_A$ 。证毕。

定义 3.10 集合 A 上的二元关系 R , 对 $\forall x,y,z \in A$, 如果 xRy 且 yRz , 则 xRz , 那么称 R 是传递的。

例 3.16 整数集合上的整除关系是传递的。

例 3.17 集合 $A=\{1,2,3\}$ 上的二元关系 $R=\{(1,2),(1,3),(2,3),(3,3)\}$ 是传递的, $S=\{(1,3),(3,2),(3,3)\}$ 不是传递的, $T=\{(1,2),(2,1)\}$ 也不是传递的。

例 3.18 集合 A 上的二元关系 R , 若 $R=\emptyset$, 则 R 是反自反的、对称的和传递的。但是, 若 $R \neq \emptyset$ 且 R 是反自反的、对称的, 则 R 不是传递的。

实际上, 因为 $R \neq \emptyset$, 所以, $\exists x,y \in A$ 使 xRy , 由 R 的对称性得 yRx 。若假设 R 是传递的, 则 xRx , 这与 R 是反自反的矛盾。因此, R 不是传递的。

在 3.2 节中指出关系矩阵和关系图均包含了关系的全部信息, 从中可以看出关系具有某些性质, 对于集合 A 上的二元关系 R , R 的关系矩阵为 M , R 的关系图为 G , 则

- (1) R 是自反的, 当且仅当 M 的对角线上的全部元素均为 1;
- (2) R 是反自反的, 当且仅当 M 的对角线上的全部元素均为 0;
- (3) R 是对称的, 当且仅当 M 是对称矩阵;
- (4) R 是反对称的, 当且仅当 $i \neq j$ 时, M 中的元素 m_{ij} 与 m_{ji} 不同时为 1;
- (5) R 是传递的, 当且仅当 M 中的元素 $m_{ij}=1$ 且 $m_{jk}=1$ 时, 必有 $m_{ik}=1$;
- (6) R 是自反的, 当且仅当 G 的每个顶点上均有一个环;
- (7) R 是反自反的, 当且仅当 G 中没有环;
- (8) R 是对称的, 当且仅当 G 中任两不同的顶点之间有矢线, 则必有两条方向相反的矢线;
- (9) R 是反对称的, 当且仅当 G 中任两顶点之间最多有一条矢线;
- (10) R 是传递的, 当且仅当 G 中从某顶点 i 沿矢线方向经两条矢线可到达另一顶点 j , 则必有从顶点 i 到顶点 j 的矢线。

由于二元关系是序对的集合, 故有关集合的运算对二元关系也适用。特别是这些运算的交换律、结合律等运算律是运算本身所决定的, 因此, 在对二元关系进行集合运算时, 各运算律保持不变。而关系的性质在关系的集合运算下是否能够保持呢?

例 3.19 集合 A 上的两个二元关系 R 和 S , 若 R 和 S 均是自反的, 则 $R \cap S$ 和 $R \cup S$ 分别是自反的吗?

解 若 R 和 S 均是自反的, 则 $R \cap S$ 和 $R \cup S$ 分别是自反的。下面予以证明。

对于 $\forall x \in A$, 因为 R 是自反的, 所以 $(x,x) \in R$ 。因为 S 是自反的, 所以 $(x,x) \in S$ 。可得 $(x,x) \in R \cap S$, 因此 $R \cap S$ 是自反的。

对于 $\forall x \in A$, 因为 R 是自反的, 所以 $(x,x) \in R$, 可得 $(x,x) \in R \cup S$, 因此 $R \cup S$ 是自反的。证毕。

例 3.20 集合 A 上的两个二元关系 R 和 S , 若 R 和 S 均是对称的, 则 $R \cap S$ 和 $R \cup S$ 分别是对称的吗?

解 若 R 和 S 均是对称的, 则 $R \cap S$ 和 $R \cup S$ 分别是对称的。下面予以证明。

对于 $\forall x,y \in A$, 若 $(x,y) \in R \cap S$, 则 $(x,y) \in R$ 且 $(x,y) \in S$ 。因为 R 是对称的, 所

以 $(y, x) \in R$ 。因为 S 是对称的, 所以 $(y, x) \in S$ 。可得 $(y, x) \in R \cap S$, 因此 $R \cap S$ 是对称的。

对于 $\forall x, y \in A$, 若 $(x, y) \in R \cup S$, 则 $(x, y) \in R$ 或 $(x, y) \in S$ 。

若 $(x, y) \in R$, 因为 R 是对称的, 所以 $(y, x) \in R$, 可得 $(y, x) \in R \cup S$ 。

若 $(x, y) \in S$, 因为 S 是对称的, 所以 $(y, x) \in S$, 可得 $(y, x) \in R \cup S$ 。

因此 $R \cup S$ 是对称的。证毕。

例 3.21 集合 A 上的两个二元关系 R 和 S , 若 R 和 S 均是传递的, 则 $R \cap S$ 和 $R \cup S$ 分别是传递的吗?

解 若 R 和 S 均是传递的, 则 $R \cap S$ 是传递的, 但 $R \cup S$ 不一定是传递的。

实际上, 对于 $\forall x, y, z \in A$, 若 $(x, y) \in R \cap S$ 且 $(y, z) \in R \cap S$, 则 $(x, y) \in R, (x, y) \in S, (y, z) \in R, (y, z) \in S$ 。

因为 R 是传递的, 所以, 由 $(x, y) \in R, (y, z) \in R$, 可得 $(x, z) \in R$ 。

因为 S 是传递的, 所以, 由 $(x, y) \in S, (y, z) \in S$, 可得 $(x, z) \in S$ 。

因此 $(x, z) \in R \cap S$, 于是, $R \cap S$ 是传递的。

然而, 对于集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 上的二元关系 $R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$ 和 $S = \{(1, 1), (4, 3)\}$, 有 $R \cup S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (4, 3)\}$, 这时, R 和 S 均是传递的, $R \cup S$ 也是传递的。

对于集合 $A = \{1, 2, 3\}$ 上的二元关系 $R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$ 和 $S = \{(3, 2)\}$, 有 $R \cup S = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 2)\}$, 这时, R 和 S 均是传递的, 但 $R \cup S$ 不是传递的。

习题

1. 确定整数集合 $\mathbf{Z}$ 上的等于关系、小于等于关系、小于关系、整除关系具有哪些性质, 将结果填入表 3.2 中。

表 3.2

关系类型	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
等于关系					
小于等于关系					
小于关系					
整除关系					

2. 集合 A 上的两个二元关系 R 和 S , 若 R 和 S 均是反自反的, 则 $R \cap S$ 和 $R \cup S$ 分别是反自反的吗? 证明你的断言。

3. 集合 A 上的两个二元关系 R 和 S , 若 R 和 S 均是反对称的, 则 $R \cap S$ 和 $R \cup S$ 分别是反对称的吗? 证明你的断言。

4. 设 R 是集合 A 上的反自反的和传递的二元关系。证明: R 是反对称的。

5. (1) 找一个非空最小集合, 在其上定义一个既不是自反的也不是反自反的关系。

(2) 找一个非空最小集合, 在其上定义一个既不是对称的也不是反对称的关系。

(3) 若(1)和(2)允许用空集合, 结果将会怎样?

6. 问在基数为 n 的有限集 A 上,有多少种不同的自反关系、反自反关系、对称关系和反对称关系?

3.4 复合关系和逆关系

关系是映射的推广,所以,关系还有两种有用的运算,即复合运算和逆运算。

关系的复合运算,也称为合成运算,是来自日常生活的实践和数学的实践。例如,由母子关系和夫妻关系的存在,产生了婆媳关系。

定义 3.11 设 R 是 A 到 B 的二元关系, S 是 B 到 C 的二元关系,则 R 与 S 的复合关系为一个从 A 到 C 的二元关系,记为 $R \circ S$, 并且

$$R \circ S = \{(x, z) | x \in A, z \in C, \exists y \in B \text{ 使 } xRy \text{ 且 } ySz\}.$$

例 3.22 设集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 上的二元关系 $R = \{(1, 2), (2, 2), (3, 4)\}$, $S = \{(2, 5), (3, 1), (4, 2)\}$, $T = \{(2, 4), (5, 1), (5, 2)\}$, 则

$$R \circ S = \{(1, 5), (2, 5), (3, 2)\}, S \circ R = \{(3, 2), (4, 2)\},$$

$$S \circ T = \{(2, 1), (2, 2), (4, 4)\}, R \circ R = \{(1, 2), (2, 2)\},$$

$$(R \circ S) \circ T = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 4)\},$$

$$R \circ (S \circ T) = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 4)\}.$$

可见,关系的复合运算既不满足交换律,也不满足幂等律,但是关系的复合运算满足结合律。

定理 3.1 设 R, S, T 分别是集合 A 到 B, B 到 C 和 C 到 D 的二元关系,则 $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$ 。

证 设 $(a, d) \in (R \circ S) \circ T$, 则 $\exists c \in C$ 使 $(a, c) \in R \circ S$ 且 $(c, d) \in T$ 。

由 $(a, c) \in R \circ S$, 则 $\exists b \in B$ 使 $(a, b) \in R$ 且 $(b, c) \in S$ 。

由 $(b, c) \in S$ 和 $(c, d) \in T$ 得 $(b, d) \in S \circ T$, 再由 $(a, b) \in R$ 和 $(b, d) \in S \circ T$ 得 $(a, d) \in R \circ (S \circ T)$, 因此 $(R \circ S) \circ T \subseteq R \circ (S \circ T)$ 。

反之, 设 $(a, d) \in R \circ (S \circ T)$, 则 $\exists b \in B$ 使 $(a, b) \in R$, $(b, d) \in S \circ T$ 。

由 $(b, d) \in S \circ T$, 则 $\exists c \in C$ 使 $(b, c) \in S$ 且 $(c, d) \in T$ 。

由 $(a, b) \in R$ 和 $(b, c) \in S$ 得 $(a, c) \in R \circ S$, 再由 $(a, c) \in R \circ S$ 和 $(c, d) \in T$ 得 $(a, d) \in (R \circ S) \circ T$ 。因此, $R \circ (S \circ T) \subseteq (R \circ S) \circ T$ 。

于是 $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$ 。证毕。

设 R 是 A 上的一个二元关系, 递归地定义 R 的非负整数次幂为

$$R^0 = I_A, \quad R^1 = R, \quad R^{n+1} = R^n \circ R$$

由于关系的复合运算满足结合律, 因此, 容易证明定理 3.2。

定理 3.2 设 R 是 A 上的一个二元关系, 对任意的非负整数 m, n , 有

$$R^m \circ R^n = R^{m+n}, \quad (R^m)^n = R^{mn}$$

定理 3.3 设 A 是一个有限集且 $|A| = n$, R 是 A 上的一个二元关系, 则存在非负整数 s, t 使 $0 \leq s < t \leq 2^{n^2}$ 且 $R^s = R^t$ 。

证 因为 $|A| = n$, 所以 $|A \times A| = n^2$, 从而 $|2^{A \times A}| = 2^{n^2}$, 故 A 上共有 2^{n^2} 个不同的二

元关系。而 $R^0, R, R^2, \dots, R^{2^{n^2}}$ 是 A 上的 $2^{n^2} + 1$ 个二元关系, 由抽屉原理得至少有两个关系是相等的, 因此, 存在非负整数 s, t 使 $0 \leq s < t \leq 2^{n^2}$ 且 $R^s = R^t$ 。证毕。

定理 3.4 设 R 是 A 到 B 的二元关系, 则

$$I_A \circ R = R \circ I_B = R$$

该定理的证明作为习题。

定理 3.5 设 R_1 是 A 到 B 的二元关系, R_2 和 R_3 是 B 到 C 的二元关系, R_4 是 C 到 D 的二元关系, 则

$$(1) R_1 \circ (R_2 \cup R_3) = (R_1 \circ R_2) \cup (R_1 \circ R_3);$$

$$(2) R_1 \circ (R_2 \cap R_3) = (R_1 \circ R_2) \cap (R_1 \circ R_3);$$

$$(3) (R_2 \cup R_3) \circ R_4 = (R_2 \circ R_4) \cup (R_3 \circ R_4);$$

$$(4) (R_2 \cap R_3) \circ R_4 = (R_2 \circ R_4) \cap (R_3 \circ R_4)。$$

证 (1) 设 $(a, c) \in R_1 \circ (R_2 \cup R_3)$, 则 $\exists b \in B$ 使 $(a, b) \in R_1$ 且 $(b, c) \in R_2 \cup R_3$ 。

由 $(b, c) \in R_2 \cup R_3$ 得 $(b, c) \in R_2$ 或 $(b, c) \in R_3$ 。

若 $(b, c) \in R_2$, 有 $(a, c) \in R_1 \circ R_2$; 若 $(b, c) \in R_3$, 有 $(a, c) \in R_1 \circ R_3$ 。所以, $(a, c) \in (R_1 \circ R_2) \cup (R_1 \circ R_3)$ 。因此, $R_1 \circ (R_2 \cup R_3) \subseteq (R_1 \circ R_2) \cup (R_1 \circ R_3)$ 。

反之, 设 $(a, c) \in (R_1 \circ R_2) \cup (R_1 \circ R_3)$, 则 $(a, c) \in R_1 \circ R_2$ 或 $(a, c) \in R_1 \circ R_3$ 。

所以, $\exists b \in B$ 使 $(a, b) \in R_1$ 且 $(b, c) \in R_2$, 或 $\exists b \in B$ 使 $(a, b) \in R_1$ 且 $(b, c) \in R_3$ 。

由 $(b, c) \in R_2$ 或 $(b, c) \in R_3$ 得 $(b, c) \in R_2 \cup R_3$, 所以 $(a, c) \in R_1 \circ (R_2 \cup R_3)$ 。因此 $(R_1 \circ R_2) \cup (R_1 \circ R_3) \subseteq R_1 \circ (R_2 \cup R_3)$ 。

于是 $R_1 \circ (R_2 \cup R_3) = (R_1 \circ R_2) \cup (R_1 \circ R_3)$ 。

(2)(3)(4)的证明类似于(1)的证明。证毕。

关系的复合运算可以使用矩阵运算实现。由于关系矩阵是布尔矩阵, 因此, 在集合 $\{0, 1\}$ 上定义交运算 ($\wedge$) 和并运算 ($\vee$), 运算表见表 3.3。

表 3.3

$\wedge$	0	1	$\vee$	0	1
0	0	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1

设 X 和 Y 是两个布尔矩阵, X 与 Y 的交运算是 X 与 Y 的对应元素的交运算, 记为 $X \wedge Y = (x_{ij} \wedge y_{ij})$, 而 X 与 Y 的并运算是 X 与 Y 的对应元素的并运算, 记为 $X \vee Y = (x_{ij} \vee y_{ij})$ 。

设 $X = (x_{ij})$ 为 $m \times p$ 布尔矩阵, $Y = (y_{ij})$ 为 $p \times n$ 布尔矩阵, 则 X 与 Y 的布尔乘法^①定义为: $X \circ Y = (z_{ij})$ 为 $m \times n$ 矩阵, 其中 $z_{ij} = \bigvee_{k=1}^p (x_{ik} \wedge y_{kj})$ 。显然, 布尔乘法运算是可结合的。

设 R 和 S 都是 A 到 B 的二元关系, 其关系矩阵分别为 M_R 和 M_S , $R \cup S$ 与 $R \cap S$ 的关系矩阵分别记为 $M_{R \cup S}$ 和 $M_{R \cap S}$, 易证: $M_{R \cup S} = M_R \vee M_S$, $M_{R \cap S} = M_R \wedge M_S$ 。

设 R 是 A 到 B 的二元关系, S 是 B 到 C 的二元关系, 其关系矩阵分别为 M_R 和 M_S , $R \circ S$ 的关系矩阵记为 $M_{R \circ S}$, 易证: $M_{R \circ S} = M_R \circ M_S$ 。

例 3.23 设 $M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $M_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $M_{R \circ S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。

定义 3.12 设 R 是 A 到 B 的二元关系, 则从 B 到 A 的二元关系 $R^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in R\}$ 称为 R 的逆关系。

例 3.24 设集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c\}$, $R = \{(1, a), (2, c), (3, a), (3, b)\}$, 则 $R^{-1} = \{(a, 1), (c, 2), (a, 3), (b, 3)\}$ 。

定理 3.6 设 R 是 A 到 B 的二元关系, 则 $(R^{-1})^{-1} = R$ 。

证 $\forall (x, y) \in (R^{-1})^{-1}$, 由逆关系的定义得 $(y, x) \in R^{-1}$, 从而 $(x, y) \in R$, 所以 $(R^{-1})^{-1} \subseteq R$ 。

反之, $\forall (x, y) \in R$, 由逆关系的定义得 $(y, x) \in R^{-1}$, 从而 $(x, y) \in (R^{-1})^{-1}$, 所以 $R \subseteq (R^{-1})^{-1}$ 。

因此 $(R^{-1})^{-1} = R$ 。证毕。

定理 3.7 设 R 和 S 分别是 A 到 B 、 B 到 C 的二元关系, 则

$$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$$

证 $\forall (z, x) \in (R \circ S)^{-1}$, 由逆关系的定义得 $(x, z) \in R \circ S$, 从而 $\exists y \in B$ 使 $(x, y) \in R$ 且 $(y, z) \in S$ 。再由逆关系的定义得 $(y, x) \in R^{-1}$ 且 $(z, y) \in S^{-1}$ 。

根据复合关系的定义, $(z, x) \in S^{-1} \circ R^{-1}$ 。所以, $(R \circ S)^{-1} \subseteq S^{-1} \circ R^{-1}$ 。

反之, $\forall (z, x) \in S^{-1} \circ R^{-1}$, 由复合关系的定义得 $\exists y \in B$ 使 $(z, y) \in S^{-1}$ 且 $(y, x) \in R^{-1}$, 从而由逆关系的定义得 $(y, z) \in S$ 且 $(x, y) \in R$ 。再由复合关系的定义得 $(x, z) \in R \circ S$ 。

根据逆关系的定义得 $(z, x) \in (R \circ S)^{-1}$ 。所以 $S^{-1} \circ R^{-1} \subseteq (R \circ S)^{-1}$ 。

因此 $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$ 。证毕。

关系的逆运算也可以使用矩阵运算实现, 逆关系 R^{-1} 的关系矩阵 $M_{R^{-1}}$ 是关系 R 的关系矩阵 M_R 的转置矩阵, 即 $M_{R^{-1}} = (M_R)^T$ 。

例 3.25 设 $M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $M_{R^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。

例 3.26 集合 A 上的两个二元关系 R 和 S , 若 R 和 S 均是自反的, 则 $R \circ S$ 和 R^{-1} 分别是自反的吗?

解 若 R 和 S 均是自反的, 则 $R \circ S$ 和 R^{-1} 分别是自反的。下面予以证明。

对于 $\forall x \in A$, 因为 R 是自反的, 所以 $(x, x) \in R$ 。因为 S 是自反的, 所以 $(x, x) \in S$ 。可得 $(x, x) \in R \circ S$, 因此 $R \circ S$ 是自反的。

对于 $\forall x \in A$, 因为 R 是自反的, 所以 $(x, x) \in R$, 可得 $(x, x) \in R^{-1}$, 因此 R^{-1} 是自反的。证毕。

例 3.27 集合 A 上的两个二元关系 R 和 S , 若 R 和 S 均是对称的, 则 $R \circ S$ 和 R^{-1} 分别是对称的吗?

解 若 R 和 S 均是对称的, 则 $R \circ S$ 不一定是对称的。

对于集合 $A = \{1, 2, 3\}$ 上的二元关系 $R = \{(1, 2), (2, 1), (3, 3)\}$ 和 $S = \{(1, 1), (2, 2)\}$, 有 $R \circ S = \{(1, 2), (2, 1)\}$, 这时, R 和 S 均是对称的, $R \circ S$ 也是对称的。

对于集合 $A = \{1, 2, 3\}$ 上的二元关系 $R = \{(1, 2), (2, 1), (3, 3)\}$ 和 $S = \{(2, 3), (3, 2)\}$, 有 $R \circ S = \{(1, 3), (3, 2)\}$, 这时, R 和 S 均是对称的, 但 $R \circ S$ 不是对称的。

R 是对称的, 则 R^{-1} 是对称的。下面予以证明。

对于 $\forall x, y \in A$, 若 $(x, y) \in R^{-1}$, 则 $(y, x) \in R$ 。因为 R 是对称的, 所以 $(x, y) \in R$ 。根据逆关系的定义得 $(y, x) \in R^{-1}$, 因此 R^{-1} 是对称的。证毕。

习题

1. 设集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 上的二元关系 $R = \{(i, j) \mid j = i + 1 \text{ 或 } j = i/2\}$, $S = \{(i, j) \mid i = j + 2\}$, 求 $R \circ S, S \circ R, R^2, S^3$ 。
2. 设 R 是 A 到 B 的二元关系, 证明: $I_A \circ R = R \circ I_B = R$ 。
3. 设 R 和 S 都是集合 A 上的二元关系, 判断下列命题正确与否, 并证明之。
 - (1) 若 R 和 S 都是反自反的, 则 $R \circ S$ 亦是反自反的。
 - (2) 若 R 和 S 都是反对称的, 则 $R \circ S$ 亦是反对称的。
 - (3) 若 R 和 S 都是传递的, 则 $R \circ S$ 亦是传递的。
4. 设 R 是集合 A 上的二元关系, 当 R 分别为反自反的、反对称的和传递的时, R^{-1} 是否也相应地为反自反的、反对称的和传递的? 并证明之。

5. 设 $A = \{a, b, c\}$, R 和 S 都是 A 上的二元关系, 其关系矩阵为

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

求 $M_{R \circ S}, M_{R \circ (S^{-1})}, M_{(R \circ S)^{-1}}$ 。

3.5 关系的闭包

关系的另一种重要的运算是闭包运算, 闭包运算是一元运算。通过闭包运算能够利用已知的关系得到另一个复杂的关系。引入闭包运算的一个目的是在已知的关系上进行扩大使得得到的新关系具有所需要的性质。闭包运算包括传递闭包、自反闭包和对称闭包等, 在计算机科学中, 传递闭包、自反传递闭包具有极其重要的应用。

定义 3.13 设 R 是 A 上的一个二元关系, A 上一切包含 R 的传递关系的交称为 R 的传递闭包, 记为 R^+ , 即

$$R^+ = \bigcap_{\substack{R \subseteq R' \\ R' \text{ 传递}}} R'$$

于是, R^+ 是包含 R 的那些传递关系中最小的那个关系。

定理 3.8 二元关系 R 的传递闭包 R^+ 是传递关系。

证 设 R 是 A 上的一个二元关系, $(x, y) \in R^+$ 且 $(y, z) \in R^+$, 由传递闭包的定义, 对每个包含 R 的传递关系 R' , $(x, y) \in R'$ 且 $(y, z) \in R'$, 由于 R' 的传递性使得 $(x, z) \in R'$, 从而 $(x, z) \in R^+$, 因此, R^+ 是传递关系。证毕。

由传递闭包的定义,若 R 是传递的,则 $R^+ = R$ 。

定理 3.9 设 R 是 A 上的一个二元关系,则

$$R^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$$

证 首先证明 $R^+ \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ 。

由传递闭包的定义,只需证明 $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ 是包含 R 的传递关系。而显然有 $R \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ 。

下面证明 $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ 是传递关系。

设 $(x, y) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ 且 $(y, z) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$, 则存在正整数 m 和 n 使 $(x, y) \in R^m$ 且 $(y, z) \in R^n$, 于是 $(x, z) \in R^m \circ R^n = R^{m+n}$, 从而 $(x, z) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$, 所以 $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ 是传递关系。

其次证明 $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \subseteq R^+$ 。

设 $(x, y) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$, 则存在正整数 m 使 $(x, y) \in R^m$ 。若 $m=1$, 则 $(x, y) \in R \subseteq R^+$; 若 $m>1$, 则 $\exists z_1, z_2, \dots, z_{m-1} \in A$ 使 $(x, z_1) \in R, (z_1, z_2) \in R, \dots, (z_{m-1}, y) \in R$ 。

因为 $R \subseteq R^+$, 所以 $(x, z_1) \in R^+, (z_1, z_2) \in R^+, \dots, (z_{m-1}, y) \in R^+$ 。由定理 3.8 知 R^+ 是传递关系, 得 $(x, y) \in R^+$, 于是 $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \subseteq R^+$ 。

因此 $R^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ 。证毕。

定理 3.10 设 A 是 n 元集, R 是 A 上的一个二元关系, 则

$$R^+ = \bigcup_{i=1}^n R^i$$

证 只需证明对任意自然数 $k>n$ 有 $R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^n R^i$ 。

设 $(x, y) \in R^k$, 则 $\exists z_1, z_2, \dots, z_{k-1} \in A$ 使 $(x, z_1) \in R, (z_1, z_2) \in R, \dots, (z_{k-1}, y) \in R$ 。因为 $x, y, z_1, z_2, \dots, z_{k-1}$ 是 A 的 $k+1$ 个元素, 而 A 是 n 元集, 由 $k>n$ 得 $x, y, z_1, z_2, \dots, z_{k-1}$ 中必有两个相等的元素。

记 $x = z_0, y = z_k$, 设 $z_i = z_j$ ($0 \leq i < j \leq k$), 于是 $(x, z_1) \in R, \dots, (z_{i-1}, z_i) \in R, (z_j, z_{j+1}) \in R, \dots, (z_{k-1}, y) \in R$, 故 $(x, y) \in R^{k-(j-i)}$, 令 $p_1 = k - (j - i)$, 则 $p_1 < k$ 。若 $p_1 > n$, 则重复上述论述, 有 $p_2 < p_1$ 使 $(x, y) \in R^{p_2}$ 。如此进行下去, 必有 $m \leq n$ 使 $(x, y) \in R^m$ 。于是 $R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^n R^i$ 。

因此 $R^+ = \bigcup_{i=1}^n R^i$ 。证毕。

例 3.28 设 A 是人的集合, R 是 A 上的“父子”关系, 则 $(x, y) \in R^+$ 当且仅当存在正整数 n 使 $(x, y) \in R^n$, 即 y 是 x 的后代, 因此, R^+ 为 A 上的“后代子孙”关系。另外, 根据传递闭包运算可以由“直接领导”关系得到“间接领导”关系。

传递闭包运算可以使用矩阵运算实现, 即 $M_{R^+} = \bigvee_{i=1}^n M_{R^i} = M_R \vee M_{R^2} \vee \cdots \vee M_{R^n}$ 。

例 3.29 设 $M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 求 M_{R^+} 。

解 $M_{R^2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $M_{R^3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $M_{R^4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

则

$$M_{R^+} = \bigvee_{i=1}^4 M_{R^i} = M_R \vee M_{R^2} \vee M_{R^3} \vee M_{R^4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

定义 3.14 设 R 是 A 上的一个二元关系, A 上包含 R 的所有自反且传递的二元关系的交称为 R 的自反传递闭包, 记为 R^* 。

由自反传递闭包的定义可知, R^* 是自反且传递的二元关系。

定理 3.11 设 R 是 A 上的一个二元关系, 则

$$R^* = R^0 \cup R^+$$

证 显然 $R^0 \cup R^+$ 是 A 上的自反传递关系, 由自反传递闭包的定义得 $R^* \subseteq R^0 \cup R^+$ 。

下面证明 $R^0 \cup R^+ \subseteq R^*$ 。

设 $(x, y) \in R^0 \cup R^+$, 则当 $x = y$ 时, $(x, x) \in R^0$; 当 $x \neq y$ 时, $(x, y) \in R^+$, 故对每个包含 R 的传递关系 R' 有 $(x, y) \in R'$, 于是 $(x, y) \in R^0 \cup R'$ 。

又包含 R 的每个自反传递关系 S 是包含 R 的传递关系, 因此 $(x, y) \in S$, $(x, y) \in R^*$, 从而 $R^0 \cup R^+ \subseteq R^*$ 。

因此 $R^* = R^0 \cup R^+$ 。证毕。

于是 $R^* = \bigcup_{i=0}^n R^i$ 。

定理 3.11 表明了传递闭包与自反传递闭包的联系比较简单。

例 3.30 设 R 是自然数集合 N 上的“后继”关系, 即 $(x, y) \in R$ 当且仅当 $x+1=y$, 易得 R^+ 为“小于”关系, R^* 为“小于等于”关系。

传递闭包和自反传递闭包在计算机科学中应用较多。除了传递闭包和自反传递闭包外, 还有其他的闭包, 如自反闭包和对称闭包等, 它们在计算机科学中不常用, 在此仅简单作一介绍。

定义 3.15 A 上的二元关系 R 的自反闭包是 A 上包含 R 的所有自反关系的交, 记为 $r(R)$, 易知

$$r(R) = R^0 \cup R$$

而且 R 是自反的, 当且仅当 $r(R) = R$ 。

例 3.31 设集合 $A = \{1, 2, 3\}$ 上的二元关系 $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 3)\}$, 则 $r(R) = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$ 。

定义 3.16 A 上的二元关系 R 的对称闭包是 A 上包含 R 的所有对称关系的交, 记为 $s(R)$, 易知

$$s(R) = R \cup R^{-1}$$

而且 R 是对称的, 当且仅当 $s(R) = R$ 。

例 3.32 设集合 $A = \{1, 2, 3\}$ 上的二元关系 $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 3)\}$, 则 $s(R) = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$ 。

习题

1. 设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 上的二元关系 $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 4), (4, 5)\}$, 求 R^+ 和 R^* 。
2. 设 R 是 A 上的二元关系, 证明:
 - (1) $(R^+)^+ = R^+$;
 - (2) $(R^*)^* = R^*$;
 - (3) $R \circ R^* = R^* \circ R = R^+$;
 - (4) $(R^+)^* = (R^*)^+ = R^*$ 。
3. 是否存在 $A (|A| = n)$ 上的二元关系 R 使 $R, R^2, \dots, R^n$ 两两不相等?
4. 设 R 是 A 上的二元关系, 证明: 若 R 是对称的, 则 R^+ 也是对称的。
5. 设 R 是 A 上的二元关系, 证明: R 的传递闭包可定义为:
 - (1) 若 $(a, b) \in R$, 则 $(a, b) \in R^+$;
 - (2) 若 $(a, b) \in R^+$ 且 $(b, c) \in R$, 则 $(a, c) \in R^+$;
 - (3) 除了(1)和(2)的序对之外, R^+ 再无别的序对。

3.6 等价关系与集合的划分

本节讨论一种重要的二元关系, 就是等价关系, 它具有很好的性质, 等价关系在数学和计算机科学中有极其重要的应用。

定义 3.17 设 R 为集合 A 上的二元关系, 若 R 是自反的、对称的和传递的, 则称 R 为等价关系。

例 3.33 平面上三角形集合中, 三角形的相似关系是等价关系。

例 3.34 试证明: 整数集 $\mathbf{Z}$ 上的模 k 同余关系 $R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{Z}, x \equiv y \pmod{k}\}$ 是等价关系, 其中 $x \equiv y \pmod{k}$ 表示 x 除以 k 所得的余数与 y 除以 k 所得的余数相等。

证 (1) 对 $\forall x \in \mathbf{Z}$ 有 $x \equiv x \pmod{k}$, 所以 $(x, x) \in R$, 因此, R 是自反的。

(2) 对 $\forall x, y \in \mathbf{Z}$, 若 $(x, y) \in R$, 有 $k \mid x - y$, 则 $k \mid y - x$, 所以 $(y, x) \in R$, 因此, R 是对称的。

(3) 对 $\forall x, y, z \in \mathbf{Z}$, 若 $(x, y) \in R$ 且 $(y, z) \in R$, 有 $k \mid x - y$ 且 $k \mid y - z$, 则 $k \mid x - z$, 所以 $(x, z) \in R$, 因此, R 是传递的。

故 R 是等价关系。证毕。

定义 3.18 设 R 为集合 A 上的等价关系, 对任何 $x \in A$, 集合 $[x] = \{y \mid y \in A, (x, y) \in R\}$ 称为元素 x 关于 R 的等价类。

x 关于 R 的等价类也可记为 $E_x = \{y \mid y \in A, (x, y) \in R\}$ 。

由等价类的定义, $\forall x' \in [x]$, 则 $[x'] = [x]$ 。

例 3.35 整数集 $\mathbf{Z}$ 上的模 3 同余关系 $R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{Z}, x \equiv y \pmod{3}\}$ 有 3 个等价类, 即 $\{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}, \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}, \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}$ 。

定义 3.19 设 A 为集合, 若 A 的一些非空子集形成的集族 $X = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ 具有性质:

(1) $\forall A_i, A_j \in X$, 若 $A_i \neq A_j$, 则 $A_i \cap A_j = \emptyset$ 。

(2) $\bigcup_{A_i \in X} A_i = A$ 。

则称 X 为 A 的一个划分。

若 X 为 A 的一个划分, 当 $|X| = m$ 时, 称 X 为 A 的一个 m -划分。

例 3.36 若 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 则 $X = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6\}\}$ 是 A 的一个划分。

例 3.37 $\{\{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}, \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}, \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}\}$ 是整数集 $\mathbf{Z}$ 的一个划分, 它是 $\mathbf{Z}$ 的一个 3-划分。

定理 3.12 设 R 是集合 A 上的一个等价关系, 则 R 的所有等价类的集合是 A 的一个划分。

证 等价关系 R 的所有等价类的集合为 X , 对于 $\forall x \in A$, 由于 R 是自反的, 得 $x \in [x]$, 故 R 的每个等价类是 A 的非空子集。

首先, 对于 $\forall A_i, A_j \in X$, 即 A_i, A_j 是 R 的两个等价类, 假设 $A_i \neq A_j$, 且 $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, 则 $\exists x \in A_i \cap A_j$ 。对于 $\forall y \in A_i$, 由等价类的定义, $(x, y) \in R$, 所以 $y \in A_j$, 故 $A_i \subseteq A_j$ 。类似地, 对于 $\forall z \in A_j$, 由等价类的定义, $(x, z) \in R$, 所以 $z \in A_i$, 故 $A_j \subseteq A_i$ 。因此 $A_i = A_j$ 。这与假设 $A_i \neq A_j$ 矛盾, 从而 $A_i \cap A_j = \emptyset$ 。于是, A_i 与 A_j 或相等或不相交。

其次, 对于 $\forall x \in A$, $[x] = \{y \mid y \in A, (x, y) \in R\}$ 是 R 的一个等价类, 所以 $[x] \in X$, 因此, $\forall x \in A, x \in \bigcup_{A_i \in X} A_i$ 。所以 $\bigcup_{A_i \in X} A_i = A$ 。于是, X 是 A 的一个划分。证毕。

定理 3.13 设 X 是集合 A 的一个划分, 则 $R = \bigcup_{A_i \in X} A_i \times A_i$ 是 A 上的一个等价关系, 且 X 就是 R 的所有等价类的集合。

证 显然, 对于 $\forall x, y \in A, (x, y) \in R$ 当且仅当 $\exists A_i \in X$ 使 $x, y \in A_i$ 。故 R 是自反的、对称的和传递的, 即 R 是 A 上的一个等价关系。

由于 X 是 A 的一个划分, 所以, $\forall x \in A$, 存在唯一的 $A_i \in X$ 使 $x \in A_i$ 。从而, $\forall y \in A_i$, 有 $(x, y) \in R$, 故 $y \in [x]$, 即 $A_i \subseteq [x]$ 。由等价关系的定义和 X 是 A 的一个划分, 得 $A_i = [x]$ 。因此, A_i 是 R 的一个等价类, 所以 $[x] \in X$, 因此 $\forall x \in A, x \in \bigcup_{A_i \in X} A_i$ 。所以, X 就是 R 的所有等价类的集合。证毕。

由定理 3.12 和定理 3.13, 可得定理 3.14。

定理 3.14 集合 A 上的一个二元关系 R 是等价关系, 当且仅当存在 A 的一个划分 X 使 $(x, y) \in R$ 的充分条件是 $\exists A_i \in X$ 使 $x, y \in A_i$ 。

综上所述, 集合 A 上的等价关系与 A 的划分是一一对应且互相确定的。所以有定义 3.20。

定义 3.20 设 R 是集合 A 上的一个等价关系,由 R 所确定的 A 的划分 $X = \{[x] \mid x \in A, [x] \text{ 是 } x \text{ 的等价类}\}$,称为 A 关于 R 的商集,记做 A/R 。

等价关系、集合的划分和商集是 3 个重要的概念。集合的划分有时也称为集合的分类。分类的目的在于研究每一类中对象的共性。通常,分类总是根据需要,按照某一原则将集合中的元素分成一类一类的。但是,分类的准则不能完全任意,分类的准则应该满足哪些条件呢?粗略地说,这个条件要求被分类的每个事物必须被分到一类中且仅被分到一类中,当把它抽象为一个数学问题时,就是集合划分的定义所述的条件。一种分类确定一个等价关系,这个等价关系就是“在同一类中”的关系。而等价关系在直观上反映了“有相同特征”的事物之间的联系。而商集用来产生新的对象,这种新的对象与原来的对象有着截然不同的性质。

习题

1. 设 R 是集合 A 上的等价关系,将 A 的元素按照 R 的等价类顺序排列,则等价关系的关系矩阵 M_R 有何特征?
2. 设 R 和 S 都是集合 A 上的等价关系,证明:
 - (1) $R \cap S$ 仍为 A 上的等价关系;
 - (2) $R \cup S$ 不一定是等价关系。(选取尽可能小的集合 A ,举反例证明)
3. 写出整数集 $\mathbf{Z}$ 上的模 10 同余关系的各等价类。
4. 给出集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 上的两个等价关系 R 和 S ,使 $R \circ S$ 不是等价关系。
5. 设 R 和 S 都是集合 A 上的等价关系,证明: $(R \cup S)^+$ 是 A 上的等价关系。
6. 设 $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ 是集合 A 的一个划分, $A \cap B \neq \emptyset$,证明: $\{A_1 \cap B, A_2 \cap B, \dots, A_n \cap B\}$ 是 $A \cap B$ 的划分。

3.7 偏序关系

本节讨论另一种极其重要的关系,就是序关系,它反映了事物之间的次序。当一个集合引入某种序关系后,就称该集合有了序结构。最重要的序关系就是偏序关系。

定义 3.21 设 R 为集合 A 上的二元关系,如果 R 是自反的、反对称的和传递的,则称 R 为偏序关系,称二元组 (A, R) 为偏序集。

当抽象地讨论集合 A 上的偏序关系时,常用“ $\leq$ ”表示偏序关系。如果 $x \leq y$,则读为“ x 小于或等于 y ”。约定 $x \leq y$ 且 $x \neq y$ 简记为 $x < y$ 。

如果 $\leq$ 是集合 A 上的偏序关系,则一般来说,只是 A 中部分元素之间才具有此关系。如果 $x, y \in A, x \leq y$ 或 $y \leq x$,则称 x 与 y 可以比较。如果 $\exists x, y \in A$ 使 $x \not\leq y$ 且 $y \not\leq x$,则称 x 与 y 不可比较。

例 3.38 实数集 $\mathbf{R}$ 上通常的“小于或等于”关系 $\leq$ 是偏序关系,于是, $\mathbf{R}$ 对 $\leq$ 构成偏序集。

例 3.39 正整数集 $\mathbf{Z}_+$ 上的整除关系 $|$ 是偏序关系,于是, $(\mathbf{Z}_+, |)$ 是偏序集。在这里有可以比较的元素,也有不可比较的元素。例如,由 $2|4$ 得 2 和 4 可以比较;由 $2 \nmid 3$ 且 $3 \nmid 2$ 得 2 和 3 不可比较。

例 3.40 设 S 是一个集合, S 的子集间的包含关系 $\subseteq$ 是 2^S 上的偏序关系,于是, $(2^S,$

$\subseteq$)是偏序集。

设 $\leq$ 是集合 A 上的偏序关系,则 $\leq$ 的逆 $\leq^{-1}$ 也是 A 上的偏序关系,以后,用 $\geq$ 表示 $\leq$ 的逆关系 $\leq^{-1}$,读成“大于或等于”。若 $x \geq y$ 且 $x \neq y$,则简记为 $x > y$ 。

定义 3.22 设 $\leq$ 是集合 A 上的偏序关系,若 $\forall x, y \in A, x \leq y$ 与 $y \leq x$ 至少有一个成立,则称 $\leq$ 为 A 上的全序关系,或线性序关系,而 $(A, \leq)$ 称为全序集。

偏序集与全序集的主要区别在于,全序集中的任意两个元素均可以比较,而偏序集中未必任意两个元素均可以比较。

例 3.41 数间通常的“小于或等于”关系 $\leq$ 是全序关系,整除关系不是全序关系,集合的包含关系也不是全序关系。

定义 3.23 设 $(A, \leq)$ 是一个偏序集, $x, y \in A$,如果 $x < y$ 且对 $\forall z \in A$,如果 $x \leq z \leq y$,则 $x = z$ 或 $z = y$,称 y 盖住 x ,记为 $x \overset{\infty}{\subset} y$,并且 y 被称为 x 的后继, x 被称为 y 的前驱。

于是,盖住关系是集合 A 上的一个二元关系。

对于给定偏序集 $(A, \leq)$,它的盖住关系是唯一的,所以,可用盖住关系的关系图表示偏序关系,称为哈斯图,其作图规则为:用点表示集合 A 中的元素,对于 $\forall x, y \in A$,有从 x 到 y 的矢线当且仅当 y 盖住 x 。若 y 盖住 x ,则表示 y 的点将画在表示 x 的点的上方。

例 3.42 集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 及其上的整除关系 $|$ 构成偏序集 $(A, |)$ 。它的哈斯图如图 3.2 所示。

例 3.43 集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 及其上通常的小于或等于关系 $\leq$ 构成偏序集 $(A, \leq)$ 。它的哈斯图如图 3.3 所示。



图 3.2

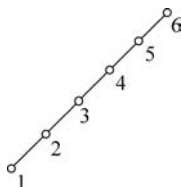


图 3.3

全序关系的哈斯图像是一条链一样。

定义 3.24 设 $(A, \leq)$ 是一个偏序集, $B \subseteq A$,如果 $\forall x, y \in B$ 有 $x \leq y$ 或 $y \leq x$,则称 B 为 A 中的链。如果 $\forall x, y \in B$ 有 $x \leq y$ 和 $y \leq x$ 均不成立,则称 B 为 A 中的一个反链。 $|B|$ 称为其长度。

定义 3.25 设 $(A, \leq)$ 是一个偏序集,且 $B \subseteq A$,如果 $\exists s \in B$ 使 B 中不存在元素 x ,满足 $x \neq s$ 且 $s \leq x$,则称 s 为 B 的极大元;同理,如果 $\exists d \in B$ 使 B 中不存在元素 x ,满足 $x \neq d$ 且 $x \leq d$,则称 d 为 B 的极小元。

B 中可能有极大元(极小元),也可能没有极大元(极小元)。若 B 中有极大元(极小元),则极大元(极小元)未必唯一,甚至可能有无穷多个。

定义 3.26 设 $(A, \leq)$ 是一个偏序集,且 $B \subseteq A$,如果 $\exists a \in B$ 使 $\forall x \in B$ 有 $x \leq a$,则称 a 为 B 的最大元;同理,如果 $\exists b \in B$ 使 $\forall x \in B$ 有 $b \leq x$,则称 b 为 B 的最小元。

定理 3.15 设 $(A, \leq)$ 是偏序集,且 $B \subseteq A$,如果 B 有最大元,则最大元是唯一的。

证 若 $a_1, a_2 \in B$ 均为最大元, 由 a_1 是最大元, 有 $a_2 \leq a_1$, 由 a_2 是最大元, 有 $a_1 \leq a_2$, 因为 $(A, \leq)$ 是偏序集, 所以, $\leq$ 是反对称的, 因此 $a_1 = a_2$, 即最大元是唯一的。证毕。

同理, 若 B 有最小元, 则最小元也是唯一的。

B 中可能有最大元(最小元), 也可能没有最大元(最小元)。 B 的最大元(最小元)必为极大元(极小元), 但是, B 的极大元(极小元)未必是最大元(最小元)。

定义 3.27 设 $(A, \leq)$ 是一个偏序集, 且 $B \subseteq A$, 如果 $\exists a \in A$ 使 $\forall x \in B$ 有 $x \leq a$, 则称 a 为 B 的一个上界; 同理, 如果 $\exists b \in A$ 使 $\forall x \in B$ 有 $b \leq x$, 则称 b 为 B 的一个下界。

子集 B 在 A 中可能有上界(下界), 也可能没有上界(下界)。若子集 B 在 A 中有上界(下界), 则上界(下界)未必唯一, 甚至可能有无穷多个。 B 的最大元(最小元)必为 B 的一个上界(下界), 但是, B 的上界(下界)未必是 B 的最大元(最小元)。

定义 3.28 设 $(A, \leq)$ 是一个偏序集, 且 $B \subseteq A$, 如果 B 有上界且 B 的上界的集合有最小元素, 则这个最小元素称为 B 的最小上界(上确界), 记为 $\sup B$ 。类似地, 如果 B 有下界且 B 的下界的集合有最大元素, 则这个最大元素称为 B 的最大下界(下确界), 记为 $\inf B$ 。

子集 B 可能有上确界(下确界), 也可能没有上确界(下确界)。若子集 B 有上确界(下确界), 则上确界(下确界)必唯一。

例 3.44 在偏序集 $(\mathbf{Z}_+, |)$ 中, 若令 $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 则 B 的极小元是 1, B 的极大元有 4、5、6, B 的最小元也是 1, B 中没有最大元。 B 的下界是 1, B 的上界有 60、120 等无穷多个。 B 的下确界是 1, B 的上确界是 60。

习题

1. 偏序集 (A, R) 的哈斯图如图 3.4 所示。

(1) 下列关系式哪些为真?

$aRb, dRa, cRe, bRe, aRa, bRc, dRe, eRa$ 。

(2) 求下列子集的上界、下界及上确界、下确界:

$\{b, c, d\}, \{c, d, e\}, \{a, b, c\}$

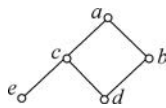


图 3.4

2. 说明图 3.5 中的关系哪些是偏序关系? 哪些是全序关系? 并画出偏序关系的哈斯图。

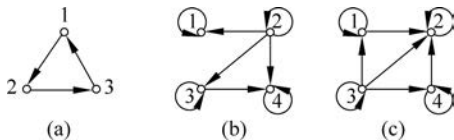


图 3.5

3. 设集合 $A = \{1, 2, 3\}$, 画出偏序集 $(2^A, \subseteq)$ 的哈斯图, 并给出一个 A 的例子, 使 $\subseteq$ 是 2^A 上的全序关系。

4. 对下述每一条件, 分别构造一个有限集和一个无限集的例子。

(1) 非空偏序集, 其中某些子集无最大元;

(2) 非空偏序集, 其中有一子集存在下确界但无最小元素;

(3) 非空偏序集, 其中有一子集存在上界但无上确界。

5. 给出某一集合 A 上的一个二元关系 R , 使 R 既是偏序关系又是等价关系。