

普通高等教育“十一五”国家级规划教材



高等学校自动化类
专业系列教材

工程控制基础

第3版

杨明 翁正新 田作华◎编著

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书的主要任务是讲述自动控制系统的基本原理,帮助读者掌握实际控制系统的分析和设计方法,增强科技报国的家国情怀和使命担当。内容包括系统结构图的绘制、数学模型的建立、性能分析与补偿设计,主要包括系统在三域(时域、复域、频域)中的数学模型,系统分析的三要素(稳定性、稳态特性和动态特性),基于根轨迹法和频率法的系统校正设计方法,非线性系统及计算机控制系统的分析与设计,等等。

本书基本概念清晰,工程实例丰富,配有知识点自测题和大量习题(包括一般题、深入题、实际题和MATLAB题),每章末尾还介绍了MATLAB的相关应用。

本书可作为高等学校工科各专业,如电子信息类、机械工程类、电气工程类、仪器仪表类、工程物理类等专业本科生学习控制理论的教材,可作为“自动控制原理”MOOC课程(网址为 <https://www.icourse163.org/course/SJTU-1461107170>)的配套教材,也可供相关领域专业技术人员参考。

版权所有,侵权必究。举报:010-62782989, beiqinquan@tup.tsinghua.edu.cn。

图书在版编目(CIP)数据

工程控制基础/杨明,翁正新,田作华编著. -- 3版. -- 北京:清华大学出版社,
2025. 4. -- (高等学校自动化类专业系列教材). -- ISBN 978-7-302-68464-0
I. TB114.2
中国国家版本馆 CIP 数据核字第 20250772QR 号

责任编辑:曾 珊
封面设计:李召霞
责任校对:王勤勤
责任印制:刘 菲

出版发行:清华大学出版社

网 址: <https://www.tup.com.cn>, <https://www.wqxuetang.com>

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编:100084

社 总 机:010-83470000 邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质量反馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

课件下载: <https://www.tup.com.cn>, 010-83470236

印 装 者:三河市铭诚印务有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×260mm 印 张:21

字 数:510千字

版 次:2007年9月第1版 2025年4月第3版

印 次:2025年4月第1次印刷

印 数:1~1500

定 价:59.00元

产品编号:106270-01

出版说明

PUBLISHER'S NOTE

为适应我国对高等学校自动化专业人才培养的需要,配合各高校教学改革的进程,创建一套符合自动化专业培养目标和教学改革要求的新型自动化专业系列教材,“教育部高等学校自动化专业教学指导分委员会”(简称“教指委”)联合“中国自动化学会教育工作委员会”“中国电工技术学会高校工业自动化教育专业委员会”“中国系统仿真学会教育工作委员会”“中国机械工业教育协会电气工程及自动化学科委员会”四个委员会,以教学创新为指导思想,以教材带动教学改革为方针,设立专项资助基金,采用全国公开招标方式,组织编写出版一套自动化专业系列教材——《高等学校自动化类专业系列教材》。

本系列教材主要面向本科生,同时兼顾研究生;覆盖面包括专业基础课、专业核心课、专业选修课、实践环节课和专业综合训练课;重点突出自动化专业基础理论和前沿技术;以文字教材为主,适当包括多媒体教材;以主教材为主,适当包括习题集、实验指导书、教师参考书、多媒体课件、网络课程脚本等辅助教材;力求做到符合自动化专业培养目标、反映自动化专业教育改革方向、满足自动化专业教学需要;努力创造使之成为具有先进性、创新性、适用性和系统性的特色品牌教材。

本系列教材在“教指委”的领导下,从2004年起,通过招标机制,用3~4年时间出版50本左右教材,2006年开始陆续出版问世。为满足多层面、多类型的教学需求,同类教材可能出版多种版本。

本系列教材的主要读者是自动化专业及相关专业的大学生和研究生,以及相关领域和部门的科学工作者和工程技术人员。我们希望本系列教材既能为在校大学生和研究生的学习提供内容先进、论述系统和适于教学的教材或参考书,也能为广大科学工作者和工程技术人员知识更新与继续学习提供适合的参考资料。感谢使用本系列教材的广大教师、学生和科技工作者的热情支持,并欢迎提出批评和意见。

《高等学校自动化类专业系列教材》编审委员会

2005年10月于北京

《高等学校自动化类专业系列教材》编审委员会

顾问 (按姓氏笔画):

王行愚(华东理工大学)

冯纯伯(东南大学)

孙优贤(浙江大学)

吴启迪(同济大学)

张嗣瀛(东北大学)

陈伯时(上海大学)

陈翰馥(中国科学院)

郑大钟(清华大学)

郑南宁(西安交通大学)

韩崇昭(西安交通大学)

主任委员: 吴澄(清华大学)

副主任委员: 赵光宙(浙江大学)

萧德云(清华大学)

委员 (按姓氏笔画):

王雄(清华大学)

方华京(华中科技大学)

史震(哈尔滨工程大学)

田作华(上海交通大学)

卢京潮(西北工业大学)

孙鹤旭(河北工业大学)

刘建昌(东北大学)

吴刚(中国科技大学)

吴成东(沈阳建筑工程学院)

吴爱国(天津大学)

陈庆伟(南京理工大学)

陈兴林(哈尔滨工业大学)

郑志强(国防科技大学)

赵曜(四川大学)

段其昌(重庆大学)

程鹏(北京航空航天大学)

谢克明(太原理工大学)

韩九强(西安交通大学)

褚健(浙江大学)

蔡鸿程(清华大学出版社)

廖晓钟(北京理工大学)

戴先中(东南大学)

工作小组(组长): 萧德云(清华大学)

(成员): 陈伯时(上海大学)

郑大钟(清华大学)

田作华(上海交通大学)

赵光宙(浙江大学)

韩九强(西安交通大学)

陈兴林(哈尔滨工业大学)

陈庆伟(南京理工大学)

(助理): 郭晓华(清华大学)

责任编辑: 王一玲(清华大学出版社)

序一

FOREWORD

自动化学科有着光荣的历史和重要的地位,早在 20 世纪 50 年代,我国政府就十分重视自动化学科的发展和自动化专业人才的培养。70 多年来,自动化科学技术在众多领域发挥了重大作用,如航空、航天等,“两弹一星”的伟大工程就包含了许多自动化科学技术的成果。自动化科学技术也改变了我国工业的整体面貌,不论是石油化工、电力、钢铁,还是轻工、建材、医药等领域都要用到自动化手段,在国防工业中自动化的作用更是巨大的。现在,世界上有很多非常活跃的领域都离不开自动化技术,比如机器人、月球车等。另外,自动化学科对一些交叉学科的发展同样起到了积极的促进作用,例如网络控制、量子控制、流媒体控制、生物信息学、系统生物学等学科就是在系统论、控制论、信息论的影响下得到不断的发展。在整个世界已经进入信息时代的背景下,中国要完成工业化的任务还很重,或者说我们正处在后工业化的阶段。因此,国家提出走新型工业化的道路和“信息化带动工业化,工业化促进信息化”的科学发展观,这对自动化科学技术的发展是一个前所未有的战略机遇。

机遇难得,人才更难得。要发展自动化学科,人才是基础、是关键。高等学校是人才培养的基地,或者说人才培养是高等学校的根本。高等学校的领导和教师要始终把人才培养放在第一位,对自动化系或自动化学院的领导和教师来说,要时刻想着为国家关键行业和战线培养和输送优秀的自动化技术人才。

影响人才培养的因素很多,涉及教学改革方方面面,包括如何拓宽专业口径、优化教学计划、增强教学柔性、强化通识教育、提高知识起点、降低专业重心、加强基础知识、强调专业实践等,其中构建融会贯通、紧密配合、有机联系的课程体系,编写有利于促进学生个性发展、培养学生创新能力的教材尤为重要。清华大学吴澄院士领导的《全国高等学校自动化类专业系列教材》编审委员会,根据自动化学科对自动化技术人才素质与能力的需求,充分吸取国外自动化教材的优势与特点,在全国范围内,以招标方式,组织编写了这套自动化专业系列教材,这对推动高等学校自动化专业发展与人才培养具有重要的意义。这套系列教材的建设有新思路、新机制,适应了高等学校教学改革与发展的新形势,立足创建精品教材,重视实践性环节在人才培养中的作用,采用了竞争机制,以激励和推动教材建设。在此,我谨向参与本系列教材规划、组织、编写的老师,致以诚挚的感谢,并希望该系列教材在全国高等学校自动化专业人才培养中发挥应有的作用。

吴澄迪 教授

序二

FOREWORD

《高等学校自动化专业系列教材》编审委员会在对国内外部分大学有关自动化专业的教材做深入调研的基础上,广泛听取了各方面的意见,以招标方式,组织编写了一套面向全国本科生(兼顾研究生)、体现自动化专业教材整体规划和课程体系、强调专业基础和理论联系实际的系列教材,自2006年起将陆续面世。全套系列教材共50多本,涵盖了自动化学科的主要知识领域,大部分教材都配置了包括电子教案、多媒体课件、习题辅导、课程实验指导书等立体化教材配件。此外,为强调落实“加强实践教育,培养创新人才”的教学改革思想,还特别规划了一组专业实验教程,包括《自动控制原理实验教程》《运动控制实验教程》《过程控制实验教程》《检测技术实验教程》《计算机控制系统实验教程》等。

自动化科学技术是一门应用性很强的学科,面对的是各种各样错综复杂的系统,控制对象可能是确定性的,也可能是随机性的,控制方法可能是常规控制,也可能需要优化控制。这样的学科专业人才应该具有什么样的知识结构,又应该如何通过专业教材来体现,正是“系列教材编审委员会”规划系列教材时所面临的问题。为此,设立了“自动化专业课程体系结构研究”专项研究课题,成立了由清华大学萧德云教授负责,清华大学、上海交通大学、西安交通大学和东北大学等多所院校参与的联合研究小组,对自动化专业课程体系结构进行深入的研究,提出了按“控制理论与工程、控制系统与技术、系统理论与工程、信息处理与分析、计算机与网络、软件基础与工程、专业课程实验”等知识板块构建的课程体系结构。以此为基础,组织规划了一套涵盖几十门自动化专业基础课程和专业课程的系列教材。从基础理论到控制技术,从系统理论到工程实践,从计算机技术到信号处理,从设计分析到课程实验,涉及的知识单元多达数百个、知识点几千个,介入的学校50多所,参与的教授120多人,是一项庞大的系统工程。从编制招标要求、公布招标公告,到组织投标和评审,最后商定教材大纲,凝聚着全国百余名教授的心血,为的是编写出版一套具有一定规模、富有特色、既考虑研究型大学又考虑应用型大学的自动化专业创新型系列教材。

然而,如何进一步构建完善的自动化专业教材体系结构?如何建设基础知识与最新知识有机融合的教材?如何充分利用现代技术,适应现代大学生的接受习惯,改变教材单一形态,建设数字化、电子化、网络化等多元形态、开放性的“广义教材”?这些都有待我们进行更深入的研究。

本套系列教材的出版,对更新自动化专业的知识体系、改善教学条件、创造个性化的教学环境,一定会起到积极的作用。但是由于受各方面条件所限,本套教材从整体结构到每本书的知识组成都可能存在不当甚至谬误之处,还望使用本套教材的广大教师、学生及各界人士不吝批评指正。

吴俊 院士

第3版前言

PREFACE

党的十六大报告首次提出新型工业化概念,即“坚持以信息化带动工业化,以工业化促进信息化,走出一条科技含量高、经济效益好、资源消耗低、环境污染少、人力资源优势得到充分发挥的新型工业化路子”。此后历次党的全国代表大会均提到了“新型工业化”。党的二十大报告提出“到 2035 年基本实现新型工业化”的目标。近日,习近平总书记就推进新型工业化作出重要指示,强调“新时代新征程,以中国式现代化全面推进强国建设、民族复兴伟业,实现新型工业化是关键任务”。持续深化信息化与工业化融合发展,是中国特色新型工业化道路的集中体现,是高质量发展的重要方向和路径,是党中央、国务院作出的重大战略部署。习近平总书记多次强调,要作好信息化和工业化深度融合这篇大文章。信息化与工业化融合是转变经济发展方式、优化经济结构、转换增长动力的重要抓手。通过信息化与工业化融合,可以有效解决资源约束,提高发展平衡性和协调性,推动高质量发展。自动化是承载两化融合的核心,既是工业化发展的技术支撑和根本保障,也是信息化发展的主要载体和发展目标。自动化水平是一个国家和社会现代工业文明的重要标志之一,是综合国力的重要体现。作为自动化技术的重要组成部分,自动控制技术已广泛应用于工业、农业、国防乃至日常生活的众多领域,在改善劳动环境、减小劳动强度、提高产品质量和生产效率,帮助人类改造自然、探知未来、建设高度文明社会等方面都扮演了重要角色。目前,“自动控制原理”是高等院校很多工科专业(例如自动化、机械、航空航天、冶金化工等)的核心基础课,受教育的对象很多。

教材编写组坚持以党的二十大精神为指导,牢记“为党育人、为国育才”的使命,对 2016 年出版的《工程控制基础》(第 2 版)进行了全面修订。这次修订继续保持了“三纵三横”的体系结构。“三纵”指经典控制理论的三大方法,即时域法、复域法和频域法;“三横”指经典控制理论的三大核心内容,即稳定性、稳态特性和动态特性。在内容安排上继续遵循“加强基础、削枝强干、注重应用、逐步更新”的原则,保留了原书的大部分内容,对原书中不准确或不妥的文字与内容进行了仔细的修订。在修订过程中,作者积极响应思想政治教育贯穿人才培养体系的指导精神,在绪论部分专门增设了一节,详细介绍自动控制技术和自动控制理论的发展历史,在各章还增加了与信息和控制相关的重要人物或事件介绍,旨在培养读者精益求精的大国工匠精神,激发科技报国的家国情怀和使命担当。从终身学习的角度出发,并结合 MOOC 课程的特点,本次修订还在每一章增加了知识点自测部分,此外本书配套出版了《工程控制基础习题解答》(ISBN 为 9787302384342),便于读者自主学习。

本书可作为高等学校工科各专业(如电子信息类、机械工程类、电气工程类、仪器仪表类、工程物理类专业)本科生学习控制理论的教材,也可供相关领域专业技术人员参考。此外,本书还可作为上海交通大学“自动控制原理”MOOC 课程(网址为 <https://www.>

icourse163.org/course/SJTU-1461107170)的配套教材。

本次修订由翁正新负责,杨明对全书内容进行审阅与定稿,田作华作全面指导。本次修订期间,上海交通大学电子信息与电气工程学院控制理论教学团队就修订原则、全书结构、内容取舍等进行了多次研讨,提出了许多宝贵意见。清华大学出版社的领导与编辑们对本书的出版和推广也给予了很大帮助,在此一并表示感谢;同时向曾参与本书各版编写的教授们表示感谢,他们是施颂椒、韩正之和陈学中。

尽管编者已竭尽全力提高本书质量,但错误和不妥之处在所难免,恳请广大读者不吝指正。

翁正新

第2版前言

PREFACE

吴澄院士指出,控制理论应该体现优化的意识。此言千真万确。

将优化的思想融入经典控制理论是本书第2版的指导思想之一。其次,本书的第1版问世将近10年,这10年中,自动化技术突飞猛进,自动化应用铺天盖地。纵览这10年中的盛事,2008年的北京奥运会、2010年的上海世博会,直到2014年巴西世界杯,独领风骚的科技展示主角无一不是自动化技术。北京奥运会开幕式上画卷的展开、上海世博会上机器人小提琴独奏“茉莉花”、巴西世界杯上脑瘫少年的开球,这些技术虽然时髦,但是根底还是本书所讲述的理论,我们有必要将这些重要的应用体现在大学生的教材上。

James Watt 常常被称作自动化设计的吃螃蟹者。准确地说,在 Watt 出生的时候,蒸汽机已经问世,并且成功地解决了大能量的供给问题。蒸汽机使人类获得自身无法达到的力量,可是 Watt 不满意,他改造了纽可门蒸汽机,实现了连续作业,蒸汽机做功的品质一下子优化了;尽管已经设计了质量巨大的飞轮使得蒸汽机转速比较均衡,可是 Watt 还是不满意,他设计了离心控制器(governor)使得进入气缸的蒸汽量基本保持恒定,从而做到了对蒸汽机速度的控制;我没有机会到伯明翰中心图书馆去查阅 Watt 的手稿,但是我猜想 Watt 一定还研究过离心控制器的设计:连杆和小球该怎样设计,才能使得进入气缸的蒸汽量完全可调,能够正好提供所需的能量。Watt 的一生与蒸汽机结缘,而这种缘分的体现是他对蒸汽机设计的不断优化,那么,能不能说 Watt 的一生都用来优化蒸汽机了? 如果 Watt 与优化结缘,那么控制从它诞生的一刻起就伴生了优化意识,今天讲授经典控制理论怎么可以不讲优化呢?

在自动控制理论的课程里讲授优化设计的思想,很容易让人想起最优控制,将最优控制理论“下放”到经典控制中去。由于要讲授最优控制理论,不可能不提到极大值原理,于是不得不引进一些比较深奥的数学知识;即使只讲授动态规划,真正能够体现动态规划的精华,也必须有深奥的理论,而不是举一个类似最短路径的例子能够完成的。很显然,这些数学知识和经典控制理论如同牛头和马嘴般地不相配。经典控制理论俗称白纸加铅笔的理论,它的最大优点在于可以借助简单的直尺和图纸完成设计,有这种类型的技术可以求得极大值原理要求的最优解吗?

我一直在思考一个问题,在计算技术如此发达的今天,应用经典控制理论进行系统分析和设计的场合越来越少。那么,今天是否还需要在大学的课堂里讲授经典控制理论? 如果一定要讲,这个课程应该怎么上呢? 例如,有了 MATLAB,还需要用开环的 Nyquist 图判别闭环系统的稳定性吗? 直接用 MATLAB 将闭环特征根求出来,是否稳定、稳定裕量多少不就一目了然了吗? 或者更直接地将闭环系统的阶跃响应画出来,上升时间、超调、调整时间不是全部都在了吗? 确实,国外的经历给我的印象是他们很快地跳过经典控制内容,将重点

放在时域分析上。然而,经典控制理论的奠基者在 20 世纪 30 年代用“白纸+铅笔”完成了控制系统的分析和设计,这种学科之间的跨越和融合,面向应用的大胆创造,为了简便而做的正确取舍,是不是今天的科学工作者特别需要学习和强化的地方呢?在这种教育理念的指导下,讲授 Nyquist 稳定判据,必须强调选择虚轴作为边界的精彩一笔,这为频率特性在控制理论中的应用创造了条件。强调这些结论背后的发明动因,总结前人立足于工程实际的高超设计,正是今天的教育所必需的。如此看来,作为控制系统设计的重要思想,优化怎么可以被束之高阁呢?

在这种思想的指导下,这次修订继续保持了第 1 版“三纵三横”的框架,保留了第 1 版的大多数内容,但是更强调方法的引出、创新思想的介绍,更突出经典控制理论的应用性、工程性,将反馈的概念、优化意识贯穿全书。在第 3 章增加了最优工程参数的选择,在第 5 章专门用一节介绍由稳定裕量反映的优化意识,在第 6 章突出了 PID 参数选择中的优化意识。应该说体现在经典控制理论中的优化意识不是强调解析意义上的最优,只是从实际出发强调多项指标间的折中和设计的鲁棒性。这种折中和对鲁棒性的追求体现了在设计中的寻优。

为了本书的修订,上海交通大学电子信息与电气工程学院的控制理论教学团队进行了多次的讨论,就修订原则、全书结构、内容安排,甚至句子和文字都进行了全面的研讨。本书修订由翁正新负责,田作华作全面指导和韩正之执笔完成,施颂椒审读了全书。尽管作者们竭尽全力提高本书的质量,但缺点与错误恐还是存在,希望读者指导,万分感谢。

韩正之

2016 年 4 月

第1版前言

PREFACE

工业现代化的基础是工业自动化。自动控制技术的广泛应用不仅可以大幅度地提高投入产出比,而且在减轻劳动强度、提高产品质量方面有着不可替代的巨大作用。当今世界科学技术突飞猛进,新技术不断涌现,这一方面给自动化学科的发展带来了绝好的机遇,另一方面带来了严峻的挑战。

(1) 信息技术进步所带来的巨大冲击。

我国目前的自动化专业主要由以前的自动控制、工业自动化、工业电气自动化、生产过程自动化等专业组成,主要研究“过程控制”“运动控制”的基本原理与实际应用,分析手段基本上是沿用传统的工程求解技术,调节方式则以 PID 为主。经过几十年的深入研究与应用实践,人们已积累了一套完整有效的控制理论与实用技术,并在长期的生产实践中取得了辉煌的业绩。但也应看到,随着科技的进步,生产中对控制的要求越来越高,先后提出多人多出控制、非线性控制、不确定模型控制及优化控制等。它们向传统控制理论的建模方式、分析手段、设计思想提出了挑战。20 世纪 60 年代初,随着现代控制理论的出现,特别是后来 IT 技术的发展突飞猛进,计算机在自动控制领域的应用与普及,突破了长期困扰人们的时空制约,为控制的新思想、新理论、新技术发现、发展与实现提供了广阔的天地。

(2) 国民经济产业结构调整和优化升级所带来的巨大冲击。

随着科技的进步和改革的深入发展,推进产业结构调整和优化升级,转变经济增长方式,是目前提高经济增长质量的重要途径和迫切任务。从目前的形势来看,我国的产业结构调整存在着一个明显的趋势:机械向电子靠,强电向弱电靠,弱电向计算机、信息靠。这既是经济发展的必然,也是自身生存的需要。

当前,各学科如何在保持自身特色的基础上,以信息为龙头,发挥各自优势,赶超世界先进水平,已成为当前一个热门的话题。作为以研究“系统”为主攻方向的“自动化”专业,无论在其内容还是在形式上,都存在一个如何保持专业特点,摒弃陈腐落后,吸纳先进技术的问题,都存在一个如何跟上形势发展,适应社会人才需求,重新审视构建自动化专业人才培养新平台的问题。特别是随着 IT 技术的发展,“自动控制原理”正从传统的专业课向目前的专业基础课演变,成为“电子信息教学平台”的重要组成部分,开设的面越来越广,受教育的对象越来越多。从以前主要面向弱电类专业,现已扩展到面向强电类、机械类、材料类、交通运输类乃至管理类、医学类,实际上已成为现代专业技术人才必须掌握的一门专业基础。

根据我们目前已掌握的教材、教学计划来看,国外对自动控制的教学相当重视,绝大部分的工科专业都设有“控制工程”或与此相类似的课程,并普遍采用计算机辅助设计、虚拟仪器,来完成对控制系统的分析设计。

紧跟科技的进步、适应形势的发展,编制出具有中国特色的《控制工程基础》教材,势在必行。

必行。

根据我国目前自动控制教学现状和实际工程的特点,我们在编写过程中,遵循“加强基础,削枝强干,注重应用,逐步更新”的原则,在保持传统教材主要内容特点的基础上,力求做到以下几方面。

(1) 在指导思想上:强调与 IT 技术的结合。

我们认为:自动化专业的基础是“信息”、核心是“控制”、着眼点应立足于“系统”。有人认为 IT 就是指通信、计算机,这是一种狭隘片面的理解。其实自动化也属于 IT 的范畴,而且有着更广、更丰富的内涵,它包括了信息的获取(检测、仪表)、信息的处理(计算机)、信息的传输(通信),它从“系统”的角度,对客观事物进行抽象、建模、分析和设计,是更高层次上的信息集成。目前的“自动控制原理”在内容上自喻是“经典控制理论”,采用的分析手段是“经典”的工程求解法。应当承认这种工程求解法,对系统的分析设计发挥了很大的作用,但随着科技的进步,利用现代手段完成运动方程的直接求解和工程计算已不再困难。为此,本教材引入了计算机在控制系统分析、设计和仿真等内容的介绍。

(2) 在体系结构上:理清“三纵三横”。

这里讲的“三纵”指系统在三域(时域、复域、频域)中的数学模型;“三横”指系统特性(稳定性、稳态特性、动态特性)的三分析。

“三纵”:结合系统的数学模型,讲清工程求解与理论计算之间的内在联系与区别。具体地说,就是要搞清楚第 1 章图 1-12 所示的几种数学模型之间的相互关系。

这里需指出:对于一个具体的系统,人们可以根据对象的特点、工程的要求、求解的方便及本人的习惯,人为地建立各个不同域中的数学模型,如时域中的数学模型——微分方程,复域中的数学模型——传递函数,或频域中的数学模型——频率特性,这些数学模型之间存在着严格的数学变换关系。学习中,所有问题的分析与求解都是建立在数学模型基础上的。所以,学会建立系统的模型描述,掌握各种模型之间的特点与内在联系,对一个工程控制人员来说是至关重要的。加深对这条线的理解,能使学习者统观全局,树立一个“纵向”的思路。

“三横”:掌握系统分析的三要素,即稳定性、稳态特性和动态特性,具体地说,就是要弄清楚第 1 章表 1-1 中所涉及的内容。此表中有关性能指标是衡量一个系统品质好坏的重要标志,也是对系统进行校正的主要依据,抓住这条线,就是抓住了系统分析设计的关键,有利于学习者建立一个“横向”的思路。

(3) 在内容安排上:坚持“加强基础、削枝强干”。

本书的主要任务:讲清自动控制系统的基本原理,指导学生学会对实际控制系统的抽象,完成结构图的绘制、数学模型的建立和对控制系统的分析与设计。为此:

① 强化计算机的辅助设计,淡化工程求解的过程分析。传统的“自动控制原理”教材中,系统分析几乎占据了全书的一半以上,其中相当一部分是讲述工程求解的方法与技巧,如复域中“根轨迹绘制的规则”,频域中“三图”(Bode 图、Nyquist 图及 Nichols 图)的制作方法等。本书根据实际需求,对相关内容进行了淡化,引入计算机的分析求解技术,紧扣重点,讲深讲透。

② 增加工程实例,讲清物理概念。“自动控制原理”是一门实用背景很强的基础课程,

学习本课程的根本目的是学以致用,联系实际,解决工程实践中的问题。为了加强这一方面的训练,本书在实例分析中,引入机械系统、电气系统、热力系统和液位系统等,以扩大知识面;在习题安排上分为基本题、深入题、实际题和 MATLAB 题 4 种类型,由浅入深,逐步展开。

③ 引入计算机控制技术。随着微机可靠性的日益提高和成本的不断下降,计算机已在工控领域得到了广泛的应用。从 PLC、单片机、工业 PC 到嵌入式系统,从单机控制、集散控制、分布式控制到网络监控等,都离不开数字调节技术。从控制的角度来看,人们完全可以利用计算机特有的存储、运算、比较、判断、交互及外围设备的优势,实现“根据不同对象选择不同的控制策略,根据不同的要求采用不同的整定参数”来改善系统的控制质量。再配上多媒体、网络技术,可使系统的控制更加形象活泼,更加人性化,而这些对已有相当计算机科学基础的青年一代来说并不困难。

本书被列入普通高等教育“十一五”国家级规划教材和教育部高等学校自动化专业教学指导分委员会推荐使用教材。全书共分 8 章。第 1~6 章为线性经典控制理论,由田作华、陈学中编写。第 7、8 章分别为非线性控制系统和计算机控制系统,由翁正新编写。全书由田作华统稿。

本书的各部分内容具有相对的独立性。在使用本书作为教材时,可根据不同类型、不同层次的需求进行组合。

本书由上海交通大学施颂椒教授、韩正之教授主审。他们对本书的体系结构,内容取舍提出了许多宝贵意见。该校自动化系的研究生参与了仿真实验、图形绘制和部分题解的工作,对此谨向他们表示衷心的感谢。

由于作者水平有限,经验不足,书中难免存在缺点和错误,恳请广大读者和使用教材的兄弟院校师生批评指正。

作 者

2007 年 6 月于上海交通大学

目录

CONTENTS

第 1 章 绪论	1
1.1 引言	1
1.2 自动控制发展概况	2
1.3 自动控制系统的基本原理和组成	4
1.3.1 自动控制系统	4
1.3.2 反馈原理与优化设计	6
1.3.3 自动控制系统的组成	8
1.4 自动控制系统的分类	9
1.4.1 按信号的传递路径来分	9
1.4.2 按系统输出信号的变化规律来分	10
1.4.3 按系统传输信号的性质来分	10
1.4.4 按系统的输入输出特性来分	11
1.5 控制系统实例	11
1.5.1 内燃机的转速控制系统	12
1.5.2 角度随动系统	12
1.6 本书概貌	13
人民科学家——钱学森	15
知识点自测	16
习题	17
第 2 章 控制系统的数学模型	20
2.1 控制系统的时域数学模型——微分方程	20
2.1.1 系统的微分方程举例	21
2.1.2 非线性系统的线性化	21
2.2 控制系统的复域数学模型——传递函数	23
2.2.1 传递函数定义	23
2.2.2 传递函数性质	24
2.3 控制系统的频域数学模型——频率特性	24
2.4 典型环节及其传递函数	25
2.4.1 比例环节	25
2.4.2 微分环节	26
2.4.3 积分环节	28
2.4.4 惯性环节(非周期环节)	29
2.4.5 振荡环节	29

2.4.6 时间延迟环节(时滞环节)	30
2.5 控制系统的方框图	30
2.5.1 系统方框图	31
2.5.2 方框图的基本运算法则	32
2.5.3 系统常用的传递函数	33
2.5.4 方框图的简化法则	34
2.6 信号流图	36
2.6.1 几个定义	36
2.6.2 信号流图的性质及运算法则	37
2.6.3 信号流图与方框图之间等效关系	37
2.6.4 梅森公式	39
2.7 物理元件和系统的数学模型	40
2.7.1 机械系统	41
2.7.2 电气系统	42
2.7.3 热力系统	44
2.7.4 液位系统	45
2.7.5 典型位置随动系统的数学模型	47
2.8 MATLAB 在系统数学模型转换中的应用	49
2.8.1 MATLAB 中传递函数的分式多项式的表示	49
2.8.2 传递函数的零极点表示	50
2.8.3 用 MATLAB 计算系统的传递函数	50
2.8.4 MATLAB 中多项式与因式分解形式的互相转换	52
小结	53
中国空间站简介	53
知识点自测	54
习题	56
第3章 自动控制系统的时域分析	62
3.1 典型测试信号	62
3.1.1 阶跃信号	62
3.1.2 速度(斜坡)信号	63
3.1.3 加速度(抛物线)信号	63
3.1.4 脉冲信号	64
3.1.5 正弦信号	64
3.2 控制系统的稳定性分析	65
3.2.1 稳定性的基本概念	65
3.2.2 线性定常系统稳定的充分必要条件	65
3.2.3 劳斯稳定性判据	67
3.2.4 用 MATLAB 分析系统的稳定性	71
3.3 控制系统的稳态特性——稳态误差分析	72
3.3.1 稳态误差和控制系统类型	72
3.3.2 稳态误差系数和稳态误差计算	74
3.3.3 几点结论	77
3.4 控制系统的动态特性——动态响应分析	77

3.4.1 控制系统动态响应指标	77
3.4.2 一阶系统的动态响应	79
3.4.3 二阶系统动态响应的描述参数	80
3.4.4 二阶系统的单位阶跃响应	81
3.4.5 二阶系统的动态响应指标	82
3.4.6 二阶系统的参数优化	84
3.5 高阶系统的动态响应	85
3.5.1 高阶系统动态响应的特点	85
3.5.2 主导极点和偶极子	86
3.6 利用 MATLAB 分析系统性能	88
3.6.1 step 命令	89
3.6.2 impulse 命令	90
3.6.3 lsim 命令	90
小结	91
数学家——爱德华·约翰·劳斯	92
知识点自测	93
习题	96
第 4 章 根轨迹法	102
4.1 闭环系统的根轨迹	102
4.1.1 根轨迹的定义	102
4.1.2 根轨迹的幅值条件和相角条件	103
4.2 绘制根轨迹的基本规则	105
4.2.1 绘制根轨迹的基本规则和步骤	105
4.2.2 开环零、极点的变化对根轨迹的影响	111
4.3 根轨迹在系统参数优化中的应用	113
4.3.1 用根轨迹分析闭环主导极点	113
4.3.2 用根轨迹优化系统的主导极点	115
4.4 用 MATLAB 绘制根轨迹	116
小结	117
根轨迹法的创始人——沃尔特·理查德·伊文思	118
知识点自测	118
习题	121
第 5 章 线性系统的频域分析——频率响应法	127
5.1 频率特性	127
5.1.1 线性定常系统对正弦输入信号的响应	127
5.1.2 系统的频率特性	128
5.1.3 频率特性的性质	129
5.2 频率特性图	129
5.2.1 频率特性的极坐标图(奈氏图)	129
5.2.2 典型环节的奈氏图	130
5.2.3 对数频率特性图(伯德图)	134
5.2.4 基本因子的伯德图	135
5.2.5 控制系统的伯德图	140

5.2.6	最小相位系统和非最小相位系统	143
5.2.7	对数幅相特性图	144
5.2.8	用 MATLAB 作频率特性图	145
5.3	频域中的稳定性判据	146
5.3.1	引言	146
5.3.2	幅角原理	147
5.3.3	奈氏稳定性判据	148
5.3.4	伯德图的奈氏判据	152
5.4	根据伯德图求系统传递函数	155
5.5	基于频率特性的性能分析与优化设计	156
5.5.1	开环频率特性的性能指标	157
5.5.2	稳定裕量	157
5.5.3	开环频域指标与时域性能指标的关系	159
5.5.4	基于闭环频率特性的系统性能分析	161
5.5.5	从尼科尔斯图求闭环系统的频域指标	162
5.5.6	用 MATLAB 分析系统的动态性能	163
小结		165
现代控制理论与电子通信先驱——亨德里克·韦德·伯德		166
知识点自测		167
习题		170
第 6 章	线性控制系统的设计	177
6.1	引言	177
6.2	不同域中系统动态性能指标的相互关系	178
6.3	串联校正	179
6.3.1	相位超前校正	179
6.3.2	相位滞后校正	188
6.3.3	相位超前-滞后校正	194
6.3.4	有源校正网络	201
6.3.5	不希望极点的抵消	202
6.4	局部反馈校正	203
6.4.1	局部反馈校正的基本原理	203
6.4.2	速度反馈	204
6.4.3	速度微分反馈	205
6.5	PID 控制器	206
6.5.1	比例-积分控制	207
6.5.2	比例-微分控制	208
6.5.3	比例-积分-微分控制	209
6.5.4	PID 的参数优化	210
6.5.5	PID 控制的实现	212
6.6	前馈补偿与复合控制	213
6.6.1	按输入补偿的复合控制系统	214
6.6.2	按扰动补偿的复合控制系统	214
小结		214

数字通信时代的引路人——哈里·奈奎斯特	216
知识点自测	216
习题	218
第 7 章 非线性反馈控制系统	224
7.1 非线性控制系统概述	224
7.1.1 典型非线性特性	224
7.1.2 非线性系统的特点	226
7.2 描述函数法	226
7.2.1 描述函数的基本概念	226
7.2.2 典型非线性特性的描述函数	228
7.2.3 组合非线性特性的描述函数	230
7.2.4 非线性系统的描述函数分析	231
7.3 相平面法	233
7.3.1 相轨迹的基本概念	233
7.3.2 奇点和极限环	234
7.3.3 相轨迹的绘制	237
7.3.4 非线性系统的相平面分析	238
7.4 利用非线性特性优化系统的性能	241
7.5 MATLAB 在非线性控制系统中的应用	242
小结	244
控制论创始人——诺伯特·维纳	245
知识点自测	246
习题	247
第 8 章 计算机控制系统	251
8.1 概述	251
8.2 计算机控制系统的硬件组成	252
8.3 采样与恢复	253
8.3.1 采样过程	254
8.3.2 采样定理	255
8.3.3 信号恢复	257
8.4 z 变换	259
8.4.1 z 变换的定义	259
8.4.2 z 变换的基本性质	260
8.4.3 z 变换的求法	263
8.4.4 z 反变换的求法	265
8.5 脉冲传递函数	266
8.5.1 数字部分的脉冲传递函数	266
8.5.2 连续部分的脉冲传递函数	267
8.5.3 采样器位置的重要性	269
8.5.4 闭环脉冲传递函数	270
8.6 离散控制系统的性能分析	274
8.6.1 离散控制系统的稳定性分析	274
8.6.2 离散控制系统的动态性能分析	276

8.6.3 离散控制系统的稳态性能分析·····	280
8.7 数字控制器的设计·····	283
8.7.1 数字控制器的模拟化设计·····	283
8.7.2 数字控制器的直接设计·····	289
8.8 MATLAB 在离散控制系统中的应用·····	293
小结·····	295
信息论之父——克劳德·艾尔伍德·香农·····	295
知识点自测·····	296
习题·····	299
附录 1 常见系统的根轨迹·····	303
附录 2 拉氏变换及 z 变换表·····	305
附录 3 常用校正装置·····	306
参考文献·····	309

1.1 引言

现代科学技术的众多领域中,自动控制技术发挥了越来越重要的作用。导弹能准确命中目标,人造卫星能按预定的轨道运行并返回地面,天宫二号能与神舟十一号飞船成功交会对接,嫦娥三号探测器能成功实现在月球上软着陆,蛟龙号载人潜水器能成功深潜并收回,这些都是以应用高水平的自动控制技术为前提的。自动控制技术已广泛应用于制造业、农业、交通、航空及航天等众多产业部门,极大地提高了社会劳动生产率,改善了人们的劳动环境,丰富和提高了人民的生活水平。在加快推进中国特色新型工业化的伟大征程中,自动控制技术必将发挥更加重要的作用。

控制的目的是使被控对象按照人类的愿望运动,并给出期望的输出。例如,要使一个圆盘以恒定的速度旋转,那么最简单的方法是采用如图 1-1 所示的控制方式。电机控制与驱动模块根据期望转速产生控制信号,控制信号作用于直流电机,使电机产生预期的转速。这种控制方式的特点是:实际转速受控于控制信号,但是对控制信号无反作用。这种控制方式被称为开环控制。

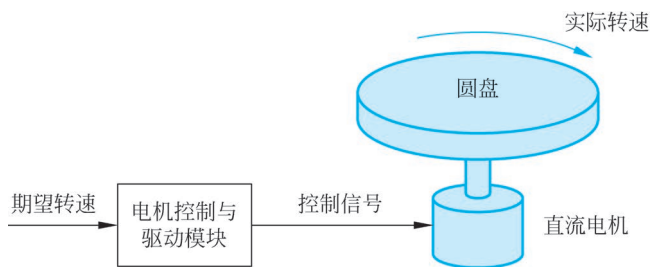


图 1-1 开环控制系统

开环控制系统结构简单,成本低廉,工作稳定,不存在振荡问题。在输入和扰动确定的情况下,开环控制可取得比较满意的结果。但是,由于开环控制不能自动修正系统内部的参数变化,以及外部未知干扰对系统输出的影响,所以为了获得期望的输出,就必须选用高质量的元器件和相对复杂的结构,这必然导致制作成本的提高。因此,当系统的控制精度要求不高、外界未知扰动对系统的影响不大或者扰动的影响可以预计并加以补偿时,可以采用开环控制。假如所要控制的这个圆盘是陶艺制作中使用的转台,那么开环控制足以胜任。但

是,如果这个圆盘是传统机械硬盘中的盘片,那么开环控制就无能为力了,这时需要采用如图 1-2 所示的控制方式。

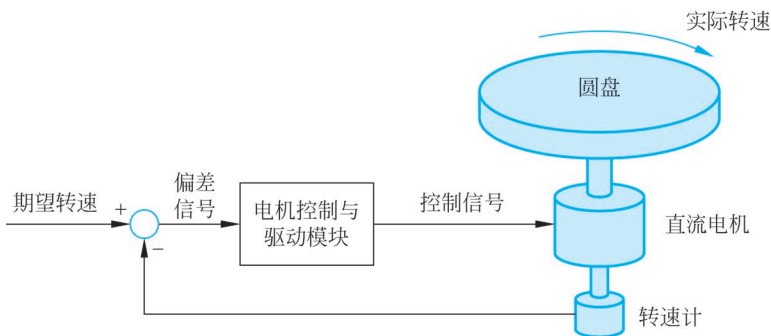


图 1-2 闭环控制系统

与图 1-1 相比,图 1-2 中增加了一个转速计,通过它对实际输出转速进行测量,并将其反馈至输入端与期望转速进行比较,产生偏差信号,然后根据偏差信号产生控制信号对系统进行控制,以达到减少或消除偏差的目的。这种控制方式称为**闭环控制**,也称为**反馈控制**,它能够有效抑制系统元件参数的变化,以及外部未知干扰对系统的影响。当然,反馈控制也有潜在的缺点,可能使系统发生动态不稳定,引起振荡甚至出现飞跑现象;也可能引入传感器噪声。因此,本书重点介绍反馈控制的基本原理和分析设计方法。

1.2 自动控制发展概况

控制的思想与技术至少已存在数千年了。“控制”这一概念本身就反映了人们对征服自然与外部环境的渴望,控制理论与技术也自然而然地在人们认识自然与改造自然的历史中发展起来。然而,在 19 世纪之前,自动控制理论并不存在,自动控制最初只是作为一种技艺,由有天赋的工艺工程师精心设计才付诸实践的。早期控制装置的工作原理大都可以凭直觉进行直接解释,尽管有些装置工艺精巧复杂,但都属于自动控制技术问题,还没有上升到理论高度。

公元前 1400 年至公元前 1100 年,埃及和巴比伦相继出现了可自动计时的漏壶,人类产生了最早期的控制思想。公元前 300 年古希腊出现了浮球调节装置,用于保持水钟系统的水位恒定。大约在公元前 250 年,菲隆(Philon)发明了采用浮球调节装置来保持油面高度稳定的油灯。公元前 245 年,古希腊发明家和数学家克特西比乌斯(Ktesibios)发明了一种自动水钟,该钟具有表盘和指针,而且计时结束时还能自动敲锣或吹喇叭。

中国有着灿烂的古代文明。中国古代的科学家对水钟也十分重视,并进行了长期的研究,当时称为“漏刻”“漏壶”。据《周礼》记载,约在公元前 500 年,中国军队已用漏壶作为计时装置。公元前 300 年左右,李冰父子主持修筑的都江堰水利工程充分体现了自动控制的思想。公元 132 年前后,东汉杰出的天文学家张衡发明了水运浑象仪和候风地动仪,把自动控制思想应用到天文观测仪器和地震观测仪器。公元 235 年,三国时期最负盛名的机械发明家马钧研制出了用齿轮传动的能够自动指示方向的指南车。公元 1086 年至公元 1089 年,苏颂和韩公廉制造了水运仪像台,将用于天文观测的浑天仪和用于天文演示的浑象仪及

自动计时装置结为一体。整个系统就是一个按负反馈原理构成的闭环非线性自动控制系统(当时并不知晓)。公元1637年,明末科学家宋应星所著的《天工开物》记载了有程序控制思想的提花织机结构图。

近代欧洲最早的反馈系统是荷兰人科内利斯·德雷贝尔(Cornelis Drebbel)在17世纪20年代发明的温度调节器,用于控制对炼金原材料进行长时间适温加热的迷你熔炉。丹尼斯·帕平(Dennis Papin)在1681年发明了第一个锅炉压力调节器,该调节器是一种安全调节装置,与目前压力锅的减压安全阀类似。1765年俄国著名的科学家、发明家波尔祖诺夫(Ivan Ivanovich Polzunov)发明了蒸汽锅炉浮子阀门式水位调节器。

18世纪,欧洲出现了工业革命,蒸汽机开始广泛地应用于工业生产。然而,在蒸汽机出现的初期,其动力输出不稳定,导致其工作效率低下。为了解决这一问题,英国发明家瓦特(James Watt)于1788年设计了离心式调速器(飞球调节器),用来控制蒸汽机的转速。该装置被公认为第一个成功应用的负反馈调节装置,是将自动控制技术应用到工业的最早代表。然而,人们很快就发现,离心式调速器有时会造成系统的不稳定,使蒸汽机产生剧烈振荡。由于缺乏必要的理论方法作为指导,在很长的一段时间里,人们无法简单地用直觉解释和解决这种不稳定现象,只能采用“试凑法”。因此,从理论上去描述自动控制系统的稳定性问题,进而解决设计过程中出现的瞬态振荡问题就成为那时的“当务之急”。

1826—1835年,英国剑桥大学数学及天文学教授艾里(G. B. Airy)针对天文望远镜调速系统中的不稳定现象,尝试采用微分方程来进行分析,这是动态控制系统研究的开端。但由于他的论文写得非常简略,不能判断他当时是否得到了稳定性条件。1868年,英国物理学家詹姆斯·麦克斯韦(J. C. Maxwell)发表论文“论调速器”,建立了调速器的微分方程模型,并采用线性化技术,给出了二阶、三阶系统的稳定性判据。该文是系统研究反馈控制系统稳定性的第一篇论文,开创了控制理论研究的先河。同一时期,俄罗斯学者维什聂格拉斯基(I. A. Vyshnegradskii)也对蒸汽机的稳定性问题进行了研究,并于1876年发表了论文“论调节器的一般理论”,对调速器系统进行了全面的阐述。1877年,英国数学家劳斯(E. J. Routh)提出了著名的劳斯稳定判据,它是一种代数稳定判据,可以根据微分方程的系数来判定控制系统的稳定性。1895年,德国数学家赫尔维茨(A. Hurwitz)提出著名的赫尔维茨稳定判据,它是另一种形式的代数稳定判据。Hurwitz的条件同Routh的条件在本质上是是一致的,因此这一稳定性判据现在也被称为Routh-Hurwitz稳定性判据。1892年,俄罗斯数学家力学家李雅普诺夫(A. M. Lyapunov)发表了具有深远历史意义的博士论文“运动稳定性的一般问题”,提出了当今学术界广为应用且影响巨大的李亚普诺夫第二方法。这一方法不仅可用于线性系统,而且可用于非线性时变系统的分析与设计。20世纪初,人们对舰船进行自动操纵。1911年,美国发明家斯佩雷(Elmer Sperry)发明了舰船自动驾驶系统,尝试采用PID控制思想和自动增益调整来提高系统性能,这被认为是最早的PID控制器。1922年,美国科学家米诺斯基(Nicholas Minorsky)从理论上清晰地分析了船的自动驾驶问题,推导出了PID控制规律。PID控制结构简单、稳定性好、工作可靠,既可应用于已知数学模型的系统,也可应用于无法精确建模或者无法建模的复杂系统,便于现场调试,在实际工程中得到了广泛应用。这些研究工作基本上是在时间域上进行的,因此将这些方法称为控制理论的时间域分析方法,简称时域法。

1928年至1945年,以美国电话电报公司和贝尔实验室的工程师和科学家为核心,建立

了控制系统分析与设计的**频域方法**。1920年前后,电子放大器失真问题成为开发长距离电话技术的严重阻碍。哈罗德·布莱克(Harold Black)深入研究了这个问题,并于1927年开发出负反馈放大器,其核心思想是:把输出的放大信号反馈回输入端,就可以减小由于噪声和器件参数漂移造成的失真。自此,“**反馈**”一词被正式使用。然而,采用负反馈放大器后,人们发现系统中容易发生“**啸鸣**”等不稳定现象,因为该系统动力学方程比较复杂,Routh-Hurwitz判据很难再有帮助。于是贝尔实验室的通信工程师和科学家开始转向频域分析。1932年,奈奎斯特(Harry Nyquist)发表了关于反馈放大器的经典论文,运用复变函数理论给出了反馈系统的频域稳定性判据(Nyquist判据)。同一时期,伯德(Hendrik W. Bode)也开始对负反馈放大器的设计问题进行研究。1940年,伯德发表“反馈放大器设计中衰减与相位的关系”,引入了对数幅频图和相频图,为简化运算迈出了重要一步。1945年,伯德出版著作《网络分析和反馈放大器设计》,给出了以频率响应法为基础的反馈控制系统分析和设计理论。

20世纪40年代是系统和控制思想空前活跃的年代。1942年,美国Taylor仪器公司的齐格勒(J. G. Zigler)和尼科尔斯(N. B. Nichols)提出了PID控制器的参数整定方法——后来称为Ziegler-Nichols整定法。同年,哈里斯(H. Harris)在拉普拉斯变换的基础上,引入传递函数的概念。1943年,霍尔(A. C. Hall)利用传递函和方框图,把频域响应方法和时域方法统一起来,创建了复域法。1948年,伊文斯(W. Evans)提出了根轨迹法,通过描绘特征方程的根在某个参数改变时的运动轨迹,来分析和设计线性定常控制系统。1948年,美国数学家维纳(Nobert Wiener)出版《控制论》,把反馈的概念推广到生物、神经、经济及社会等复杂系统,为控制论奠定了基础。同年,美国数学家香农发表了论文《通信的数学理论》,为信息论奠定了基础。至此形成了完整的控制理论体系——以传递函数为基础的**经典控制理论**,主要研究单输入单输出、线性定常系统的分析和设计问题。1954年,我国著名的科学家钱学森全面地总结了经典控制理论,并把它进一步提高到更高的理论高度上,他在美国出版《工程控制论》,将控制论的主要思想和方法推广到工程技术领域。

20世纪50年代末到60年代初,人类开始征服太空。随着航天技术的快速发展,传统的经典控制理论难以满足航天任务中多变量线性控制系统的需求,这就促进了现代控制理论的形成与发展。**现代控制理论**以多变量系统为研究对象,以状态空间法为主要研究方法。贝尔曼(Bellman)于1954年提出的动态规划、庞特里亚金(Pontryagin)于1956年提出的极大值原理和卡尔曼(Kalman)于1960年提出的卡尔曼滤波对现代控制理论起到了重要的支撑作用。现代控制理论经过几十年的发展,已形成许多学科分支,如线性系统理论、最优控制、系统辨识、自适应控制、鲁棒控制和非线性控制等。目前控制理论还在继续发展,正向以控制论、信息论和仿生学为基础的智能控制理论深入。随着社会生产和科学技术的进步,控制理论将不断发展和完善,必将有力推动社会生产力的发展和人民生活水平的提高,促进人类社会向前发展。

1.3 自动控制系统的基本原理和组成

1.3.1 自动控制系统

自动控制系统是指离开人的直接干预,利用控制装置(简称控制器)使被控对象(或生产

过程等)的工作状态(或被控量),如温度、压力、流量、pH、位置、速度等,按照预定要求运行的系统。下面通过两个例子来说明自动控制系统的基本工作原理。

1. 温度控制系统

图 1-3 是闭环温度控制系统。

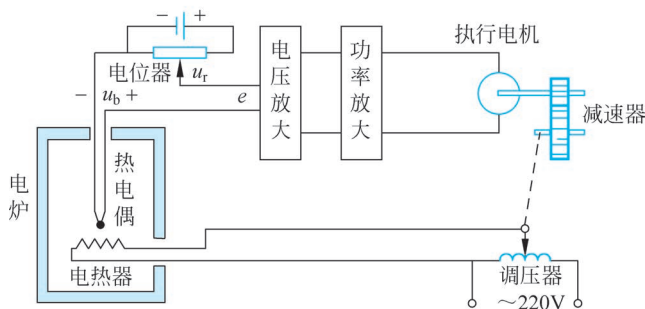


图 1-3 闭环温度控制系统

系统的工作原理如下:将电位器的电压数值设定在对应于期望温度的 u_r 上,热电偶测量炉内温度,其输出是电压 u_b , u_b 与给定电压 u_r 比较,当炉内温度低于期望温度时,比较电路的输出电压(系统的误差信号) $e = u_r - u_b > 0$,误差信号 e 经放大器放大,驱动执行电机,通过减速器使调压器向增大电压的方向转动,从而使炉温升高。只有当炉内温度与期望温度相等时, $e = u_r - u_b = 0$,电机停转,系统才达到平衡状态。当炉内温度高于期望温度时, $e < 0$,执行电机朝相反方向转动,最后也达到平衡状态。

可见,系统由比较电路产生的电压误差信号 e 对系统产生控制作用,在炉内温度达到期望值时,误差信号 $e = 0$,控制作用消失;只要 $e \neq 0$,执行电机就转动,控制调压器的移动臂朝减少误差的方向滑动,这样系统就实现了温度的自动控制。

图 1-3 所示系统的原理框图如图 1-4 所示。

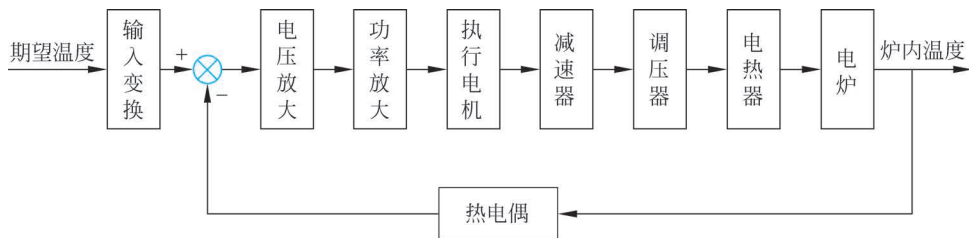


图 1-4 闭环温度控制系统原理框图

图中 $\otimes$ 是比较元件的符号,在本系统中比较是由比较电路完成的。从以上分析看出:闭环控制系统之所以能保持温度为期望值,是因为系统中引入了负反馈,利用比较元件产生的误差信号进行控制。这样的系统能自动消除如外界扰动和系统参数变化等因素引起的输出误差,所以闭环控制系统是利用系统偏差来消除系统输出误差的。

图 1-4 称为控制系统的原理框图。作原理框图的一般流程如下:先确定输入、输出和被控对象,输出是由被控对象产生的;然后确定系统是开环结构还是闭环结构,确定控制器与检测元件;最后根据系统的结构添加其余部分。

2. 自动火炮角度跟踪系统

图 1-5 是自动火炮角度跟踪系统的原理框图。其工作原理如下：当雷达捕捉到目标（飞行器）后，即将测得的飞行器有关运动数据（如距离、方位角、俯仰角、速度等）送入收信仪进行处理，计算出火炮发射所需的位置角（方位角和俯仰角）提前量等数据。同时，将通过检测装置测得的火炮实际位置角也输入到比较装置并进行比较。当二者存在误差时，比较装置就会输出一个电压信号，经放大后驱动执行电机，使执行电机按一定的速度和方向旋转，再经过减速装置，使火炮自动地按位置角提前量跟踪目标，这样，当目标进入火炮的射击范围时，指挥仪便发出射击指令，打击目标。

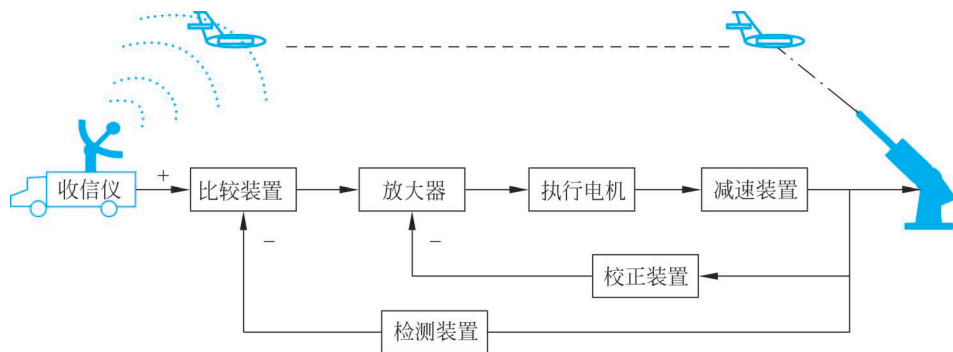


图 1-5 自动火炮角度跟踪系统的原理框图

这是一个闭环控制系统，系统中引入了负反馈信号，收信仪收到信号与火炮输出的角度信号在比较装置进行比对，产生的偏差信号对系统进行控制，从而消除输出误差。它也是利用系统误差来消除系统误差的。

图 1-5 中的校正装置是为改善系统的性能而设计的控制装置，这种形式的补偿称为反馈校正，本书将在第 6 章介绍。

1.3.2 反馈原理与优化设计

1. 反馈和反馈控制原理

在各种纷繁错乱的现象中，一定存在一些因果关系。图 1-1 所示的开环控制系统中，期望转速（输入）是因，控制信号是果；而对于实际转速（输出）而言，控制信号又是它的因。在图 1-2 所示的闭环控制系统中，沿上方箭头方向，控制信号是因，实际转速（输出）是果，而沿下方箭头方向，实际转速（输出）也会影响到控制信号，因此控制信号与实际转速（输出）互为因果关系。在一个系统中，如果有一对信号，它们之间互为因果关系，则称它们之间存在信息反馈，简称**反馈**。反馈是控制论的一个最基本观点，指将系统的输出返回输入端，并以某种方式改变输入，进而影响系统功能的过程。

反馈可以分为正反馈和负反馈两种情况。**正反馈**是指将输出信号加强反馈到输入端，导致输出信号进一步增大的过程。人的认知迭代过程就是一个正反馈回路。**负反馈**是指将输出信号减弱反馈到输入端，从而使得输出信号更加稳定。人体的温度调节系统就是负反馈回路。如果体温过低，大脑就会指使肌肉抖动，加速血液循环，从而刺激温度上升；如果体温过高，则会让你出汗来降低体温。

很久以前，大自然就发现了反馈。它创造了反馈机制并且在各个层次利用这些机制。

达尔文的进化论被认为是反馈的理论。达尔文认为,生物为了生存必然会不断改造自己,以适应客观环境,就是“物竞天择,适者生存”的道理。图 1-6 为生物进化模型。生物个体遗传信息的输入来自繁殖过程中 DNA 的复制、重组和突变,从而产生的 DNA 的多样性,生物个体输出的表现型来自生物根据环境条件,开启或关闭表达某些基因。自然选择是进化模型中的负反馈,只有适应环境的生物才能生存,不适应环境的生物被淘汰甚至物种灭绝。生物竞争是进化中的正反馈,有竞争优势基因型的生物个体能获得更多的资源,繁殖更多的后代。在下一代群体中,DNA 经过复制、重组和突变产生新的遗传信息和生物个体,如此循环反复,构成生物进化的模型。

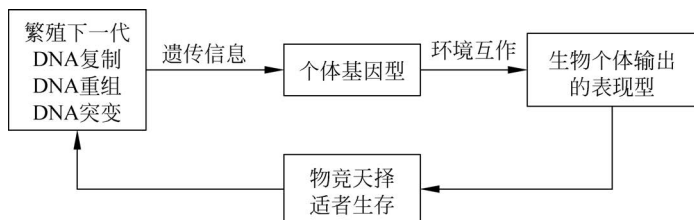


图 1-6 生物进化模型

人体也是一个具有高度复杂控制能力的反馈系统。例如,葡萄糖是体细胞赖以产生能量的物质,身体试图维持其浓度恒定。胰腺通过产生胰岛素和胰高血糖素来调节血液中的葡萄糖。当葡萄糖水平增高时(例如吃饭以后),胰岛素就会被释放,身体就会将过多的葡萄糖保存到肝脏中。当葡萄糖水平变低时,胰腺就会分泌胰高血糖素,产生相反的效果。

在工程控制系统中,大多数的反馈系统是基于期望性能与实际性能之间的偏差来进行调节的,即“检测偏差、利用偏差、消除偏差”,这就是**反馈控制的原理**。闭环控制系统是根据反馈控制原理设计的,它的基本特征是——信号流存在回路,这正是闭环称呼的由来。图 1-4 描绘的闭环炉温控制系统中,⊗表示比较设备,其输出(偏差信号)是电压,电压的正负反映了炉内实际温度是高于还是低于期望温度,反馈控制的目的就是使炉内实际温度与期望温度一致,也就是消除偏差。

2. 控制系统的优化

优化意识是人类固有的思维模式。当有不只一种方案可以达到控制目的时,人们就会去挑选一个好一点的方案,这就是控制系统的优化。如果从起点到目的地有不只一条路可走,有的人会选择最近的一条,有的人会选择最平坦的一条,也有的人可能会选择沿途景色最好的一条。不管选择哪条路,他都是在做优化。这个例子说明优化有两个前提,一是存在多种方案达到控制目的,二是有一个优化的指标,即选路的标准,这个指标称为目标函数。上述例子说明目标函数不是唯一的,不同的目标函数导致最后的决策也是不相同的。

典型的最优化问题的提法是

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x) \\ \text{s. t. } & g(x, u) = 0 \end{aligned} \quad (1-1)$$

式(1-1)中,标量值函数 $f(x)$ 称为目标函数,通常要求 $f(x)$ 是一阶连续可微的, x 是被控变量,它可以是向量。 $g(x, u) = 0$ 是一个向量值方程(即方程组),称为约束条件,其中的 u 是一个需要设计的变量,可以是控制输入或者系统参数,这个方程给出了被控变量 x 和设计变量 u 之间的约束关系。因为一般控制系统的模型都是用微分方程描述的,当 $g(x, u)$ 中

含有 x 的导数时,求解式(1-1)就称为最优控制问题。

人类对目标的追求常常不是单一的,例如在上面选路的例子中,人们有可能选择一条不太远且比较平坦的路。这种指标就称为加权平均指标。在控制系统设计中,“稳、准、快”是最基本的指标,这三个指标并不总是相容的,常常快了就不够稳,或者稳了又不够准。因此当一个被控对象可以用多个指标进行衡量的时候,我们常常采用加权平均的方法制定控制系统的目标函数。用 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)$ 表示 p 个不同的指标; $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$ 是 p 个非负实数,它们满足 $\sum_{i=1}^p \mu_i = 1$; 那么加权平均指标就是 $f(x) = \sum_{i=1}^p \mu_i f_i(x)$ 。

由于求解优化问题(1-1)常常会涉及偏微分方程,而解这些方程非常困难,显然不在经典控制理论的考虑之中。在经典控制理论中,人们要优化的都是一些工程参数,通常的做法是先对 $f_1(x)$ 求得一个最优参数 u_1 ,对 $f_2(x)$ 得到一个 u_2 ……对 $f_p(x)$ 得到一个 u_p 。有的时候,这些 u_i 还只是次优解。然后用算术平均 $\sum_{i=1}^p \mu_i u_i$,或者几何平均 $u_1^{\mu_1} u_2^{\mu_2} \dots u_p^{\mu_p}$ 作为最优参数。

尽管得到最优解很难,然而在控制系统设计中总是尽可能地选取一个比较优越的结果,这种结果有时候称为非劣解或者满意解。在经典控制理论中这种优化意识比比皆是,例如第3章中选取最佳工程参数,在第4章中用根轨迹选择好的闭环极点,在第5章中提出稳定裕量等,都是优化意识的体现。至于第6章的设计校正更是明确地让系统的性能更好一些。

1.3.3 自动控制系统的组成

概括 1.3.1 节的两个例子,典型的闭环系统组成框图一般具有图 1-7 给出的形式。与图有关的概念解释如下。

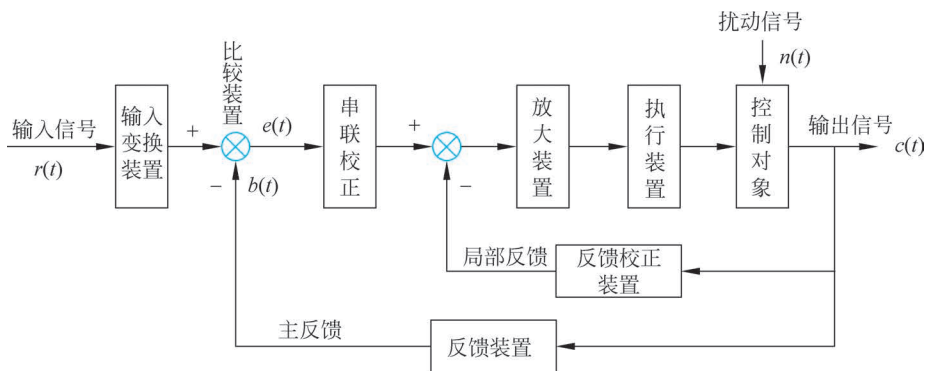


图 1-7 典型闭环控制系统的组成框图

前向通道与反馈通道：信号从输入端沿箭头方向到达输出端的传输通道称为前向通道；系统输出量经测量装置反馈到系统输入端的通道称为主反馈通道。前向通道与主反馈通道一起构成主回路。由局部反馈组成的回路称为局部反馈回路。

输入信号 $r(t)$ 与输入变换装置：输入到系统中控制输出量变化的信号称为输入信号 $r(t)$ (又称给定量或控制量)，它通过输入变换装置变换成比较装置可以接受的物理量或数字量。

反馈装置与反馈信号 $b(t)$ ：用来测量被控量并按特定的函数关系反馈到系统的输入端的器件称为反馈(检测)装置,如图 1-3 中的热电偶。反馈装置的输出叫反馈信号。根据极性,把反馈信号与输入信号同极性的反馈叫正反馈,反极性的反馈叫负反馈。为消除系统误差,主反馈一定是负反馈,这是工程中闭环控制系统正常工作的基本条件。

比较装置与误差信号 $e(t)$ ：比较装置是把输入信号与反馈信号相减,其输出为误差信号,简称为误差。

放大装置：比较装置给出的信号通常很小,必须将它进行放大(包括幅值和功率等)。常用的有电子放大器、液压放大器等。

执行装置：能产生驱动被控对象的信号,它用来改变系统输出,常用的有直流伺服电机等,如图 1-5 中的执行电机。

校正装置：它是为了改善系统的性能而引入的。串联校正装置是串接在系统前向通道中的校正装置,在系统局部反馈回路内接入的反馈装置称为反馈校正装置。简单的校正装置可以是一个阻容网络,复杂的校正装置可以是一个数字信号处理器。

控制对象与输出信号 $c(t)$ ：控制对象即系统要求控制的对象,其输出量为系统的输出信号,又称为被控制量。如图 1-4 中的控制对象为电炉,被控制量(输出信号)是温度。

扰动信号 $n(t)$ ：除输入信号外,影响系统输出的其他输入统称为扰动信号。扰动信号的特点是人们无法控制甚至无法量测的。

1.4 自动控制系统的分类

1.4.1 按信号的传递路径来分

1. 开环控制系统

开环控制系统的输出端与输入端间不存在反馈回路,即输出量对系统的控制作用不产生影响。如工业上使用的数控机床,参见图 1-8。

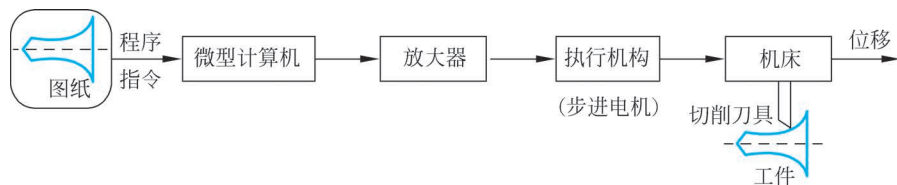


图 1-8 微型计算机开环控制

系统工作过程如下。根据设计图纸的要求,将加工过程编制成程序指令输入到微型计算机,微型计算机完成对控制脉冲的存储、交换和计算,并输出控制脉冲给执行机构(一般是步进电机),驱动机床运动,完成程序指令的要求。这就是一个开环控制系统,它的特点如下。

(1) 系统的作用信号由输入端到输出端单方向传输,没有反馈通道,不具有修正误差的能力。

(2) 对系统的每一个输入,总有一个与之对应的输出。

(3) 控制精度取决于系统组成部件和元器件参数的精度与稳定性,所以为了获得高质

量的输出,必须选用高质量的元件,导致投资大、成本高。

2. 闭环控制系统(反馈控制系统)

闭环控制系统也叫反馈控制系统。它是将输出信号通过测量元件反馈到系统的输入端,通过比较产生偏差信号,系统根据偏差信号来控制执行机构达到减小系统偏差的目的。在上例中引入测量元件和反馈回路,就构成闭环控制系统(见图 1-9)。

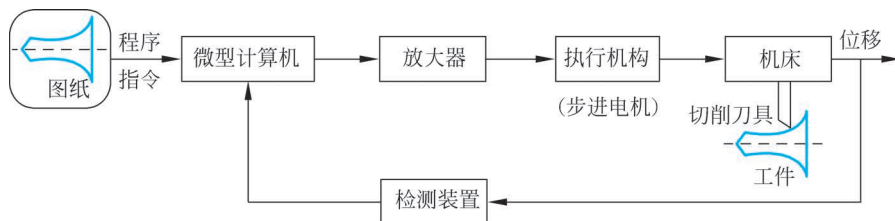


图 1-9 微型计算机闭环控制

系统反馈测量装置把切削刀具的实际位置送给计算机,与程序指令比较,经计算机处理后发出控制信号,再经放大后驱动执行机构,就可以减小由各种原因产生的误差。

闭环控制系统如果系统参数配合不当,就容易产生振荡,使系统不能正常工作,这就是系统的稳定性问题。

1.4.2 按系统输出信号的变化规律来分

1. 恒值控制系统(或称自动调节系统)

这种系统要求系统在任何扰动下,输出量以一定精度接近给定量。工业生产中的恒温、恒压等自动控制系统都属于这一类型。

恒值控制系统主要研究如何克服各种扰动对系统输出的影响。

2. 过程控制系统

这种系统要求其输出按照一个已知的函数变化。系统的控制过程按预定的程序进行,这时要求系统输出能迅速准确地复现输入,如化工中反应罐的压力、温度、流量控制。图 1-9 中微型计算机控制机床属此类系统。

3. 随动系统(或称伺服系统)

这种系统要求其输出信号能跟踪一个未知信号。这个未知信号通常就是系统的输入,要求控制系统的输出跟随输入信号变化,如图 1-5 所示的火炮自动跟踪系统。飞机的运动规律对系统来说是随机的,系统要求火炮输出角度能跟随飞机的运行轨迹。

对于随动系统要求跟踪具有很好的快速性和准确性。

1.4.3 按系统传输信号的性质来分

1. 连续系统

这类系统的特点是系统各部分的信号都是连续函数。如图 1-3 所示的温度控制系统及目前工业中普遍采用的模拟 PID 调节器控制的系统就属于这一类型。

2. 离散系统

系统中只要有一处信号出现脉冲信号或数字信号,就称为离散系统。如目前广泛使用的计算机控制系统就属于这一类型(见图 1-10)。

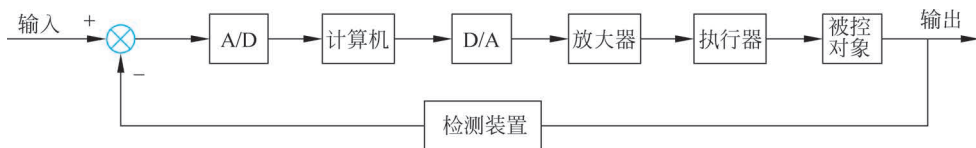


图 1-10 数字控制系统结构图

1.4.4 按系统的输入输出特性来分

1. 线性系统

线性系统由线性元件构成,其运动规律可以用线性微分方程来描述。系统具有叠加性和齐次性。假设系统的输入为 $r_1(t)$ 和 $r_2(t)$,对应的输出分别为 $c_1(t)$ 和 $c_2(t)$,则当输入为 $r(t)=r_1(t)+r_2(t)$ 时,如系统的输出为

$$c(t)=c_1(t)+c_2(t) \quad (1-2)$$

则称系统具有叠加性。若对应输入 $r_1(t)$,系统的输出为 $c_1(t)$,当输入为 $r(t)=\alpha r_1(t)$ 时,如系统的输出为

$$c(t)=\alpha c_1(t) \quad (1-3)$$

则称系统具有齐次性。

同时满足式(1-2)和 式(1-3)的系统就是线性系统。将上述二式合并,如线性系统输入为 $r(t)=\alpha_1 r_1(t)+\alpha_2 r_2(t)$,则系统的输出为

$$c(t)=\alpha_1 c_1(t)+\alpha_2 c_2(t) \quad (1-4)$$

式(1-4)通常称为线性原理。

如果线性系统参数不随时间变化,就是线性定常系统,其运动方程一般形式为

$$\begin{aligned} & a_n \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dc(t)}{dt} + a_0 c(t) \\ & = b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{dr(t)}{dt} + b_0 r(t) \end{aligned}$$

式中, $r(t)$ 为系统的输入; $c(t)$ 为系统的输出; $a_i (i=0,1,\cdots,n)$ 和 $b_j (j=0,1,\cdots,m)$ 均为常数。

2. 非线性系统

在构成系统的元件中有一个或一个以上是非线性的,则称此系统为非线性系统。典型的非线性特性有饱和特性、死区特性、间隙特性、继电特性、磁滞特性等。非线性系统不满足线性原理,这是与线性系统的本质区别。非线性特性大大增加了系统分析与设计的复杂性。

严格地说,自然界中任何物理系统的特性都是非线性的。但是,为了研究问题的方便,许多系统在一定的条件下,可以近似为线性系统来研究,其误差往往在工业生产允许的范围之内。

1.5 控制系统实例

下面举两个自动控制系统的实际例子。

1.5.1 内燃机的转速控制系统

图 1-11 是应用瓦特式转速调节器的内燃机转速控制系统,它利用飞球的离心力来调节内燃机的燃油阀门开度,控制喷入内燃机的油量,从而达到调节转速的效果。

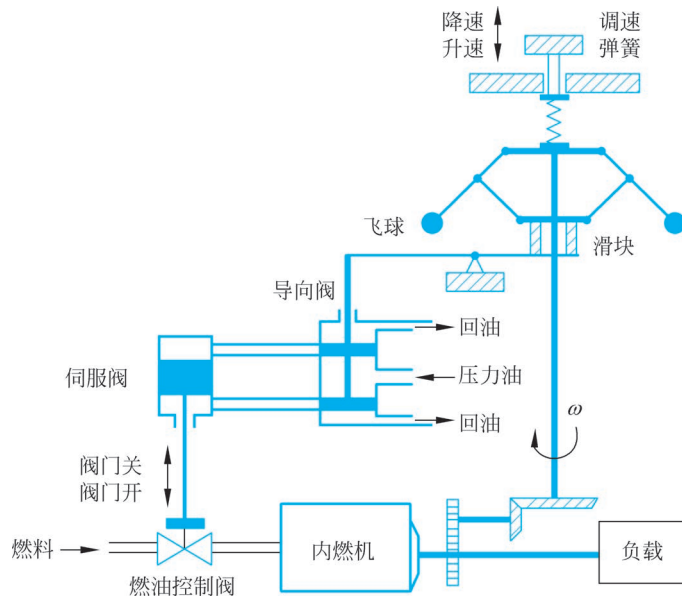


图 1-11 内燃机的转速控制系统

系统的工作原理如下：先设内燃机工作在期望的转速状态。如果由于某种原因,例如负载增大使转速降低,调速器的飞球离心力减小,导致导向阀向上移动,压力油流向伺服阀油缸的上半部,使燃油控制阀开大,于是内燃机加速,直到达到期望转速,控制系统又回到图示的状态。如果要升高期望转速,只要压紧调速弹簧,调速器就将平衡在转速较高的位置上。

1.5.2 角度随动系统

图 1-12 是角度随动系统的原理图。

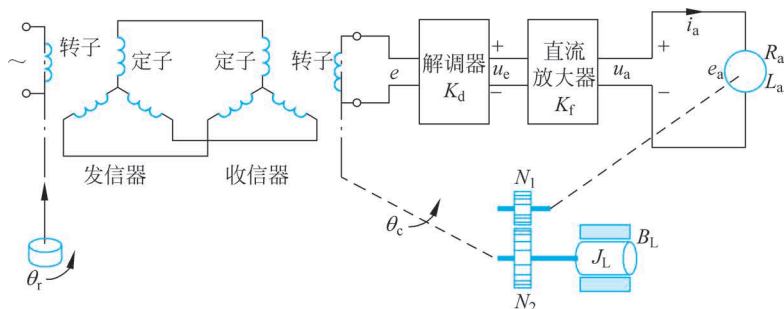


图 1-12 角度随动系统的原理图

系统中采用自整角变压器作为角度的发信器和收信器。其工作原理是：当发信器的转角 θ_r 与收信器的转角 θ_c 相等,即它们的角度差 $\theta = \theta_r - \theta_c = 0$ 时,误差电压 $e = 0$;当 $\theta \neq 0$

时,误差电压 $e \neq 0$, 并且, e 的相位反映了 θ 的符号。于是经过解调器解调的直流信号 u_e 的极性也反映了 θ 的符号, 即当 $\theta > 0$ 时, $u_e > 0$, 当 $\theta < 0$ 时, $u_e < 0$, 而当 $\theta = 0$ 时, 则 $u_e = 0$ 。当系统发信器的转角 θ_r 与收信器的转角 θ_c 相等时, $e = 0$ 及 $u_e = 0$, 系统处于平衡状态。当 $\theta \neq 0$ 时, $e \neq 0$, $u_e \neq 0$, 经直流放大器放大, $u_a \neq 0$ 驱动直流伺服电机转动, 伺服电机带动负载转动的同时, 也带动收信器向减小 $|\theta|$ 的方向转动, 一直到 $\theta = \theta_r - \theta_c = 0$, 系统又进入平衡状态。这样, 系统的输出转角 θ_c 总能跟踪给定的转角 θ_r 。

1.6 本书概貌

本书主要研究自动控制系统的建模、分析和设计。

建立系统的数学模型是系统分析和设计的基础。通常人们所说的数学模型是指描述系统运动状态的微分方程。由于微分方程中的自变量是时间 t , 所以将微分方程称为时域数学模型。为了便于系统的分析和设计, 经典控制理论中通常将系统的时域数学模型——微分方程映射到复数域(简称复域)或频率域(简称频域)中, 得到复域数学模型——传递函数, 以及频域数学模型——频率特性。这三种模型之间存在一一对应的映射关系, 如图 1-13 所示。

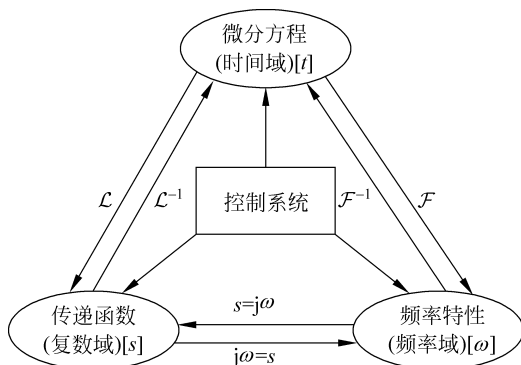


图 1-13 系统三种数学模型之间的关系

图中: $\mathcal{L}, \mathcal{L}^{-1}$ 分别表示拉普拉斯变换和拉普拉斯反变换;

$\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1}$ 分别表示傅里叶变换和傅里叶反变换

时域的数学模型是基础, 传递函数和频率特性是重要的工具。

系统分析包括系统的稳定性分析、稳态特性分析和动态特性分析(简称“三性分析”), 在时域、复域和频域中都可进行。时域分析就是求解系统的运动方程(微分方程), 通过对系统零输入响应的分析, 获得线性定常系统稳定的充分必要条件; 通过典型的单位阶跃响应曲线, 建立系统的动态性能指标; 以二阶系统为例分析了特征根与稳定性, 阻尼比 ζ 、自然振荡角频率 ω_n 与系统的动态性能的关系。复数域分析方法和频率响应法给出适合于工程应用的方法——作图的方法(根轨迹图和各種频率特性图), 给出在这些图上判别系统稳定性和系统性能的指标和方法。本书介绍的控制理论是 20 世纪 40 年代前后提出的, 这种理论解决了在没有现代计算设备条件下的工程控制系统的分析与设计问题。尽管时域法可以精确求解系统的运动特性, 但它依赖于解析解, 因此一般只能解决二阶系统的分析问题, 而复域法和频域法则可解决高阶系统的分析问题, 并且还解决了在时域中难以解决的系统设计

问题, 尽管它很多时候采用的是图解的方法, 不如时域中解析法来得精确, 但它们能满足工程上的要求, 尤其对于闭环控制系统而言, 反馈可以弥补模型不精确带来的不足。表 1-1 给出了在三种方法中表征系统性能的参数, 详细分析将在相应章节中展开。

表 1-1 三种方法中表征系统性能的参数

性能分析	数学模型		
	时域(t)	复数域(s)	频域(ω)
	微分方程——数学求解	传递函数——根轨迹法	频率特性——频率法 (以伯德图为例)
	解析法	工程法	
稳定性	特征方程的根具有负实部, 则系统稳定	闭环极点在左半 s 平面, 则系统是稳定的	$Z=0$, 则系统稳定
稳态特性 (稳态误差 e_{ss})	期望输出与系统稳态解之差	开环传递函数的型号与增益	取决于系统开环频率特性的低频段的特性: 斜率和幅值
动态特性	阶跃响应: 调整时间 t_s 、超调量 M_p 等	主要取决于主导极点的位置: 阻尼比 ζ 和自然振荡角频率 ω_n	主要取决于系统开环频率特性中频段的特性: 增益剪切角频率 ω_c 和相位裕度 γ

校正是控制系统设计的主要方法, 本书将讲述在经典控制系统设计中采用的优化思想和措施, 并详细讨论用根轨迹法和频率法设计系统各种校正装置的方法。

近年来, 计算机技术迅速发展, 促进了计算机辅助设计技术的应用。MATLAB 是当前一种常用的计算机辅助设计软件, 它为控制系统的分析与设计提供了专用的工具包。本书在各章都将介绍 MATLAB 的相关应用。

本书的整体框架如图 1-14 所示。

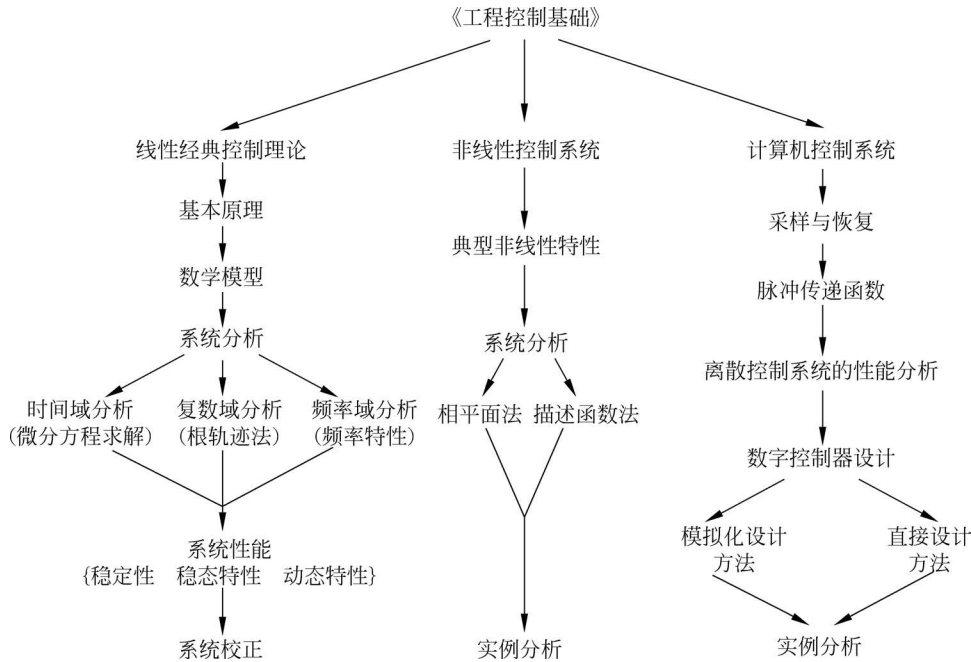


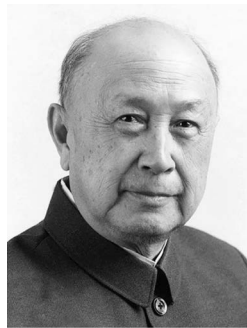
图 1-14 本书的整体框架

本书力求对基本概念的阐述严格清晰,将习题分为基本题、实际题和 MATLAB 题,读者可根据需要选择。

人民科学家——钱学森

钱学森(1911年12月11日—2009年10月31日),生于上海,籍贯为浙江杭州,是中国共产党的优秀党员,忠诚的共产主义战士,享誉海内外的为国家作出杰出贡献的科学家、中国航天事业的奠基人,中国科学院、中国工程院资深院士,中国人民政治协商会议第六届、七届、八届全国委员会副主席,两弹一星功勋奖章获得者。

钱学森于1934年毕业于国立交通大学机械工程系,1935年9月进入美国麻省理工学院航空工程系学习,1936年9月转入美国加州理工学院航空系,在世界著名力学大师冯·卡门(Von Karman)教授指导下,从事航空工程理论和应用力学的学习研究,先后获航空工程硕士学位,航空和数学博士学位。1938年7月—1955年8月,钱学森先后任美国加州理工学院航空系助理研究员、讲师、副教授,麻省理工学院航空系副教授、教授,加州理工学院航空系教授和喷气推进中心主任等职,从事空气动力学、固体力学和火箭、导弹等领域的研究。



在美国学习工作期间,钱学森始终心系祖国,密切关注国内局势变化,决心早日学成报效祖国。1948年,为了准备回国,他退出了美国空军科学顾问团,辞去海军军械研究所顾问职务。中华人民共和国成立后,他回国的心情更加急迫。1950年夏,为返回祖国,他向加州理工学院提出回国探亲,但临行前被以莫须有的罪名拘捕。被软禁期间,他选择控制论作为新的方向,没有资料,没有实验室,自己推导公式,在理论上进行证明。在没有资料、没有助手、没有实验室的情况下,在被软禁四年后的1954年,钱学森独立完成了科学巨著《工程控制论》的英文版,全书共30多万字。虽然此书是为导弹控制系统研发所写,但是为了避开美国的审查,钱学森将其推广到一般的工程控制系统,从而提升了该书的理论层次和应用范围。在撰写的过程中,他超越了维纳对于控制论偏哲学性的思辨,从实际工程出发,广泛摄取当时已经应用的各种时域、频域分析方法,并对最优化设计提出了设想与推演。《工程控制论》的出版标志其在学术成就上已超越了科学巨匠冯·卡门,成为20世纪众多学科领域的科学巨星。

在毛泽东、周恩来等党和国家领导人的关怀下,经过中国政府的严正交涉和国际友人的热心援助,1955年10月8日,钱学森一家终于回到了祖国的怀抱。回国后钱学森投入建设祖国的伟大事业,为我国火箭、导弹和航天事业的创建与发展作出了卓越贡献,在空气动力学、航空工程、喷气推进、工程控制论、物理力学等技术科学领域作出许多开创性贡献,被誉为“中国航天之父”“中国导弹之父”“火箭之王”“中国自动化控制之父”。美国海军次长丹尼·金布尔曾经说了这样一段世界知名的论断:“钱学森无论走到哪里,都抵得上5个师的兵力。”因钱学森同志的回国效力,中国两弹的成功发射至少向前推进了20年。20世纪50年代的中国一穷二白,科技发展更是严重落后,就是在这样艰苦的条件下,钱学森成立了航空工业委员会,建立了中国科学技术大学,并亲自授课,为祖国培养航空航天人才。在钱学

森同志一心为国的科学家精神和废寝忘食的工作下,我国的国防科研突飞猛进。

知识点自测

本节通过判断题、单选题和多选题来检测读者对本章知识点的掌握程度,为了便于自我检测,本章末尾给出了参考答案。

判断题(判断下列说法是否正确)

- 1-1 开环控制系统能自动修正系统元件参数的变化,以及外来未知干扰对系统精度的影响。
- 1-2 闭环控制系统将输出量通过测量装置反馈至输入端与输入进行比较,利用误差信号对系统进行控制。
- 1-3 自动控制系统可分为开环控制系统和闭环控制系统,其中闭环控制系统比开环控制系统稳定,且不存在振荡问题。
- 1-4 开环控制系统的控制精度取决于系统组成部件和元器件参数的精度与稳定性。
- 1-5 瓦特的飞球调速器被公认为工业过程中使用最早的反馈控制器。
- 1-6 恒值控制系统分析、设计的重点是研究如何克服各种扰动对系统输出的影响。
- 1-7 随动系统分析、设计的重点是研究输出量跟随输入的快速性和准确性。
- 1-8 系统中只要有一处信号出现脉冲信号或数字信号,就可以称为离散系统。
- 1-9 非线性系统是指系统中包含一个或一个以上的具有非线性特性的环节。
- 1-10 非线性系统满足叠加性和齐次性。

单项选择题(每小题列出的选项中只有一个选项是符合题目要求的)

- 1-11 经典控制理论主要以()为基础,研究单输入单输出系统的分析和设计问题。
A. 传递函数 B. 微分方程 C. 状态方程 D. 差分方程
- 1-12 现代控制理论主要以()为基础,研究多输入、多输出、变参数、非线性、高精度等控制系统的分析和设计问题。
A. 状态空间法 B. 时域分析法 C. 频域分析法 D. 根轨迹法
- 1-13 检测装置用来测量(),并将其转换为与给定量相同的物理量。
A. 被控对象的输出 B. 扰动信号
C. 偏差信号 D. 控制信号
- 1-14 火炮控制系统属于()。
A. 恒值控制系统 B. 随动系统
C. 程序控制系统 D. 自动调节系统
- 1-15 连续控制系统是指系统中各部分传输的信号都是()的连续函数。
A. 时间 B. 频率 C. 输入信号 D. 误差信号
- 1-16 负反馈是指将系统的输出量直接或经变换后引入输入端,与输入量相减,利用所得的()去控制被控对象,以达到减小偏差或消除偏差的目的。
A. 偏差量 B. 控制量 C. 被控量 D. 反馈量
- 1-17 随动系统的输入量是预先未知的随时间任意变化的函数,要求输出量以尽可能小的误差跟随()的变化而变化。

A. 输入量 B. 偏差量 C. 控制量 D. 扰动量

多项选择题(每小题列出的选项中有两个或两个以上选项是符合题目要求的)

1-18 优先考虑采用开环控制的场合是()。

- A. 系统的控制精度要求不高
- B. 输出信号很难获取
- C. 设置反馈后系统出现振荡
- D. 系统未设反馈环节
- E. 外界未知扰动对系统的影响不大
- F. 扰动的影响可以预计并加以补偿

1-19 早期的反馈控制应用包括()

- A. Ktesibios 的水钟
- B. 瓦特的飞球调速器
- C. Drebbel 的温度调节器
- D. Papin 的压力调节器

1-20 系统和控制理论发展的早期先驱包括()

- A. J. C. Maxwell(麦克斯韦)
- B. H. Black(布莱克)
- C. H. Nyquist(奈奎斯特)
- D. H. W. Bode(伯德)

1-21 自动控制系统按系统输出信号的变化规律可分为()。

- A. 连续控制系统、离散控制系统
- B. 恒值控制系统、伺服系统、程序控制系统
- C. 自动调节系统、随动系统、程序控制系统
- D. 开环控制系统、闭环控制系统
- E. 线性系统、非线性系统

1-22 自动控制系统按系统传输信号的性质可分为()。

- A. 连续系统
- B. 线性系统
- C. 时变系统
- D. 离散系统
- E. 非线性系统

1-23 自动控制系统按信号的传递路径可分为()。

- A. 闭环控制系统、反馈控制系统
- B. 前馈控制系统、反馈控制系统
- C. 负反馈系统、正反馈系统
- D. 开环控制系统、闭环控制系统
- E. 开环控制系统、反馈控制系统

自测参考答案

判断题: (1) F; (2) T; (3) F; (4) T; (5) T; (6) T; (7) T; (8) T; (9) T; (10) F

单项选择题: (11) A; (12) A; (13) A; (14) B; (15) A; (16) A; (17) A

多项选择题: (18) AEF; (19) ABCD; (20) ABCD; (21) BC; (22) AD; (23) DE

习题

A 基本题

A1-1 什么是反馈? 什么是正反馈和负反馈? 为消除系统误差, 为什么工程上反馈控制必须是负反馈?

A1-2 画出典型控制系统的结构框图, 并叙述各部分的功能。

A1-3 人在日常生活中做的许多事情,比如走路、取物、吃食物、阅读、清扫等,都带有反馈控制作用,试举例,并用框图说明其反馈工作原理。

A1-4 现在家电设备在人们日常生活中已经十分普遍。试从家电中举几个开环和闭环控制系统的例子,说明它们的工作原理,并画出其框图。

A1-5 日常生活与工作中有许多由人参与的控制系统。图 A1-1 是一个液位控制系统,其输出管路是一直开启的,控制目标是保持容器中的液位为恒值,液位由仪表中读出。

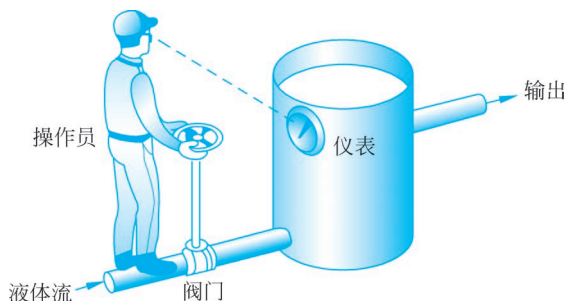


图 A1-1 由人参与的液位控制系统

(1) 说明系统的工作原理,画出其框图,并指出系统的测量装置与执行装置;

(2) 配上适当的元器件,将系统改为自动控制系统,并说明其工作原理,画出系统框图,指出输入量、输出量、被测量和控制器。

A1-6 试绘制图 1-12 随动系统的方框图。如果系统的反馈变成正反馈,会产生什么后果?

A1-7 试绘制图 1-11 离心调速器的方框图,如果将从导向阀通向伺服阀的两根管路对调,将会产生什么后果? 改变飞球的旋转方向,会产生相同的结果吗?

B 实际题

B1-1 图 B1-1 是压力调节器的原理图。通过压力调节器的流体由阀门控制,而阀门是由横隔板来操纵的,作用在其上下两边的压力差使横隔板向上或向下运动,弹簧的预期压力可以通过压力调节螺丝设定。这是一个以输出流体压力为控制对象的自动控制系统,试分析其工作原理,并画出系统的方框图。

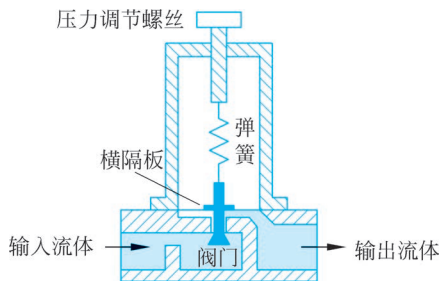


图 B1-1 题 B1-1 图

B1-2 教师的课堂教学过程,是一个让学生根据教学大纲要求掌握知识的过程,实际上是一个使系统误差趋于最小的反馈控制过程。试绘制教学过程的方框图,并对照图 1-7,说明各方框的功能。

B1-3 图 B1-2 是补偿直流电机负载扰动的恒速调节系统。

- (1) 试分析系统补偿直流电机负载扰动的工作原理(当由于电机负载增大使转速降低,系统如何使转速恢复)。
- (2) 为达到补偿目的,电压放大的输出极性应当是怎样的?为什么?

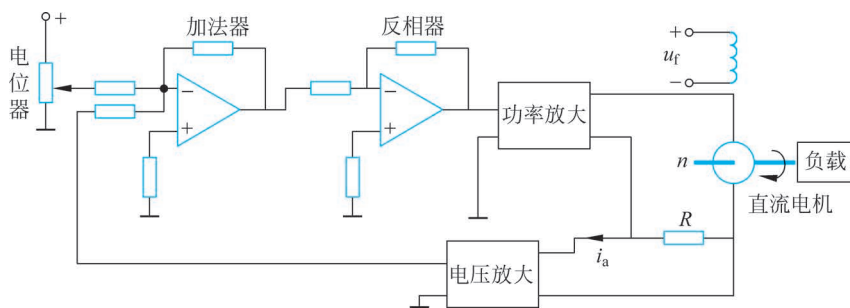


图 B1-2 补偿直流电机负载扰动的恒速调节系统

对控制系统进行分析与设计,首先必须建立系统的数学模型。控制系统的数学模型是它运动特性的数学抽象。在经典控制理论中,控制系统的数学模型通常是指描述系统输出量与输入量之间关系的数学表达式,其最基本的形式是微分方程。广义地说,凡是表示系统各变量之间内在联系的解析式或图形(图模型)都是系统的数学模型。

在静态条件下,描述变量之间关系的代数方程,称为静态模型;描述系统在动态过程中各变量之间关系的微分方程,称为动态模型。自动控制理论主要研究系统的动态特性,所以动态模型是系统最基本的数学模型。

如果线性系统是由定常、集中参数的元件构成的,则其动态模型是常系数微分方程,这类系统称为线性定常系统。若微分方程的系数是时间的函数,此类系统称为线性时变系统。

经典控制理论中系统的数学模型主要有两种形式:数学解析式和图模型。前者又分为三种:微分方程、传递函数和频率特性,它们分别是系统在时域、复域和频域的数学模型,其自变量分别为时间 t 、复数 s 和角频率 ω 。利用时域数学模型分析设计系统的方法属解析法,它可以精确求解系统的行为,物理意义清楚,便于理解;利用复域数学模型、频域数学模型分析设计系统的方法属工程法,它们简单清晰,直观形象,可用曲线表示(根轨迹图和各种频率特性图),十分方便,工程中得到广泛的应用。本书介绍的图模型主要有方框图和信号流程图。

这些模型各有所长,在系统的建模、分析和设计中,应视系统的具体情况选用适当的数学模型。控制系统的建模和求解是经典控制理论的重要内容。

2.1 控制系统的时域数学模型——微分方程

控制系统的微分方程是系统的运动方程,是系统最基本的数学模型,它是通过系统输入量与输出量之间的关系,来描述系统运动规律的数学表达式。在表达式中时间 t 为自变量,所以是系统时域的数学模型。

控制系统的微分方程可以应用物理学的基本定律来推导求取。如在机电系统中可应用牛顿定律、基尔霍夫定律,液压系统则可应用流体力学的有关定律。由于这些定律给出的都是线性关系,都属于线性系统,但实际的物理系统如机电系统、液压系统、气动系统和热力系统等都是非线性的,例如电磁器件的饱和特性、元件中的死区以及某些元件中存在的平方律关系等,求解非线性系统的问题目前还缺乏普遍有效的方法,好在绝大多数非线性系统在一

定范围内呈现线性特性,对于这类系统,可通过非线性系统线性化的方法,将它近似为线性系统,从而使系统的求解问题大大简化。

必须指出,有些元件对任意大小的信号都是非线性的,如开关控制系统只有开和关两种状态,其输入与输出之间就不存在线性关系,对这类系统是不能将它线性化的。

2.1.1 系统的微分方程举例

例 2-1 对图 2-1 所示 RLC 电路,求以电压 $u(t)$ 为输入、 $u_C(t)$ 为输出的微分方程。

解 由基尔霍夫定律:

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} + u_C \quad (2-1)$$

$$i = C \frac{du_C}{dt} \quad (2-2)$$

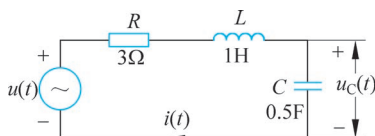


图 2-1 RLC 线性电路

将式(2-2)代入式(2-1)得

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = u \quad (2-3)$$

式(2-3)就是图 2-1 电路的时域数学模型——微分方程。

微分方程的阶次取决于系统中独立储能元件的数量。在例 2-1 中,有两个独立的储能元件——电容和电感,所以微分方程是二阶的。

线性定常系统的微分方程一般具有如下形式:

$$\begin{aligned} & a_n \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dc(t)}{dt} + a_0 c(t) \\ &= b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{dr(t)}{dt} + b_0 r(t) \end{aligned} \quad (2-4)$$

式中, a_i ($i=0,1,\cdots,n$) 与 b_j ($j=0,1,\cdots,m$) 为常数,且 $a_n \neq 0, b_m \neq 0$ 。

一般来说,方程的解精确地描述了系统的行为。然而方程阶次高于 2 次的时候,求解变得很困难。而有时为了了解系统的结构参数变化对系统行为的影响,需进行多次反复的计算,因此利用微分方程直接分析和设计系统往往不太方便。

2.1.2 非线性系统的线性化

考虑一个具有输入(激励) $x(t)$ 和输出(响应) $y(t)$ 的非线性系统,输入与输出之间的关系一般可表示为

$$y = f(x) \quad (2-5)$$

设工作点在 x_0 处,如果系统输入只是在 x_0 附近一个很小的邻域内变动,那么非线性系统就可以近似为一个线性系统。对大多数实际系统来说, $f(x)$ 在 x_0 的一个小区间内是连续可微的,可以在 x_0 附近用泰勒(Taylor)级数展开:

$$\begin{aligned} y(t) &= f(x) \\ &= f(x_0) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} \frac{(x-x_0)}{1!} + \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x=x_0} \frac{(x-x_0)^2}{2!} + \cdots \end{aligned} \quad (2-6)$$

如果系统只是在 x_0 附近的一个很小的邻域内运动,即 $(x-x_0)$ 是很小的数值,

式(2-6)中 $(x-x_0)$ 的高次项可以略去,式(2-6)近似为

$$y(t) = f(x_0) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} (x-x_0) = y_0 + m_0(x-x_0) \quad (2-7)$$

或

$$\Delta y = m_0 \Delta x \quad (2-8)$$

式(2-8)就是 $y(t)=f(x(t))$ 在工作点 x_0 处的线性化方程。式中, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, $m_0 = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0}$ 是 $y(t)=f(x(t))$ 的图像在工作点 (x_0, y_0) 处的斜率, 因此线性化就是用斜率为 m_0 的直线来近似原来的非线性特性。

下面的例子用来说明上述线性化方法在建立时域模型中的应用。

例 2-2 图 2-2 给出一个力学系统, 一个质量为 M 的物体悬挂在非线性弹簧上, 弹簧的形变 y 与弹性力 $f(y)$ 满足 $f(y)=y^2$ 。原先系统平衡, 现受到一个很小的力 F 的作用, 试建立质块 M 的运动方程。

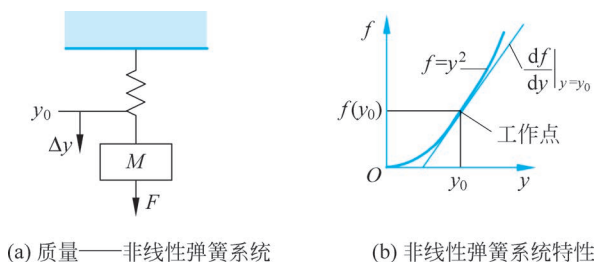


图 2-2 非线性弹簧的线性化

解 设原先平衡时弹簧端点的位移为 y_0 , 那么根据弹簧特性得到 $y_0^2 = Mg$, 其中 g 是重力加速度。在力 F 的作用下, 弹簧形变, 终端位移设为 $y = y_0 + \Delta y$, 那么根据力的平衡得到

$$\begin{aligned} F + Mg &= M \frac{d^2}{dt^2} (y_0 + \Delta y) + f(y_0 + \Delta y) \\ &= M \frac{d^2}{dt^2} (\Delta y) + f(y_0 + \Delta y) \end{aligned} \quad (2-9)$$

由于 $f(y_0 + \Delta y) = (y_0 + \Delta y)^2$ 是 Δy 的非线性函数, 为了得到线性模型, 设 F 充分小, 这时 Δy 也很小, 于是利用线性近似得到 $f(y_0 + \Delta y) = (y_0 + \Delta y)^2 \approx y_0^2 + 2y_0 \Delta y$ 。将 $y_0^2 = Mg$ 代入, 得到线性模型

$$F = M \frac{d^2}{dt^2} (\Delta y) + 2y_0 (\Delta y) = M \frac{d^2}{dt^2} (\Delta y) + m (\Delta y) \quad (2-10)$$

其中, F 是输入, Δy 是输出, y_0 是常数, $m = \left. \frac{d}{dt} f(y) \right|_{y=y_0}$, m 就是 $f(y)$ 在 $(y_0, f(y_0))$ 处的切线的斜率(图 2-2(b)), 为常数。

对式(2-4)直接进行求解往往比较困难, 可以用拉氏变换将复杂的微分方程变换成代数方程, 经简单的代数运算和拉氏反变换, 便可求得系统的输出响应(拉氏变换的运算方法可参考高等数学, 此略)。

在控制理论中,拉氏变换另一个重要的用途是求取线性系统的复域数学模型——传递函数。用输出量的拉氏变换与输入量的拉氏变换的比值来描述输入、输出的关系,这就是传递函数——系统的复域模型。传递函数不仅可以直接看出系统的特性,而且计算简单,为系统模型的图形化处理创造了条件。

2.2 控制系统的复域数学模型——传递函数

2.2.1 传递函数定义

传递函数定义:线性定常系统在零初始条件下,系统输出量的拉氏变换与输入量的拉氏变换之比,记为 $G(s)$ 。

对式(2-4)两边在零初始条件下作拉氏变换得

$$\begin{aligned} & (a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0) C(s) \\ &= (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0) R(s) \end{aligned} \quad (2-11)$$

式中, $\mathcal{L}[r(t)] = R(s)$, $\mathcal{L}[c(t)] = C(s)$ 。对式(2-11)整理可得传递函数。线性定常系统传递函数有三种不同形式的表达式。

(1) 一般表达式:

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \quad (2-12)$$

(2) 时间常数表达式(又叫典型环节表达式)。 s 幂次方为零项的系数为1。

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K \prod_{i=1}^{m_1} (\tau_i s + 1) \prod_{k=1}^{m_2} \left[\left(\frac{s}{\omega_{nk}} \right)^2 + 2 \zeta_k \frac{s}{\omega_{nk}} + 1 \right]}{s^\nu \prod_{j=1}^{n_1} (\tau_j s + 1) \prod_{l=1}^{n_2} \left[\left(\frac{s}{\omega_{nl}} \right)^2 + 2 \zeta_l \frac{s}{\omega_{nl}} + 1 \right]} \quad (2-13)$$

式中, $K = \frac{b_0}{a_0}$ 为系统的稳态增益,简称增益; $m_1 + 2m_2 = m$; $\nu + n_1 + 2n_2 = n$ 。式(2-13)还可表示为

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K \prod_{i=1}^{m_1} (\tau_i s + 1) \prod_{k=1}^{m_2} (T_k^2 s^2 + 2 \zeta_k T_k s + 1)}{s^\nu \prod_{j=1}^{n_1} (\tau_j s + 1) \prod_{l=1}^{n_2} (T_l^2 s^2 + 2 \zeta_l T_l s + 1)} \quad (2-14)$$

式中, $T_k = \frac{1}{\omega_{nk}}$, $T_l = \frac{1}{\omega_{nl}}$ 。

(3) 零、极点表达式:

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_r (s + z_1)(s + z_2) + \cdots + (s + z_m)}{s^\nu (s + p_1)(s + p_2) + \cdots + (s + p_n)} \quad (2-15)$$

式中, $-z_i (i=1, 2, \cdots, m)$ 称为系统的零点, $-p_j (j=1, 2, \cdots, n)$ 称为系统的极点。 $-z_i$ 和 $-p_j$ 可以是复数或实数,复数必定是成对(共轭)出现的。 K_r 为增益因子。 K 与 K_r 有如下关系:

$$K = \frac{K_r \prod_{i=1}^m z_i}{\prod_{j=1}^n p_j} \quad (2-16)$$

例 2-1 中, 对式(2-3)两边进行拉氏变换, 不难求得对应的复域数学模型——传递函数:

$$G(s) = \frac{U_C(s)}{U(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} \quad (2-17)$$

常用时间函数的拉氏变换式见附录 2。

2.2.2 传递函数性质

控制系统的传递函数具有以下性质。

(1) 传递函数只能作为线性定常系统的数学模型。

(2) 从传递函数的定义看, $G(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$, $G(s)$ 是依赖于输入的, 但从式(2-11)可知, 它与具体的输入无关, 而由系统本身的结构参数所唯一确定, 因而有资格作为系统的数学模型。

(3) 大多数工程系统的传递函数都是一个实系数的有理分式, 其分母次数 n 大于或等于分子次数 m 。对于存在时间滞后的系统传递函数中会出现指数项 $e^{-\tau s}$ 。

(4) 由于单位脉冲函数的拉氏变换是 1, 因此传递函数等于单位脉冲响应的拉氏变换, 这个性质为用试验方法求取系统的传递函数提供了基础。但是在实际中更多是用系统的频率响应来求取传递函数的, 我们在第 5 章给予介绍。

2.3 控制系统的频域数学模型——频率特性

在经典控制理论中, 系统的频域数学模型是指系统的频率特性(或频率响应), 控制系统分析和设计的频率特性法(或频率响应法)是一种重要而又实用的方法。

频率特性定义: 继续用 $r(t)$ 和 $c(t)$ 表示系统的输入和输出。因为其中自变量 t 代表时间, 因此它总是非负的。将 $r(t)$ 和 $c(t)$ 的定义域拓展, 成为

$$r_1(t) = \begin{cases} r(t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad \text{和} \quad c_1(t) = \begin{cases} c(t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

如果 $r_1(t)$ 和 $c_1(t)$ 的傅里叶变换都存在, 且记

$$R(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} r_1(t) e^{-j\omega t} dt \quad \text{和} \quad C(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} c_1(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2-18)$$

那么 $C(j\omega)$ 和 $R(j\omega)$ 之比就称为系统的频率特性 $G(j\omega)$, 即

$$G(j\omega) = \frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} \quad (2-19)$$

由于

$$R(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} r_1(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} r(t) e^{-j\omega t} dt \quad \text{和} \quad C(j\omega) = \int_0^{\infty} c(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2-20)$$

因此只要在传递函数 $G(s)$ 中用 $j\omega$ 代替 s 就可以得到系统的频率特性。例如在例 2-1 中, 这

个电路的频率特性 $G(j\omega)$ 就是

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= G(s) \big|_{s=j\omega} = \frac{1}{LC(j\omega)^2 + RC(j\omega) + 1} \\ &= \frac{(1 - LC\omega^2) - jRC\omega}{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2} \end{aligned} \quad (2-21)$$

它与用复阻抗的办法求得的结果完全一致。

频率特性通常是一个复函数,它的自变量为角频率 ω 。频率特性是经典控制理论中重要的数学模型,与传递函数一样,尽管它在定义中应用了输入 $r(t)$,但是它是由系统本身的结构和参数唯一确定的。频率特性有图形表示,对于稳定系统而言,频率特性还有它的物理意义,这些我们将在第 5 章详细讨论。

2.4 典型环节及其传递函数

线性定常系统通常都可看成是由一些典型环节组成的。常见的典型环节主要有以下六种:比例环节、微分环节、积分环节、惯性环节、振荡环节和延迟环节。

2.4.1 比例环节

比例环节的特性是输出量与输入量成比例,它能对信号无失真、无延迟地传递。其运动方程为

$$c(t) = Kr(t) \quad (2-22)$$

式中, $r(t)$ 为输入量, $c(t)$ 为输出量, K 是增益,通常都是有量纲的。

比例环节的传递函数是

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = K \quad (2-23)$$

例 2-3 用电位器将角度(或位移)信号转换为电压信号。图 2-3 所示的环状电位器中,在两个端头上接入电压 u ,电位器中点接地,设 k 为比例系数,输出电压 $u_c(t)$ 与电刷偏离中点的转角 $\theta(t)$ 成正比, θ 取弧度制,则

$$u_c = k\theta = \frac{u}{2\pi}\theta \quad (2-24)$$

传递函数

$$G(s) = \frac{U_c(s)}{\Theta(s)} = k = \frac{u}{2\pi} \quad (2-25)$$

增益 k 的量纲: V/rad。

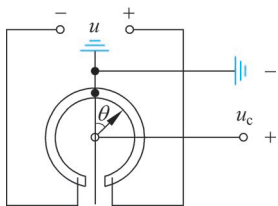


图 2-3 电位器

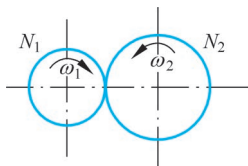


图 2-4 齿轮传动装置

例 2-4 图 2-4 是齿轮传动示意图,用于改变输出轴的转速(通常是减速),假设主动轮的齿数为 N_1 ,转速为 $\omega_1(t)$,从动轮的齿数为 N_2 ,转速为 $\omega_2(t)$ 。齿轮的传动比 i 为

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{N_2}{N_1} \quad (2-26)$$

以 ω_1 为输入, ω_2 为输出时

$$\omega_2 = \frac{\omega_1}{i} \quad (2-27)$$

其传递函数是

$$G(s) = \frac{\Omega_2(s)}{\Omega_1(s)} = \frac{1}{i} \quad (2-28)$$

齿轮传动比 i 是这一环节的增益,它是无量纲的。

还可以举出其他的一些比例环节的例子,如图 2-5 所示。

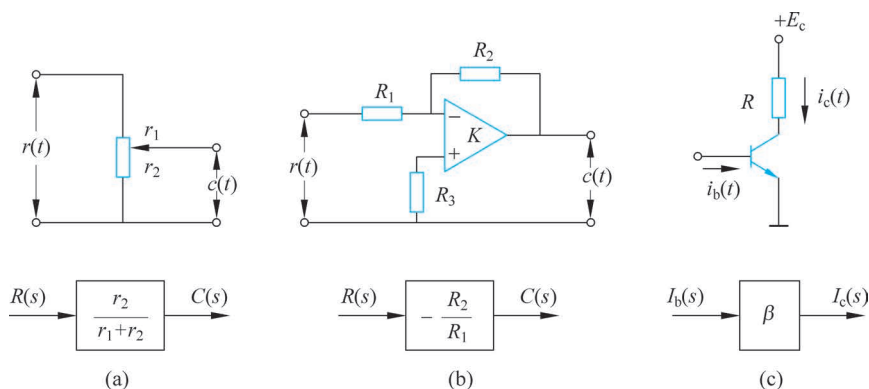


图 2-5 比例环节

2.4.2 微分环节

1. 理想微分环节

理想微分环节的特性是输出信号是输入信号的变化率,其运动方程为

$$c(t) = \frac{dr(t)}{dt} \quad (2-29)$$

传递函数为

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = s \quad (2-30)$$

例 2-5 如图 2-6 所示的电路。当以电压 $u_C(t)$ 为输入,流经电容的电流 $i_C(t)$ 为输出时,有

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} \quad (2-31)$$

假设 $C = 1F$,则得传递函数

$$G(s) = \frac{I_C(s)}{U_C(s)} = s \quad (2-32)$$

例 2-6 如图 2-7 所示。输入为测速发电机 G(与电动机 M 转子同轴)的转角 $\varphi(t)$, 输出为测速发电机的电枢电压 $u_f(t)$, 测速发电机 G 的输出电压与其转子的角速度成正比, 所以

$$u_f(t) = K_f \frac{d\varphi(t)}{dt} \quad (2-33)$$

K_f 为比例系数, 即测速发电机的增益, 则其传递函数为

$$G(s) = K_f s \quad (2-34)$$

它相当于由一个理想微分环节和一个增益为 K_f 的比例环节串联而成。多数由实际的元器件构成的理想微分环节的增益一般不等于 1, 只有在特定的参数下, 如例 2-6 中输入为电压 $u_c(t)$, 输出为电流 $i_c(t)$, 电容容量 $C = 1\text{F}$, 才构成理想微分环节。

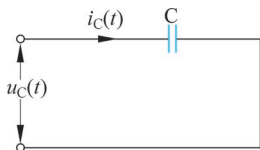


图 2-6 电容回路

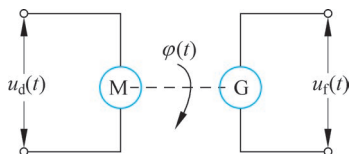


图 2-7 测速发电机组

2. 一阶微分环节

一阶微分环节的特性是其输出信号中不仅包含与输入信号的变化速度成比例的分量, 而且还包含与输入信号成比例的分量, 其运动方程为

$$c(t) = T \frac{dr(t)}{dt} + r(t) \quad (2-35)$$

传递函数为

$$G(s) = Ts + 1 \quad (2-36)$$

可见, 一阶微分环节是由理想微分环节和增益为 1 的比例环节并联而成的。

例 2-7 如图 2-8 所示的电路, 输入信号为电压 $u(t)$, 输出信号为电流 $i(t)$, 则

$$\begin{aligned} i(t) &= i_1(t) + i_2(t) = C \frac{du}{dt} + \frac{u(t)}{R} \\ &= \frac{1}{R} \left(RC \frac{du(t)}{dt} + u(t) \right) \\ &= k \left(T \frac{du(t)}{dt} + u(t) \right) \end{aligned} \quad (2-37)$$

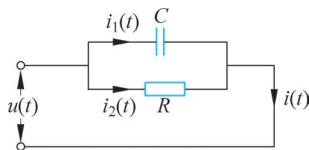


图 2-8 一阶微分电路

式中, $T = RC$, $k = \frac{1}{R}$, 则传递函数为

$$G(s) = \frac{I(s)}{U(s)} = k(Ts + 1) \quad (2-38)$$

可见, 它是一个一阶微分环节和增益为 k 的比例环节串联。

3. 二阶微分环节

二阶微分环节的运动方程为

$$c(t) = T^2 \frac{d^2 r(t)}{dt^2} + 2\zeta T \frac{dr(t)}{dt} + r(t) \quad (2-39)$$

传递函数为

$$G(s) = T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1 \quad (2-40)$$

二阶微分环节的输出信号中不仅包含输入信号的比例和速度的成分,而且包含输入量的加速度成分。一阶微分环节和二阶微分环节在 PID 调节和校正电路中会出现。

2.4.3 积分环节

积分环节的特性是:输出信号与输入信号的积分成正比。当输入信号消失后,其输出端仍保留输入信号消失时的输出,即具有记忆功能。其运动方程为

$$c(t) = \int_0^t r(\tau) d\tau \quad (2-41)$$

传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{s} \quad (2-42)$$

例 2-8 图 2-6 所示的电路中,若以流经电容的电流 $i_C(t)$ 为输入,电压 $u_C(t)$ 为输出,则得运动方程

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_C(\tau) d\tau \quad (2-43)$$

其传递函数

$$G(s) = \frac{U_C(s)}{I_C(s)} = \frac{1/C}{s} \quad (2-44)$$

它是增益为 $\frac{1}{C}$ 的积分环节。 ■

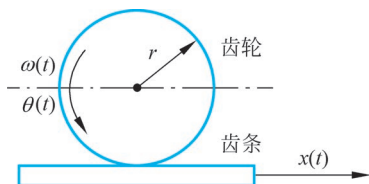


图 2-9 齿轮齿条传动

例 2-9 图 2-9 是齿轮齿条传动示意图,图中 r 为齿轮半径。当以齿轮的角速度 $\omega(t)$ 为输入,齿条的直线位移 $x(t)$ 为输出时,它是积分环节。而当以齿轮的转角 $\theta(t)$ 为输入,齿条的直线位移 $x(t)$ 为输出时,它是比例环节。读者可自行推导它们的传递函数。 ■

图 2-10 给出了其他一些常见的积分环节实例。

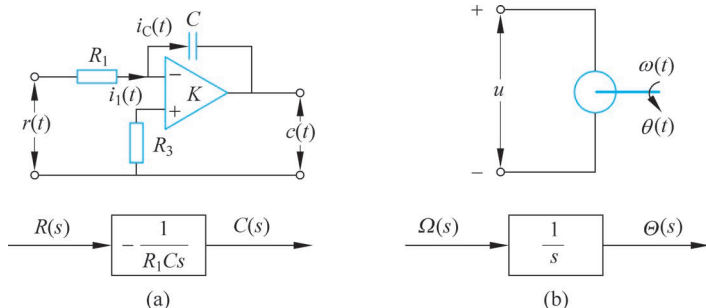


图 2-10 积分环节

2.4.4 惯性环节(非周期环节)

惯性环节含有一个储能元件,由于惯性的作用,输出不能立即复现突变的输入,其运动方程为

$$T \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = r(t) \quad (2-45)$$

传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{Ts + 1} \quad (2-46)$$

式中, T 是惯性环节的时间常数。

例 2-10 如图 2-11 所示的 RC 网络。当输入为 $u_r(t)$, 输出为 $u_c(t)$ 时, 有

$$\begin{aligned} i(t) &= C \frac{du_c(t)}{dt} \\ RC \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) &= u_r(t) \end{aligned} \quad (2-47)$$

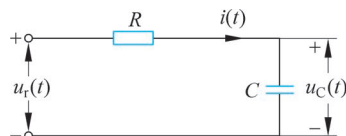


图 2-11 RC 网络

其传递函数为

$$G(s) = \frac{u_c(s)}{u_r(s)} = \frac{1}{Ts + 1} \quad (2-48)$$

式中, $T = RC$ 是网络的时间常数, 它有量纲。

图 2-12 列出了其他一些惯性环节的例子, 图中 M 是质量, J 是转动惯量, B 是黏性摩擦系数, v 是线速度, ω 是角速度, f 是外力, T 是外力矩。

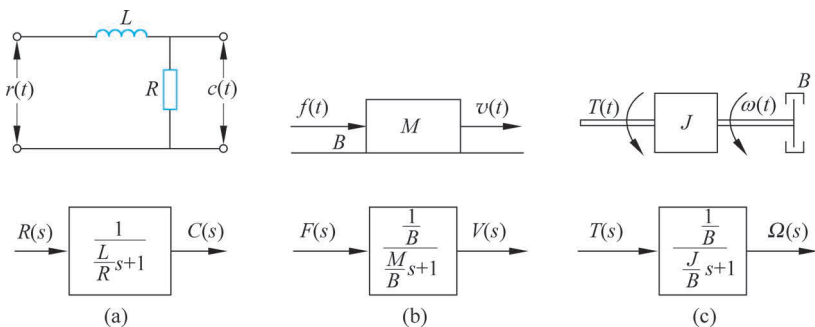


图 2-12 惯性环节举例

2.4.5 振荡环节

振荡环节包含两个储能元件,在动态过程中,两个储能元件的能量会进行相互交换,在一定条件下会出现振荡。其运动方程为

$$T^2 \frac{d^2 c(t)}{dt^2} + 2\zeta T \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = r(t) \quad (2-49)$$

传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (2-50)$$

式中, $\omega_n = \frac{1}{T}$ 称为无阻尼自然振荡角频率; ζ 称为阻尼比, 典型振荡环节的阻尼比 ζ 取值为 $0 \leq \zeta < 1$ 。

例 2-1 所示 RLC 电路就是一个典型的振荡环节, 它的传递函数是

$$G(s) = \frac{U_C(s)}{U(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} \quad (2-51)$$

可根据 RLC 的参数求得式(2-51)中对应的 ζ 和 T 或 ω_n 。

例 2-11 图 2-13 是一种典型的机械平移运动模型, 即质量-弹簧-阻尼系统。图中, M 是质量, k 是理想弹簧的弹性系数, b 是黏性摩擦系数, $f(t)$ 是作用在质量上的外力, $x(t)$ 是位移。假定弹簧是理想弹簧, 由弹簧变形产生的弹力为 $kx(t)$, 方向与位移的方向相反; 阻尼是黏性摩擦, 则摩擦力为 $b\dot{x}(t)$, 方向也与位移的方向相反。由牛顿第二定律可写出质量 M 运动的微分方程

$$M \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + b \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = f(t)$$

其传递函数是

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + bs + k} = \frac{\frac{1}{k}}{\frac{M}{k}s^2 + \frac{b}{k}s + 1} \quad (2-52)$$

这个系统是一个振荡环节。 ■

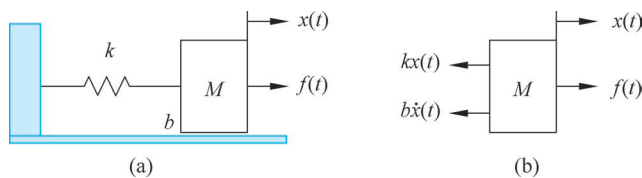


图 2-13 质量-弹簧-阻尼系统

2.4.6 时间延迟环节(时滞环节)

时间延迟环节的输出能准确复现输入, 但时间上存在延迟, 即

$$c(t) = r(t - \tau) \quad (2-53)$$

式中, τ 为延迟时间。当 τ 为常数时, 其传递函数为

$$G(s) = e^{-\tau s} \quad (2-54)$$

例如在化工系统中, 管道传输、温度传输等都是时间延迟环节。

2.5 控制系统的方框图

传递函数的引入, 不仅使系统计算大为简化, 而且为系统数学模型的图形表示——图模型创造了条件。系统的图模型不仅表示系统输入输出之间的关系, 而且可以反映系统的拓

扑结构,所以它在控制理论中有着重要的作用。

本书介绍两种系统的图模型:方框图和信号流图。

2.5.1 系统方框图

控制系统方框图是系统各环节特性(结构、参数)和信号流向的图示法。例如传递函数 $G(s)$ 的方框图如图 2-14 所示。

一个完整的系统方框图常由多个元素组成。

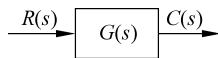


图 2-14 传递函数 $G(s)$ 的方框图

1. 控制系统方框图的元素

- (1) 方框: 表示从输入到输出间的传递函数。
- (2) 信号线: 带有箭头的直线, 表示信号及其传递方向。图 2-14 包含了方框和信号线。
- (3) 比较点: 对两个或两个以上的信号进行叠加的环节, 如图 2-15(a) 所示。进行叠加的信号必须具有相同的量纲。
- (4) 分支点: 表示信号引出或测量的位置, 如图 2-15(b) 所示。同一位置引出的信号的性质、大小是相同的。

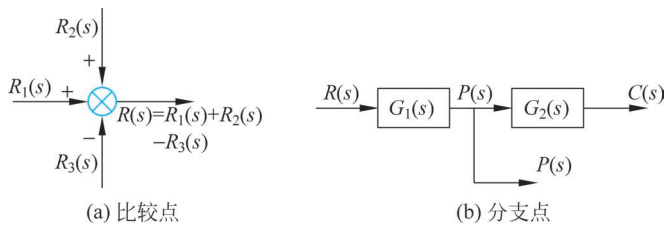


图 2-15 方框图的元素

2. 系统方框图举例

例 2-12 图 2-16(a) 所示二级阻容网络, 按基尔霍夫定律可以画出 R_1 、 R_2 、 C_1 和 C_2 各支路的方框图(图 2-16(b))。然后将变量 $i_1(t)$ 、 $i_2(t)$ 、 $u_1(t)$ 和 $c(t)$ 的信号线连在一起, 便获得如图 2-17 所示的网络方框图。

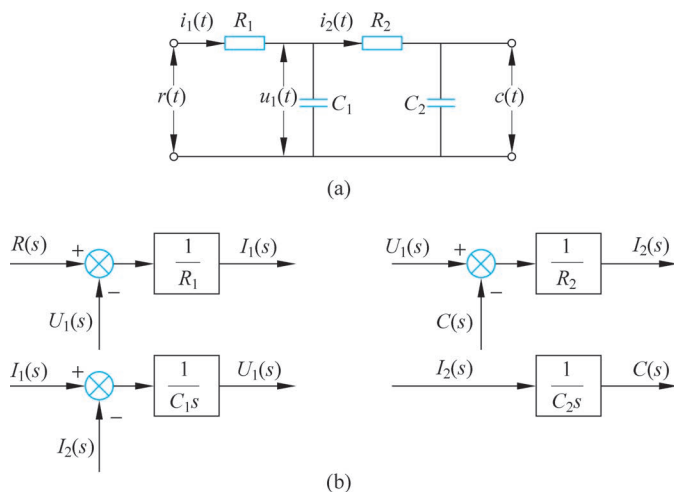


图 2-16 二级阻容网络

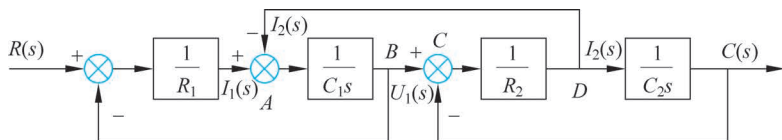


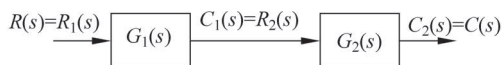
图 2-17 二级阻容网络方框图

2.5.2 方框图的基本运算法则

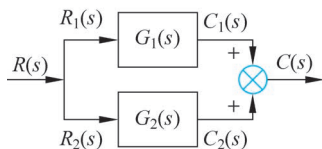
1. 串联

图 2-18(a)为方框图的串联,此时 $R_1(s)=R(s)$, $C_1(s)=R_2(s)$, $C_2(s)=C(s)$ 以及

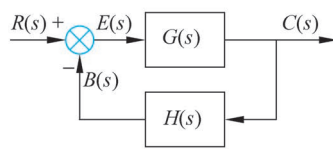
$$G_1(s) = \frac{C_1(s)}{R_1(s)}, \quad G_2(s) = \frac{C_2(s)}{R_2(s)}$$



(a) 串联



(b) 并联



(c) 反馈

图 2-18 方框图的连接

可得串联的传递函数为

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{C_2(s)}{R_2(s)} = \frac{C_1(s)}{R_1(s)} \times \frac{C_2(s)}{R_2(s)} = G_1(s)G_2(s) \quad (2-55)$$

推广到一般情况: n 个环节串联,其传递函数分别为 $G_1(s), G_2(s), \dots, G_n(s)$,则等效传递函数为

$$G(s) = G_1(s)G_2(s) \cdots G_n(s)$$

结论: 多个环节串联后总的传递函数等于每个环节传递函数的乘积。

这里需要注意的是: 此原则在各环节之间不存在负载效应的前提下才成立,否则环节之间应引入隔离级,以切断环节间的相互影响。

2. 并联

图 2-18(b)是方框图的并联,有 $R(s)=R_1(s)=R_2(s)$ 以及 $C(s)=C_1(s)+C_2(s)$,则并联的传递函数为

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{C_1(s) + C_2(s)}{R(s)} = G_1(s) + G_2(s) \quad (2-56)$$

推广到一般情况: 传递函数分别为 $G_1(s), G_2(s), \dots, G_n(s)$ 的 n 个环节并联后的等效传递函数为

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s) + \cdots + G_n(s)$$

结论: 多个环节并联后的传递函数等于所有并联环节传递函数的代数和。

3. 反馈

图 2-18(c)是方框图的反馈连接,此时

$$C(s) = G(s)E(s) = G(s)(R(s) - B(s)) = G(s)(R(s) - H(s)C(s))$$

经整理得

$$W(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (2-57)$$

这里用 $W(s)$ 表示闭环的传递函数。

结论：具有负反馈结构环节传递函数等于前向通道的传递函数除以 1 加(若正反馈为减)前向通道与反馈通道传递函数的乘积。

2.5.3 系统常用的传递函数

控制系统的方框图往往是比较复杂的,但总可以简化为图 2-19 的形式。下面介绍控制系统方框图的一些基本术语和常用的几种传递函数。

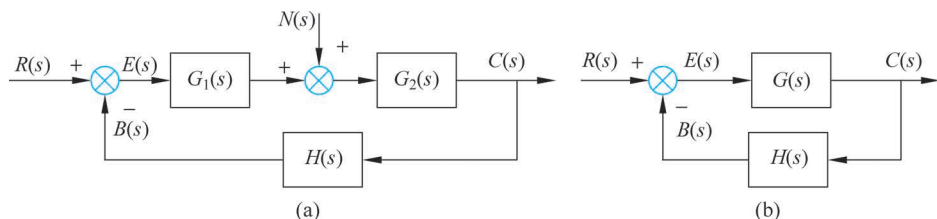


图 2-19 控制系统方框图基本形式

图 2-19 中 $E(s)$ 为系统误差。图 2-19(a) 中, 当 $R(s) \neq 0, N(s) = 0$ 时, 有

(1) 前向通路传递函数: 断开反馈后, 输出 $C(s)$ 与输入 $R(s)$ 之比, 或 $C(s)$ 与系统误差 $E(s)$ 之比, 即

$$\frac{C(s)}{R(s)} = G_1(s)G_2(s) = G(s) \quad (2-58)$$

(2) 反馈通路传递函数: 反馈信号 $B(s)$ 与输出信号 $C(s)$ 之比, 即

$$H(s) = \frac{B(s)}{C(s)} \quad (2-59)$$

(3) 开环传递函数: 断开反馈后, 反馈信号 $B(s)$ 与输入信号 $R(s)$ 之比, 或 $B(s)$ 与 $E(s)$ 之比, 即

$$\frac{B(s)}{R(s)} = G_1(s)G_2(s)H(s) = G(s)H(s) \quad (2-60)$$

(4) 闭环传递函数: 输出信号 $C(s)$ 与输入信号 $R(s)$ 之比, 即

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (2-61)$$

(5) 误差传递函数: 误差信号 $E(s)$ 与输入信号 $R(s)$ 之比, 即

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} = \frac{1}{1 + G(s)H(s)} \quad (2-62)$$

当 $R(s) = 0, N(s) \neq 0$ 时, 有

(6) 扰动传递函数: 输出信号 $C(s)$ 与扰动信号 $N(s)$ 之比, 即

$$\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (2-63)$$

(7) 误差对扰动传递函数：误差信号 $E(s)$ 与扰动信号 $N(s)$ 之比，即

$$\frac{E(s)}{N(s)} = \frac{-G_2(s)H(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)} = \frac{-G_2(s)H(s)}{1+G(s)H(s)} \tag{2-64}$$

当 $R(s) \neq 0, N(s) \neq 0$ 时，根据线性系统的叠加原理，系统的输出及误差可表示为

$$C(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}R(s) + \frac{G_2(s)}{1+G(s)H(s)}N(s)$$
$$E(s) = E_R(s) + E_N(s) = \frac{1}{1+G(s)H(s)}R(s) - \frac{G_2(s)H(s)}{1+G(s)H(s)}N(s)$$

这时不用传递函数表示。

2.5.4 方框图的简化法则

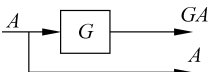
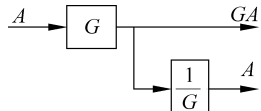
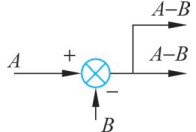
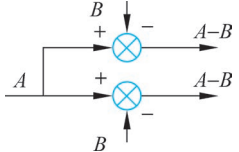
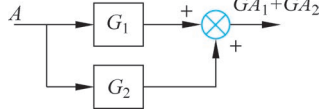
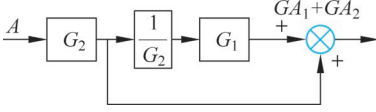
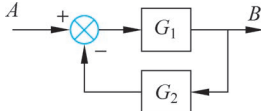
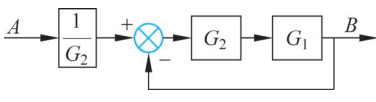
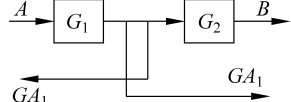
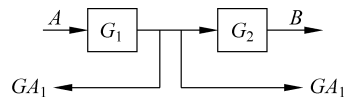
为了简化系统的计算，必须将复杂的系统简化为图 2-19 的基本形式。简化应遵循的原则是保持简化前后系统的传递函数不变。

表 2-1 列出了常用的方框图简化法则。

表 2-1 常用的方框图简化法则

变 换		原 方 框 图	等 效 方 框 图
1	比较点交换		
2	比较点分解		
3	比较点前移		
4	比较点后移		
5	分支点前移		

续表

变 换	原 方 框 图	等效方框图
6 分支点后移		
7 比较点与分支点交换		
8 化成单位并联		
9 化成单位反馈		
10 分支点交换		

例 2-13 将例 2-12 的方框图(图 2-17)简化。

- (1) 比较点 A 前移,分支点 D 后移(图 2-20(a));
- (2) 消除局部反馈回路(图 2-20(b));
- (3) 系统的传递函数为

$$\begin{aligned}
 G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{\frac{1}{R_1 C_1 s + 1} \times \frac{1}{R_2 C_2 s + 1}}{1 + \frac{1}{R_1 C_1 s + 1} \times \frac{1}{R_2 C_2 s + 1} \times R_1 C_2 s} \\
 &= \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2)s + 1} \quad (2-65)
 \end{aligned}$$

前面介绍了方框图的一些常用变换法则,利用这些基本法则,即使很复杂的系统,也能将其化简成所需要的形式。必须指出,方框图化简方法不是唯一的,人们应充分地利用各种变换技巧,优化变换路径,以达到省力省时的目的。一般来说,方框图的化简中应尽量避免出现比较点与分支点的交换,因为它的使用常常会使化简过程中的回路(或支路)增加,造成更复杂的情况。例如在图 2-17 中 D 点应该朝 C(s)方向移,而不要朝 C 点移,同样 A 点应该朝 R(s)方向移而不要朝 B 点移动。

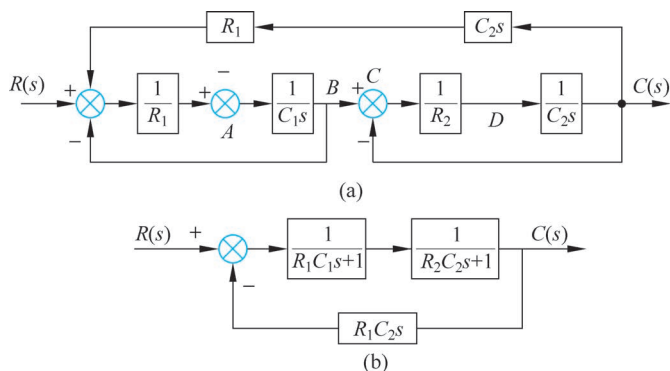


图 2-20 方框图简化

2.6 信号流图

系统方框图可以直观地表示系统输出与输入之间关联复杂的系统,但方框图简化过程有时很复杂。另一种常用的系统图模型是信号流图。信号流图是由梅逊(Mason)提出的,原意是用来解线性方程组的。其最大的优点是可以利用梅逊增益公式直接计算系统的传递函数,而无须复杂的化简过程。

信号流图是线性代数方程组的一种图形表示。它根据一定的规则,可直接求出对应方程组的解。式(2-66)为一线性方程组,其信号流图的表示形式如图 2-21 所示。

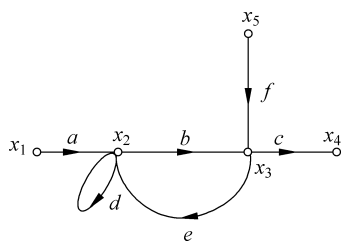


图 2-21 式(2-66)的信号流图

$$\begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2 = ax_1 + dx_2 + ex_3 \\ x_3 = bx_2 + fx_5 \\ x_4 = cx_3 \\ x_5 = x_5 \end{cases} \quad (2-66)$$

2.6.1 几个定义

与方框图不同,在信号流图中,节点表示信号,箭线表示信号流向,箭线上的数值表示增益(传递函数)。根据图 2-21 解释信号流图的几个定义。

输入节点(或源节点): 只有输出支路的节点,如 x_1, x_5 。

输出节点(或阱节点): 只有输入支路的节点,如 x_4 。

混合节点: 既有输出支路,又有输入支路的节点,如 x_2, x_3 。

传输: 两个节点之间的增益,如 x_1 与 x_2 之间的增益为 a ,则传输为 a 。

前向通路: 信号由输入节点向输出节点传递时,每个节点只通过一次的通路称为前向通路。前向通路上各支路增益的乘积称为前向通路总增益。如: 前向通路 $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4$,其总增益 abc 。另一条前向通路 $x_5 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4$,其总增益为 fc 。

回路：通路的起点也是通路的终点，并且与其他节点相交不多于一次的闭合通路叫简单回路，简称回路。回路中，所有支路增益的乘积叫回路增益。如图 2-21 中有两个回路，一个是 $x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_2$ ，其回路增益为 be ，另一个是 $x_2 \rightarrow x_2$ ，又叫自回路，其回路增益为 d 。

不接触回路：相互间没有公共节点的回路。信号流图中，可以有多个互不接触回路。在图 2-21 中没有互不接触回路。

2.6.2 信号流图的性质及运算法则

1. 信号流图的性质

- (1) 节点总是把所有的输入支路信号叠加后再传送到它的每一个输出支路。
- (2) 混合节点是既有输入又有输出的节点。可以通过增加一个增益为 1 的支路将其变为输出节点，且两节点的变量相同。

2. 信号流图的代数运算法则

与方框图类似，信号流图可以通过简化使计算便捷。图 2-22 给出了信号流图的运算法则。下面仅对图 2-22(d) 进行推导，其余的留给读者证明。因为

$$x_2 = ax_1 + cx_3, \quad x_3 = bx_2$$

于是得

$$x_3 = \frac{ab}{1-bc}x_1$$

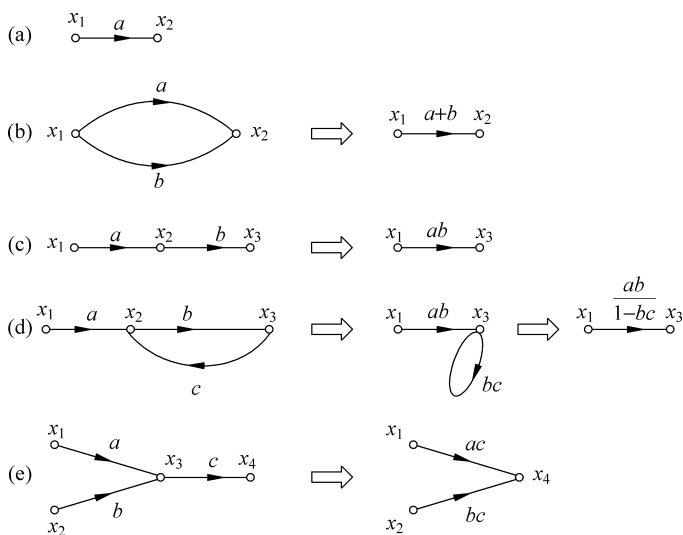


图 2-22 信号流图的运算法则

2.6.3 信号流图与方框图之间等效关系

表 2-2 列出了具有代表性的几种简单方框图以及它们对应的信号流图。据此可以将系统方框图变换为系统信号流图。

表 2-2 方框图与对应的信号流图

序 号	方 框 图	信 号 流 图
1		
2		
3		
4		
5		

例 2-14 画出例 2-12 二级阻容网络的信号流图。

对照图 2-17 及表 2-2,可以画出例 2-12 网络的信号流图(图 2-23)。

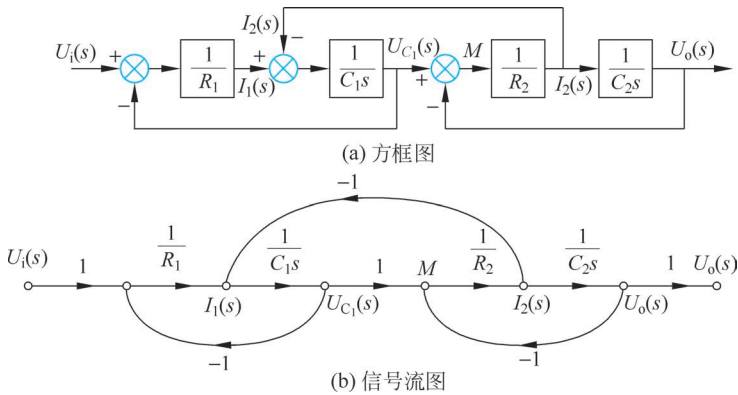


图 2-23 二级阻容网络

注意：由例 2-14 可看出，将方框图改成信号流图的关键是设置一些信号。为了方便转换，应该在分支之前和汇合之后设置信号。例如，图 2-23 中的 $\frac{1}{R_2}$ 之前要设个信号 M 。

2.6.4 梅森公式

梅森(Mason)公式用来计算输入与输出两个节点间的总增益 P ，即

$$P = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^l P_i \Delta_i \quad (2-67)$$

式中， P_i 为第 i 条前向通路的增益； l 为前向通路数； Δ_i 为除去第 i 条前向通路后的 Δ 值。

$$\Delta = 1 - \sum_m L_{m1} + \sum_m L_{m2} - \sum_m L_{m3} + \cdots \quad (2-68)$$

式(2-68)为系统特征多项式， $\Delta=0$ 是系统的特征方程。

L_{m1} 为各个回路的增益。在图 2-23 中有三个回路，它们的增益分别为 $-\frac{1}{R_1 C_1 s}$ 、 $-\frac{1}{R_2 C_2 s}$ 、 $-\frac{1}{R_2 C_1 s}$ 。

L_{m2} 为任意两个互不接触回路增益之积。图 2-23 中有一组互不接触的回路，即

$$L_{12} = \left(-\frac{1}{R_1 C_1 s} \right) \times \left(-\frac{1}{R_2 C_2 s} \right)$$

$L_{mn} (n \geq 3)$ 为任意 n 个互不接触回路增益之积。在图 2-23 中不存在三个以上互不接触的回路，即

$$L_{mn} (n \geq 3) = 0$$

注意：同一个系统，不管输入节点和输出节点如何选择，其特征多项式 Δ 是唯一的。

例 2-15 对图 2-24 所示系统，利用梅森公式，求传递函数 $\frac{C(s)}{R(s)}$ 和 $\frac{E(s)}{R(s)}$ 。

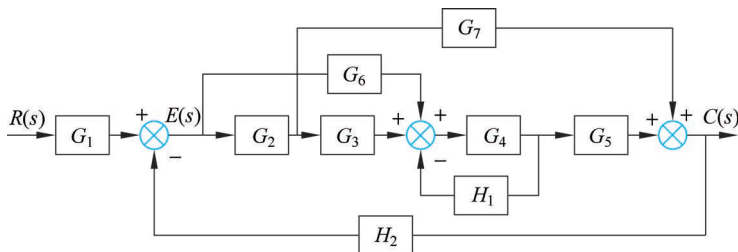


图 2-24 例 2-15 系统的方框图

解 画出该系统的信号流图(图 2-25)。

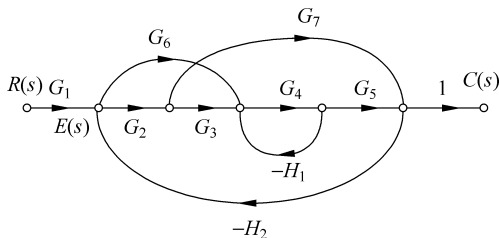


图 2-25 例 2-15 系统的信号流图

该系统中有 4 个回路:

$L_1 = -G_4 H_1$, $L_2 = -G_2 G_7 H_2$, $L_3 = -G_4 G_5 G_6 H_2$, $L_4 = -G_2 G_3 G_4 G_5 H_2$
只有一组两个互不接触的回路 $L_1 L_2$ 。所以,本系统的特征多项式为

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + L_1 L_2$$

对于输入为 $R(s)$ 输出为 $C(s)$ 来说,系统有三个前向通路:

$$P_1 = G_1 G_2 G_3 G_4 G_5, \quad \Delta_1 = 1$$

$$P_2 = G_1 G_6 G_4 G_5, \quad \Delta_2 = 1$$

$$P_3 = G_1 G_2 G_7, \quad \Delta_3 = 1 - L_1$$

于是,系统的闭环系统传递函数 $C(s)/R(s)$ 为

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{\Delta} (P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2 + P_3 \Delta_3) \\ &= \frac{G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 + G_1 G_6 G_4 G_5 + G_1 G_2 G_7 (1 + G_4 H_1)}{1 + G_4 H_1 + G_2 G_7 H_2 + G_4 G_5 G_6 H_2 + G_2 G_3 G_4 G_5 H_2 + G_4 H_1 G_2 G_7 H_2} \end{aligned}$$

对于输入为 $R(s)$ 输出为 $E(s)$ 来说,系统只有一个前向通路

$$P'_1 = G_1, \quad \Delta'_1 = 1 - L_1$$

于是,系统的误差传递函数 $E(s)/R(s)$ 为

$$\begin{aligned} G'(s) &= \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{\Delta} P'_1 \Delta'_1 \\ &= \frac{G_1 (1 + G_4 H_1)}{1 + G_4 H_1 + G_2 G_7 H_2 + G_4 G_5 G_6 H_2 + G_2 G_3 G_4 G_5 H_2 + G_4 H_1 G_2 G_7 H_2} \end{aligned}$$

例 2-16 求例 2-14 的传递函数。

解 这个系统有三个回路 L_1 、 L_2 和 L_3 , 有一组两个互不接触回路 $L_1 L_2$:

$$L_1 = -\frac{1}{R_1 C_1 s}, \quad L_2 = -\frac{1}{R_2 C_2 s}, \quad L_3 = -\frac{1}{R_2 C_1 s}, \quad L_1 L_2 = \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2}$$

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) + L_1 L_2 = 1 + \frac{1}{R_1 C_1 s} + \frac{1}{R_2 C_2 s} + \frac{1}{R_2 C_1 s} + \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2}$$

前向通路只有一条:

$$P_1 = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2}, \quad \Delta_1 = 1$$

所以,化简后求得

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2)s + 1}$$

2.7 物理元件和系统的数学模型

本节主要介绍工程控制中常用的一些元件和系统的数学模型。由于实际系统形式多样,人们难以对其逐一进行研究,而是先将实际工程中常用的典型元件和系统模型化。所谓

模型化是将实际系统的物理本质用一种标准图形(如电路图、机械系统图、机电系统原理图等)表示,以便于建立运动方程。本节选择了一些具有代表性的典型系统,包括电气系统、机械系统、液位系统、热力系统、机电系统等进行分析和建模研究。系统的数学模型主要应用物理学中的基本定律,建立实际系统的运动方程。

2.7.1 机械系统

机械系统主要有两种运动形式——平移运动和旋转运动,它们遵循牛顿定律。在平移运动中,作用在质点(运动物体)上外力的代数和为零,即作用在质点上的外力是平衡的。在旋转运动中,作用在旋转运动物体上力矩的代数和为零,即作用在物体上的外力矩是平衡的。例 2-11 分析了平移运动。下面举一个旋转运动的例子。

例 2-17 倒立摆系统。

图 2-26 是倒立摆系统,它可以看成是火箭起飞时的姿态控制问题的抽象,其目的是要使火箭保持在垂直的状态。倒立摆的垂直(摆直立向上)位置是系统的平衡点,它是不稳定的。倒立摆的控制问题就是如何通过小车的运动保持倒立摆的直立状态。为了讨论问题的方便,我们只考虑二维问题,即认为小车与倒立摆在一个竖直平面内运动。假定小车的质量为 M ,倒立摆的质量 m 全部集中在摆的顶端,摆长为 l , $u(t)$ 是作用在小车上的力, $z(t)$ 是小车的位移,摆偏离垂直位置的角度为 $\theta(t)$ 。同时忽略小车与地面的摩擦。

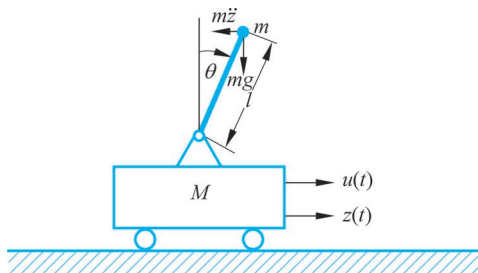


图 2-26 倒立摆系统

小车沿水平方向的力平衡方程如下:

$$M \frac{d^2 z}{dt^2} + m \frac{d^2}{dt^2} (z + l \sin \theta) = u \quad (2-69)$$

摆绕轴旋转运动的力矩平衡方程为

$$m l \frac{d^2 z}{dt^2} \cos \theta + m l^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = m g l \sin \theta \quad (2-70)$$

它们都是非线性方程。考虑在所研究的情况下, $\theta \approx 0$, 有 $\sin \theta \approx \theta$, $\cos \theta \approx 1$, 故上两式可线性化为

$$(M + m) \frac{d^2 z}{dt^2} + m l \frac{d^2 \theta}{dt^2} = u \quad (2-71)$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + l \frac{d^2 \theta}{dt^2} = g \theta \quad (2-72)$$

从上两式消去 z , 可求得

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} - \frac{(m+M)g}{Ml}\theta = -\frac{1}{Ml}u \quad (2-73)$$

以 u 为输入, θ 为输出的传递函数为

$$G(s) = \frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{-\frac{1}{Ml}}{s^2 - \frac{(m+M)g}{Ml}} \quad (2-74)$$

2.7.2 电气系统

电气系统包括电路系统和控制电机等。分析电气系统主要应用基尔霍夫电流定律和电压定律。基尔霍夫电流定律是指:流入和流出电路某个节点的电流代数和等于零,即节点的电流是平衡的。基尔霍夫电压定律是指:在任意瞬间,沿电路中任意回路的电压的代数和等于零,即回路的电压是平衡的。

例 2-18 如图 2-27 所示,在两个 RC 无源电路之间嵌入一个隔离放大器,假定隔离放大器的输入阻抗为无穷大,而输出阻抗为零,这样就保证前一个电路的输出不会受后一电路的影响,后一电路的输入也不会由于前级的阻抗(不为零)而变化。

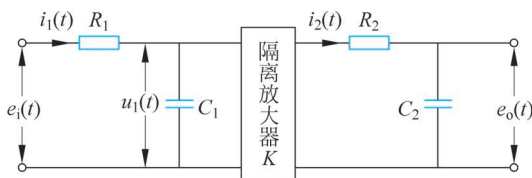


图 2-27 带隔离放大器的 RC 无源电路

两个 RC 电路的传递函数是

$$G_1(s) = \frac{1}{R_1 C_1 s + 1} \quad \text{和} \quad G_2(s) = \frac{1}{R_2 C_2 s + 1}$$

假设放大器的增益为 K , 则全电路的传递函数为

$$G(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{K}{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1)} \quad (2-75)$$

一个 RC 无源网络是一个惯性环节,两个 RC 无源网络是振荡环节(读者可自行证明),本例中两个 RC 无源电路之间嵌入一个隔离放大器,就是两个惯性环节的串联。

例 2-19 不同控制方式直流电动机的传递函数。

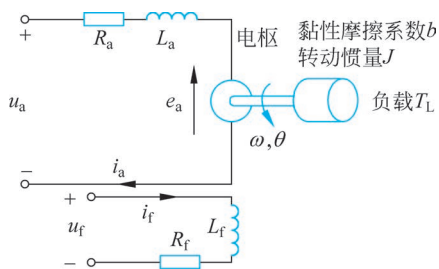


图 2-28 直流电动机控制电路

1. 电枢控制直流电动机

如图 2-28 所示的直流电动机,在电枢控制时,励磁电压 u_f 恒定,通过调节电枢回路的电压实现对电机速度的调节。假设此时气隙磁通等于常数,电机的电磁转矩 T_i 与电枢电流 i_a 成正比:

$$T_i = K_t i_a \quad (2-76)$$

式中, K_t 为电机的转矩常数。电枢电路电压平衡方程为

$$u_a = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + e_a \quad (2-77)$$

式中, R_a 和 L_a 分别是电枢电路的电阻和电感。电机的反电势 e_a 与电机的角速度 ω 成正比:

$$e_a = K_e \omega \quad (2-78)$$

式中, K_e 为电机的反电势常数。电机轴上力矩平衡方程为

$$T_i = J \frac{d\omega}{dt} + b\omega + T_L \quad (2-79)$$

式中, J 为电机轴上总的等效转动惯量, b 为电机轴上的等效黏性摩擦系数, T_L 是负载力矩。若以 u_a 为输入电压, 则 ω 为输出转速。在以上四个公式中, 消去中间变量 i_a 、 e_a 、 T_i , 并假定 $T_L = 0$, 可得如下微分方程:

$$L_a J \frac{d^2 \omega}{dt^2} + (R_a J + b L_a) \frac{d\omega}{dt} + (K_e K_t + R_a b) \omega = K_t u_a \quad (2-80)$$

系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{\Omega(s)}{U_a(s)} = \frac{K_t}{L_a J s^2 + (R_a J + b L_a) s + (K_e K_t + R_a b)} \quad (2-81)$$

此时电枢控制的直流电动机可看成一个振荡环节。通常电枢回路中的电感 L_a 较小, 若忽略其影响, 式(2-81)可近似表示为一阶惯性环节

$$G(s) = \frac{\Omega(s)}{U_a(s)} = \frac{K_m}{T_m s + 1} \quad (2-82)$$

式中, $K_m = K_t / (K_e K_t + R_a b)$ 为电动机增益常数; $T_m = R_a J / (K_e K_t + R_a b)$ 为电动机时间常数。

如果以转角 θ 为输出, 则其运动方程可表达为积分环节和一阶惯性环节的串联:

$$\frac{\Theta(s)}{U_a(s)} = \frac{K_m}{s(T_m s + 1)} \quad (2-83)$$

2. 励磁控制直流电动机

继续讨论图 2-28 所示的直流电动机, 在励磁控制时, 电枢回路电压 u_a 恒定, 通过调节励磁电流的大小(即改变励磁回路的电压 u_f)实现对电机速度的调节。假设: 电枢电流 $i_a =$ 常数, 气隙磁通与励磁电流 i_f 成正比, 电机的电磁力矩 T_f 等于

$$T_f = K_f i_f \quad (2-84)$$

K_f 为比例系数。励磁回路的电压平衡方程为

$$u_f = R_f i_f + L_f \frac{di_f}{dt} \quad (2-85)$$

u_f 、 L_f 分别为励磁回路的电压和电感。电动机力矩平衡方程

$$T_f = J \frac{d\omega}{dt} + b\omega + T_L \quad (2-86)$$

式中, ω 为输出转速。消去以上三个公式的中间变量 i_f 、 T_f , 并假定负载力矩 $T_L = 0$, 则电机的微分方程变成

$$L_f J \frac{d^2 \omega}{dt^2} + (R_f J + b L_f) \frac{d\omega}{dt} + R_f b \omega = K_f u_f \quad (2-87)$$

$$L_f J \frac{d^3 \theta}{dt^3} + (R_f J + b L_f) \frac{d^2 \theta}{dt^2} + R_f b \frac{d\theta}{dt} = K_f u_f \quad (2-88)$$

它们的传递函数分别是

$$G(s) = \frac{\Omega(s)}{U_f(s)} = \frac{K_f}{L_f J s^2 + (R_f J + b L_f) s + R_f b} \quad (2-89)$$

$$G(s) = \frac{\Theta(s)}{U_f(s)} = \frac{K_f}{s(L_f J s^2 + (R_f J + b L_f) s + R_f b)} \quad (2-90)$$

此时励磁控制的直流电动机是一个振荡环节。因为直流电动机不论电枢控制或励磁控制,都存在电感 L 和转动惯量 J 这两个储能元件,所以是振荡环节。■

2.7.3 热力系统

将热量从一种物质传递到另一种物质的系统叫热力系统。

例 2-20 图 2-29(a) 是一个简单的热力系统。从入口端输入温度为 $\bar{\Theta}_i$ 的液体,在容器内经加热器加热,在出口端输出温度为 $\bar{\Theta}_o$ 的液体。 $\bar{H}$ 是加热器输入的常值热流量。搅拌器是使容器中液体的温度均匀。

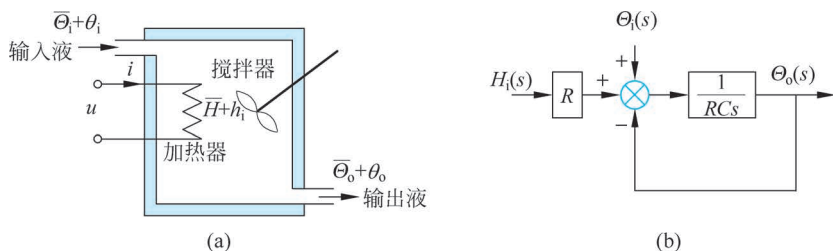


图 2-29 热力系统及其方框图

表征热力系统特征的主要参数是热阻和热容。

热阻: 在热量传递过程中,热阻 R 定义为

$$R = \frac{\text{温度差的变化量}(\text{℃})}{\text{热流量的变化量}(\text{kJ/s})} = \frac{d\theta}{dq} \quad (2-91)$$

式中, θ 是传递过程的温度(℃), q 是热流量(kJ/s)。

热容: 热容 C 定义为

$$C = \frac{\text{被储存热量的变化量}(\text{kJ})}{\text{温度的变化量}(\text{℃})} = m c \quad (2-92)$$

式中, m 是传热物质的质量(kg), c 是物质的比热(kJ/kg · K)。

通常热力系统是分布参数系统,热阻、热容均不是集中参数。热力系统传递热量的方式有三种,即传导、对流和辐射,对于大多数过程控制系统,热力过程中辐射传递较小,并且传导和对流多数是有延迟的。简单起见,假定所讨论的热力系统是集中参数,且不带延迟。

下面,我们来推导图 2-29 热力系统的微分方程。

假设: 容器处于完全绝热状态,不向外界散热,容器内液体混合均匀,各点温度相同。

$\bar{\Theta}_i$ —— 流入容器液体的设定温度(℃);

$\bar{\Theta}_o$ —— 流出容器液体的设定温度(℃);

M ——容器内物质的质量(kg);

$\bar{H}$ ——稳态输入热流量(kJ/s);

G ——稳态液体流量(kg/s);

R 、 C 、 c 分别是液体的热阻、热容和比热。

现设输入液体的温度保持不变,输入系统的热流量(由加热器提供)突然变到 $\bar{H}+h_i$,使输出的热流量逐渐变到 $\bar{H}+h_o$,输出温度也将变到 $\bar{\theta}_o+\theta_o$,则有以下关系:

$$h_i = Gc\theta_i \quad (2-93)$$

$$h_o = Gc\theta_o \quad (2-94)$$

$$R = \frac{\theta_o}{h_o} = \frac{1}{Gc} \quad (2-95)$$

$$C = Mc \quad (2-96)$$

根据热流量平衡方程得到

$$C \frac{d\theta_o}{dt} = h_i - h_o \quad (2-97)$$

将上式两边乘以 R , 及 $Rh_o = \theta_o$, 得到

$$RC \frac{d\theta_o}{dt} + \theta_o = R h_i \quad (2-98)$$

则输出温度增量 θ_o 与输入热流量增量 h_i 之间的传递函数为

$$\frac{\Theta_o(s)}{H_i(s)} = \frac{R}{RCs + 1} \quad (2-99)$$

同样,如果输入的热流量 $\bar{H}$ 和液体流量 G 保持不变,而输入液体的温度由 $\bar{\theta}_i$ 变到 $\bar{\theta}_i + \theta_i$,则输出的热流量将从 $\bar{H}$ 变到 $\bar{H} + h_o$,输出温度也将从 $\bar{\theta}_o$ 变到 $\bar{\theta}_o + \theta_o$,考虑到 $h_i = Gc\theta_i$,则式(2-97)可写为

$$C \frac{d\theta_o}{dt} = Gc\theta_i - h_o \quad (2-100)$$

将式(2-95)、式(2-96)及式(2-97)代入上式得

$$RC \frac{d\theta_o}{dt} + \theta_o = \theta_i \quad (2-101)$$

则输出温度 θ_o 与输入温度 θ_i 之间的传递函数为

$$\frac{\Theta_o(s)}{\Theta_i(s)} = \frac{1}{RCs + 1} \quad (2-102)$$

可见,图 2-29 所示热力系统是惯性环节。 ■

2.7.4 液位系统

以液位为控制对象的系统称为液位系统。液位系统与电气系统相似,液位差(水头) H 与电压相似,流量 Q 与电流相似,液阻 R 与电阻相似。遵循的定律与电路中的欧姆定律相似,即

$$R = \frac{dH(\text{m})}{dQ(\text{m}^3/\text{s})} \quad (2-103)$$

式(2-103)是液阻 R 的定义,即液阻是产生单位流量变化所必需的水头变化量。

考虑图 2-30 所示的液位控制系统,如果液流为紊流(无涡流),则其输出的流量 Q 与水头 H 之间的关系是

$$Q = K \sqrt{H} \quad (2-104)$$

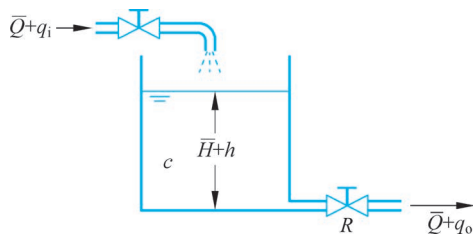


图 2-30 液位系统原理图

式中, K 是常数。假设系统稳态时的输入流量为 $Q_i = \bar{Q}$, 水头是 $H = \bar{H}$, 输出流量是 $Q_o = \bar{Q}$ 。如果在 $t=0$, 输入流量变到 $Q_i = \bar{Q} + q_i$, 使水头从 $\bar{H}$ 变到 $\bar{H} + h$, 相应的输出流量从 $Q_o = \bar{Q}$ 变到 $\bar{Q} + q_o$ 。根据流量平衡方程得到

$$C \frac{dH}{dt} = Q_i - Q_o = Q_i - K \sqrt{H}$$

式中, C 是容器的液容(截面积)。这是一个非线性方程。定义

$$f(H, Q_i) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dH}{dt} = \frac{1}{C} Q_i - \frac{1}{C} K \sqrt{H} \quad (2-105)$$

利用线性化的方法, 对式(2-105)进行泰勒级数展开:

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= f(H, Q_i) \\ &= f(\bar{H}, \bar{Q}) + \left. \frac{\partial f}{\partial H} \right|_{H=\bar{H}, Q_i=\bar{Q}} (H - \bar{H}) + \left. \frac{\partial f}{\partial Q_i} \right|_{H=\bar{H}, Q_i=\bar{Q}} (Q_i - \bar{Q}) \end{aligned} \quad (2-106)$$

式中

$$\begin{aligned} f(\bar{H}, \bar{Q}) &= \frac{1}{C} \bar{Q} - \frac{1}{C} K \sqrt{\bar{H}} = 0 \\ \left. \frac{\partial f}{\partial H} \right|_{H=\bar{H}, Q_i=\bar{Q}} &= -\frac{K}{2C \sqrt{\bar{H}}} = -\frac{\bar{Q}}{\sqrt{\bar{H}}} \frac{1}{2C \sqrt{\bar{H}}} = -\frac{\bar{Q}}{2C \bar{H}} = -\frac{1}{RC} \end{aligned}$$

式中, R 为液阻, 且

$$R = \frac{dH}{dQ} = \frac{2\sqrt{H}}{K} \quad (2-107)$$

在工作点附近有

$$R = \frac{2\bar{H}}{\bar{Q}}$$

又

$$\left. \frac{\partial f}{\partial Q_i} \right|_{H=\bar{H}, Q_i=\bar{Q}} = \frac{1}{C}$$

于是式(2-106)可写成

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{1}{RC}(H - \bar{H}) + \frac{1}{C}(Q_i - \bar{Q})$$

因为 $H - \bar{H} = h$, $Q_i - \bar{Q} = q_i$, 故上式可写成

$$\begin{aligned}\frac{dh}{dt} &= -\frac{1}{RC}h + \frac{1}{C}q_i \\ \frac{dh}{dt} + \frac{1}{RC}h &= \frac{1}{C}q_i\end{aligned}\quad (2-108)$$

则系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{H(s)}{Q_i(s)} = \frac{\frac{1}{C}}{s + \frac{1}{RC}}\quad (2-109)$$

式(2-109)说明图 2-30 所示的液位系统是惯性环节, 它只有一个储能元件。

例 2-21 如图 2-31 的液位系统。图中 $\bar{Q}$ 是稳态输入流量, $\bar{H}_1$ 和 $\bar{H}_2$ 是稳态水头, R_1 和 R_2 是阀门的液阻, C_1 和 C_2 是液缸的液容。设 q_1 、 q_2 以及 h_1 、 h_2 都是很小的偏移量。由以上假设, 可得以下方程:

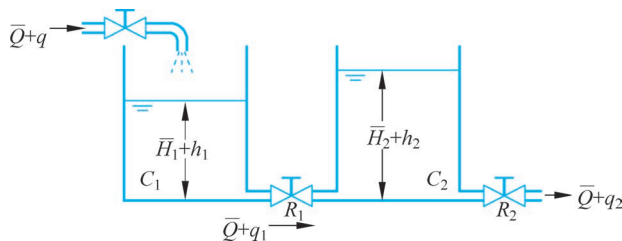


图 2-31 液位系统原理图

$$C_1 \frac{dh_1}{dt} = (q - q_1) \quad (2-110)$$

$$\frac{h_1 - h_2}{R_1} = q_1 \quad (2-111)$$

$$\frac{h_2}{R_2} = q_2 \quad (2-112)$$

$$C_2 \frac{dh_2}{dt} = (q_1 - q_2) \quad (2-113)$$

由式(2-110)~式(2-113)可推得以 q 为输入, q_2 为输出时, 系统的传递函数

$$G(s) = \frac{Q_2(s)}{Q(s)} = \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_2 C_1)s + 1} \quad (2-114)$$

可见, 由两个液缸组成的液位系统是一个振荡环节。■

2.7.5 典型位置随动系统的数学模型

例 2-22 位置随动系统。位置随动系统是一种基本的控制系统, 在陀螺仪、导弹、自动火炮中均有广泛的应用。图 2-32 是一个位置随动系统的原理图, 其控制目标是让输出转角 θ_o 跟随输入转角 θ_i 变化。该系统的工作原理如下: 电位器(发信电位器和收信电位器)作

为系统误差的测量装置,将角度信号转换成与电压成正比的电信号。发信手轮驱使发信电位器电刷转动一个角度 θ_i ,若收信电位器的转角 θ_o 与发信电位器的转角 θ_i 不相等,误差测量装置就会输出一个与角差 $\Delta\theta = \theta_i - \theta_o$ 成正比的电压信号 e (带极性),经放大器放大,输出电压 u_a 加到电动机电枢回路,电动机经减速器,带动收信电位器电刷朝着减小角差 $\Delta\theta$ 的方向运动,直至 $\Delta\theta = \theta_i - \theta_o = 0$,从而实现输出转角 θ_o 对输入转角 θ_i 的跟踪。

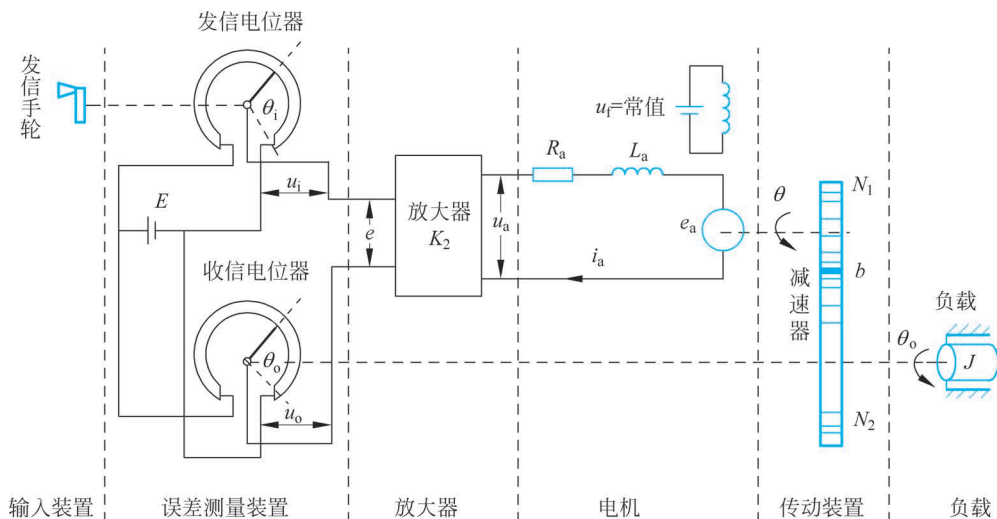


图 2-32 位置随动系统原理图

描述各变量之间关系的数学方程如下：

$$e = u_i - u_o = K_s(\theta_i - \theta_o) \quad (2-115)$$

式中, K_s 是电位器的增益。

$$u_a = K_2 e$$

$$u_a = i_a R_a + L_a \frac{di_a}{dt} + K_e \omega \quad (2-116)$$

$$T_i = K_t i_a \quad (2-117)$$

$$T_i = J \frac{d\omega}{dt} + b\omega \quad (2-118)$$

式中均采用描述直流电动机的方程中的符号。 ω 是电动机的角速度, J 与 b 为已折算到电动机轴上的转动惯量和黏性摩擦系数。

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (2-119)$$

式中, θ 是电动机的转角。

$$\theta_o = \frac{N_1}{N_2} \theta = \frac{\theta}{i} \quad (2-120)$$

式中, $i = \frac{N_2}{N_1}$ 是减速器的传动比。

根据上述方程,画出系统的方框图和状态信号流程图,如图 2-33 所示。

可得系统的传递函数

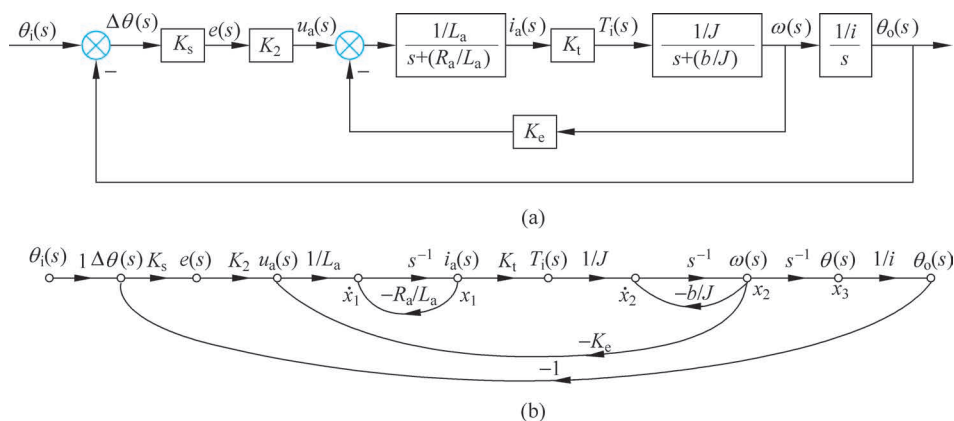


图 2-33 位置随动系统方框图和状态信号流图

$$\frac{\Theta_o(s)}{\Theta_i(s)} = \frac{K_s K_2 K_t / i}{T_a T_m R_a b s^3 + R_a b (T_a + T_m) s^2 + (R_a b + K_e K_t) s + K_s K_2 K_t / i} \quad (2-121)$$

式中, $T_a = L_a / R_a$ 是电枢回路的时间常数, $T_m = J / b$ 是电动机及负载(包括减速装置)的机电时间常数。

2.8 MATLAB 在系统数学模型转换中的应用

2.8.1 MATLAB 中传递函数的分式多项式的表示

已知传递函数

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \quad (2-122)$$

在 MATLAB 中用以下命令来生成:

```
num=[bm,bm-1,⋯,b1,b0];
den=[an,an-1,⋯,a1,a0];
sys=tf(num,den)
```

例 2-23 已知传递函数

$$G(s) = \frac{s^4 + 3s^3 + 9s^2 + 14s + 24}{s^4 + 3s^3 + 9s^2 + 10s + 12}$$

输入并执行以下命令:

```
num=[1,3,9,14,24];
den=[1,3,9,10,12];
sys=tf(num,den)
```

屏幕显示:

Transfer function:

$$\frac{s^4 + 3s^3 + 9s^2 + 14s + 24}{s^4 + 3s^3 + 9s^2 + 10s + 12}$$

2.8.2 传递函数的零极点表示

将分式多项式形式传递函数转换为零极点形式,可用以下命令:

```
[z,p,k]=tf2zp(num,den)
```

反之,将零极点形式传递函数转换为分式多项式形式,可用以下命令:

```
[num,den]=zp2tf(z,p,k)
```

在 MATLAB 中,虚数单位用 i 表示,本书其他部分用 j 表示。

例 2-24 将上例之传递函数转换为零极点形式。

输入并执行以下命令:

```
num=[1,3,9,14,24];
den=[1,3,9,10,12];
[z,p,k]=tf2zp(num,den)
```

屏幕显示:

```
z=
    -1.6241+1.5711i
    -1.6241-1.5711i
    0.1241+2.1645i
    0.1241-2.1645i

p=
    -1.0000+1.7321i
    -1.0000-1.7321i
    -0.5000+1.6583i
    -0.5000-1.6583i

k=
    1
```

若再执行以下命令,又可获得分式多项式形式:

```
[num,den]=zp2tf(z,p,k)
```

屏幕显示:

```
num=
    1.0000 3.0000 9.0000 14.0000 24.0000
den=
    1.0000 3.0000 9.0000 10.0000 12.0000
```

2.8.3 用 MATLAB 计算系统的传递函数

MATLAB 的 series、parallel、feedback 和 cloop 命令可用来计算给定系统方框图的传递函数。

1. series 命令

series 命令的功能是计算两个串联的传递函数。命令格式如下:

```
sys=series(sys1,sys2)
[num,den]=series(num1,den1,num2,den2)
```

例 2-25 求 $G_h(s)$ 与 $G_c(s)$ 串联(图 2-34(c))后的传递函数,已知

$$G_h(s) = \frac{s+1}{s+2}, \quad G_c(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+2}$$

执行命令：

```
numc=[1,1]; denc=[1,2,2]; sysc=tf(numc,denc); numh=[1,1]; denh=[1,2]; sysh=tf(numh,denh);
sys=series(sysc,sysh)
```

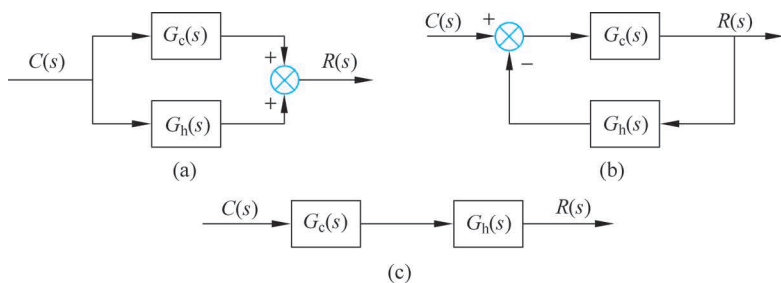


图 2-34 系统的各种连接

屏幕显示：

Transfer function:

$$s^2 + 2s + 1$$

$$s^3 + 4s^2 + 6s + 4$$

2. parallel 命令

parallel 命令的功能是计算两个并联的传递函数。命令格式如下：

```
sys=parallel(sys1,sys2)
[num,den]=parallel(num1,den1,num2,den2)
```

例 2-26 求例 2-25 $G_c(s)$ 与 $G_h(s)$ 并联(图 2-34(a))后的传递函数。

解 只要将例 2-25 中的最后一条命令改为

```
sys=parallel(sysc,sysh)
```

屏幕显示：

Transfer function:

$$s^3 + 4s^2 + 7s + 4$$

$$s^3 + 4s^2 + 6s + 4$$

3. feedback 命令

feedback 命令的功能是计算两系统按图 2-34(b)连接。命令格式如下：

$\text{sys}=\text{feedback}(\text{sys1},\text{sys2})$ ：必须是负反馈时的传递函数。

$[\text{num},\text{den}]=\text{feedback}(\text{num1},\text{den1},\text{num2},\text{den2},\text{sign})$ ：其中 sign 为反馈极性，正反馈取 1，负反馈取 -1。

例 2-27 求例 2-26 $G_c(s)$ 与 $G_h(s)$ 作反馈连接后的传递函数。

解 只要将例 2-26 中的最后一条命令改为

```
sys=feedback(sysc,sysh)
```

屏幕显示:

```
Transfer function:
      s^2+3 s+2
-----
s^3+5 s^2+8 s+5
```

4. cloop 命令

cloop 命令的功能是计算单位反馈系统的闭环传递函数,命令格式为

$[\text{num}, \text{den}] = \text{cloop}(\text{num1}, \text{den1}, \text{sign})$: sign 为反馈极性,正反馈取 1,负反馈取 -1。

例 2-28 例 2-27 中,以 $G_c(s)$ 与 $G_h(s)$ 作前向通道,求其单位反馈系统的闭环传递函数。

解 用以下命令:

```
[num1,den1]=series(numc,denc,numh,denh);
[num,den]=cloop(num1,den1,-1);
sys=tf(num,den)
```

屏幕显示:

```
Transfer function:
      s^2+2 s+1
-----
s^3+5 s^2+8 s+5
```

2.8.4 MATLAB 中多项式与因式分解形式的互相转换

1. conv 命令

conv 命令将因式分解形式转换为多项式,其格式为

$c = \text{conv}(\text{多项式 1}, \text{多项式 2})$

例 2-29 将下式转换为多项式形式:

$$s(s+1)^2(s^2+2s+2)$$

解 执行以下命令:

```
c=conv(conv([1,0],[1,1]),conv([1,1],[1,2,2]))
```

可得

```
c=
      1      4      7      6      2      0
```

多项式形式为

$$s^5 + 4s^4 + 7s^3 + 6s^2 + 2s$$

2. roots 命令

roots 命令求多项式的根,可用于将多项式形式转换为因式分解形式,格式为

```
roots(c)
```

例 2-30 求下列方程式的根

$$s^4 + 2s^3 + 3s^2 + s + 1 = 0$$

解 执行以下命令:

```
c=[1,2,3,1,1]; roots(c)
```

可得

```
ans =
-0.9567+1.2272i
-0.9567-1.2272i
-0.0433+0.6412i
-0.0433-0.6412i
```

小结

在研究控制系统时,首先要建立动态系统的数学模型——系统输出与输入之间关系的数学描述。在经典控制理论中,主要有三种数学模型:时域模型、复域模型和频域模型。系统时域的数学模型是系统的微分方程,它是根据系统的物理机理,应用物理学中的基本定律来建立的,是系统最基本的数学模型。复域的数学模型是系统传递函数,传递函数适用于线性定常系统,是时域模型在复域中的映射,它用简明的数学式子表现出系统内在的结构特征和参数,从而把复杂的微分方程运算转换为代数运算,并为数学模型图形化(方框图和信号流图)创造条件,所以传递函数成为控制系统研究中经常运用的一种工具。系统频域的数学模型是系统的频率响应特性,是系统时域模型在频域中的映射,频域的数学模型提供了一种作图的方法来分析和设计系统,很适合于工程应用(将在第5章详细讨论)。

本章是控制理论的基础内容,主要有系统微分方程的建立、传递函数的概念、典型环节的传递函数、方框图及其简化方法、信号流图及求系统传递函数的梅森公式。

建立系统的微分方程是从事控制工程者必须掌握的基本技能,为此不仅要掌握控制理论,还必须对控制对象的工作原理和特性有充分的了解。本书仅介绍一些基本方法,更多的还必须在实际工作中熟练掌握。

传递函数、方框图和信号流图是学习经典控制理论的基础和工具,对传递函数的求取、方框图的绘制和简化,以及信号流图与方框图之间相互转换,都应当熟练掌握。

中国空间站简介



中国空间站(又称天宫空间站)是我国建成的国家级太空实验室。空间站轨道高度为400~450km,倾角42°~43°,设计寿命为10年,长期驻留3人。初期建造三个舱段,包括一个核心舱和两个实验舱。基本构型为T字形,核心舱居中,实验舱I和实验舱II分别连接于两侧。核心舱前端设两个对接口,接纳载人太空船对接和停靠;后端设后向对接口,用于

货运飞船停靠补给。最大可扩展为 180 吨级六舱组合体,以进行较大规模的空间应用。

1992 年 9 月 21 日,我国正式决策实施载人航天工程,并确定了我国载人航天“三步走”发展战略,建成空间站是发展战略的重要目标。三十年来,工程相继突破和掌握了天地往返、空间出舱、空间交会对接等载人航天领域关键技术,开展了一系列空间科学实验与技术试验,牢牢占据了世界载人航天的重要一席。

空间站大事记

2020 年 5 月 5 日: 长征五号 B 运载火箭首飞成功,我国空间站在轨建造任务拉开序幕。

2021 年 4 月 29 日: 长征五号 B 遥二运载火箭成功将空间站首个舱段——天和核心舱送入太空,标志着中国空间站在轨组装建造全面展开,为后续关键技术验证和空间站组装建造顺利实施奠定了坚实基础。

2021 年 5 月 29 日: 天舟二号货运飞船发射成功,是空间站关键技术验证阶段发射的首艘货运飞船,也是天舟货运飞船的首次应用性飞行。

2021 年 6 月 17 日: 神舟十二号发射成功,聂海胜、刘伯明、汤洪波成为首批入驻中国空间站的航天员。三个月里,三名航天员圆满完成了两次出舱活动以及一系列任务。

2021 年 9 月 20 日: 天舟三号货运飞船发射入轨,与天舟二号和天和核心舱形成“一”字构型。

2021 年 10 月 16 日: 神舟十三号发射成功,翟志刚、王亚平、叶光富三名航天员开启了为期 6 个月的太空生活,创造中国航天员连续在轨飞行时长新纪录。

2022 年 5 月 10 日: 天舟四号货运飞船发射成功,是我国空间站建设从关键技术验证阶段转入在轨建造阶段的首次发射任务。

2022 年 6 月 5 日: 神舟十四号发射成功,航天员陈冬、刘洋、蔡旭哲入住空间站,进行为期 6 个月的驻留任务。

2022 年 7 月 24 日: 问天实验舱发射成功,问天实验舱是中国空间站首个科学实验舱。

2022 年 10 月 31 日: 梦天实验舱发射成功,中国空间站三舱“T”字的基本构型完成。

2022 年 11 月 12 日: 天舟五号货运飞船发射成功,与在轨运行的空间站组合体进行自主快速交会对接。

2022 年 11 月 29 日: 神舟十五号载人飞船成功对接空间站组合体,航天员费俊龙、邓清明、张陆进入中国空间站。

2023 年 5 月 10 日: 天舟六号货运飞船发射成功,与空间站组合体完成交会对接。

2023 年 5 月 30 日: 神舟十六号载人飞船发射,成功对接于空间站天和核心舱径向端口。景海鹏、朱杨柱、桂海潮 3 名航天员入住空间站天和核心舱。

2023 年 10 月 26 日: 神舟十七号载人飞船发射,成功对接于空间站天和核心舱前向端口。汤洪波、唐胜杰、江新林 3 名航天员进驻空间站天和核心舱。

知识点自测

本节通过判断题、单选题和多选题来检测读者对本章知识点的掌握程度,为了便于自我检测,本章末尾给出了解答。

判断题(判断下列说法是否正确)

- 2-1 控制系统的微分方程是系统最基本的数学模型,其标准形式中与输出量相关的项均位于微分方程的右端。
- 2-2 控制系统微分方程的阶次与系统中独立储能元件的数量有关。
- 2-3 系统的传递函数定义为系统输出量的拉氏变换与输入量的拉氏变换之比。
- 2-4 传递函数概念既可以用于线性系统也可以用于非线性系统。
- 2-5 线性定常系统的传递函数只与系统的结构和参数有关,与系统的输入无关。
- 2-6 物理性质截然不同的系统或元件可以有相同的传递函数。
- 2-7 系统特征方程的根是闭环系统的零点。
- 2-8 在传递函数的定义中,零初始条件是指当 $t \leq 0$ 时,系统的输入和输出均为零。
- 2-9 方框图中两个或两个以上的信号进行叠加的环节,称为比较点。
- 2-10 方框图中分支点是用来表示信号测量或引出的位置。同一位置引出的信号,其性质、大小未必相同。
- 2-11 方框图简化所遵循的原则是保持信号传递的数学关系不变。
- 2-12 方框图中如果在一个比较点有多个信号进行叠加,可将其分解成若干个比较点,使信号在不同的比较点进行叠加。

2-13 方框图中同一位置的分支点可以任意交换。

2-14 在信号流图中,混合节点可以通过增加一个增益为 1 的支路变为输入节点。

单项选择题(每小题列出的选项中只有一个选项是符合题目要求的)

- 2-15 控制系统的时域数学模型是()。
- A. 传递函数 B. 微分方程 C. 频率特性 D. 信号流图
- 2-16 控制系统的复域数学模型是()。
- A. 传递函数 B. 微分方程 C. 频率特性 D. 信号流图
- 2-17 在线性定常系统中,当初始条件为零时,系统输出的拉氏变换与输入的拉氏变换之比称为系统的()。
- A. 脉冲响应 B. 传递函数 C. 频率特性 D. 微分方程
- 2-18 二次振荡环节包含的独立储能元件的个数为()。
- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
- 2-19 线性定常系统的传递函数取决于系统的()。
- A. 内部结构和参数 B. 作用量大小
C. 作用量变化规律 D. 外部扰动大小
- 2-20 系统 $G(s) = \frac{10(2s+1)(3s+1)}{s(s+5)(10s+1)}$ 的增益因子为()。
- A. 2 B. 6 C. 10 D. 20
- 2-21 系统 $G(s) = \frac{20(2s+1)(10s+1)}{s^2(2s+1)(5s+1)}$ 的稳态增益为()。
- A. 10 B. 20 C. 40 D. 80
- 2-22 控制系统的频域数学模型是()。
- A. 传递函数 B. 微分方程 C. 频率特性 D. 信号流图

2-23 系统的信号流图如图 2-35 所示,其共有()个回路。

- A. 6 B. 7 C. 8 D. 9

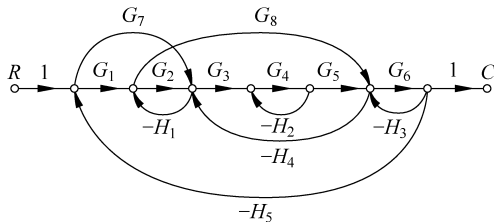


图 2-35 信号流图

2-24 信号流图中,既有信号流出,又有信号流入的节点,称为()。

- A. 输入节点 B. 源节点 C. 输出节点 D. 混合节点

多项选择题(每小题列出的选项中有两个或两个以上选项是符合题目要求的)

2-25 控制系统的图模型包括()。

- A. 传递函数 B. 方框图 C. 频率特性图 D. 信号流图
E. 微分方程

2-26 下列说法中正确的是()。

- A. 传递函数与系统或元件的内部结构参数、外界作用的形式有关
B. 传递函数是对动态系统的内部描述
C. 传递函数不能反映系统或元件的物理组成
D. 系统脉冲响应的拉氏变换是系统的传递函数
E. 系统的传递函数与微分方程可以互相转换

2-27 信号流图中,只有信号流入的节点,称为()。

- A. 输入节点 B. 源节点 C. 输出节点 D. 阱节点
E. 混合节点

自测参考答案

判断题: (1) F; (2) T; (3) F; (4) F; (5) T; (6) T; (7) F; (8) F; (9) T; (10) F;
(11) T; (12) T; (13) T; (14) F

单项选择题: (15) B; (16) A; (17) B; (18) C; (19) A; (20) B; (21) B; (22) C;
(23) D; (24) D

多项选择题: (25) BCD; (26) CE; (27) CD

习题

A 基本题

A2-1 求下列系统的传递函数。式中 $r(t)$ 为系统输入, $c(t)$ 为系统输出:

$$(1) \frac{d^3 c(t)}{dt^3} + 3 \frac{d^2 c(t)}{dt^2} + 3 \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = 3 \frac{dr(t)}{dt} + r(t)$$

$$(2) \frac{d^3 c(t)}{dt^3} + 3 \frac{d^2 c(t)}{dt^2} + 3 \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = r(t-2)$$

A2-2 试绘制下列代数方程的信号流图：

$$(1) \begin{cases} x_2 = ax_1 + ix_3 + jx_6 \\ x_3 = bx_2 \\ x_4 = fx_1 + cx_3 - gx_5 \\ x_5 = dx_4 \\ x_6 = ex_5 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x_2 = ax_1 + gx_2 + jx_3 \\ x_3 = bx_2 + x_3 \\ x_4 = fx_1 + cx_2 - gx_3 \\ x_5 = dx_4 \\ x_6 = x_5 \end{cases}$$

A2-3 求图 A2-1 信号流图的传递函数 $\frac{C(s)}{R(s)}$ 。

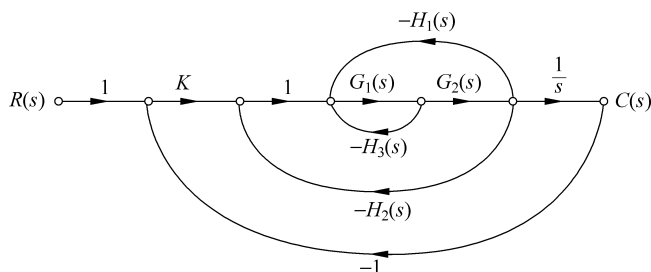
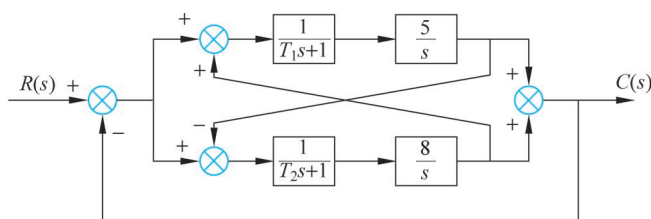
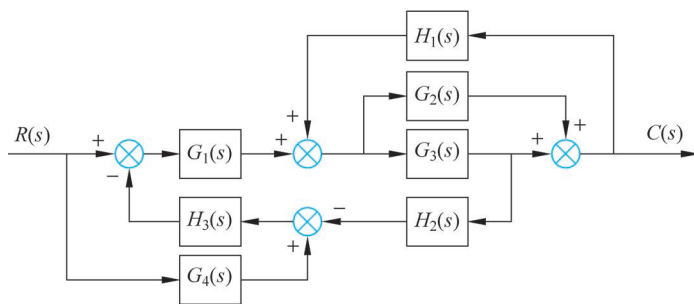


图 A2-1 题 A2-3 信号流图

A2-4 用梅森公式求图 A2-2 中的传递函数 $\frac{C(s)}{R(s)}$ 。



(a)



(b)

图 A2-2 题 A2-4 图

A2-5 某平台的位置控制系统的微分方程组为

$$\frac{d^2 p}{dt^2} + 2 \frac{dp}{dt} + 4p = \theta$$

$$u_1 = r - p$$

$$u_2 = 7u_1$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 0.6u_2$$

式中, $r(t)$ 是平台的预期位置; $p(t)$ 是平台的实际位置; $u_1(t)$ 是放大器的输入电压; $u_2(t)$ 是放大器的输出电压; $\theta(t)$ 是电动机的转角。

试画出该系统的方框图和信号流图, 确定各方框的传递函数, 并计算系统的传递函数 $P(s)/R(s)$ 。

A2-6 某热敏电阻的阻值与温度的关系为 $R = R_0 e^{-0.1T}$, 式中, $R_0 = 10\text{k}\Omega$, R 为电阻阻值, T 是绝对温度。热敏电阻工作在 $T = 20\text{K}$ 附近, 并且温度扰动很小。试求电阻在工作点附近的线性化模型。

A2-7 汽车悬浮系统的简化模型如图 A2-3(a) 所示。汽车行驶时轮子的垂直位移作为一个激励作用在汽车的悬浮系统上。图 A2-3(b) 是简化的悬浮系统模型。系统的输入是 P 点(车轮)的位移 x_i , 车体的垂直运动 x_o 为系统的输出。求系统的传递函数 $X_o(s)/X_i(s)$ 。

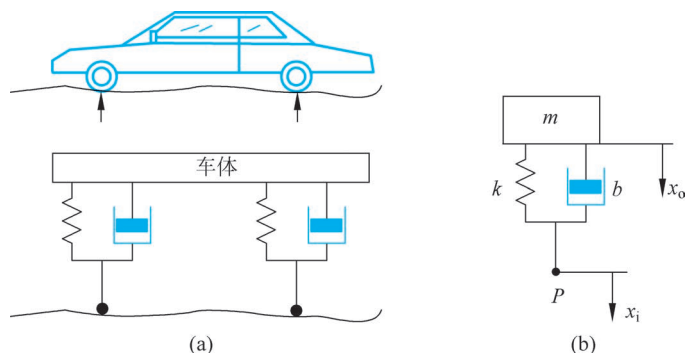


图 A2-3 题 A2-7 汽车悬浮系统模型

A2-8 试求图 A2-4 所示电路的传递函数 $E_o(s)/E_i(s)$ 。

A2-9 试求图 A2-5 所示电路的传递函数 $E_o(s)/E_i(s)$ 。

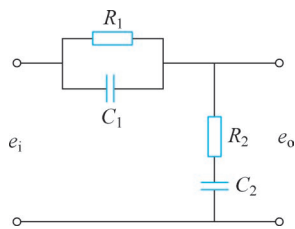


图 A2-4 题 A2-8 图

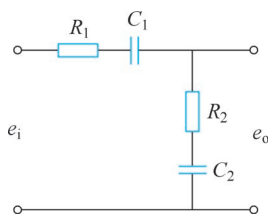


图 A2-5 题 A2-9 图

B 深入题

B2-1 将图 B2-1 的方框图简化, 并计算系统的传递函数 $C(s)/R(s)$ 。

B2-2 图 B2-2 是某个消除扰动影响的前馈控制系统的方框图。

设 $R(s) = 0$, 通过适当选择 K_1 和 K_2 , 便可使由扰动引起的输出为零。试证明这个结论。

B2-3 试求图 B2-3 所示各系统的传递函数 $X_o(s)/X_i(s)$, x_i 为系统的输入位移, x_o 为系统的输出位移。

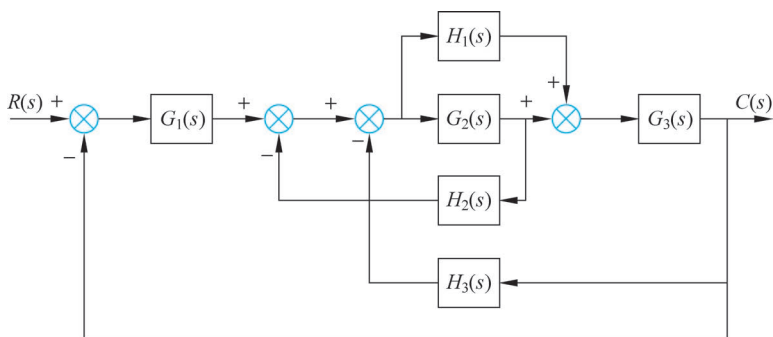


图 B2-1 题 B2-1 方框图

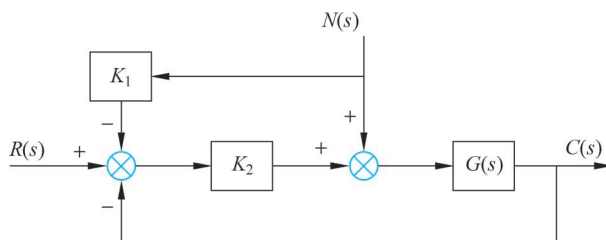


图 B2-2 前馈系统方框图

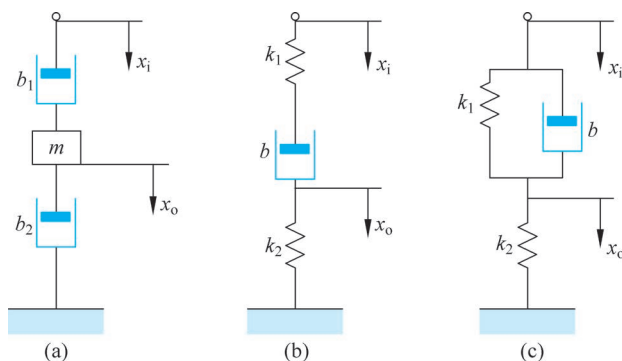


图 B2-3 题 B2-3 机械系统

B2-4 图 B2-4 的液位系统, 设系统稳态时, $H_1 = \bar{H} = 5\text{m}$, $Q_1 = \bar{Q} = 0.04\text{m}^3/\text{s}$, $C = 5\text{m}^2$, 试求系统在工作点的时间常数。

B2-5 求图 B2-5 信号流图所示系统的下列传递函数:

$$(1) W_1(s) = \frac{C_1(s)}{R_1(s)} \quad (2) W_1(s) = \frac{C_1(s)}{R_2(s)}$$

$$(3) W_1(s) = \frac{C_2(s)}{R_1(s)} \quad (4) W_1(s) = \frac{C_2(s)}{R_2(s)}$$

C 实际题

C2-1 图 C2-1 所示的运算放大器电路, 假定是理想放大器 (即运算放大器的开环增益为 ∞), 电路参数为 $R_1 = R_2 = 100\text{k}\Omega$, $C = 1\mu\text{F}$, 试推导电路的传递函数 $U_o(s)/U_i(s)$ 。

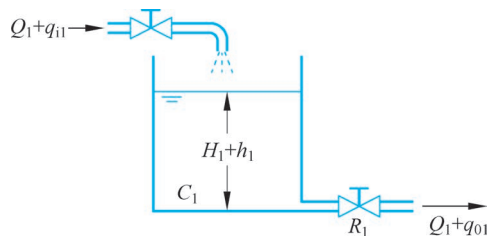


图 B2-4 题 B2-4 的液位系统

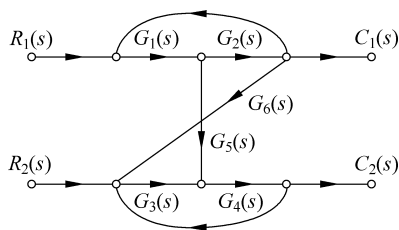


图 B2-5 题 B2-5 系统的信号流图

C2-2 图 C2-2 是一个电子 PID(比例-积分-微分)控制器,试推导它的传递函数 $U_o(s)/U_i(s)$ 。

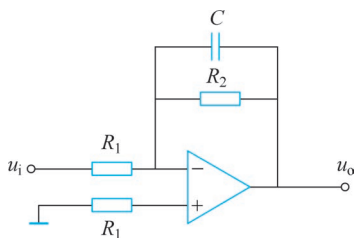


图 C2-1 运算放大器电路

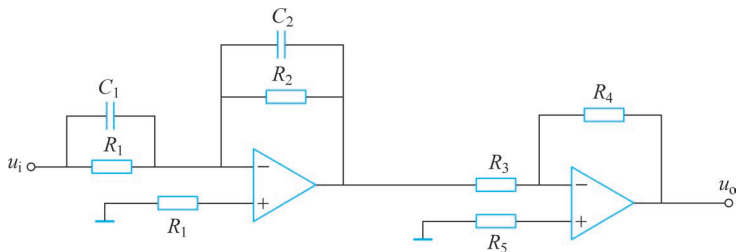


图 C2-2 电子 PID(比例-积分-微分)控制器

C2-3 图 C2-3 是发电机-电动机控制系统, $\theta_d(t)$ 是电动机的转角, $\theta_L(t)$ 是负载的转角, $u_f(t)$ 是发电机的励磁电压。发电机以恒速运转,电动机及负载的总转动惯量为 J_m ,电动机轴上的摩擦系数为 b_m 。假定发电机的电压 u_g 与励磁电流 i_f 成比例,试推导系统的传递函数 $\Theta_L(s)/U_f(s)$ 。

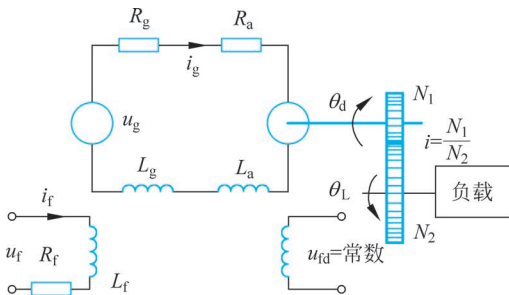


图 C2-3 发电机-电动机控制系统

D MATLAB 题

D2-1 考虑图 D2-1 之系统:

- (1) 用 MATLAB 的 series、parallel、feedback 和 cloop 命令求系统的传递函数 $C(s)/R(s)$;
- (2) 用模型转换命令求零、极点形式传递函数;
- (3) 用 roots 命令求闭环系统的零、极点,并比较(2)、(3)的结果。

D2-2 对题 C2-3,按题 D2-1(1)至(3)项的要求,完成计算。

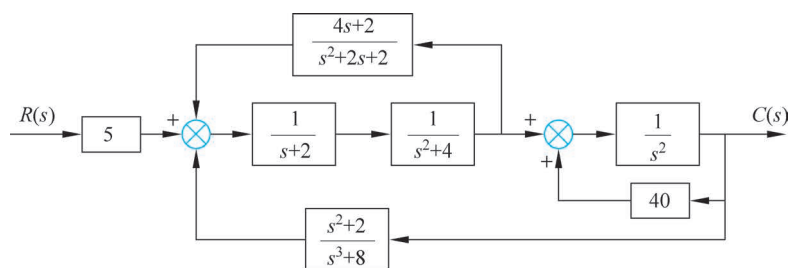


图 D2-1 题 D2-1 方框图

一个工程控制系统首先必须是稳定的,因此稳定性是工程控制系统分析的出发点。系统正常工作的状态称为平衡状态,系统在受到扰动后,原先的平衡状态被破坏,系统围绕原平衡状态来回运动,这种现象称为“振荡”。系统出现振荡后,一种可能是离平衡状态越来越远,这类系统称为不稳定系统,不稳定系统是无法正常工作的。另一种可能是这种振荡逐渐衰减,最终恢复到原先的平衡状态,这类系统叫稳定系统(又叫渐近稳定系统)。稳定是工程系统正常工作的前提。对一个稳定的系统,如果输入一个信号,系统可能达到一个新的稳定状态,这个新的稳定状态与预定的平衡位置的误差称为稳态误差,系统消除稳态误差的能力由系统稳态特性所决定,这种特性称稳态特性。系统达到稳定状态之前的过程称为动态过程,动态过程中振荡过大,或者动态过程时间太长,系统都不能很好工作。在系统动态过程中表现的性质称为动态特性。因此,自动控制系统分析包括三部分内容:稳定性、稳态特性和动态特性。

分析控制系统性能最直接的方法是求解系统的微分方程,这就是系统的时域分析。时域分析可以精确地分析系统的动态特性和稳态特性。但当微分方程的阶次超过三阶,方程的求解就比较困难,不便于工程上应用。但时域分析物理意义清楚,便于建立系统的性能指标,所以它仍然是系统分析的基础。

本章主要讨论:典型测试信号;控制系统的稳定性(稳定性概念、稳定性判据);控制系统的稳态特性(稳态误差概念、稳态误差系数、提高系统稳态精度的方法);控制系统的动态响应(控制系统的动态性能指标、一阶系统的动态响应、二阶系统的动态响应、高阶系统的动态响应、用 MATLAB 求系统的动态响应)。

3.1 典型测试信号

实际系统的输入信号常具有不确定性,因而很难用解析方法表达。分析控制系统要有一个进行比较的基准,为此,需要用统一的典型输入信号来测试系统的性能。对典型的测试信号的要求是:它们是简单的时间函数,便于进行数学分析和实验研究,系统的实际输入信号可以看成是这些测试信号的组合。常用的典型测试信号主要有阶跃信号、速度(斜坡)信号、加速度(抛物线)信号、脉冲信号和正弦信号等。

3.1.1 阶跃信号

阶跃信号是一种广泛存在的瞬变信号,如图 3-1(a)所示,例如电动机突然加载或卸载。

它的数学表达式为

$$r(t) = R \cdot u(t) = \begin{cases} R & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (3-1)$$

式中, R 为阶跃信号的幅值。 $u(t)$ 称为单位阶跃信号, 单位阶跃信号也常表示为 $1(t)$ 。

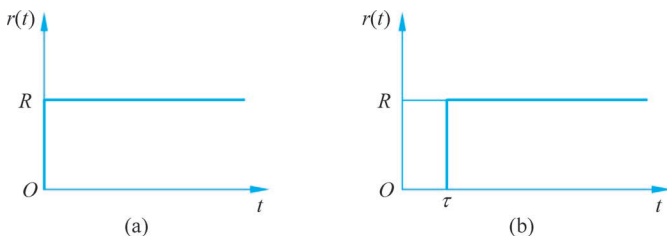


图 3-1 阶跃信号

图 3-1(b) 是在 $t = \tau$ 时刻产生的阶跃信号, 记为 $R \cdot u(t - \tau)$, 具体是

$$r(t) = R \cdot u(t - \tau) = \begin{cases} R & t \geq \tau \\ 0 & t < \tau \end{cases} \quad (3-2)$$

单位阶跃信号的拉氏变换为

$$\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s} \quad (3-3)$$

而幅值为 R 的阶跃信号的拉氏变换为

$$\mathcal{L}[Ru(t)] = \frac{R}{s} \quad (3-4)$$

3.1.2 速度(斜坡)信号

速度信号也称匀速信号、斜坡信号, 它对时间 t 的变化率是常数, 如图 3-2 所示。速度信号主要用于测试系统匀速运动的性能, 它等于阶跃信号对时间 t 的积分, 其数学表达式为

$$r(t) = R \cdot tu(t) = \begin{cases} R \cdot t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (3-5)$$

式中, R 为速度信号的斜率; $tu(t)$ 为单位速度信号。

单位速度信号的拉氏变换为

$$\mathcal{L}[tu(t)] = \frac{1}{s^2} \quad (3-6)$$

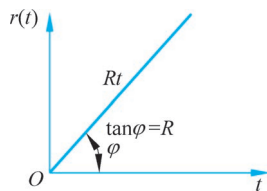


图 3-2 速度信号

3.1.3 加速度(抛物线)信号

加速度信号(见图 3-3)等于速度信号对时间的积分, 主要用于测试系统等加速运动的性能, 其数学表达式为

$$r(t) = \frac{1}{2}R \cdot t^2 u(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}Rt^2 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (3-7)$$

式中, R 为常数; $\frac{1}{2}t^2 u(t)$ 为单位加速度信号。

单位加速度信号的拉氏变换为

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{2}t^2 u(t)\right] = \frac{1}{s^3} \quad (3-8)$$

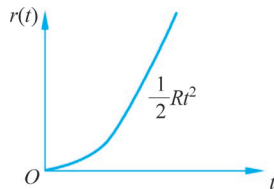


图 3-3 加速度信号

3.1.4 脉冲信号

图 3-4 是脉动信号(也称实际脉冲信号)的图形,其数学表达式为

$$r(t) = \begin{cases} \frac{A}{h} & 0 \leq t \leq h \\ 0 & 0 > t, t > h \end{cases} \quad (3-9)$$

式中, h 为脉动宽度, A = 常数, 是脉动的面积, 当 $h \rightarrow 0$ 时脉动信号就成为脉冲信号。 $A = 1$ 的脉冲信号称为单位脉冲信号, 或单位脉冲函数。图 3-4 是实际脉冲信号, 图 3-5 是单位脉冲信号, 其数学表达式为

$$r(t) = \delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \quad (3-10)$$

$$\int_0^{\infty} \delta(t) dt = \int_0^{\epsilon} \delta(t) dt = 1 \quad (3-11)$$

其中, ϵ 是任意小的正数。

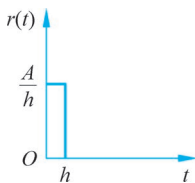


图 3-4 实际脉冲信号

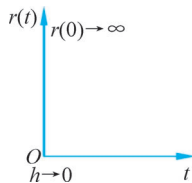


图 3-5 单位脉冲信号

单位脉冲信号是阶跃信号的导数。脉冲信号常在研究干扰对系统的影响时应用。由于脉冲函数的值出现无穷大, 所以在工程上, 常将 $h < 0.1T$ (T 为系统的时间常数) 的实际脉冲信号当成是理想脉冲信号。

单位脉冲信号的拉氏变换为

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1 \quad (3-12)$$

当 $r(t) = \delta(t)$ 时, 系统的响应叫作单位脉冲响应。系统单位脉冲响应的拉氏变换就是系统的传递函数

$$C(s) = G(s)\delta(s) = G(s) \quad (3-13)$$

3.1.5 正弦信号

正弦信号如图 3-6 所示, 其数学表达式为

$$r(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (3-14)$$

式中, A 为幅值; ω 为角频率; φ 是初相或称相位移。

正弦信号在实验研究频率响应时是很有用的, 常利用它求取系统的频率特性。

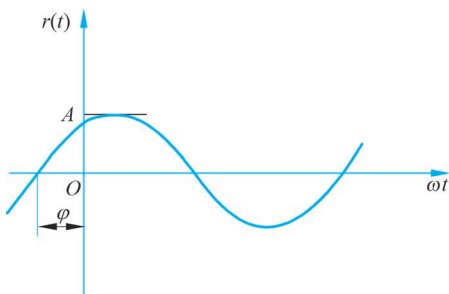


图 3-6 正弦信号

幅值为 1, 相位移 $\varphi=0$ 时, 正弦信号的拉氏变换为

$$\mathcal{L}(\sin \omega t) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (3-15)$$

3.2 控制系统的稳定性分析

控制系统能正常工作的前提是系统必须是稳定的。只有稳定的系统, 分析它的稳态性能和动态性能才有意义。本节讨论线性定常系统的稳定性问题。

3.2.1 稳定性的基本概念

如果系统在平衡状态(设平衡状态为坐标系统原点)受到扰动, 使被控制量 $c(t)$ 偏离平衡状态, 扰动消失后, 被控制量 $c(t)$ 不会立即回到平衡点。如果经过一段时间, 系统又回到原先的平衡状态, 则称系统是渐近稳定的, 有时简称为稳定的。

若系统围绕原点作等幅振荡, 或趋于某一非零值, 则称系统是临界稳定。

若系统偏离原点越来越远(或振荡幅值越来越大), 则称系统是不稳定的。

例 3-1 如图 3-7 所示的单摆, 垂直向下的位置 A 是它的平衡状态。若摆受到一外力作用, 它将偏离平衡位置至 A' 的位置, 在重力作用下, 摆将向平衡位置运动。由于存在各种阻力, 摆幅将逐渐减小, 经过一段时间, 摆必将回到平衡位置。这个系统是稳定的。

如果不存在阻力, 那么摆将在平衡位置左右来回摆动, 系统就处于等幅振荡, 系统为临界稳定。

例 3-2 例 2-17 的倒立摆系统, 其直立状态是平衡位置。一旦受到外力扰动, 摆必定倒下(离平衡位置越来越远)而回不到平衡位置上, 所以这个系统是不稳定的。

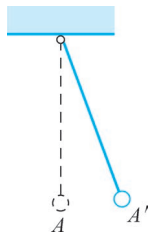


图 3-7 单摆的稳定性

3.2.2 线性定常系统稳定的充分必要条件

系统的稳定性可以通过求解系统的微分方程来判定。线性定常系统的微分方程具有如下形式

$$\begin{aligned}
 & a_n \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dc(t)}{dt} + a_0 c(t) \\
 & = b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{dr(t)}{dt} + b_0 r(t)
 \end{aligned} \quad (3-16)$$

式中, $r(t)$ 、 $c(t)$ 分别为系统的输入和输出。

线性微分方程式(3-16)的解或系统的响应 $c(t)$ 由输入 $r(t)$ 和初始条件决定。方程的初始条件就是系统的初始状态。若输入 $r(t)=0$, 系统的响应由系统的初始状态唯一决定, 称为系统的零输入响应 $c_{0r}(t)$; 若系统处于零初始状态, 则系统的响应由系统的输入 $r(t)$ 唯一决定, 称为系统的零状态响应 $c_{0z}(t)$ 。对于线性系统可应用叠加原理, 即系统的输出 $c(t)$ 可看成是由零输入响应 $c_{0r}(t)$ 与零状态响应 $c_{0z}(t)$ 的线性叠加, 即

$$c(t) = c_{0r}(t) + c_{0z}(t) \quad (3-17)$$

判定系统的稳定性就是判定在零输入条件下, 由于扰动或其他原因使系统偏离平衡状态, 扰动消失后系统能否恢复到平衡状态。换句话说, 系统的稳定性只由零输入响应决定, 因此只要研究式(3-16)微分方程的齐次方程的解。齐次微分方程

$$a_n \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dc(t)}{dt} + a_0 c(t) = 0 \quad (3-18)$$

的解由特征方程决定, 其特征方程为

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (3-19)$$

做因式分解, 式(3-19)也可写成

$$\prod_{i=1}^k (s + \sigma_i) \prod_{j=1}^l (s^2 + 2\zeta_j \omega_{nj} s + \omega_{nj}^2) = 0 \quad (3-20)$$

其中, $|\zeta_j| < 1, \omega_{nj} > 0$ 。

假设特征方程式(3-19)没有重根, 分解式(3-20)说明它有 k 个实根和 l 对复根。于是式(3-18)的解具有如下形式:

$$c(t) = \sum_{i=1}^k A_i e^{-\sigma_i t} + \sum_{j=1}^l B_j e^{-\zeta_j \omega_{nj} t} (\alpha_j \cos \omega_{dj} t + \beta_j \sin \omega_{dj} t) \quad (3-21)$$

式中, $\omega_{dj} = \omega_{nj} \sqrt{1 - \zeta_j^2}$ 。 A_i 、 B_j 、 α_j 和 β_j 均为实常数, 由特征方程的系数和初始条件决定。由(3-21)可以看出, σ_i 和 ζ_j 的值决定了方程解(系统响应)的特性。

若 $\sigma_i > 0, \zeta_j > 0$, 则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = 0 \quad (3-22)$$

系统是稳定的。

若 $\sigma_i > 0, \zeta_j = 0$, 则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = \sum_{i=1}^k A_i e^{-\sigma_i t} + \sum_{j=1}^l B_j (\alpha_j \cos \omega_{dj} t + \beta_j \sin \omega_{dj} t) \quad (3-23)$$

系统趋于等幅振荡, 是临界稳定的。

若 $\sigma_i < 0$, 则 $c(t)$ 是发散的, 因而系统是不稳定的。而若 $\zeta_j < 0$, 则系统将趋于无界振荡, 也是不稳定的。

$\sigma_i = 0$ 的情况比较复杂。如果 0 是特征方程式(3-19)的单根, 那么响应式(3-21)中会出

现一个常数项,系统临界稳定;如果0是重根,则响应 $c(t)$ 会出现 $t, t^2, \dots$,这些项,系统不稳定。对于 $\zeta_j=0$ 的情况很类似。当 $\zeta_j=0$ 时 $\pm j\omega_{nj}$ 是式(3-19)的根,如果 $j\omega_{nj}$ 是单根系统临界稳定;当 $j\omega_{nj}$ 是重根时, $c(t)$ 会出现 $t \cos \omega_{nj} t, t \sin \omega_{nj} t, t^2 \cos \omega_{nj} t, t^2 \sin \omega_{nj} t, \dots$ 之类项,系统不再稳定。

综上所述,可得线性定常系统渐近稳定的充分必要条件是:系统特征方程所有根(系统的特征根)都具有负实部,或系统的所有极点都位于左半 s 开平面(即不包含虚轴的左半平面)上。工程上总是要求系统是渐近稳定的,经典理论中简称为稳定的。

系统特征方程的根是由特征方程的系数决定的,特征方程的系数取决于系统的固有特性(结构和参数),因此系统的稳定性取决于系统的固有特性,而与外部的输入无关。

利用系统特征方程的根可以判别系统的稳定性,但求取高阶特征方程的根不是一件容易的事。利用MATLAB可以求得近似解。但这是后话。这里先介绍19世纪末提出的一种代数判据——劳斯(Routh)判据,它是一种避免对特征方程直接求解,而通过方程的系数用间接的方法来判别系统特征根位置的判据。

3.2.3 劳斯稳定性判据

1. 线性定常系统稳定的必要条件

线性定常系统的特征方程为

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (3-24)$$

式中, $a_i (i=0, 1, \dots, n)$ 为实数,不失一般性,设 $a_n > 0$ 。

方程式(3-24)的所有根均具有负实部(也即系统稳定)的必要条件是特征方程所有系数均严格为正。

例 3-3 考虑以下三个系统:

$$5s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 6 = 0$$

$$5s^4 + 4s^3 - 2s^2 + s + 5 = 0$$

$$5s^4 + 4s^3 + 2s^2 + s + 5 = 0$$

由系统稳定的必要条件知:第一个系统 s 项系数为零,第二个系统 s^2 项系数为负,所以这两个系统是不稳定的;第三个系统满足稳定的必要条件,但不能判定其是否稳定。 ■

2. 劳斯判据

劳斯判据是一种根据系统特征方程的系数来判别系统稳定性的代数判据。对于式(3-24)特征方程,按以下步骤来判别系统的稳定性。

(1) **建立劳斯表**。将给定的特征方程式系数按下列规则排在劳斯表的前两行:

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	$\dots$
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	$\dots$
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	$\dots$
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	$\dots$
$\vdots$				
s	p_1			
s^0	q_1			

此劳斯表中,第一列 $s^n, s^{n-1}, \dots, s^0$ 为辅助列,它表明这个表有 $n+1$ 行。

(2) 计算劳斯表的其他系数。计算规则为

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$b_3 = \dots$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - b_2 a_{n-1}}{b_1}$$

$$c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - b_3 a_{n-1}}{b_1}$$

$$c_3 = \dots$$

$$\vdots$$

在计算中遇到缺项,则用 0 代替。例如 $n=4$,在计算 b_2 时要用到 a_{n-5} ,这时 a_{n-5} 用 0 代表。劳斯表最后两行必定只有一个元素。

(3) 劳斯稳定性判据。系统稳定的充分必要条件是劳斯表首列系数非零且不改变符号。

例 3-4 已知系统的特征方程为 $s^4 + 7s^3 + 17s^2 + 17s + 6 = 0$,试用劳斯判据判别其稳定性。

解 列出劳斯表

$$\begin{array}{cccc} s^4 & 1 & 17 & 6 \\ s^3 & 7 & 17 & 0 \\ s^2 & 14.57 & 6 & \\ s^1 & 14.12 & & \\ s^0 & 6 & & \end{array}$$

劳斯表中第一列元素非零且无符号变化,说明该系统特征方程没有正实部根,所以系统稳定。 ■

(4) 如果劳斯表中第一列元素皆非零,则元素符号变化的次数等于特征方程具有正实部根的个数。

例 3-5 已知系统的特征方程为 $s^3 + 4s^2 + 10s + 50 = 0$,用劳斯判据判别其稳定性。

解 列出劳斯表

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 10 \\ s^2 & 4 & 50 \\ s^1 & -2.5 & 0 \\ s^0 & 50 & \end{array}$$

劳斯表中第一列元素的符号变化两次,说明该系统有两个具有正实部的根,所以系统不稳定。 ■

(5) 劳斯表中某行第一个元素为零,且此行其余项不全为零。

此时系统肯定是不稳定的,为了继续运算,可用一个充分小的正数 ϵ 代替零,然后按规则继续排列劳斯表。

例 3-6 试用劳斯判据判别下列系统特征方程的稳定性。

$$s^5 + s^4 + 5s^3 + 5s^2 + 2s + 1 = 0$$

解 列出劳斯表

$$\begin{array}{cccc} s^5 & 1 & 5 & 2 \\ s^4 & 1 & 5 & 1 \\ s^3 & 0(\epsilon) & 1 & 0 \\ s^2 & 5 - \frac{1}{\epsilon} & 1 & \\ s^1 & \frac{5\epsilon - 1 - \epsilon^2}{5\epsilon - 1} & & \\ s^0 & 1 & & \end{array}$$

劳斯表中 s^3 第一个元素为零,可以用一个任意小的正数 ϵ 来代替零元素,然后按规则继续排列。由于 ϵ 很小, $\frac{5\epsilon - 1}{\epsilon} < 0$, $\frac{5\epsilon - 1 - \epsilon^2}{5\epsilon - 1} > 0$ (可以用求 $\epsilon \rightarrow 0^+$ 的极限来判定),说明劳斯表中第一列元素有两次符号变化,特征方程有两个具有正实部的根,所以系统不稳定。 ■

(6) 劳斯表中某一行元素全为零。

在劳斯表元素计算中,如果出现某一行元素全为零,说明特征方程在 s 平面上存在关于 s 平面原点对称的根,例如 $(s + \sigma)(s - \sigma)$ 或 $(s + j\omega)(s - j\omega)$ 。此时,可用全零行上面一行的元素构造一个辅助方程,利用辅助方程对 s 求导后得到的方程系数代替全零行的元素,然后按规则完成劳斯表的排列。所有数值相同、符号相异的根都可由辅助方程求得。

例 3-7 判别如下特征方程的稳定性。

$$s^3 + s^2 + 16s + 16 = 0$$

解 列出劳斯表

$$\begin{array}{cccc} s^3 & 1 & 16 & \\ s^2 & 1 & 16 & \leftarrow \text{辅助多项式: } p(s) = s^2 + 16 \\ s^1 & 2 & 0 & \leftarrow \text{原 } s^1 \text{ 行系数全为零,用 } \frac{dp(s)}{ds} \text{ 的系数代替} \\ s^0 & 16 & & \end{array}$$

劳斯表中 s^1 行元素全为零,这时可用其上面一行的元素构造一个辅助多项式 $p(s)$: $p(s) = s^2 + 16$,求 $p(s)$ 对 s 的导数,得

$$\frac{dp(s)}{ds} = 2s$$

以其系数替换全为零行的元素,再按规则继续排列劳斯表。从表中看,虽然第一列元素不变号,但由于 s^1 行元素全为零,所以存在一对共轭虚根。解辅助方程 $p(s) = s^2 + 16 = 0$ 可求得这对共轭虚根: $s_{1,2} = \pm 4j$,系统为临界稳定。 ■

3. 劳斯判据的应用

劳斯判据可判别线性定常系统的稳定性,它还可用来确定使系统稳定的参数取值范围。

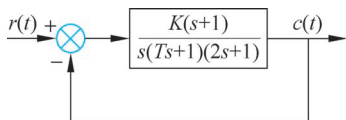


图 3-8 例 3-8 系统

例 3-8 确定使图 3-8 所示系统稳定的 K 、 T 的取值范围。

解 闭环系统的特征方程为

$$\begin{aligned} & s(Ts+1)(2s+1)+K(s+1) \\ &= 2Ts^3+(2+T)s^2+(1+K)s+K=0 \end{aligned}$$

劳斯表为

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 2T & 1+K \\ s^2 & 2+T & K \\ s^1 & 1-K\frac{T-2}{T+2} & \\ s^0 & K & \end{array}$$

由劳斯判据,要使系统稳定,必须同时满足以下条件

$$\begin{aligned} 2T &> 0 \\ 2+T &> 0 \\ 1-K\frac{T-2}{T+2} &> 0 \\ K &> 0 \end{aligned}$$

由上述四式可解得

$$T > 2, 0 < K < \frac{T+2}{T-2}$$

或

$$0 < T \leq 2, K > 0$$

所以系统的稳定区域如图 3-9 所示。

例 3-9 设系统的特征方程为 $s^3+8s^2+10s+2=0$, 试判别系统的稳定性,并分析有几个根位于直线 $s=-1$ 与虚轴之间。

解 列出劳斯表

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 10 \\ s^2 & 8 & 2 \\ s^1 & 9.75 & \\ s^0 & 2 & \end{array}$$

系统是稳定的。

为分析位于 $s=-1$ 右边根的个数,令 $s=s_1-1$,代入特征方程得 $s_1^3+5s_1^2-3s_1-1=0$, 列出劳斯表

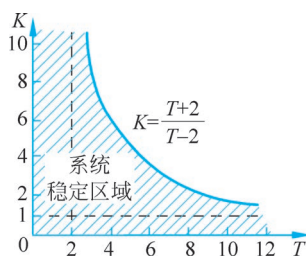


图 3-9 例 3-8 系统稳定区域

$$\begin{array}{rcl}
 s^3 & 1 & -3 \\
 s^2 & 5 & -1 \\
 s^1 & -2.8 & \\
 s^0 & -1 &
 \end{array}$$

第一列元素符号变化一次,所以有一个根在直线 $s = -1$ 与虚轴之间。 ■

3.2.4 用 MATLAB 分析系统的稳定性

MATLAB 中有多个命令可用于求系统的特征根,系统的零、极点以及绘制系统的零、极点在 s 平面上的分布图。这些命令如下。

(1) $p = \text{pole}(\text{sys})$: 计算系统的极点。

例 3-10 已知系统的传递函数为 $W(s) = \frac{s+2}{s^3+2s^2+4s+3}$, 求系统的极点。

解 执行以下命令

```

num=[1,2];
den=[1,2,4,3];
sys=tf(num,den);
p=pole(sys)
p =
    -0.5000+1.6583i
    -0.5000-1.6583i
    -1.0000

```

(2) $r = \text{roots}(p)$: 求多项式的根, p 是多项式的系数向量。

例 3-11 求上例特征多项式的根。

解 执行以下命令

```

p=[1,2,4,3];
r=roots(p)
r =
    -0.5000+1.6583i
    -0.5000-1.6583i
    -1.0000

```

(3) $[z,p,k] = \text{zpkdata}(\text{sys}, 'v')$: 获取系统的零、极点向量和增益。

例 3-12 获取例 3-10 系统的零、极点向量和增益。

解 对例 3-10, 只要再执行 $[z,p,k] = \text{zpkdata}(\text{sys}, 'v')$ 使得

```

z =
    -2
p =
    -0.5000+1.6583i
    -0.5000-1.6583i
    -1.0000
k =
    1

```

(4) $\text{pzmap}(\text{sys})$: 绘制系统的零、极点图, 极点以“×”表示, 零点以“°”表示。

$[p,z] = \text{pzmap}(\text{sys})$: 不绘图, 返回系统的零、极点向量。

例 3-13 绘制例 3-10 系统的零、极点图。

解 对例 3-10 的系统,执行命令 `pzmap(sys)`得图 3-10 的零、极点分布图。

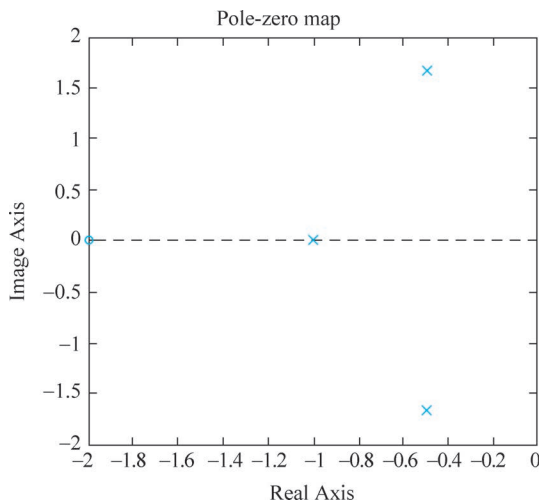


图 3-10 例 3-10 系统零、极点分布图

3.3 控制系统的稳态特性——稳态误差分析

衡量系统稳态特性好坏的主要时域指标是稳态误差。稳态误差是反映系统控制精度的一种度量,是衡量稳态响应质量的时域指标。工程上,通常用系统对典型测试信号的稳态响应来表征系统的稳态精度。显然只有稳定的系统,稳态误差才有意义。

研究表明:稳态误差与系统的结构和参数以及输入信号的特性有很大关系。控制系统设计的任务之一就是要在保证系统稳定的前提下,尽量地减小乃至消除稳态误差。

3.3.1 稳态误差和控制系统类型

1. 稳态误差定义

误差的定义有两种方法。

从输出端定义:误差为系统输出量的希望值与实际值之差。但在实际中此差值信号常常无法测量,一般只有理论意义。

从输入端定义:误差为系统的输入信号与主反馈信号之差。此信号在实际中可测量,所以具有一定的物理意义。

当主反馈为单位反馈时,这两种定义是一致的。本书总采用后一种定义。

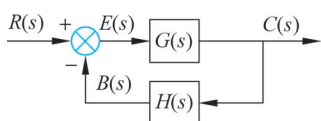


图 3-11 典型的控制系统方框图

图 3-11 是典型的控制系统方框图。系统误差 $e(t)$ 定义为输入量 $r(t)$ 与反馈量 $b(t)$ 的差值,即

$$e(t) = r(t) - b(t) \quad (3-25)$$

对单位反馈系统 ($H(s)=1$), $b(t)=c(t)$, 误差 $e(t)$ 为

$$e(t) = r(t) - c(t) \quad (3-26)$$

误差传递函数为

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G(s)H(s)} \quad (3-27)$$

则

$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s)H(s)} R(s) \quad (3-28)$$

以下是假设系统是稳定的,这时系统的稳态误差 e_{ss} 是 $t \rightarrow \infty$ 时的系统误差的极限

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \quad (3-29)$$

用终值定理可求得系统的稳态误差 e_{ss}

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (3-30)$$

式(3-30)说明,系统的稳态误差不仅与系统的结构参数有关,而且与系统的输入有关。因此研究系统的稳态误差,必须研究不同结构类型系统在不同输入作用下的稳态误差。

为了使稳态误差与系统结构参数、输入的关系更加清晰,将式(3-30)中的开环传递函数 $G(s)H(s)$ 写成时间常数表达式(见式(2-14))

$$G(s)H(s) = \frac{K \prod_{i=1}^{m_1} (\tau_i s + 1) \prod_{k=1}^{m_2} (T_k^2 s^2 + 2\zeta_k T_k s + 1)}{s^\nu \prod_{j=1}^{n_1} (\tau_j s + 1) \prod_{l=1}^{n_2} (T_l^2 s^2 + 2\zeta_l T_l s + 1)} \quad (3-31)$$

K 为开环增益。如果开环传递函数表示为零极点形式(式(2-15)),则 K 与开环增益因子 K_r 间成立

$$K = \frac{K_r \prod_{i=1}^m z_i}{\prod_{j=1}^n p_j} \quad (3-32)$$

其中, p_j 为非零极点。系统的稳态误差可表示为

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} sR(s) \frac{1}{1 + \frac{K \prod_{i=1}^{m_1} (\tau_i s + 1) \prod_{k=1}^{m_2} (T_k^2 s^2 + 2\zeta_k T_k s + 1)}{s^\nu \prod_{j=1}^{n_1} (\tau_j s + 1) \prod_{l=1}^{n_2} (T_l^2 s^2 + 2\zeta_l T_l s + 1)}} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} sR(s) \frac{1}{1 + \frac{K}{s^\nu}} \end{aligned} \quad (3-33)$$

由上式可看出,决定系统稳态误差的结构和参数主要是:系统在原点的开环极点数(ν)、系统的开环增益(K)和输入量的特性。在研究系统稳态误差时,人们选择阶跃信号($R(s) = \frac{R}{s}$)、速度信号($R(s) = \frac{R}{s^2}$)和加速度信号($R(s) = \frac{R}{s^3}$)作为典型输入信号。

2. 控制系统的类型

典型的系统开环传递函数如式(3-31)所示,将开环传递函数在原点处的极点数 ν 称为

系统的类型:

$\nu=0$, 称为 0 型系统。

$\nu=1$, 称为 1 型系统。

$\nu=2$, 称为 2 型系统。

3.3.2 稳态误差系数和稳态误差计算

1. 单位阶跃输入时, 系统的稳态误差

对单位阶跃输入 $r(t)=u(t)$, $R(s)=\frac{1}{s}$, 将其代入式(3-33), 求得系统的稳态误差为

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{K}{s^\nu}} \quad (3-34)$$

定义位置稳态误差系数 K_p

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^\nu} \quad (3-35)$$

于是

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p} \quad (3-36)$$

对 0 型系统

$$K_p = K \quad (3-37)$$

对 1 型系统及高于 1 型的系统

$$K_p = \infty \quad (3-38)$$

对单位阶跃输入, 系统的稳态误差分别为

0 型系统

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K} \quad (3-39)$$

1 型及高于 1 型的系统

$$e_{ss} = 0 \quad (3-40)$$

各型系统单位阶跃输入时输出响应的波形如图 3-12(a) 所示。

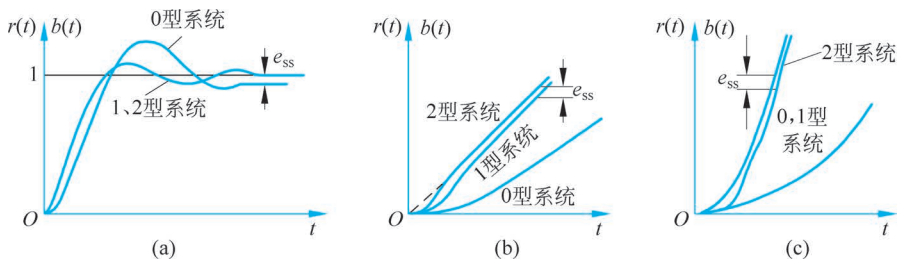


图 3-12 各型系统的稳态误差

2. 速度输入时系统的稳态误差

对单位速度输入, $r(t)=t \cdot u(t)$, $R(s)=\frac{1}{s^2}$, 将其代入式(3-33), 求得系统的稳态误

差为

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \frac{1}{1 + \frac{K}{s^\nu}} \quad (3-41)$$

定义速度稳态误差系数 K_v :

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s) H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^{\nu-1}} \quad (3-42)$$

系统的稳态误差为

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} \quad (3-43)$$

对 0 型系统

$$K_v = 0 \quad (3-44)$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} \rightarrow \infty \quad (3-45)$$

对 1 型系统

$$K_v = K \quad (3-46)$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K} \quad (3-47)$$

对 2 型及以上的系统

$$K_v = \infty \quad (3-48)$$

$$e_{ss} = 0 \quad (3-49)$$

各型系统单位速度输入时的输出响应波形如图 3-12(b)所示。

3. 加速度输入时系统的稳态误差

对单位加速度输入, $r(t) = \frac{1}{2}t^2 \cdot u(t)$, $R(s) = \frac{1}{s^3}$, 将其代入式(3-33), 求得系统的稳态误差为

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2} \frac{1}{1 + \frac{K}{s^\nu}} \quad (3-50)$$

定义加速度稳态误差系数 K_a

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^{\nu-2}} \quad (3-51)$$

系统的稳态误差为

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a} \quad (3-52)$$

对 0 型和 1 型系统

$$K_a = 0 \quad (3-53)$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a} \rightarrow \infty \quad (3-54)$$

对 2 型系统

$$K_a = K \tag{3-55}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K} \tag{3-56}$$

各型系统的单位加速度输入的输出响应波形如图 3-12(c) 所示。

表 3-1 给出各类系统稳态误差与稳态误差系数、系统开环增益及输入信号之间的关系。这里指出, 尽管稳态误差只对稳定系统才有意义, 但是对任何系统我们都可以对它定义稳态误差系数。

表 3-1 稳态误差与系统结构参数、输入信号特性之间关系一览表

类型	稳态误差系数			阶跃输入 $r(t) = R \cdot 1(t)$	速度输入 $r(t) = Rt$	加速度输入 $r(t) = \frac{1}{2}Rt^2$
ν	K_p	K_v	K_a	位置误差 $e_{ss} = \frac{R}{1+K_p}$	速度误差 $e_{ss} = \frac{R}{K_v}$	加速度误差 $e_{ss} = \frac{R}{K_a}$
0	K	0	0	$\frac{R}{1+K}$	∞	∞
1	∞	K	0	0	$\frac{R}{K}$	∞
2	∞	∞	K	0	0	$\frac{R}{K}$

例 3-14 某系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{4(s+3)(s+4)}{s(s+1)(s+2)(s+8)}$$

试求:

- (1) 系统的稳态误差系数 K_p, K_v, K_a ;
- (2) 当输入 $r(t) = (6+4t)u(t)$ 时, 系统的稳态误差;
- (3) 当输入为 3rad/s 时, 如何做才能使系统的稳态误差在 0.3rad/s 之内。

解

(1) 稳态误差只有在系统稳定的条件下才有意义, 故先判别系统的稳定性。系统的特征方程为

$$\Delta(s) = s^4 + 11s^3 + 30s^2 + 44s + 48$$

用劳斯判据不难判定系统是稳定的。

(2) 这是 1 型系统, 于是有

$$\begin{aligned} K_p &= \infty \\ K_v &= K = 4 \times \frac{3 \times 4}{1 \times 2 \times 8} = 3 \\ K_a &= 0 \end{aligned}$$

当输入 $r(t) = (6+4t)u(t)$, 它是阶跃信号 $6u(t)$ 和速度信号 $4tu(t)$ 的线性组合, 所以系统的稳态误差为

$$e_{ss} = 0 + \frac{R}{K_v} = \frac{4}{3}$$

(3) 当输入为 3rad/s , 为保证系统的稳态误差在 0.3rad/s 之内, 即要求 $e_{ss} = \frac{3}{K_v} < 0.3$, 所以

$$K_v > \frac{3}{0.3} = 10$$

所以必须将系统的开环增益扩大 $10/3$ 倍。可以验证, 当 $K_v > 10$ 时, 系统依然是稳定的。

3.3.3 几点结论

(1) 系统的稳态误差只有对稳定的系统才有意义。

(2) 系统的稳态误差与系统的结构和参数以及输入信号的特征有关。这里系统的结构是指开环系统中积分器的数量, 并据此将系统分为 0 型、1 型、2 型系统。系统的参数是指系统的开环增益。输入信号的特征主要指输入信号的类型, 分别以单位阶跃信号、速度信号和加速度信号作为典型的输入信号。还需指出, 开环增益和输入信号的幅值只影响稳态误差的大小, 不能决定稳态误差的存在与否。

(3) 对系统设计来说, 如要消除稳态误差, 必须在保持稳定的前提下, 增加开环系统中积分器的数量, 而减小稳态误差则只要加大系统的开环增益。

(4) 扰动引起的稳态误差, 可以应用终值定理求取。以图 2-19 为例:

$$\frac{E(s)}{N(s)} = -\frac{G_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \quad (3-57)$$

得到

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = -\lim_{s \rightarrow 0} sN(s) \frac{G_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \quad (3-58)$$

3.4 控制系统的动态特性——动态响应分析

3.4.1 控制系统动态响应指标

控制系统除了稳定性和稳态误差这两个性能之外, 动态响应性能是另一个重要特性, 也称动态特性。系统过度振荡或响应过于缓慢都会使系统不能正常工作。系统动态响应性能用系统阶跃输入时的动态响应指标来衡量。常用的动态响应指标如下(图 3-13)。

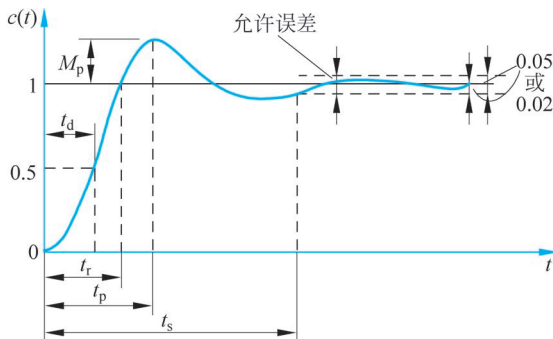


图 3-13 系统的典型动态响应曲线

1. 最大超调量 M_p

最大超调量简称超调量。如果阶跃响应的终值 $c(\infty)$ 是有限的, 且输出响应的最大峰值 $c(t_p)$ 大于响应的终值 $c(\infty)$, 那么

$$M_p = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\% \quad (3-59)$$

式中, t_p 为峰值时间, 即输出达到最大值的时间; $c(\infty)$ 是输出响应的终值, 对单位反馈系统来说, 一般 $c(\infty)$ 等于输入信号的幅值。

2. 调整时间 t_s

调整时间为输出响应达到并维持在 $c(\infty)$ 的某个误差百分比的范围内所需的时间。误差百分比通常取 2% 或 5%, 简称为 2% 准则或 5% 准则。

当 $t > t_s$ 之后, 系统便进入了稳态阶段。

3. 延迟时间 t_d

延迟时间为输出响应第一次达到输出响应终值 $c(\infty)$ 的 50% 所需的时间。

4. 上升时间 t_r

上升时间为从 0 上升到第一次达到 $c(\infty)$ 所需的时间。对无振荡系统定义为从 $c(\infty)$ 的 10% 上升到 $c(\infty)$ 的 90% 所需的时间。

在控制系统性能分析中, “快、准、稳” 是三个基本要求。“准” 的要求是通过稳态误差来考核的, 前一节已经就这个指标进行了详细分析, 增加系统的型号和提高开环增益可以消除或者减小稳态误差。可是这样做很容易引起闭环的不稳定, 这个结论在第 4 章和第 5 章会有详细的说明。在本节介绍的动态响应的指标中, 延迟时间 t_d 和上升时间 t_r 反映了系统对输入反应的快速性; 峰值时间 t_p 也反映了系统反应的快速性, 因为有的系统是在几个振荡周期后才达到最大值的, 因而它与上升时间含义未必一致; 另外调整时间 t_s 刻画了系统达到稳态的速度, 它从另一侧面描述了系统的快速性。对于稳定的系统, 我们还会比较它们的相对稳定性, 即考察它们的稳定程度。超调量 M_p 和调整时间 t_s 描述了系统的相对稳定性。超调量比较大的系统相对稳定性较差, 调整时间较长的系统相对稳定性也比较差。从上面的分析可以看出, 这些指标常常是相互牵制的, 增加系统型号可以提高准确度但可能会导致失稳, 响应快的系统可能导致超调量大, 常常顾此失彼。解决冲突的途径是优化, 设计一个加权的指标实现兼顾各方, 例如做不到 M_p 和 t_r 同时最小, 那么我们考虑综合指标 $\frac{1}{2}M_p +$

$\frac{1}{2}t_r$, 或者等价地 $\frac{1}{2}M_p + \frac{1}{2}t_p$, 让这个加权指标达到最小, 如果参数在一个闭区间上取值, 数学理论支持这个最优解的存在性。还有一种常用的指标是带积分的指标, 用 $e(t) = r(t) - c(t)$ 表示系统的误差, 那么 $\int_0^\infty |e(t)| dt$ 就表示了误差的积累。既快又稳的系统对应的 $\int_0^\infty |e(t)| dt$ 应该比较小。为了突出稳态部分的误差, 人们用 $\int_0^\infty t |e(t)| dt$ 作为指标。

这种指标称为时间乘绝对误差积分准则, 用 ITAE 表示。由于绝对值函数存在不可导点, 因此又用 $\int_0^\infty t e^2(t) dt$ 代替 ITAE, 称为时间乘平方误差积分准则, 记成 ITSE。

3.4.2 一阶系统的动态响应

一阶系统的传递函数为

$$W(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts + 1} \quad (3-60)$$

式中, T 为一阶系统的时间常数。图 3-14 为其方框图。

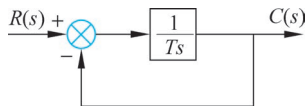


图 3-14 一阶系统方框图

考虑一阶系统的单位阶跃响应。当输入 $r(t) = u(t)$ 时,

$R(s) = \frac{1}{s}$, 系统输出响应的拉氏变换为

$$C(s) = W(s)R(s) = \frac{1}{s(Ts + 1)} \quad (3-61)$$

将 $C(s)$ 展开成部分分式

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + (1/T)} \quad (3-62)$$

对式(3-62)进行拉氏反变换得

$$c(t) = 1 - e^{-t/T} \quad t \geq 0 \quad (3-63)$$

图 3-15 是其响应曲线。

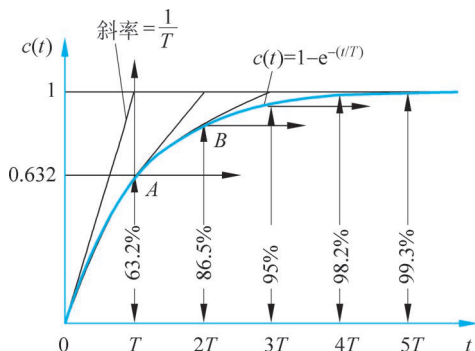


图 3-15 一阶系统的单位阶跃响应

一阶系统的单位阶跃响应按指数规律单调上升,其主要特点是:

(1) $c(t)$ 的初始值 $c(0)=0$, 终值为 $c(\infty)=u(t)=1$, 所以它是位置无差系统。

(2) 在 $t=T$ 时,

$$c(T) = (1 - e^{-1}) = 0.632 \quad (3-64)$$

说明一阶系统响应达到 63.2% 终值的时间等于系统的时间常数 T 。 T 越小, $c(t)$ 响应速度越快。

(3) 在任意时刻, $c(t)$ 上升速度是曲线在该时刻的斜率, 即

$$\frac{dc(t)}{dt} = \frac{1}{T} e^{-t/T} \quad (3-65)$$

在 $t=0$ 时曲线切线的斜率为

$$\left. \frac{dc(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1}{T} e^{-t/T} \Big|_{t=0} = \frac{1}{T} \quad (3-66)$$

随着 t 的增长, $\frac{dc(t)}{dt}$ 单调递减, 即 $c(t)$ 的增长速度在递减。在 $t = t_0$ 处, 切线为 $y = c(t_0) + \frac{1}{T}e^{-t_0/T}(t - t_0)$ 。容易验证, 当 $t = t_0 + T$ 时, $y = 1$, 这说明如响应保持即时速度不变, 经过 T 将达到稳态值。

(4) 由式(3-63)可以看出, $c(t)$ 单调增长, 趋近终值 $c(\infty)$ 。在实践中, 都以 $c(t)$ 达到与稳态值 $c(\infty)$ 的误差不大于某一百分比 Δ 的时间作为一阶系统的调整时间 t_s 。图 3-15 同时给出了 $t = T, 2T, 3T, 4T$ 和 $5T$ 时, 响应曲线分别上升到稳态值的百分比。可见,

$$\text{当 } t = 3T \text{ 时} \quad c(t) = 95\%c(\infty)$$

$$\text{当 } t = 4T \text{ 时} \quad c(t) = 98.2\%c(\infty)$$

$$\text{当 } t = 5T \text{ 时} \quad c(t) = 99.3\%c(\infty)$$

因此, 若取 $\Delta = 5\%$, 则 $t_s = 3T$; 若取 $\Delta = 2\%$, 则 $t_s = 4T$ 。

(5) 一阶系统的上升时间 t_r 定义为由终值的 10% 上升到 90% 所需的时间, 不难求得

$$t_s = 2.2T \quad (3-67)$$

3.4.3 二阶系统动态响应的描述参数

典型二阶系统的微分方程是

$$T^2 \frac{d^2 c(t)}{dt^2} + 2\zeta T \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = r(t) \quad (3-68)$$

或

$$\frac{d^2 c(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dc(t)}{dt} + \omega_n^2 c(t) = \omega_n^2 r(t) \quad (3-69)$$

式中, ζ 是系统的阻尼比, $\omega_n = \frac{1}{T}$ 为无阻尼振荡角频率(或自然振荡角频率)。

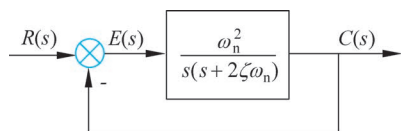


图 3-16 二阶系统的方框图

式(3-68)和式(3-69)描述的二阶系统常常画成图 3-16 所示的典型结构。

系统的传递函数为

$$W(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3-70)$$

系统的特征方程为

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (3-71)$$

系统的特征根为

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (3-72)$$

(1) 欠阻尼情况 ($0 < \zeta < 1$): 系统的两个极点(特征根)是一对共轭复数, 即

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_d \quad (3-73)$$

式中, ω_d 叫作阻尼振荡角频率, 且

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (3-74)$$

系统极点位于左半 s 平面上, 如图 3-17(a) 所示。图中的角 θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) 称为阻尼角, $\zeta = \cos\theta$ 。

阻尼角越大,阻尼比越小。

(2) 临界阻尼情况($\zeta=1$): 系统有一对相等的,位于负实轴上的实极点,如图 3-17(b)所示。这时 $W(s)=\frac{\omega_n^2}{(s+\omega_n)^2}$ 。

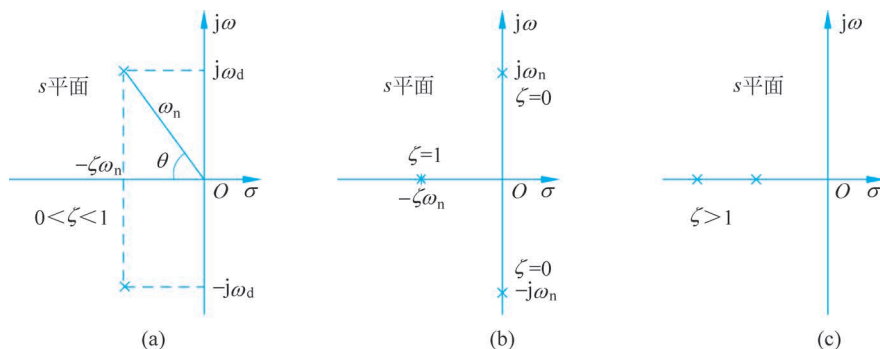


图 3-17 二阶系统的极点分布图

(3) 过阻尼情况($\zeta>1$): 系统有两个不等的位于负实轴上的负实根,如图 3-17(c)所示。这时 $W(s)=\frac{\omega_n^2}{(s-s_1)(s-s_2)}$ 相当于两个惯性环节的串联。

(4) 无阻尼情况($\zeta=0$): 系统具有一对位于虚轴上的共轭极点,也示于图 3-17(b)中。

3.4.4 二阶系统的单位阶跃响应

由式(3-70),当 $R(s)=\frac{1}{s}$,系统输出响应的拉氏变换为

$$C(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s^2+2\zeta\omega_ns+\omega_n^2)} \quad (3-75)$$

求式(3-75)的拉氏反变换,可得系统的单位阶跃响应。

(1) 欠阻尼情况:此时,式(3-75)的部分分式展开为

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{\omega_n^2}{s(s^2+2\zeta\omega_ns+\omega_n^2)} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s+\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_d^2} - \frac{\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_d^2} \end{aligned} \quad (3-76)$$

系统的单位阶跃响应为

$$\begin{aligned} c(t) &= \mathcal{L}^{-1}[C(s)] = 1 - e^{-\zeta\omega_nt} \left(\cos\omega_dt + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\omega_dt \right) \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_nt} (\sqrt{1-\zeta^2} \cos\omega_dt + \zeta \sin\omega_dt) \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_nt} (\sin\theta \cos\omega_dt + \cos\theta \sin\omega_dt) \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_nt} \sin(\omega_dt + \theta) \end{aligned} \quad (3-77)$$

式中

$$\theta = \arccos \zeta = \arctan \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \quad (3-78)$$

(2) 无阻尼情况: 当 $\zeta = 0$ 时, $\omega_d = \omega_n$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ 。应用连续性, 从式(3-77)得到

$$c(t) = 1 - \sin(\omega_n t + \theta) = 1 - \cos \omega_n t$$

响应呈等幅振荡。

(3) 临界阻尼情况: 这时 $\zeta = 1$, 单位阶跃响应的拉氏变换为

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + \omega_n)^2}$$

响应为

$$c(t) = 1 - e^{-\omega_n t} (\omega_n t + 1)$$

(4) 过阻尼情况: 这时系统有两个不相等的负极点, 应用式(3-72), 可以得到单位阶跃响应

$$c(t) = 1 - \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left(\frac{e^{s_2 t}}{s_2} - \frac{e^{s_1 t}}{s_1} \right)$$

图 3-18 给出了不同 ζ 值 ($\zeta > 0$) 下, 二阶系统的单位阶跃响应曲线。由图可见: 随着 ζ 值减小, 系统的响应速度增快; 当 $\zeta < 1$ 时, 产生了振荡, 也产生了超调, ζ 越小, 系统响应的振荡越剧烈。

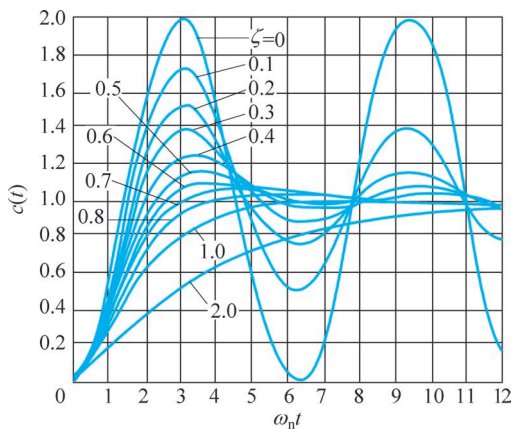


图 3-18 二阶系统的单位阶跃响应

3.4.5 二阶系统的动态响应指标

下面仅讨论欠阻尼情况的动态响应指标与系统参数 ζ 和 ω_n 的关系。

1. 最大超调量 M_p

按照最大超调量的定义有

$$M_p = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\% \quad (3-79)$$

式中, t_p 是峰值时间, 即 $c(t)$ 的极值点, 因此

$$\frac{dc(t)}{dt} = \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} [-\zeta\omega_n \sin(\omega_d t + \theta) + \omega_d \cos(\omega_d t + \theta)] = 0$$

由于 $\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \neq 0$, 所以, 上式成立的条件是

$$\zeta \sin(\omega_d t + \theta) = \sqrt{1-\zeta^2} \cos(\omega_d t + \theta)$$

注意 $\cos \theta = \zeta$, $\sin \theta = \sqrt{1-\zeta^2}$, 从上式可得 $\sin \omega_d t = 0$, 即

$$\omega_d t = n\pi \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

最大峰值是第一个峰值, 故 $n=1$ 。于是得

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \quad (3-80)$$

将式(3-80)代入式(3-79), 并考虑 $c(\infty)=1$, 得

$$M_p = (c(t_p) - 1) \times 100\% = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\% \quad (3-81)$$

可见, 最大超调量 M_p 只与阻尼比 ζ 有关。图 3-19 给出了 M_p 与 ζ 的关系曲线。 M_p 随 ζ 的增大而减小, $\zeta=0$ 时, $M_p=100\%$, 而 $\zeta=1$ 时, $M_p=0$ 。

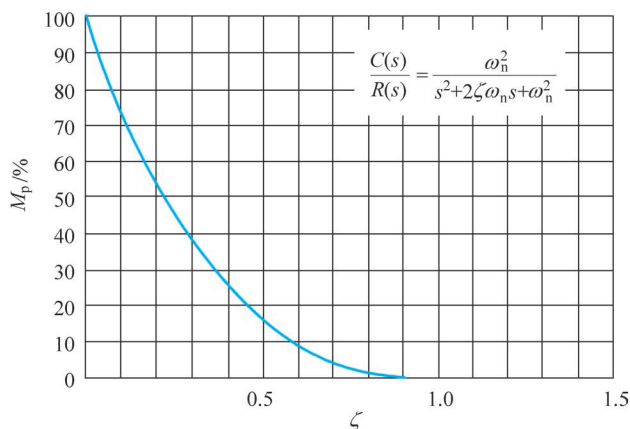


图 3-19 欠阻尼二阶系统 M_p 与 ζ 的关系

2. 调整时间 t_s

对于欠阻尼二阶系统, 计算调整时间 t_s 是不连续的, 因而通常是利用其单位阶跃响应的包络线(图 3-20)来近似计算。由式(3-77), 包络线的方程是

$$b(t) = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \quad (3-82)$$

对于一定的 ζ , 包络线方程是两条对称于 $c(t)=1$ 水平直线的指数曲线, 记 $T' = \frac{1}{\zeta\omega_n}$, T' 也称为时间常数。工程上调整时间用下式近似计算:

$$\text{对于 } 5\% \text{ 准则} \quad t_s = 3T' = \frac{3}{\zeta\omega_n} \quad (3-83)$$

对于 2% 准则
$$t_s = 4T' = \frac{4}{\zeta \omega_n} \quad (3-84)$$

式(3-83)和式(3-84)计算的 t_s 是与阻尼比 ζ 有关的,图 3-21 给出了不用包络线代替时调整时间与阻尼比之间的精确关系,它们是不连续的。当用式(3-83)和式(3-84)计算 t_s 时,它们满足双曲线关系。

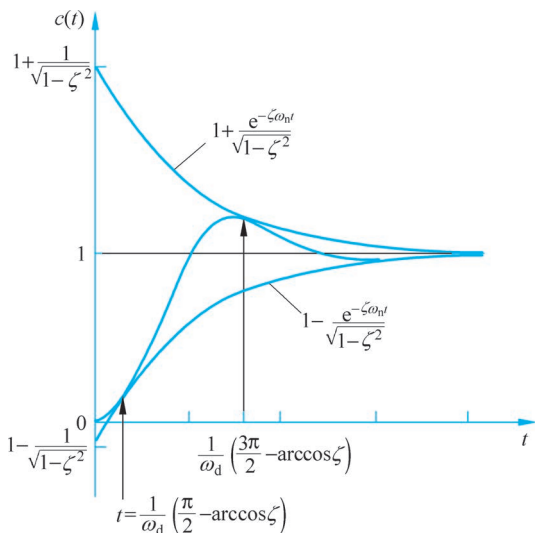


图 3-20 单位阶跃响应的包络线

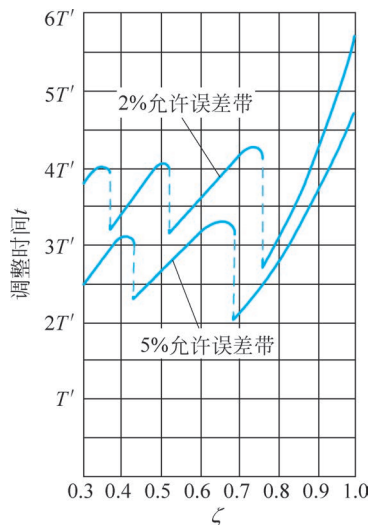


图 3-21 调整时间 t_s 与阻尼比之间的关系

3. 上升时间 t_r

按上升时间 t_r 的定义, $c(t_r) = 1$, 即

$$c(t_r) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t_r} \sin(\omega_d t_r + \theta) = 1$$

上式成立的条件是

$$\sin(\omega_d t_r + \theta) = 0$$

则

$$t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d} \quad (3-85)$$

式中, $\theta = \arccos \zeta$ 。

以上动态响应指标的计算公式仅适用于典型的二阶系统 $\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$ 的欠阻尼情形, 如果实际系统不是典型的二阶系统(如含有零点), 或者不是欠阻尼情形, 则必须根据各指标的定义用解析法或利用数字仿真的方法求解。

3.4.6 二阶系统的参数优化

二阶系统 $W(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$ 的典型结构由图 3-16 给出, 它是 1 型的, 开环增益

是 $\frac{\omega_n}{2\zeta}$ 。 ω_n 称为无阻尼自然振荡频率,常常是由系统本身的特征决定的,相对固定。阻尼比 ζ 是系统的可变参数,二阶系统的参数优化就是对 ζ 的优化。为了减小对速度信号的稳态误差,阻尼比 ζ 应该取较小的值。同时较小的阻尼比使得单位阶跃响应的速度快,上升时间短(图 3-18)。然而小的阻尼比会使得超调量 M_p 变大,相对稳定性降低。因此必须在快速性、稳态误差和相对稳定性之间合理折中,选取一个能够兼顾各方面的阻尼比。

从图 3-19 可以看出,当阻尼比 ζ 为 $0 \sim 0.5$ 时,超调量 M_p 下降很快,但在 $\zeta > 0.6$ 之后,随着 ζ 增加,超调量的下降减缓。为了兼顾各方面,人们取 $\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$ 为二阶系统最佳工程参数,这时对应的阻尼角正好是 45° 。在具体设计时,一般将 ζ 取为 $0.6 \sim 0.8$ 。

优化系统阻尼比可以采用局部反馈的办法。将典型二阶系统画成图 3-22 所示结构。

为了改变系统的阻尼比,可以采用一个局部反馈(图 3-23)。

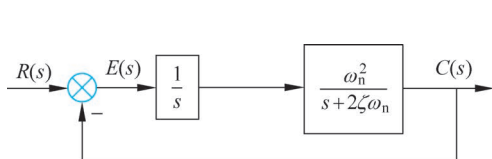


图 3-22 典型二阶系统

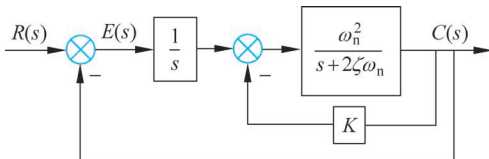


图 3-23 优化二阶系统阻尼比的方案

局部反馈组成的闭环传递函数是 $\frac{\omega_n^2}{s + 2\left(\zeta + \frac{K\omega_n}{2}\right)\omega_n}$, 无阻尼振荡频率没有变化,但是

阻尼比成为 $\zeta + \frac{K\omega_n}{2}$ 。可以通过选择 K 将阻尼比配置到适当值。

当阻尼比为二阶工程最佳的时候,即 $\zeta = 0.707$,容易计算:

$$M_p = e^{-\pi} \approx 4.3\%, \quad \omega_n t_r = \frac{3\sqrt{2}}{4}\pi \approx 3.33,$$

$$\omega_n t_s = 6.14(2\%), \quad \omega_n t_s = 4.73(5\%)$$

其中的调整时间是利用包络线算出的,没有用近似式(3-83)和式(3-84),它比近似公式要稍微大些。

如果将目标函数取成 $J = \int_0^\infty t |e(t)| dt$, 其中 $e(t) = r(t) - c(t)$ 为误差。可以证明当

阻尼比取成 $\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, J 取到最小值。这个指标综合考虑了误差和时间,反映了快速性和相对稳定性的要求。这与我们前面的分析是一致的。

3.5 高阶系统的动态响应

3.5.1 高阶系统动态响应的特点

一般将 3 阶以上的系统称为高阶系统。严格地说,实际的控制系统大多是高阶的。

高阶系统的传递函数零、极点表达形式为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_r(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)} \quad (3-86)$$

设系统有不相同的实极点和共轭复极点。当输入为单位阶跃函数时,响应 $C(s)$ 是

$$C(s) = \frac{K_r \prod_{i=1}^m (s+z_i)}{s \prod_{j=1}^q (s+p_j) \prod_{k=1}^r (s^2 + 2\zeta_k \omega_k s + \omega_k^2)} \quad (3-87)$$

式中, $q+2r=n$ 。展开成部分分式:

$$C(s) = \frac{a_0}{s} + \sum_{j=1}^q \frac{a_j}{s+p_j} + \sum_{k=1}^r \frac{b_k(s+\zeta_k \omega_k) + c_k \omega_k \sqrt{1-\zeta_k^2}}{s^2 + 2\zeta_k \omega_k s + \omega_k^2} \quad (3-88)$$

对上式进行拉氏反变换,求得系统的单位阶跃响应为

$$\begin{aligned} c(t) = & a_0 + \sum_{j=1}^q a_j e^{-p_j t} + \sum_{k=1}^r b_k e^{-\zeta_k \omega_k t} \cos \omega_k \sqrt{1-\zeta_k^2} t \\ & + \sum_{k=1}^r c_k e^{-\zeta_k \omega_k t} \sin \omega_k \sqrt{1-\zeta_k^2} t \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (3-89)$$

式中的系数 a_j 、 b_k 和 c_k 的值,取决于式(3-86)中各参数。

图 3-24 给出高阶系统单位阶跃响应的一些典型形式。

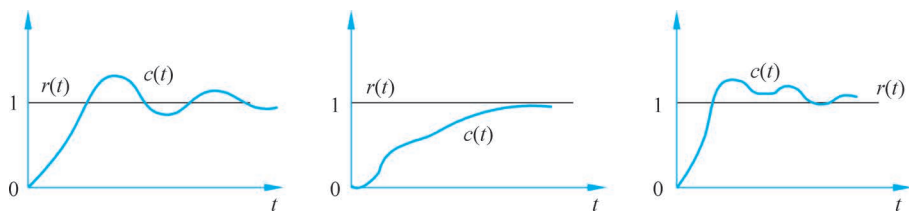


图 3-24 高阶系统的单位阶跃响应曲线

由式(3-89)可见:

(1) 如果式(3-86)中所有 p_j 的实部大于零,则高阶系统单位阶跃响应的稳态响应是

$$c(\infty) = a_0 = \frac{K_r \prod_{i=1}^m z_i}{\prod_{j=1}^n p_j}。若系统是稳定的,动态响应是一些衰减的指数函数和正弦函数的$$

线性组合,所以高阶系统的响应曲线常是由一些不同振幅、不同频率的振荡曲线叠加而成的。

(2) 稳定系统的所有极点均具有负实部,极点负实部的绝对值越大,即极点离虚轴越远,与之对应的响应分量衰减得越快。因此系统的响应主要由靠近虚轴的极点决定。

3.5.2 主导极点和偶极子

用直接求解高阶系统微分方程的方法来分析系统的性能往往比较困难。目前解决的方法有两种:一是借助计算机,如用 MATLAB 软件求解;二是将高阶系统用一个二阶系统来

近似,利用二阶系统的动态响应指标来分析和设计高阶系统。过去主要常用后一种方法,此时需引入主导极点的概念。

1. 主导极点

如果高阶系统距虚轴最近的极点至多与其他极点距虚轴的距离小的 $\frac{1}{5}$,并且它附近没有零点,那么距虚轴最近的极点对系统响应将起主导作用,这种极点叫作系统的主导极点。主导极点通常是一对共轭复极点,很多高阶系统都有一对主导极点。尽管这是一种近似,但在系统研究中,避免了部分分式分解和大量的拉氏反变换,给系统分析和设计带来了方便。

例 3-15 三阶系统的闭环传递函数

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{312\,000}{(s+60)(s^2+20s+5200)}$$

系统闭环极点 $p_{1,2} = -10 \pm j71.4$, $p_3 = -60$, 该系统单位阶跃响应的精确解为

$$c(t) = 1 - 0.143e^{-10t} \sin(71.4t + 27.03^\circ) - 0.684e^{-60t} \quad (3-90)$$

若考虑到一对共轭复极点 p_1 、 p_2 的实部和实极点 p_3 的实部之比为

$$\frac{\operatorname{Re}[p_1]}{\operatorname{Re}[p_3]} = \frac{-10}{-60} = \frac{1}{6} < \frac{1}{5}$$

根据主导极点的定义, p_1 、 p_2 可视为一对主导极点。这一点由式(3-90)不难理解, 随时间 t 的增大, 闭环极点 p_3 所对应的动态分量很快衰减到零, 而且该极点离虚轴越远, 其对应的动态分量衰减的速度越快, 对系统的影响就越小。若忽略 p_3 的影响, 则得到近似系统

$\frac{5200}{s^2+20s+5200}$, 它的单位阶跃响应为

$$c_1(t) = 1 - 1.01e^{-10t} \sin(71.4t + 82.07^\circ) \quad (3-91)$$

图 3-25 给出它们的比较, 可以看出近似程度是理想的, 尤其是波型的跟踪效果很好。

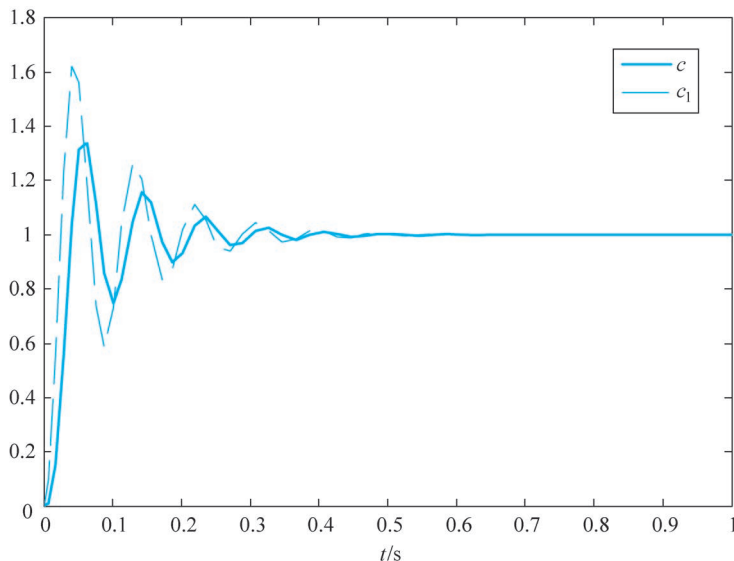


图 3-25 例 3-15 的输出和近似输出的比较

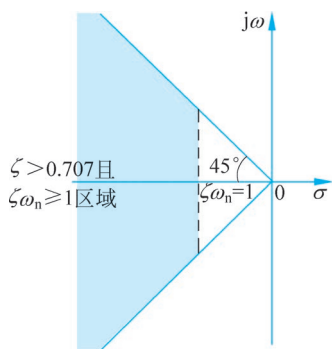


图 3-26 例 3-16 要求的主导极点的区域

例 3-16 如果希望某高阶系统满足性能指标: 阶跃响应的最大超调量 $\leq 4.3\%$, 按 2% 准则的调整时间 $t_s \leq 4\text{s}$ 。试确定主导极点在 s 平面上的区域。

解 对应于二阶系统来说, 超调量为 4.3% 时的阻尼比 $\zeta = 0.707$, 而 $\theta = \arccos \zeta = 45^\circ$, 所以 $\zeta = 0.707$, 它对应 s 平面上与负实轴夹角为 45° 的直线。按 2% 准则调整时间 $t_s \leq 4\text{s}$ 的要求, 有

$$t_s = \frac{4}{\zeta \omega_n} \leq 4$$

$$\zeta \omega_n \geq 1$$

这样, 就决定了满足要求的极点在 s 平面上的区域为如图 3-26

所示的灰色区域。

主导极点的具体位置还必须结合对系统的其他要求, 如上升时间 t_r 等来最后确定。

在运用主导极点来设计系统时, 还有一个概念要介绍, 这就是偶极子。

2. 偶极子

如果一个极点和一个零点重合, 称为偶极子。偶极子的极点和零点互相抵消, 对系统响应没有影响。如果极点和零点之间距离小于它们与主导极点之间距离的 $1/10$, 也可当作偶极子处理。远离坐标原点的偶极子对系统动态性能的影响可以忽略。

例 3-17 某三阶系统的闭环传递函数为

$$W(s) = \frac{62.5(s + 2.5)}{(s^2 + 6s + 25)(s + 6.25)}$$

系统极点为 $-3 \pm j4$ 和 -6.25 , 零点是 -2.5 , 它们在 s 平面上的分布如图 3-27 所示。

先不考虑实极点和实零点的影响。一对复极点的 $\zeta = 0.6$, $\omega_n = 5$, 按二阶系统的动态性能指标, 超调量为 $M_p = 10\%$, 2% 误差的调整时间为 $t_s = 1.33\text{s}$ 。只考虑系统零点对动态响应的影响时, 通过计算得系统的超调量为 $M_p = 55\%$, 调整时间为 $t_s = 1.33\text{s}$ 。

如同时考虑实极点的影响, 通过计算机仿真, 超调量为 $M_p = 38\%$, 调整时间为 $t_s = 1.6\text{s}$ 。

显然, 由于实零点与复极点的实部数值相当, 所以对系统动态响应有较大的影响。虽然实极点的实部大于复极点实部的两倍, 但它对系统的影响也是不可忽略的。并且可以看到, 零点使系统的响应加速, 从而增大了超调量。附加极点则起到阻尼作用, 一方面减小了系统的超调量, 另一方面延长了调整时间。

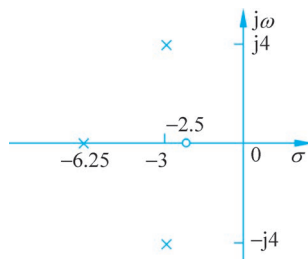


图 3-27 例 3-17 系统的零、极点分布

3.6 利用 MATLAB 分析系统性能

本节介绍应用 MATLAB 求取线性系统的动态响应, 分析系统的时域性能指标。主要介绍求取系统动态响应的 step、impulse 和 lsim 命令。

3.6.1 step 命令

step 是求取系统单位阶跃响应的命令,格式如下:

step(sys) 计算并绘制线性系统 sys 的单位阶跃响应。

step(sys,t) 功能同上,并可以指定仿真终止时间 t。t 是仿真的时间轴,可以是标量,也可以通过“t=0:步长:终止时间”设定时间矢量。

step(sys1,sys2,...,sysN)和 step(sys1,sys2,...,sysN,t) 同时绘制多个系统的单位阶跃响应。

step(sys1,PlotStyle1,...,sysN,PlotStyleN) 功能同以上命令,并可指定曲线的绘制属性,如颜色和线型等。

例 3-18 已知二阶系统的输出拉氏变换为

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} R(s) \quad (3-92)$$

用 step 命令绘制 $\zeta = 0.1, 0.2, 0.4, 0.7, 1.0, 2.0$ 的单位阶跃响应曲线,横坐标取相对时间 $\omega_n t$ 。

解 要绘制多条曲线,所以选用上述第三条命令: step(sys1,sys2,...,sysN,t)。具体命令如下:

```
t=[0:0.1:12];
num=[1];
zt1=0.1; den1=[1,2*zt1,1];
zt2=0.2; den2=[1,2*zt2,1];
zt3=0.4; den3=[1,2*zt3,1];
zt4=0.7; den4=[1,2*zt4,1];
zt5=1.0; den5=[1,2*zt5,1];
zt6=2.0; den6=[1,2*zt6,1];
sys1=tf(num,den1);
sys2=tf(num,den2);
sys3=tf(num,den3);
sys4=tf(num,den4);
sys5=tf(num,den5);
sys6=tf(num,den6);
step(sys1,sys2,sys3,sys4,sys5,sys6,t)
```

执行后,屏幕显示所有 ζ 值下的响应曲线,如图 3-28 所示。

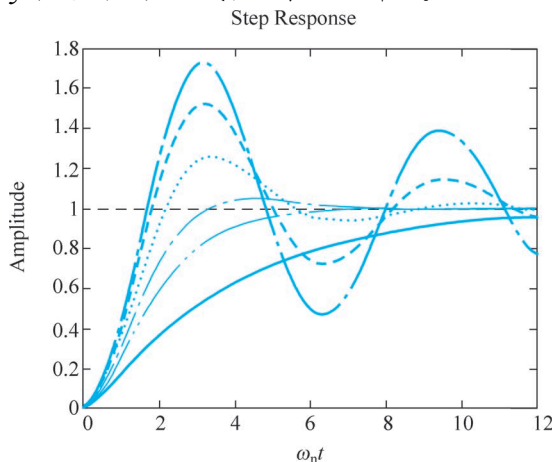


图 3-28 不同 ζ 值下,系统的单位阶跃响应

3.6.2 impulse 命令

impulse 是求取系统单位脉冲响应的命令。impulse 命令与 step 命令有相同的格式,其功能也相同,但求取的是系统单位脉冲响应。具体格式如下:

impulse(sys) 计算并绘制线性系统 sys 的单位脉冲响应。

impulse(sys,t) 功能同上,并可以指定仿真终止时间 t。t 是仿真的时间轴,可以是标量,也可以通过“t=0: 步长: 终止时间”设定时间矢量。

impulse(sys1,sys2,...,sysN)和 impulse(sys1,sys2,...,sysN,t) 同时绘制多个系统的单位脉冲响应。

impulse(sys1,PlotStyle1,...,sysN,PlotStyleN) 功能同以上命令,并可指定曲线的绘制属性,如颜色和线型等。

例 3-19 求上例的单位脉冲响应。

解 只要将上例中的最后一条命令改为 impulse(sys1,sys2,sys3,sys4,sys5,sys6,t)。屏幕上显示脉冲响应曲线,如图 3-29 所示。 ■

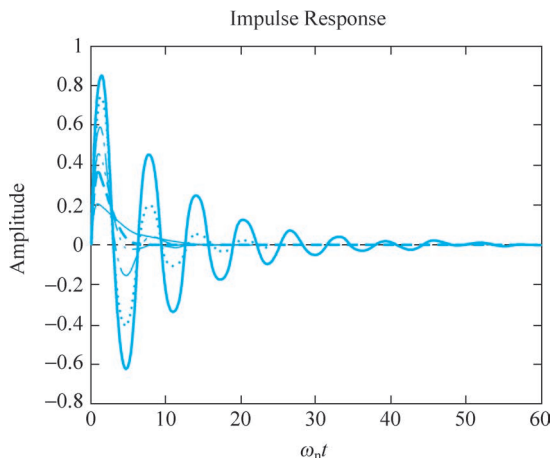


图 3-29 不同 ζ 值下,系统的单位脉冲响应

3.6.3 lsim 命令

lsim 是求取系统对任意输入响应的命令,格式如下:

lsim(sys,u,t) 计算并绘制线性系统 sys 在输入为 $u(t)$ 时的响应。时间 t 是仿真的时间轴,通过“t=0: 步长: 终止时间”设定时间矢量。u 中给出每个时刻的输入序列,所以它是向量。

lsim(sys1,sys2,...,sysN,u,t) 同时仿真多个系统。

lsim(sys1,PlotStyle1,sys2,PlotStyle2,...,sysN,PlotStyleN,u,t) 可以指定各系统曲线的绘制属性,如颜色、线型等。

例 3-20 计算下列二阶系统的单位斜坡响应

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^2 + 0.4s + 1}$$

解 用以下命令可求得结果:

```
num=1;
den=[1,0.4,1];
sys=tf(num,den);
t=[0:0.1:10];
u=t;
lsim(sys,u,t)
```

屏幕上显示系统的单位斜坡响应曲线,如图 3-30 所示。

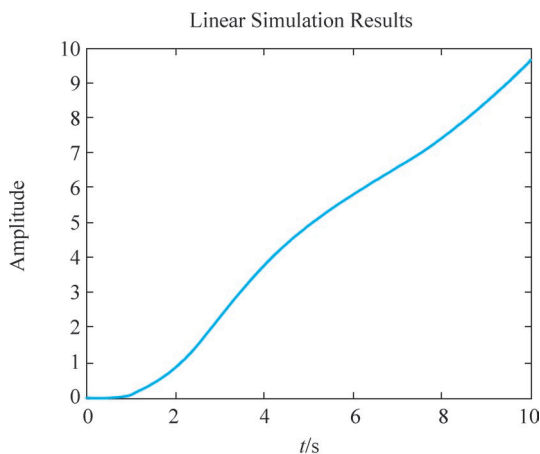


图 3-30 例 3-20 系统的单位斜坡响应曲线

还可用 step 命令计算斜坡响应。单位斜坡信号等于单位阶跃信号的积分,因此可以在系统的传递函数中人为地串联一个积分环节后,其单位阶跃响应就是原系统的单位斜坡响应。

原系统中串联一个积分环节后的传递函数为

$$W_1(s) = \frac{1}{s} \times \frac{1}{s^2 + 0.4s + 1}$$

执行以下命令:

```
num=1;
den=[1,0.4,1,0];
sys=tf(num,den);
step(sys,10)
```

可获得相同的结果。

小结

线性定常系统的时域分析是经典控制理论的基础,它包括分析系统的稳定性、稳态特性和动态特性。

分析系统特性从理论上讲可以通过用求解系统微分方程的方法进行。但要求解析解不只是计算复杂,而且对高阶系统来说常常是不可行的。因此在控制理论中总是设法寻求其他方法来解决系统的分析问题。

闭环系统稳定性是系统动态特性中最重要的性质。工程系统能正常工作的前提必须是稳定的。在时域中研究系统稳定性的主要手段是劳斯稳定性判据。但劳斯判据在分析系统稳定性中的应用是有局限性的,它不能给出如何使不稳定的系统稳定的方法。

系统稳态特性是系统的控制精度问题,对于稳定系统,它用系统的稳态误差系数表征,包括位置误差系数 K_p 、速度误差系数 K_v 、加速度误差系数 K_a 。它们分别反映了系统在单位阶跃输入、单位速度输入和单位加速度输入时,系统稳态误差的大小。稳态误差系数由系统的结构和参数决定。在结构上,是开环系统中所含有积分器的数量,或在 s 平面上 $s=0$ 的极点数。在参数上,是系统的开环增益 K 。系统是否存在稳态误差决定于系统的结构及输入信号的类型,稳态误差的大小则决定于系统的参数及输入信号的大小。

系统的动态特性是由系统动态响应特性决定的,为了定量描述系统的动态特性,用表征系统动态响应的一些参数作为系统的动态性能指标,主要有超调量 M_p 、调整时间 t_s 、上升时间 t_r 和延迟时间 t_d 。超调量 M_p 和调整时间 t_s 反映系统的相对稳定性;上升时间 t_r 和延迟时间 t_d 则反映了系统响应的快速性。快速性和相对稳定性都是系统所要求的,但二者往往存在矛盾,需要在设计中合理选优,折中处理。

实际系统大多是高阶系统,许多高阶系统的动态特性都可以用主导极点近似。因此,二阶系统的动态响应指标对高阶系统仍然有实际意义。二阶系统的主要参数是阻尼比 ζ 和无阻尼振荡角频率 ω_n ,它们决定了两个极点在 s 平面上的位置,也决定了二阶系统动态响应指标。

MATLAB 软件提供了许多计算系统动态响应的命令,它为高阶系统的仿真提供了便利条件,可以在实际工作中灵活运用。

数学家——爱德华·约翰·劳斯

爱德华·约翰·劳斯(Edward John Routh, 1831年1月20日—1907年6月7日),英国数学家,英国皇家学会会员,亚当斯奖获得者。生于加拿大魁北克市,父亲是曾在滑铁卢服役的英国军官 Randolph Isham Routh 爵士,母亲是 Taschereau 的妹妹 Marie Louise。



劳斯 11 岁时到英国学习数学,先是在伦敦师从奥古斯都·德·摩根,然后在剑桥师从托德亨特和霍普金斯。1854 年,他在剑桥大学的期末考试中获得第一名,并因此获得“Senior Wrangler”称号(注:麦克斯韦(Maxwell)名列第二)。毕业后,劳斯在剑桥大学彼得豪斯学院担任数学私人教练。1855—1888 年,他指导了 600 多名学生,其中 28 人成为“Senior Wrangler”,这是一项无与伦比的荣誉。在 19 世纪中叶剑桥大学鼎盛时期,劳斯作为数学 Tripos

考试的杰出教练而闻名。

在教学之余,劳斯还抽时间写书,以及进行原创性研究。1855 年,他与 Henry Brougham 合作出版了《分析观点:艾萨克·牛顿原理》。1860 年出版了教科书《刚体系统动

力学》，该书拥有广泛受众，使他的稳定性研究走向了世界；在德国，它引起了数学家费利克斯·克莱因和理论物理学家阿诺德·索末菲的注意，当时他们正在准备一篇关于陀螺和陀螺仪的大型论文。这本书对威廉·汤姆森和彼得·格思里·泰特的《自然哲学论》（1867年出版）也产生了很大影响。劳斯的最大贡献是关于运动稳定性方面的研究，剑桥大学也因此授予他亚当斯奖。1876年劳斯提出了著名的劳斯稳定判据，用以确定线性定常系统特征多项式的所有根是否都有负实部，为控制系统理论的发展作出了巨大贡献。

知识点自测

本节通过判断题、单选题和多选题来检测读者对本章知识点的掌握程度，为了便于自我检测，本章末尾给出了解答。

判断题(判断下列说法是否正确)

- 3-1 自动控制系统能正常工作的首要条件是系统必须是稳定的。
- 3-2 在初始条件为零时，如果线性系统的单位脉冲响应是发散的，则系统不稳定。
- 3-3 稳定的系统是指对于任意输入，其输出都是有界的。
- 3-4 线性定常系统稳定的充分必要条件是系统特征方程式的所有根都小于零。
- 3-5 线性系统的稳定性取决于系统内部的固有特性。
- 3-6 线性定常系统的阶跃响应在稳态时持续等幅震荡，说明系统在 s 右半开平面没有闭环极点。
- 3-7 线性定常系统稳定的充分必要条件是劳斯表中的首列元素不改变符号。
- 3-8 劳斯稳定性判据能够有效地分析任何系统的稳定性。
- 3-9 劳斯稳定性判据是一种根据系统特征方程的系数来判别闭环系统稳定性的代数判据。
- 3-10 劳斯表最后两行中，每行只有一个元素。
- 3-11 如果线性定常系统的单位脉冲响应呈现等幅持续振荡，则其劳斯表中必出现全零行。
- 3-12 如果一个系统的所有闭环极点都在 $s = -\sigma_1$ 的左边，则该系统具有稳定裕量 σ_1 。
- 3-13 线性定常系统的稳态误差仅与系统的结构参数有关，与参考输入无关。
- 3-14 只有对于稳定的系统，稳态误差才有意义。
- 3-15 临界稳定的二阶线性系统的阶跃响应稳态误差可以通过稳态误差系数来计算。
- 3-16 对于稳定的线性定常系统，其有限稳态误差与其开环增益 K 有关； K 越大，稳态误差就越小。
- 3-17 线性定常系统的开环增益越大，稳定性越好，稳态性能也越好。
- 3-18 为了减小输入信号引起的稳态误差，可以提高开环传递函数的积分环节个数和增益。
- 3-19 一阶线性定常系统的时间常数越大，闭环极点离虚轴的距离越近，瞬态响应的速度越慢。
- 3-20 对于典型二阶系统来说，其在单位阶跃信号作用下的最大超调量仅是阻尼比的函数。

- 3-21 线性定常二阶系统的复极点实部距离虚轴越近,系统的过渡过程调整时间越长。
- 3-22 在典型二阶系统中,欠阻尼是指系统的阻尼比小于零。
- 3-23 稳定的高阶系统的动态响应是一些衰减的指数函数和正弦函数的线性组合。
- 3-24 如果高阶系统存在一对主导极点,则可用二阶系统来近似。
- 3-25 如果系统极点和零点之间的距离小于它们与主导极点之间距离的 $1/10$,则称为偶极子。

单项选择题(每小题列出的选项中只有一个选项是符合题目要求的)

- 3-26 理想单位脉冲信号 $\delta(t)$ 的积分等于()。
- A. 0 B. 1 C. 2 D. $+\infty$
- 3-27 控制系统的稳定性分为绝对稳定性和相对稳定性。其中,“相对稳定性”是指系统()。
- A. 稳定的程度 B. 稳定的条件 C. 是否稳定 D. 临界稳定
- 3-28 处于平衡状态的系统,在受到扰动作用后会偏离原来的平衡状态。若扰动消失后,经过一段时间,系统又恢复到原平衡状态,则该系统()。
- A. 稳定 B. 临界稳定
C. 不稳定 D. 稳定或临界稳定
- 3-29 某线性定常系统的特征方程的全部系数同号,且无一系数为零,则该系统()。
- A. 稳定 B. 临界稳定
C. 不稳定 D. 可能稳定也可能不稳定
- 3-30 若系统特征方程的阶次为 n ,则其劳斯表的行数等于()。
- A. $n-1$ B. n C. $n+1$ D. $n+2$
- 3-31 反映系统控制精度的时域指标是()。
- A. 稳态误差 B. 稳定性 C. 动态特性 D. 快速性
- 3-32 假设某线性定常系统是稳定的,其稳态位置误差系数、速度误差系数和加速度误差系数分别为 K_p 、 K_v 和 K_a ,则当输入信号 $r(t)=Rt$ 时,系统的稳态误差为()。
- A. $R/(1+K_p)$ B. R/K_a
C. R/K_v D. $R/(1+K_v)$
- 3-33 信号 $r(t)=Rt^2/2$ 的拉氏变换 $R(s)$ 为()。
- A. R/s^3 B. $2R/s^3$ C. $R/2s^3$ D. $1/s^3$
- 3-34 若某线性定常系统在速度信号作用下的稳态误差为非零常数,则该系统的类型为()。
- A. 0 型 B. 1 型 C. 2 型 D. 3 型
- 3-35 已知某单位负反馈系统在单位阶跃输入信号作用下的稳态误差为零,且系统闭环特征方程为 $s^3+2s^2+3s+2=0$,则系统的开环传递函数不可能为()。
- A. $G(s)=\frac{2}{s(s^2+2s+3)}$ B. $G(s)=\frac{3s+2}{s^2(s+2)}$
C. $G(s)=\frac{1}{s^3+2s^2+3s+1}$ D. $G(s)=\frac{2s^2+3s+2}{s^3}$
- 3-36 下列哪种措施对改善系统的控制精度没有效果:()。

- A. 增加积分环节
B. 提高系统的开环增益
C. 增加微分环节
D. 引入扰动补偿

3-37 已知某单位负反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = 1/Ts$, 若取误差限 $\Delta = 5\%$, 则调整时间 t_s 为()。

- A. T B. $2T$ C. $3T$ D. $4T$

3-38 某单位负反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = K/s(Ts + 1)$, 若 T 增大, 则系统的()。

- A. 调整时间增大 B. 阻尼比增大
C. 快速性改善 D. 超调量减小

3-39 在二次振荡环节中, 当阻尼比 $\zeta = 1$ 时, 其阶跃响应 $c(t)$ 为()。

- A. 等幅振荡 B. 衰减振荡 C. 阻尼振荡 D. 单调上升

3-40 已知单位负反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = 16/s(s + 5)$, 则系统的输出响应曲线为()。

- A. 发散振荡 B. 衰减振荡 C. 等幅振荡 D. 单调上升

3-41 下列各个因素中对系统动态性能的影响可以忽略不计的是()。

- A. 主导极点 B. 靠近虚轴的零点
C. 靠近虚轴的极点 D. 远离坐标原点的偶极子

多项选择题(每小题列出的选项中有两个或两个以上选项是符合题目要求的)

3-42 下述关于选择典型测试信号的说法中, 正确的有()。

- A. 选取输入信号的典型形式应大致反映系统的实际工作情况
B. 要从系统工作最有利情况出发来选取典型测试信号
C. 选取的典型测试信号要尽可能简单
D. 典型测试信号的选取需要考虑经济条件的限制

3-43 线性定常系统稳定的充分必要条件是: ()。

- A. 系统的所有特征根都位于闭左半复平面内
B. 系统的所有特征根都小于零
C. 系统的所有特征根都具有负实部
D. 系统特征根中的所有实根小于零, 所有复根具有负实部
E. 系统的所有特征根都位于左半复平面实轴上

3-44 下列关于劳斯稳定判据的说法中正确的是()。

- A. 系统稳定的必要条件是系统特征方程的所有系数同号且不为零
B. 系统稳定的充分必要条件是劳斯表首列元素不为零, 且不改变符号
C. 劳斯判据以开环传递函数判定闭环系统的稳定性
D. 劳斯表某一行中各数都乘以一个整数, 不影响系统稳定性的判断
E. 劳斯表首列元素符号变化的次数等于系统特征方程所具有的负实部根的数目

3-45 已知某 I 型系统在输入信号 $r(t)$ 的作用下产生的稳态误差为非零常数, 则该输入信号可能为()。

- A. $r(t) = 1$ B. $r(t) = 2t$

- C. $r(t) = 0.5t^2$ D. $r(t) = 1 + 2t$
 E. $r(t) = 1 + 2t + 0.5t^2$
- 3-46 对于Ⅱ型系统,下列说法正确的是()。
- A. 能无静差地跟随阶跃信号 B. 能无静差地跟随斜坡信号
 C. 能无静差地跟随加速度信号 D. 能有静差地跟随速度信号
 E. 能无静差地跟随抛物线信号
- 3-47 在自动控制系统中,能反映系统快速性的量包括()。
- A. 峰值时间 t_p B. 延迟时间 t_d
 C. 上升时间 t_r D. 调整时间 t_s
 E. 最大超调量 M_p
- 3-48 对于典型的欠阻尼二阶系统,若无阻尼自然振荡频率 ω_n 不变,阻尼比 ζ 减小,则下列说法中正确的有()。
- A. 调整时间 t_s 增大 B. 最大超调量 M_p 减小
 C. 峰值时间 t_p 减小 D. 系统的稳定性改善
 E. 系统的快速性提高

自测参考答案

判断题: (1) T; (2) T; (3) F; (4) F; (5) T; (6) T; (7) F; (8) F; (9) T; (10) T;
 (11) T; (12) T; (13) F; (14) T; (15) F; (16) T; (17) F; (18) T; (19) T; (20) T;
 (21) T; (22) F; (23) T; (24) T; (25) T

单项选择题: (26) B; (27) A; (28) A; (29) D; (30) C; (31) A; (32) C; (33) A;
 (34) B; (35) C; (36) C; (37) C; (38) A; (39) D; (40) B; (41) D

多项选择题: (42) AC; (43) CD; (44) AB; (45) BD; (46) AB; (47) ABCD;
 (48) AC

习题

A 基本题

A3-1 如图 A3-1 系统,用劳斯判据判别系统的稳定性。若不稳定,确定有几个根在右半 s 平面。

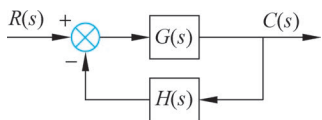


图 A3-1 题 A3-1 的系统方框图

$$(1) G(s) = \frac{10}{s(s-1)(2s+3)}, H(s) = 1$$

$$(2) G(s) = \frac{1}{(s-1)}, H(s) = \frac{s-1}{s+1}$$

$$(3) G(s) = \frac{12}{s(s+1)}, H(s) = \frac{1}{s+3}$$

A3-2 确定使下列系统稳定的 K 值范围。

$$(1) s^4 + 22s^3 + 10s^2 + 2s + K = 0 \quad (2) 0.1s^3 + s^2 + s + K = 0$$

A3-3 试确定下列单位负反馈系统的位置误差系数 K_p , 速度误差系数 K_v 和加速度误差系数 K_a ($G(s)$ 是前向通道传递函数)。

$$(1) G(s) = \frac{50}{(1+0.1s)(s+2)} \quad (2) G(s) = \frac{K}{s(s^2+4s+200)}$$

$$(3) G(s) = \frac{K(1+2s)(1+4s)}{s^2(s^2+2s+10)} \quad (4) G(s) = \frac{6}{s(s+1)(s+2)}$$

A3-4 试画出满足下列要求的共轭复极点在 s 平面上的分布范围。

$$(1) \zeta \geq 0.707, \omega_n \leq 2\text{rad/s} \quad (2) 0 \leq \zeta \leq 0.707, \omega_n \leq 2\text{rad/s}$$

$$(3) 0.5 \leq \zeta \leq 0.707, \omega_n \leq 2\text{rad/s}$$

A3-5 用劳斯判据判定题 D2-1 系统的稳定性,并判断在右半 s 平面上的根数。将结果与题 D2-1 的结果进行比较。

A3-6 某闭环系统如图 A3-2 所示。

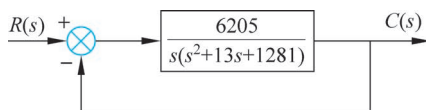


图 A3-2 题 A3-6 闭环系统

(1) 求系统的传递函数 $C(s)/R(s)$;

(2) 计算系统的稳态误差系数;

(3) 求闭环系统的零、极点;

(4) 用 MATLAB 求系统的单位阶跃响应曲线;

(5) 讨论闭环极点对系统动态响应的影响,哪些极点起主导作用,哪些极点有重要影响。

A3-7 某反馈系统如图 A3-3 所示。

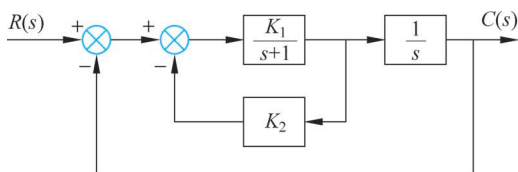


图 A3-3 题 A3-7 系统图

(1) 选择 K_1, K_2 , 使系统的 $\zeta = 0.707, \omega_n = 2\text{rad/s}$;

(2) 选择 K_1, K_2 , 使系统有两个相等的实根 $s = -10$;

(3) 分别求(1)、(2)两种情况下,系统的超调量 M_p , 以及情况(1)下的调整时间 t_s 和上升时间 t_r 。

A3-8 某单位反馈系统的闭环传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k_1(s + \omega_1)}{s^3 + \omega_2 s^2 + k_1 s + k_1 \omega_1}$$

试求输入为 $r(t) = t^2 u(t)$ 时,系统的稳态输出函数表达式。

A3-9 求满足下列各项指标的共轭复极点在 s 平面上配置的区域:

$$\zeta = 0.5, \quad \omega_n \leq 3\text{rad/s}, \quad t_r \leq 1\text{s}$$

A3-10 某系统有一对共轭主导复极点。根据下列指标要求,分别画出主导复极点在 s 平面上的分布区域。

$$(1) 0.5 \leq \zeta \leq 0.707, \quad \omega_n \geq 10\text{rad/s} \quad (2) \zeta \leq 0.707, \quad 5\text{rad/s} \leq \omega_n \leq 10\text{rad/s}$$

$$(3) 0.8 \geq \zeta \geq 0.707, \quad \omega_n \geq 10\text{rad/s} \quad (4) \zeta \geq 0.6, \quad \omega_n \leq 6\text{rad/s}$$

$$(5) \zeta \geq 0.9, \quad \omega_n \leq 0.1\text{rad/s}$$

并计算满足各指标时,系统的超调量 M_p 和按 2% 准则的调整时间 t_s 。

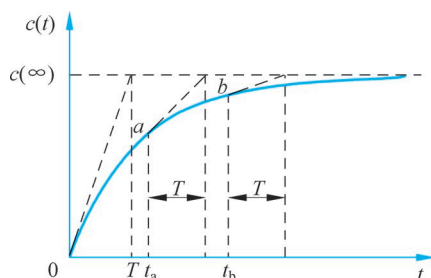


图 B3-1 一阶系统动态响应曲线

B 深入题

B3-1 试证明在一阶系统动态响应曲线上任意点起,以该点的上升速度上升,达到 $c(\infty)$ 所需的时间都是 T 。如图 B3-1 所示,自原点 0 , a 点, b 点起,保持各点的上升速度 $\left. \frac{dc(t)}{dt} \right|_{t=0}$, $\left. \frac{dc(t)}{dt} \right|_{t=t_a}$, $\left. \frac{dc(t)}{dt} \right|_{t=t_b}$, 上升到 $c(\infty)$ 所需的时间都是 T 。

B3-2 某系统的传递函数未知,对系统施加输入信号 $r(t)=t(t \geq 0)$,当系统的初始条件为零时,系统的输出响应为 $c(t)=1+\sin t+2e^{-2t}$, $t \geq 0$ 。试确定系统的传递函数。

B3-3 试证明图 B3-2 系统,由扰动 $N(s)$ 引起的系统稳态误差为

$$e_{ssn} = \lim_{s \rightarrow 0} s E_N(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s N(s) \frac{-G_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

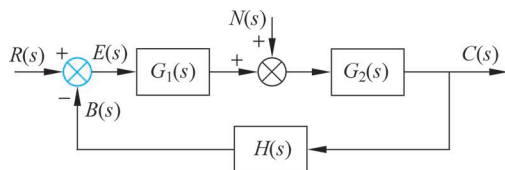


图 B3-2 题 B3-3 系统方框图

B3-4 某系统的方框图如图 B3-3 所示。

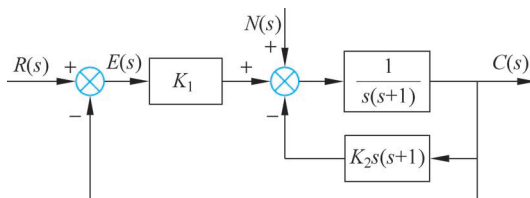


图 B3-3 题 B3-4 系统方框图

试求:

- (1) 系统的稳态误差系数 K_p 、 K_v 、 K_a ;
- (2) 由单位阶跃扰动引起的稳态误差 e_{ssn} ;
- (3) 系统的阻尼比 ζ 与无阻尼振荡角频率 ω_n ;
- (4) 选择 K_1 和 K_2 ,使系统单位阶跃响应的超调量 $M_p \leq 5\%$;在斜坡输入下,稳态误差最小;尽量减小阶跃扰动引起的稳态误差。

B3-5 太空望远镜指向控制系统的简化框图如图 B3-4 所示。

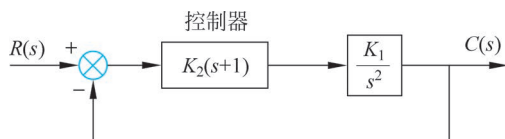


图 B3-4 太空望远镜指向控制系统的简化框图

- (1) 选择 K_1 和 K_2 , 使系统单位阶跃响应的超调量 $M_p \leq 5\%$ (用 MATLAB 解);
- (2) 计算系统单位阶跃响应和单位速度响应的稳态误差。

B3-6 考虑图 B3-5 描述的系统, 其中参数 K 和 F 都是正数。如果要求系统的阻尼比是二阶工程最佳参数, 试求它们的取值范围。

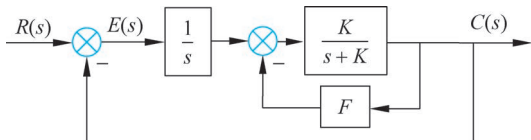


图 B3-5 题 B3-6 系统

C 实际题

C3-1 图 C3-1 为位置随动系统, 图中, M 是电动机, R_a, L_a 是电枢电路的电阻和电感, J_m 是电动机轴上的总转动惯量, B_m 是阻尼系数, 设电动机的力矩系数是 K_t , 反电势常数是 K_b 。 G 是测速发电机, 其电动势 $e_g = K_g \omega$, 电位器 W 的传输系数为 K_s , N_1 与 N_2 为减速齿轮的齿数。当 $u_3 \geq 0$ 时 $u_a \geq 0$ 。当 $i_a > 0$ 时, 测速发电机的极性和电位器 W_c 电刷移动方向如图所示。 R_i 是电流反馈电阻, 电流反馈的作用是稳定电动机的转速。试求:

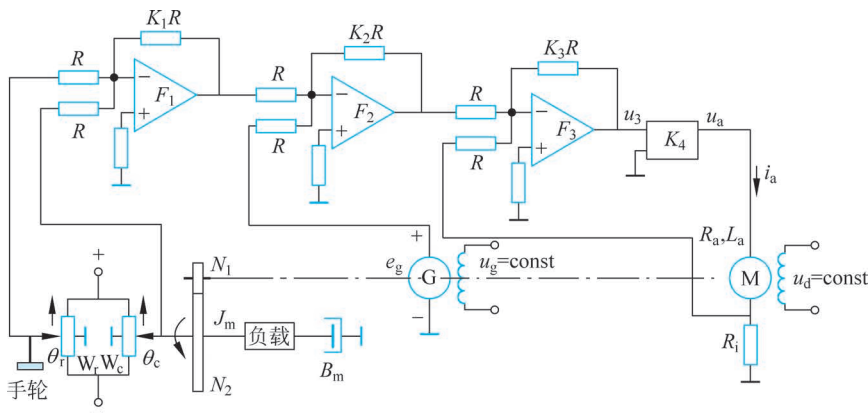


图 C3-1 位置随动系统

- (1) 系统的传递函数, 并画出系统的方框图。
- (2) 你认为系统的连线是否正确? 如果连线错误, 请改正。
- (3) 通常 $J_m/B_m \gg L_a/R_a$, 指出当断开和接通测速发电机的反馈连线时, 系统起主导作用的极点。从中说明测速发电机的作用。

(4) 计算系统的稳态误差系数 K_p, K_v, K_a , 系统是什么类型的系统, 为什么?

C3-2 电枢控制直流电动机可以看成是速度控制系统, 反电势是系统的反馈信号。

- (1) 按照第 2 章给出的电枢控制电动机的方程式 (2-76) ~ 式 (2-79), 画出系统的方框图;

(2) 假定 R_a, L_a, J, b, K_t 和 K_e 皆等于 1, 当以阶跃指令改变电枢电压 u_a 来改变电机的转速后, 计算系统的稳态误差;

(3) 为使系统阶跃响应的超调量 $M_p \leq 10\%$, 系统的反馈增益 K_e 应当多大?

C3-3 图 C3-2 中的三个 RC 网络分别是相位超前校正网络(a)、相位滞后校正网络(b)

和相位超前-滞后校正网络(c),它们在控制系统的设计中是十分有用的。

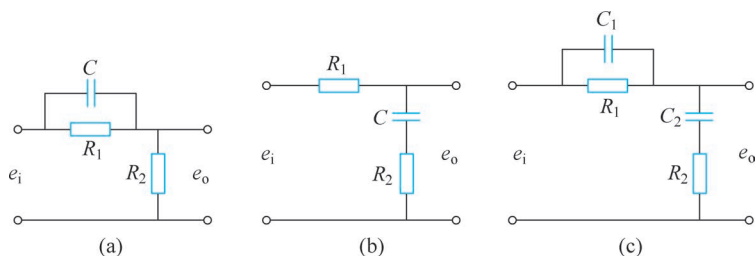


图 C3-2 三种校正 RC 网络

(1) 分别推导它们的传递函数;

(2) 假定 $R_1=R_2=1\text{k}\Omega$, $C=C_1=C_2=1\mu\text{F}$, 分别画出它们的零、极点在 s 平面上的位置;

(3) 分别求输入 $E_i(s)=\frac{1}{s}$ 时, 网络的输出响应 $e_o(t)$ 曲线。

D MATLAB 题

D3-1 设系统的传递函数为

$$(1) G(s) = \frac{50}{(1+0.1s)(s+2)}$$

$$(2) G(s) = \frac{K}{s(s^2+4s+200)}$$

$$(3) G(s) = \frac{K(1+2s)(1+4s)}{s^2(s^2+2s+10)}$$

$$(4) G(s) = \frac{6}{s(s+1)(s+2)}$$

试分别求:

(1) 确定系统在单位阶跃输入下的稳态误差;

(2) 如果将共轭极点视为主导极点, 计算系统的超调量 M_p 和按 2% 准则的调整时间 t_s ;

(3) 用 MATLAB 求取系统的单位阶跃响应曲线, 与以上计算结果进行比较。并讨论产生差异的原因。

D3-2 某控制系统如图 D3-1 所示。控制器是 PI 调节器, 它的零点可改变系统的稳态和动态特性, 零点可通过调节器的参数来改变。

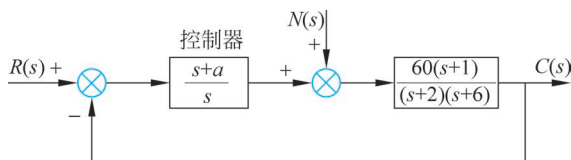


图 D3-1 含 PI 调节器的控制系统

(1) PI 调节器对系统稳态误差的影响: 计算 $a=0$ 和 $a>0$ 时, 系统单位阶跃响应的稳态误差;

(2) 计算 $a=0$, $a=10$ 和 $a=100$ 时, 系统的单位阶跃响应曲线, 分析 a 对动态响应的影响;

(3) 计算 $a=0$, $a=10$ 和 $a=100$ 时, 系统对单位阶跃扰动 ($N(s)=1/s$) 的响应曲线, 分析 a 对系统抗干扰性能的影响。

(4) 你能解释上述计算结果的物理意义吗?

D3-3 已知闭环系统的传递函数

$$G(s) = \frac{6}{s^2 + 5s + 6}$$

(1) 用解析法计算系统的单位阶跃响应;

(2) 用 step 命令求系统的单位阶跃响应曲线;

(3) 比较(1)、(2)的计算结果(超调量 M_p 和按 2% 准则的调整时间 t_s)。

D3-4 用 MATLAB 的 lsim 命令,求以下单位反馈系统对单位速度输入 $(R(s) = \frac{1}{s^2})$ 的响应,并求系统的稳态误差($G(s)$ 是前向通道传递函数)。

$$(1) G(s) = \frac{2}{s^2 + 2s + 2}$$

$$(2) G(s) = \frac{2}{s(s^2 + 2s + 2)}$$

$$(3) G(s) = \frac{2}{s^2(s^2 + 2s + 2)}$$

D3-5 用 MATLAB 的 lsim 命令,求输入为 $u(t) + tu(t) + \frac{1}{2}t^2u(t)$ 时,题 D3-4 系统的响应曲线,并求系统的稳态误差。