

时域离散信号和 滤波器的频谱分析

前面的章节简单介绍了时域离散信号与频谱的关系以及滤波器与频谱的关系,本章将详细研究时域离散信号和滤波器的频谱特性。本章内容包括:

- 频谱的定义;
- 非周期时域离散信号的频谱;
- 非周期时域离散信号傅里叶变换的性质;
- 周期序列的频谱;
- 序列的 Z 变换;
- 时域离散系统的系统函数;
- 利用 Z 变换分析系统的频率响应特性;
- 用几何方法研究零极点分布对系统频率响应的影响。

3.1 频谱的定义

由“信号与系统”课程内容可知,信号和系统(也称为滤波器)的分析方法有两种,一种是时域分析方法,另一种是频域分析方法。在模拟信号中,模拟信号一般用连续时间变量的函数表示,其频谱一般用信号的傅里叶变换或拉普拉斯变换表示。在时域离散信号中,时域离散信号用序列表示,其频谱则用离散时间信号的傅里叶变换(Discrete-Time Fourier Transform, DTFT)或 Z 变换表示。既然频谱分析如此重要,首先要了解信号频谱所代表的含义。

在频域,每个信号都有典型的特征。比如正弦波仅包含单一频率,而白噪声(White Noise)包含几乎所有的频率成分。信号的低频分量决定其平稳变化,信号的高频分量决定边缘的陡峭和剧烈变化程度。比如常见的方波,它既包含平稳变化的低频分量,又包含边缘剧烈变化的高频分量,如图 3.1 所示。从单一低频正弦波开始,每个图增加一个较高频率的正弦波,只要选择的正弦波具有合适的频率和振幅,将它们叠加在一起便趋近于方波,如图 3.1(e)所示。合成波形的表达式为:

$$y(t) = \frac{4}{\pi} \left[\sin(\Omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\Omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\Omega t) + \frac{1}{7} \sin(7\Omega t) + \frac{1}{9} \sin(9\Omega t) + \dots \right]$$

其中 Ω 为信号的角频率。信号的频谱能够详细记录信号所包含的频率分量(频率成分),包括幅度频谱(幅频)和相位频谱。信号的幅度频谱表示的是每一频率分量的大小或幅度;信



号的相位频谱表示的是不同频率分量的相位关系。以图 3.1(e)所形成的合成波形为例,组成这一波形的每个正弦波反映在其幅频图中就是一个尖峰,如图 3.1(f)所示。

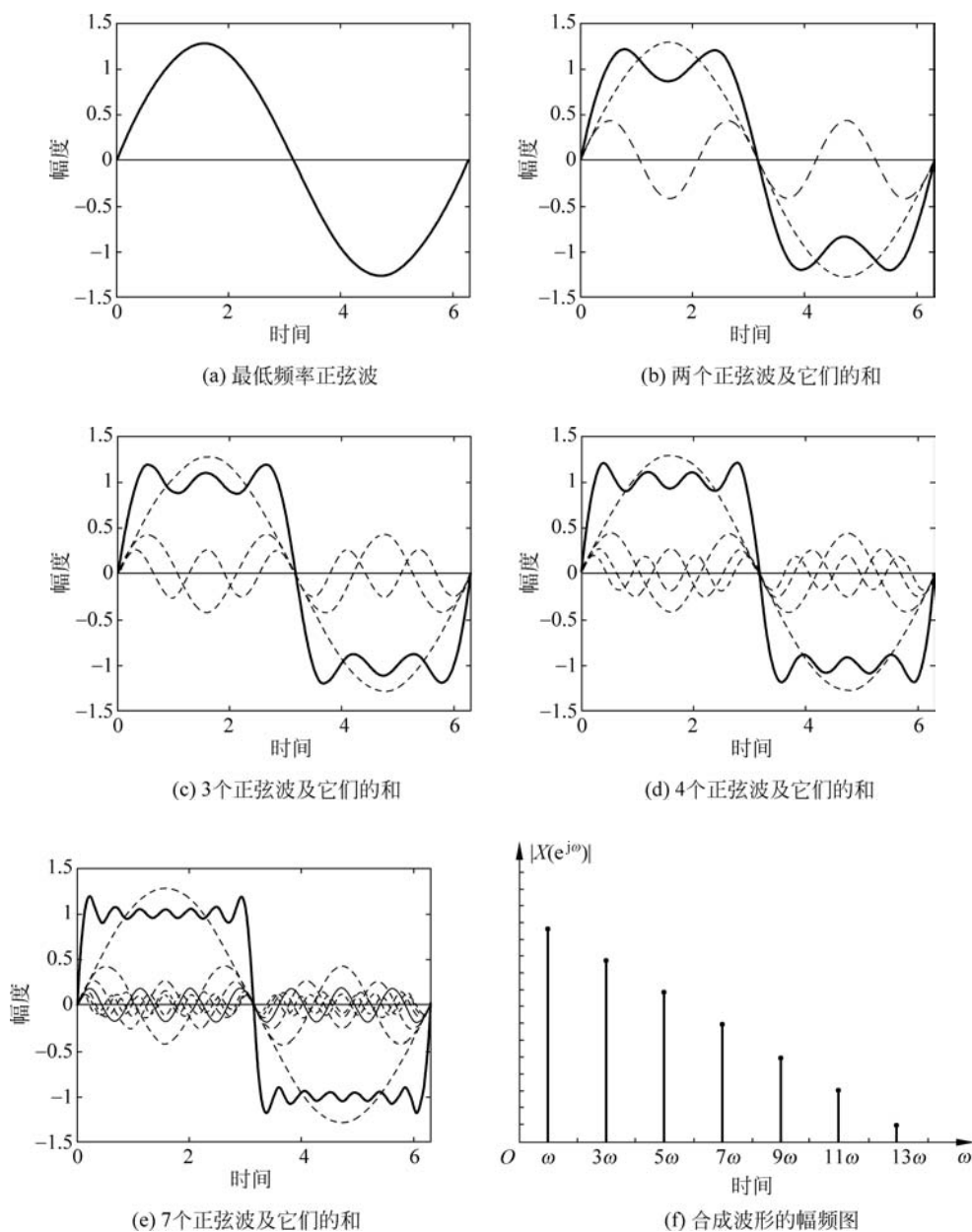


图 3.1 由正弦波组成的方波及其幅频图

滤波器的频谱特性包括幅度频率响应和相位频率响应,其中幅度频率响应是所有频率信号通过系统的增益值的集合;相位频率响应是所有频率信号通过系统后的相位差的集合。因此,当需要预测滤波器对信号的作用时,既需要知道滤波器的特性,还要知道信号的频谱。

所有的信号都有频谱,但是频谱的计算方法取决于信号是否具有周期性。下面将分别

介绍非周期信号和周期信号频谱的计算方法。

3.2 非周期时域离散信号的频谱



已知模拟信号 $x(t)$ 的傅里叶变换定义为:

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt \quad (3.1)$$

序列 $x(n)$ 的傅里叶变换定义为:

$$X(\omega) = X(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \quad (3.2)$$

其中 $X(e^{j\omega})$ 是实变量 ω (频率变量) 的复值函数。注意到式 (3.2) 是式 (3.1) 对应傅里叶变换的离散时间表示, 其中用求和代替了求积分, 以 T 表示采样间隔, 用 nT 代替了 t , 从而 $\omega = \Omega T$ 。为了区别连续时间和离散时间两种情况, 本书用 ω 表示离散时间的频率变量。

对于所有的实值 ω , 如果式 (3.2) 中的双边无限求和收敛 (即和为有限值), 则称时域离散信号 $x(n)$ 的 DTFT 存在。 $x(n)$ 的 DTFT 存在的充分条件是序列 $x(n)$ 满足:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty \quad (3.3)$$

$X(e^{j\omega})$ 的傅里叶反变换为

$$x(n) = \text{IDTFT}[X(e^{j\omega})] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (3.4)$$

式 (3.2) 和式 (3.4) 组成一对傅里叶变换公式。式 (3.3) 是傅里叶变换存在的充分条件, 有些函数 (比如周期序列) 并不满足式 (3.3), 说明它的傅里叶变换不存在, 对于周期序列的频谱计算, 将在 3.4 节介绍。

【例 3.1】 设 $x(n) = R_N(n)$, 求 $x(n)$ 的傅里叶变换。

解:

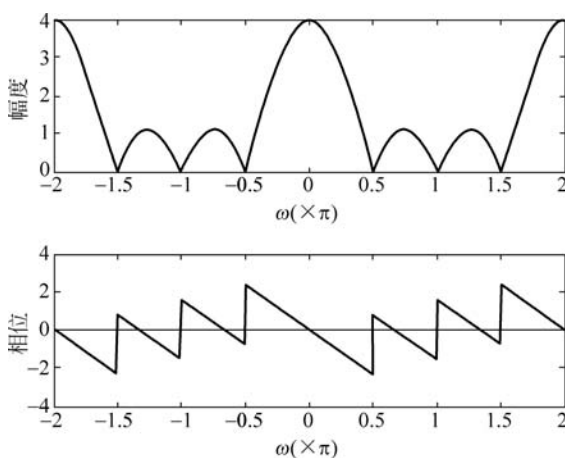
$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_N(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} \\ &= \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{e^{-j\omega \frac{N}{2}} (e^{j\omega \frac{N}{2}} - e^{-j\omega \frac{N}{2}})}{e^{-j\omega \frac{1}{2}} (e^{j\omega \frac{1}{2}} - e^{-j\omega \frac{1}{2}})} \\ &= e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \frac{\sin\left(\omega \frac{N}{2}\right)}{\sin\left(\omega \frac{1}{2}\right)} \end{aligned}$$

当 $N=4$ 时,

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} = 1 + e^{-j\omega} + e^{-j2\omega} + e^{-j3\omega}$$

其幅度和相位随频率 ω 变化的曲线如图 3.2 所示。



图 3.2 $R_4(n)$ 的幅度与相位曲线

【例 3.2】 设序列

$$x(n) = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ a^n & 0 \leq n \leq q \\ 0 & n > q \end{cases}$$

求 $x(n)$ 的离散时间傅里叶变换。

解：

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=0}^q a^n e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=0}^q (a e^{-j\omega})^n \\ &= \frac{1 - (a e^{-j\omega})^{q+1}}{1 - a e^{-j\omega}} \end{aligned}$$

【例 3.3】 例 3.2 中令 $a=0.5, q=50$, 用 MATLAB 程序实现这个有限长序列的离散时间傅里叶变换的幅频特性曲线和相频特性曲线。程序如下：

```
n = 0:50
a = 0.5
x = a.^n
w = linspace(-4 * pi, 4 * pi, 501)
X = (1 - a^51 * cos(51 * w) + j * a^51 * sin(51 * w)) ./ (1 - a * cos(w) + a * j * sin(w))
X_abs = abs(X)
X_angle = angle(X)
subplot(211)
plot(w/pi, X_abs, 'k')
subplot(212)
plot(w/pi, X_angle, 'k')
```

运行结果如图 3.3 所示。

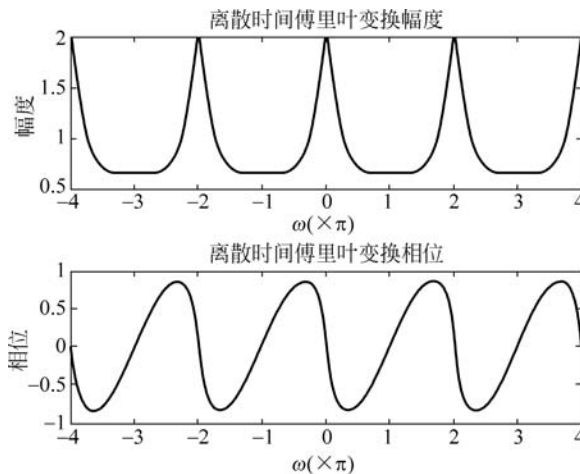


图 3.3 例 3.3 的幅频和相频图

思考题：

- (1) 幅度特性和相位特性的周期是多少？
- (2) 幅度特性和相位特性的对称性如何？

【随堂练习】

求下列序列的 DTFT。

- (1) $x(n) = \delta(n-3)$;
- (2) $x(n) = \frac{1}{2}\delta(n+1) + \delta(n) + \frac{1}{2}\delta(n-1)$;
- (3) $x(n) = u(n+3) - u(n-4)$ 。

3.3 非周期时域离散信号傅里叶变换的性质

由例 3.1 可得其频谱函数为 $X(e^{j\omega}) = 1 + e^{-j\omega} + e^{-j2\omega} + e^{-j3\omega}$ ，根据 DTFT 的定义：

$$X(\omega + 2\pi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j(\omega+2\pi)n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \cdot e^{-j2\pi n}$$

因为 $e^{-j2\pi n} = 1$ ，所以

$$X(\omega + 2\pi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j(\omega+2\pi)n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \cdot e^{-j2\pi n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = X(\omega)$$

故 DTFT 具有周期性，其周期为 2π 。换句话说，所有离散时间傅里叶变换对于所有 ω ，每 2π 重复一次，并且不断地重复。因此，得到 DTFT 的第一个性质。

3.3.1 DTFT 的周期性

离散傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 是 ω 的周期函数，周期为 2π ，即：

$$X(\omega + 2\pi) = X(\omega) \quad -\infty < \omega < \infty \quad (3.5)$$

关于 $X(e^{j\omega})$ 周期性的一个重要结论是： $X(e^{j\omega})$ 可以通过计算任意 2π 间隔内的 $X(e^{j\omega})$



来完全确定,比如 ω 取 $0 \leq \omega \leq 2\pi$ 或 $-\pi \leq \omega \leq \pi$ 。

根据 DTFT 的周期性分析得到,在 $\omega=0$ 和 $\omega=2\pi M$ (M 取整数)附近的频谱分布应该相同,在 $\omega=0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ 点上表示 $x(n)$ 信号的直流分量;离开这些点愈远,其频率愈高,但又是以 2π 为周期,那么最高的频率应是在 $\omega=\pi$ 处。

还要说明的是,所谓 $x(n)$ 的直流分量,是指如图 3.4(a) 所示的波形。例如, $x(n) = \cos \omega n$, 当 $\omega=2\pi M$ (M 取整数)时, $x(n)$ 的序列值如图 3.4(a) 所示,其幅度值恒为 1,不随 n 变化而变化,因此称为直流信号;当 $\omega=(2M+1)\pi$ 时, $x(n)$ 波形如图 3.4(b) 所示,它代表最高频率信号,是一种变化最快的正弦信号。由于 DTFT 的周期是 2π ,一般只分析 $0 \sim 2\pi$ 或 $-\pi \sim \pi$ 范围的 DTFT 就够了。

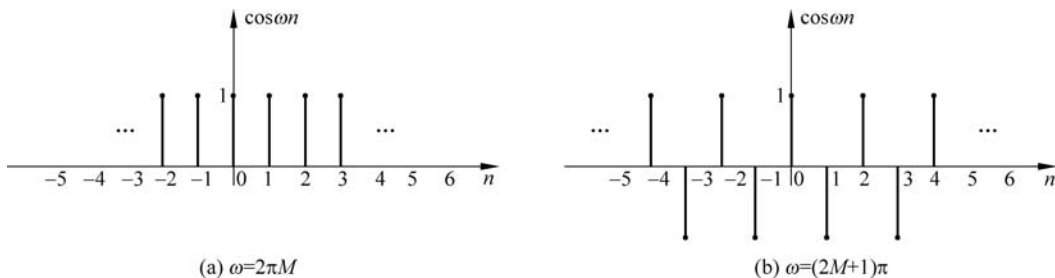


图 3.4 $\cos \omega n$ 的波形

3.3.2 线性

设 $X_1(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[x_1(n)]$, $X_2(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[x_2(n)]$, 那么

$$\text{DTFT}[ax_1(n) + bx_2(n)] = aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega}) \quad (3.6)$$

其中, a, b 是常数。

3.3.3 时移与频移性质

在时域的移位相应于频域中的相移

$$\text{DTFT}[x(n - n_0)] = e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega}) \quad (3.7)$$

时域乘以复指数相应于频域中的移位

$$\text{DTFT}[e^{j\omega_0 n} x(n)] = X(e^{j(\omega - \omega_0)}) \quad (3.8)$$

3.3.4 时间反转特性(序列的反转)

在时域中的反转相应于频域中的反转

$$\text{DTFT}[x(-n)] = X(e^{-j\omega}) \quad (3.9)$$

相关证明,请读者根据 DTFT 的定义自行推导。

【随堂练习】

已知 $x(n)$ 的离散傅里叶变换为 $X(e^{j\omega})$, 用 $X(e^{j\omega})$ 表示下列信号的 DTFT:

$$x_1(n) = x(1-n) + x(-1-n); \quad x_2(n) = \frac{x^*(-n) + x(n)}{2}$$



3.3.5 DTFT 的对称性

在学习 DTFT 的对称性之前,首先介绍共轭对称与共轭反对称以及它们的性质。

在中学数学中,学习过奇函数与偶函数的概念,那些函数的自变量和函数值都是实数。如果将实数的范围变广一些,就到了复数范围,即函数的自变量和函数值是复数。因此,共轭对称与共轭反对称就可以看成是复数范围内的偶对称和奇对称。

设序列 $x_e(n)$ 满足下式:

$$x_e(n) = x_e^*(-n) \quad (3.10)$$

则称 $x_e(n)$ 为共轭对称序列。下面研究共轭对称序列具有什么性质,先将 $x_e(n)$ 表示成实部 $x_{er}(n)$ 和虚部 $x_{ei}(n)$:

$$x_e(n) = x_{er}(n) + jx_{ei}(n) \quad (3.11)$$

将式(3.11)两边的 n 用 $-n$ 代替,并取共轭,得到:

$$x_e^*(-n) = x_{er}(-n) - jx_{ei}(-n) \quad (3.12)$$

对比式(3.11)和式(3.12),根据共轭对称序列的定义,两式左边相等,因此右边的实部和虚部均要相等,得到:

$$x_{er}(n) = x_{er}(-n) \quad (3.13)$$

$$x_{ei}(n) = -x_{ei}(-n) \quad (3.14)$$

式(3.13)和式(3.14)两式表明共轭对称序列的实部是偶函数,而虚部是奇函数。类似地,可定义满足式(3.15)的共轭反对称序列 $x_o(n)$:

$$x_o(n) = -x_o^*(-n) \quad (3.15)$$

同样将 $x_o(n)$ 表示成实部 $x_{or}(n)$ 和虚部 $x_{oi}(n)$ 形式,如下式:

$$x_o(n) = x_{or}(n) + jx_{oi}(n) \quad (3.16)$$

再将 $-x_o^*(-n)$ 表示成实部和虚部形式,如下式:

$$-x_o^*(-n) = -x_{or}(-n) + jx_{oi}(-n) \quad (3.17)$$

对比式(3.16)和式(3.17),根据共轭反对称序列的定义,两式左边相等,因此右边的实部和虚部均要相等,可以得到:

$$x_{or}(n) = -x_{or}(-n) \quad (3.18)$$

$$x_{oi}(n) = x_{oi}(-n) \quad (3.19)$$

即共轭反对称序列的实部是奇函数,而虚部是偶函数。

【例 3.4】 试分析 $x(n) = e^{j\omega n}$ 的对称性。

解: 因为

$$x^*(-n) = e^{j\omega n} = x(n)$$

满足式(3.10),所以 $x(n)$ 是共轭对称序列,若展开成实部和虚部,则得到:

$$x(n) = \cos\omega n + j\sin\omega n$$

表明共轭对称序列的实部确实是偶函数,虚部是奇函数。

类似于一般的实函数总可以表示成奇函数与偶函数和的形式,推广到复数域,一般序列

均可用共轭对称与共轭反对称序列之和表示,即

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n) \quad (3.20)$$

其中, $x_e(n)$ 和 $x_o(n)$ 可分别用原序列 $x(n)$ 求出, 将式(3.20)中的 n 用 $-n$ 代替, 再取共轭, 得到:

$$x^*(-n) = x_e(n) - x_o(n) \quad (3.21)$$

利用式(3.20)和式(3.21), 得到:

$$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)] \quad (3.22)$$

$$x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(-n)] \quad (3.23)$$

利用式(3.22)和式(3.23), 可以用 $x(n)$ 分别求出 $x(n)$ 的共轭对称分量 $x_e(n)$ 和共轭反对称分量 $x_o(n)$ 。

上面分析的是时域函数的共轭对称和共轭反对称, 对于频域函数 $X(e^{j\omega})$, 也有类似的定义和结论:

$$X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{j\omega}) \quad (3.24)$$

其中, $X_e(e^{j\omega})$ 和 $X_o(e^{j\omega})$ 分别称为共轭对称部分与共轭反对称部分, 它们满足:

$$X_e(e^{j\omega}) = X_e^*(e^{-j\omega}) \quad (3.25)$$

$$X_o(e^{j\omega}) = -X_o^*(e^{-j\omega}) \quad (3.26)$$

同样有:

$$X_e(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})] \quad (3.27)$$

$$X_o(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})] \quad (3.28)$$

根据上面的定义和结论, 研究 DTFT 的对称性。

(1) 将序列 $x(n)$ 分成实部 $x_r(n)$ 与虚部 $x_i(n)$, 即

$$x(n) = x_r(n) + jx_i(n) \quad (3.29)$$

将式(3.29)进行傅里叶变换, 得到:

$$X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{j\omega}) \quad (3.30)$$

其中

$$X_e(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[x_r(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_r(n) e^{-j\omega n}$$

$$X_o(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[jx_i(n)] = j \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_i(n) e^{-j\omega n}$$

式(3.29)中, $x_r(n)$ 和 $x_i(n)$ 都是实数序列。容易证明: $X_e(e^{j\omega})$ 满足式(3.25), 具有共轭对称性, 它的实部是偶函数, 虚部是奇函数; $X_o(e^{j\omega})$ 满足式(3.26), 具有共轭反对称性, 它的实部是奇函数, 虚部是偶函数。

最后得到结论：序列分成实部和虚部两部分时，实部对应的傅里叶变换具有共轭对称性，虚部和 j 一起对应的傅里叶变换具有共轭反对称性。

(2) 将序列 $x(n)$ 分成共轭对称部分 $x_e(n)$ 与共轭反对称部分 $x_o(n)$ ，即

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n) \quad (3.31)$$

将式(3.22)和式(3.23)重写如下：

$$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)]$$

$$x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(-n)]$$

然后分别进行傅里叶变换，得到：

$$\text{FT}[x_e(n)] = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{j\omega})] = \text{Re}[X(e^{j\omega})] = X_R(e^{j\omega}) \quad (3.32a)$$

$$\text{FT}[x_o(n)] = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) - X^*(e^{j\omega})] = j\text{Im}[X(e^{j\omega})] = jX_I(e^{j\omega}) \quad (3.32b)$$

因此式(3.31)的 DTFT 为

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega}) \quad (3.32c)$$

式(3.32a)和式(3.32b)表示：序列 $x(n)$ 共轭对称部分 $x_e(n)$ 的 DTFT 对应着 $X(e^{j\omega})$ 的实部 $X_R(e^{j\omega})$ ，而序列 $x(n)$ 共轭反对称部分 $x_o(n)$ 的 DTFT 对应着 $X(e^{j\omega})$ 的虚部 $X_I(e^{j\omega})$ 乘以 j 。

对于实序列 $x(n)$ ， $X(e^{j\omega})$ 是共轭对称的，即：

$$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega}) \quad (3.33)$$

它等同于 $X(e^{j\omega})$ 的实部偶对称、虚部奇对称；或幅度偶对称、相角奇对称。这一性质可在例 3.5 的图中得到验证。

【例 3.5】 设 $x(n)$ 为序列

$$x(n) = \delta(n+1) - \delta(n) + 2\delta(n-1) + 3\delta(n-2)$$

其 DTFT 为

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega})$$

其中， $X_R(e^{j\omega})$ 和 $X_I(e^{j\omega})$ 分别是 $X(e^{j\omega})$ 的实部和虚部。若某一序列 $y(n)$ 的 DTFT 为 $Y(e^{j\omega}) = X_I(e^{j\omega}) + jX_R(e^{j\omega})e^{j2\omega}$ ，试求出序列 $y(n)$ 。

解：求解这个问题的关键是要知道，如果 $x(n)$ 是实序列，并且如果把 $X(e^{j\omega})$ 用其实部和虚部来表示，那么 $X_R(e^{j\omega})$ 就是 $x(n)$ 共轭对称部分的 DTFT， $X_I(e^{j\omega})$ 就是 $x(n)$ 共轭反对称部分的 DTFT，即：

$$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x(-n)] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X_R(e^{j\omega})$$

$$x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x(-n)] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} jX_I(e^{j\omega})$$

所以， $-jx_o(n)$ 的 DTFT 是 $X_I(e^{j\omega})$ ：

$$-jx_o(n) \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X_I(e^{j\omega})$$

$jx_e(n+2)$ 的 DTFT 是

$$jx_e(n+2) \xleftrightarrow{\text{DTFT}} jX_R(e^{j\omega})e^{j2\omega}$$

于是有：

$$jx_e(n+2) - jx_o(n) \xleftrightarrow{\text{DTFT}} Y(e^{j\omega}) = X_I(e^{j\omega}) + jX_R(e^{j\omega})e^{j2\omega}$$

可得：

$$y(n) = jx_e(n+2) - jx_o(n)$$

其中

$$\begin{aligned} x_e(n) &= \frac{1}{2}[x(n) + x(-n)] \\ &= \frac{1}{2}[\delta(n+1) - \delta(n) + 2\delta(n-1) + 3\delta(n-2) + \\ &\quad \delta(-n+1) - \delta(-n) + 2\delta(-n-1) + 3\delta(-n-2)] \\ &= \frac{1}{2}[\delta(n+1) - \delta(n) + 2\delta(n-1) + 3\delta(n-2) + \\ &\quad \delta(n-1) - \delta(n) + 2\delta(n+1) + 3\delta(n+2)] \\ &= \frac{3}{2}\delta(n+2) + \frac{3}{2}\delta(n+1) - \delta(n) + \frac{3}{2}\delta(n-1) + \frac{3}{2}\delta(n-2) \\ x_o(n) &= \frac{1}{2}[x(n) - x(-n)] \\ &= \frac{1}{2}[\delta(n+1) - \delta(n) + 2\delta(n-1) + 3\delta(n-2) - \\ &\quad \delta(-n+1) + \delta(-n) - 2\delta(-n-1) - 3\delta(-n-2)] \\ &= \frac{1}{2}[\delta(n+1) - \delta(n) + 2\delta(n-1) + 3\delta(n-2) - \\ &\quad \delta(n-1) + \delta(n) - 2\delta(n+1) - 3\delta(n+2)] \\ &= -\frac{3}{2}\delta(n+2) - \frac{1}{2}\delta(n+1) + \frac{1}{2}\delta(n-1) + \frac{3}{2}\delta(n-2) \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} y(n) &= jx_e(n+2) - jx_o(n) \\ &= j\left[\frac{3}{2}\delta(n+4) + \frac{3}{2}\delta(n+3) - \delta(n+2) + \frac{3}{2}\delta(n+1) + \frac{3}{2}\delta(n)\right] - \\ &\quad j\left[-\frac{3}{2}\delta(n+2) - \frac{1}{2}\delta(n+1) + \frac{1}{2}\delta(n-1) + \frac{3}{2}\delta(n-2)\right] \\ &= j\left[\frac{3}{2}\delta(n+4) + \frac{3}{2}\delta(n+3) + \frac{1}{2}\delta(n+2) + 2\delta(n+1) + \frac{3}{2}\delta(n) - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2}\delta(n-1) - \frac{3}{2}\delta(n-2)\right] \end{aligned}$$

求解过程如图 3.5 所示。

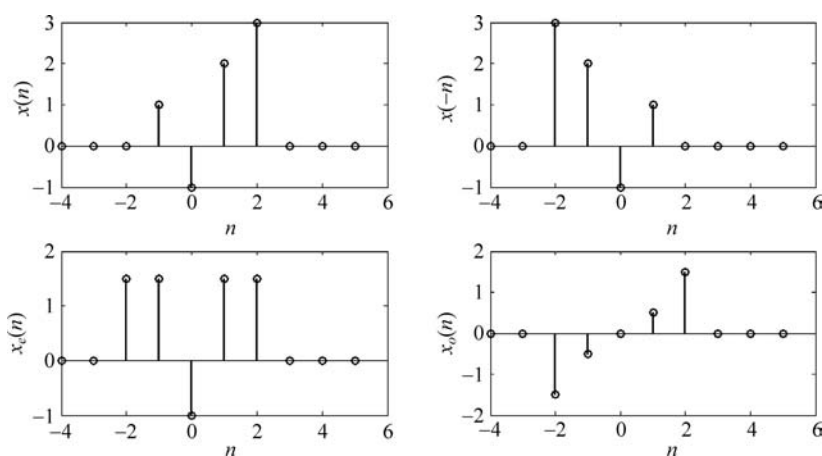


图 3.5 例 3.5 图

【例 3.6】 设 $x(n] = (0.9\exp(j\pi/3))^n, 0 \leq n \leq 10$, 其幅度及相位的频谱特性如图 3.6 所示, 试用 MATLAB 程序画出 $X(e^{j\omega})$, 并研究它的周期性和对称性。

解: MATLAB 程序如下:

```
n = 0:10
x = (0.9 * exp(j * pi/3)).^n
k = -200:200
w = (pi/100) * k
X = x * (exp(-j * pi/100)).^(n * k)
magX = abs(X)
angX = angle(X)
subplot(2,1,1)
plot(w/pi, magX, 'k', 'lineWidth', 2); grid
axis([-2 2 -1 8])
subplot(2,1,2)
plot(w/pi, angX, 'k', 'lineWidth', 2); grid
axis([-2 2 -2 2])
```

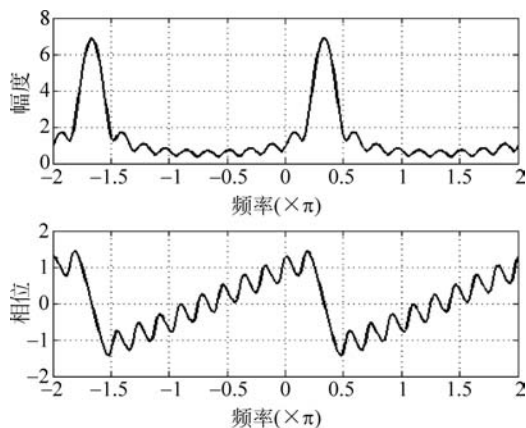


图 3.6 例 3.6 幅度及相位的频谱特性

由图 3.6 可知,上述复数序列 $x(n)$, $X(e^{j\omega})$ 是周期的,但不是共轭对称的。

【随堂练习】

若序列 $h(n)$ 是实因果序列,其傅里叶变换的实部为: $H_R(e^{j\omega}) = 1 + \cos 3\omega$,求序列 $h(n)$ 及其傅里叶变换 $H(e^{j\omega})$ 。

3.3.6 时域卷积定理

设 $y(n) = x(n) * h(n)$, 则

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \quad (3.34)$$

证明:

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)$$

$$Y(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[y(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) \right] e^{-j\omega n}$$

令 $k = n - m$, 则

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(k)x(m)e^{-j\omega k}e^{-j\omega m} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)e^{-j\omega m} \\ &= H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

该定理说明,两序列卷积的 DTFT 服从相乘的关系。对于线性时不变系统,输出信号的 DTFT 等于输入信号的 DTFT 乘以单位脉冲响应的 DTFT。因此,在求系统的输出信号时,可以在时域用卷积公式(2.25)计算,也可以在频域按照式(3.34)求出输出的 DTFT,再作逆 DTFT,求出输出信号 $y(n)$ 。

3.3.7 频域卷积定理

设 $y(n) = h(n) \cdot x(n)$, 则

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} H(e^{j\omega}) * X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\theta})X(e^{j(\omega-\theta)})d\theta \quad (3.35)$$

证明:

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)h(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\theta})e^{-j\theta n} d\theta \right] e^{-j\omega n}$$

交换积分与求和的次序,得到:

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\theta}) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j(\omega-\theta)n} \right] d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\theta})X(e^{j(\omega-\theta)})d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} H(e^{j\omega}) * X(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

该定理表明,在时域两序列相乘,对应到频域则服从卷积关系。

3.3.8 帕塞瓦尔定理

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (3.36)$$

证明:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot x^*(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) X^*(e^{j\omega}) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \end{aligned}$$

帕塞瓦尔(Parseval)定理表明了信号时域的能量与频域的能量满足能量守恒定理。表 3.1 和表 3.2 分别列出了常见的 DTFT 以及 DTFT 的主要性质。

表 3.1 常见的 DTFT

序 列	DTFT
1, 所有 n	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - 2\pi k)$
$\text{sgn}(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, 1, 2, \dots \\ -1, & n = -1, -2, \dots \end{cases}$	$\frac{2}{1 - e^{-j\omega}}$
$u(n)$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega - 2\pi k)$
$\delta(n)$	1
$\delta(n - p)$	$e^{-jp\omega} \quad p = \pm 1, \pm 2, \dots$
$a^n u(n) \quad a < 1$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \quad a < 1$
$e^{j\omega_0 n}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k)$
$\cos(\omega_0 n)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi[\delta(\omega + \omega_0 - 2\pi k) + \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k)]$
$\sin(\omega_0 n)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} j\pi[\delta(\omega + \omega_0 - 2\pi k) - \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k)]$
$\cos(\omega_0 n + \theta)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi[e^{-j\theta}\delta(\omega + \omega_0 - 2\pi k) - e^{j\theta}\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k)]$

表 3.2 DTFT 的性质

性 质	序 列	DTFT
线性性质	$ax(n) + by(n)$	$aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$ a, b 为常数
时移性质	$x(n - n_0)$	$e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$
乘以 n	$nx(n)$	$j \frac{d}{d\omega} X(e^{j\omega})$
乘以复指数	$e^{j\omega_0 n} x(n)$	$X(e^{j(\omega - \omega_0)})$
时域卷积	$x(n) * y(n)$	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
时域相乘	$x(n)y(n)$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega - \theta)}) d\theta$
乘以 $\sin(\omega_0 n)$	$x(n)\sin(\omega_0 n)$	$\frac{j}{2} [X(e^{j(\omega + \omega_0)}) - X(e^{j(\omega - \omega_0)})]$
乘以 $\cos(\omega_0 n)$	$x(n)\cos(\omega_0 n)$	$\frac{1}{2} [X(e^{j(\omega + \omega_0)}) + X(e^{j(\omega - \omega_0)})]$
共轭对称性	$\text{Re}[x(n)]$	$X_e(e^{j\omega})$
	$j\text{Im}[x(n)]$	$X_o(e^{j\omega})$
帕塞瓦尔定理	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot y(n)$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X^*(e^{j\omega})Y(e^{j\omega}) d\omega$
帕塞瓦尔定理特例	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) ^2$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) ^2 d\omega$

【随堂练习】

设 $X(e^{j\omega})$ 是 $x(n)$ 的 DTFT, 试求下面序列的 DTFT: ① $x(n - n_0)$; ② $x^*(n)$; ③ $x(-n)$;

$$\text{④ } x(n) * x^*(-n); \text{⑤ } nx(n); \text{⑥ } x(2n); \text{⑦ } x^2(n); \text{⑧ } y(n) = \begin{cases} x\left(\frac{n}{2}\right) & n \text{ 为偶数} \\ 0 & n \text{ 为奇数} \end{cases}.$$

**3.4 周期序列的频谱**

周期序列是在整个时域按固定间隔重复出现的信号。每个间隔中出现的采样点数称为时域离散信号的数字周期。由于序列在整个时域不断重复, 不满足式(3.2)绝对可和的条件, 因此 DTFT 不适合用来计算周期序列的频谱。用来计算周期序列频谱的工具为傅里叶级数, 也称为离散傅里叶级数(Discrete Fourier Series, DFS), 这个级数很重要, 与后面要研究的离散傅里叶变换联系很密切。

表 3.3 列出了各类周期信号的傅里叶级数表示, 从表中可以看出, 每个周期信号可以表示为正弦或余弦之和的形式, 利用欧拉公式, 这些周期信号也可以表示为复指数之和的形式。设 $\tilde{x}(n)$ 是以 N 为周期的周期序列, 可以展成离散傅里叶级数为:

表 3.3 周期序列的离散傅里叶级数

名 称	波 形	分解成的傅里叶级数
方形波		$f(t) = \frac{4A}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right)$
矩形脉冲		$f(t) = A \left[\frac{\tau}{T} + \frac{2}{\pi} \left(\sin \frac{\omega t}{2} \cos \omega t + \frac{1}{2} \sin \omega t \cos 2\omega t + \frac{1}{3} \sin \frac{3\omega t}{2} \cos 3\omega t + \dots \right) \right]$
三角波		$f(t) = \frac{8A}{\pi^2} \left(\sin \omega t - \frac{1}{9} \sin 3\omega t + \frac{1}{25} \sin 5\omega t - \dots \right)$
锯齿波		$f(t) = A \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{2} \sin 2\omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \dots \right) \right]$
全波整流波形		$f(t) = \frac{4A}{\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1 \times 3} \cos 2\omega t + \frac{1}{3 \times 5} \cos 4\omega t - \frac{1}{5 \times 7} \cos 6\omega t + \dots \right)$
半波整流波形		$f(t) = \frac{A}{\pi} + \frac{A}{2} \sin \omega t - \frac{2A}{\pi} \left(\frac{1}{1 \times 3} \cos 2\omega t + \frac{1}{3 \times 5} \cos 4\omega t + \frac{1}{5 \times 7} \cos 6\omega t + \dots \right)$

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (3.37)$$

其中, n 为采样点编号, 标号 $k=0, 1, \dots, N-1$ 。傅里叶系数 α_k 可由信号采样值 $\tilde{x}(n)$ 按式(3.38)求解得到:

$$\alpha_k = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (3.38)$$

系数 α_k 的求解过程如下, 将式(3.37)两边乘以 $e^{-j\frac{2\pi}{N}mn}$, 并对 n 在一个周期($0 \sim N-1$)中求和, 即

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}mn} = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \right] e^{-j\frac{2\pi}{N}mn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m)n} \quad (3.39)$$

其中

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m)n} = \begin{cases} N & k=m \\ 0 & k \neq m \end{cases} \quad (3.40)$$

因此, 只有 $k=m$ 时, $\alpha_k \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m)n}$ 这一项才有非零值, 即 $\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}mn} = \alpha_m$ 。

将 m 换成 k , 得

$$\alpha_k = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (3.41)$$

其中, k 和 n 均取整数。因为 $e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+lN)n} = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$, l 取整数, 即 $e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$ 是周期为 N 的周期函数。所以, 系数 α_k 也是周期序列, 也只有 N 个主值, 此后不断重复, 满足 $\alpha_k = \alpha_{k+lN}$ 。

由于 $\tilde{x}(n)$ 是周期信号, 周期为 N , 求所有系数 α_k 只需要 N 个采样值, 用任意 N 个连续值即可, 一般取 n 为 $0 \sim N-1$ 。

如果令 $\tilde{X}(k) = \alpha_k$, 则式(3.37)和式(3.41)可重写如下:

$$\tilde{x}(n) = \text{IDFS}[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (3.42)$$

$$\tilde{X}(k) = \text{DFS}[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (3.43)$$

其中, $\tilde{X}(k)$ 也是以 N 为周期的周期序列, 称为 $\tilde{x}(n)$ 的离散傅里叶级数的系数, 用 DFS 表示。式(3.42)和式(3.43)称为 DFS 变换对。式(3.42)表明将周期序列分解成 N 次谐波, 第 k 个谐波频率为 $\omega_k = \frac{2\pi}{N}k$, $k=0, 1, 2, \dots, N-1$, 幅度为 $\frac{1}{N}\tilde{X}(k)$ 。基波分量的频率是 $\frac{2\pi}{N}$, 幅度是 $\frac{1}{N}\tilde{X}(1)$ 。一个周期序列可以用其 DFS 系数 $\tilde{X}(k)$ 表示它的频谱分布规律。

由于系数 α_k 通常为复数, 也可用极坐标形式表示:

$$\alpha_k = |\alpha_k| e^{j\varphi_k} \quad (3.44)$$

则式(3.37)变为:

$$\tilde{x}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} |\alpha_k| e^{j\varphi_k} e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{k=0}^{N-1} |\alpha_k| e^{j(\frac{2\pi}{N}kn + \varphi_k)} \quad (3.45)$$

这是周期序列傅里叶级数展开的另一种形式。其中 $|\alpha_k|$ 含有幅度信息, 而 φ_k 含有相位信息。

同时可以看出, 标号 $k=0, 1, \dots, N-1, k=0$ 表示周期序列的直流成分, 它是信号的平均值, k 取其他值时, 对应的频率称为周期信号的谐波。 $\tilde{x}(n)$ 的基波成分是 $e_1(n) = \alpha_1 e^{j\frac{2\pi}{N}n}$, k 次谐波成分为 $e_k(n) = \alpha_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$ 。因为 $e^{j\frac{2\pi}{N}(k+N)n} = e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$, 所以, 离散傅里叶级数中只有 N 个独立的谐波成分, 展成离散傅里叶级数时, 只能取 $k=0, 1, \dots, N-1$ 的 N 个独立的谐波分量。

从上面的分析可以看出, 周期序列的频谱与非周期序列的频谱有很大的区别。由 3.2 节知道, DTFT 产生连续频谱, 这说明频谱在所有的频率处都有值, 因此, 非周期序列的幅度和相位频谱是光滑连续的曲线。而 DFS 仅在 N 个频率点上有值, 因此, 周期序列的幅度和相位频谱是离散的等间隔的竖线。

【例 3.7】 设 $x(n) = \begin{cases} 1 & n=0, 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$, 将 $x(n)$ 以 $N=4$ 为周期进行周期延拓, 得到如图 3.7(a) 所示的周期序列 $\tilde{x}(n)$, 周期为 4, 求 $\text{DFS}[\tilde{x}(n)]$ 。

解:

$$\begin{aligned} \tilde{X}(k) &= \text{DFS}[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \\ &= \sum_{n=0}^3 \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{4}kn} \\ &= 1 + e^{-j\frac{\pi}{2}k} \\ &= 1 + e^{-j\frac{\pi}{2}k} \\ &= e^{-j\frac{\pi}{4}k} (e^{j\frac{\pi}{4}k} + e^{-j\frac{\pi}{4}k}) \\ &= 2\cos\left(\frac{\pi}{4}k\right) e^{-j\frac{\pi}{4}k} \end{aligned}$$

其幅度特性 $|\tilde{X}(k)|$ 如图 3.7(b) 所示, 它也是一个以 4 为周期的离散序列。

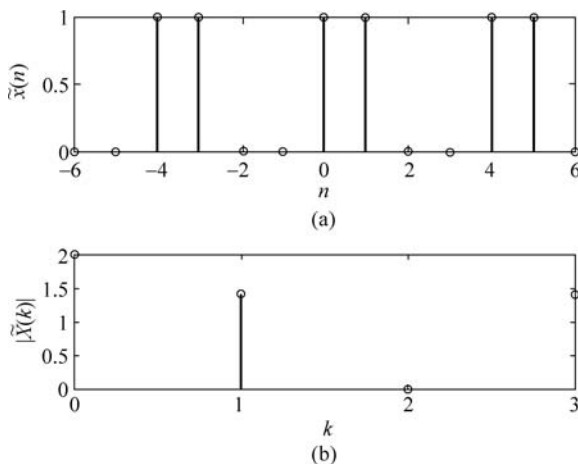


图 3.7 例 3.7 图

在 MATLAB 中可以用矩阵矢量乘法实现高效的 DFS 计算。重写式(3.42):

$$\tilde{x}(n) = \text{IDFS}[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N} \mathbf{W}_N^* \tilde{X}(k)$$

$$\tilde{X}(k) = \text{DFS}[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \mathbf{W}_N \tilde{x}(n)$$

其中 $\mathbf{W}_N$ 为一矩阵,其形式为:

$$\mathbf{W}_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & e^{j\frac{2\pi}{N}1 \cdot 1} & e^{j\frac{2\pi}{N}1 \cdot 2} & \cdots & e^{j\frac{2\pi}{N}1 \cdot (N-1)} \\ 1 & e^{j\frac{2\pi}{N}2 \cdot 1} & e^{j\frac{2\pi}{N}2 \cdot 2} & \cdots & e^{j\frac{2\pi}{N}2 \cdot (N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & e^{j\frac{2\pi}{N}(N-1) \cdot 1} & e^{j\frac{2\pi}{N}(N-1) \cdot 2} & \cdots & e^{j\frac{2\pi}{N}(N-1) \cdot (N-1)} \end{bmatrix}$$

则可由以下函数文件实现 DFS:

```
function [XK] = dfs(xn,N)
n = [0:N-1]
K = [0:N-1]
W = exp(-j * 2 * pi/N)
nk = n' * k
WN = W.^nk
XK = xn * WN
```

可由以下函数文件实现 IDFS:

```
function [xn] = idfs(XK,N)
n = [0:N-1]
K = [0:N-1]
W1 = exp(j * 2 * pi/N)
nk = n' * k
WN1 = W1.^nk
xn = XK * WN1
```

【例 3.8】 一周期序列由下式给出:

$$\tilde{x}(n) = \begin{cases} 1 & mN \leq n \leq mN + L - 1 \\ 0 & mN + L \leq n \leq (m+1)N - 1 \end{cases} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

其中, N 是基波周期, L/N 是占空比, 首先用 MATLAB 画出当 $L=5, N=20$ 时此序列的 3 个周期, 然后分别画出 $L=5, N=20$; $L=5, N=40$; $L=5, N=60$ 和 $L=7, N=60$ 的幅频图 $|\tilde{X}(k)|$ 。

解: 首先画出 $L=5, N=20$ 时序列的 3 个周期, 相关程序如下:

```
L = 5, N = 20
n = -20:39
x = [ones(1,L), zeros(1,N-L), ones(1,L), zeros(1,N-L), ones(1,L), zeros(1,N-L)]
stem(n,x,'k','lineWidth', 1.2)
axis([-20 40 0 1.2])
```

运行结果如图 3.8 所示。

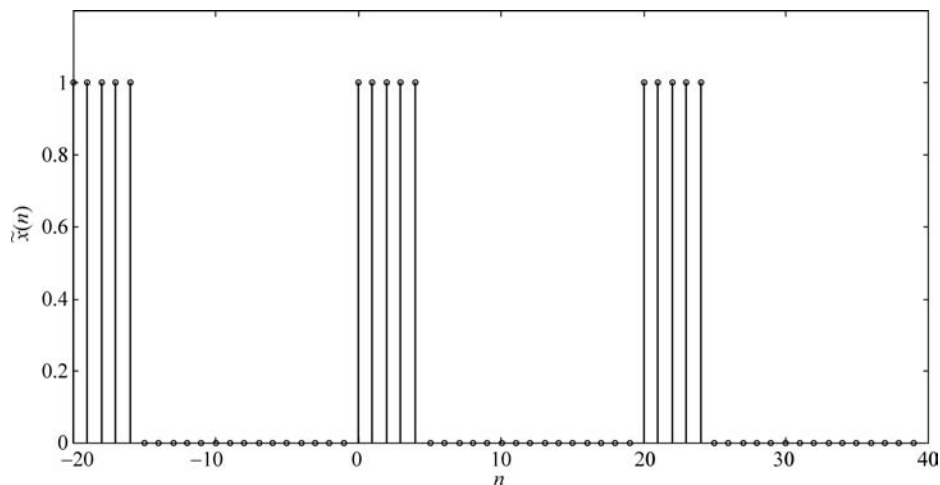


图 3.8 周期序列 $L=5, N=20$

接下来画出 $L=5, N=20$; $L=5, N=40$; $L=5, N=60$ 和 $L=7, N=60$ 的幅频 $|\tilde{X}(k)|$, 程序如下:

```
clc
clear
L = 5, N = 20
k = [ - N/2:N/2]
xn = [ones(1,L), zeros(1,N-L)]
XK = dfs(xn,N)
magXK = abs([XK(N/2+1:N) XK(1:N/2+1)])
subplot(2,2,1)
stem(k,magXK,'k','lineWidth', 2)
axis([ - N/2,N/2, - 0.5,5.5])
xlabel('k','fontSize',18)
ylabel('$ |\tilde{X}(k)| $','interpreter','latex','fontSize',18)
title('L = 5, N = 20','fontSize',18)
hold on
L = 5, N = 40
k = [ - N/2:N/2]
xn = [ones(1,L), zeros(1,N-L)]
XK = dfs(xn,N)
magXK = abs([XK(N/2+1:N) XK(1:N/2+1)])
subplot(2,2,2)
stem(k,magXK,'k','lineWidth', 2)
axis([ - N/2,N/2, - 0.5,5.5])
xlabel('k','fontSize',18)
ylabel('$ |\tilde{X}(k)| $','interpreter','latex','fontSize',18)
title('L = 5, N = 40','fontSize',18)
hold on
L = 5, N = 60
```

```

k = [-N/2:N/2]
xn = [ones(1,L), zeros(1,N-L)]
XK = dfs(xn,N)
magXK = abs([XK(N/2+1:N) XK(1:N/2+1)])
subplot(2,2,3)
stem(k,magXK,'k','lineWidth', 2)
axis([-N/2,N/2, -0.5,8])
xlabel('k','fontSize',18)
ylabel('$ |\tilde{X}(k)| $','interpreter','latex','fontSize',18)
title('L = 5, N = 60','fontSize',18)
hold on
L = 7, N = 60
k = [-N/2:N/2]
xn = [ones(1,L), zeros(1,N-L)]
XK = dfs(xn,N)
magXK = abs([XK(N/2+1:N) XK(1:N/2+1)])
subplot(2,2,4)
stem(k,magXK,'k','lineWidth', 2)
axis([-N/2,N/2, -0.5,8])
xlabel('k','fontSize',18)
ylabel('$ |\tilde{X}(k)| $','interpreter','latex','fontSize',18)
title('L = 7, N = 60','fontSize',18)

```

画出图形如图 3.9 所示。

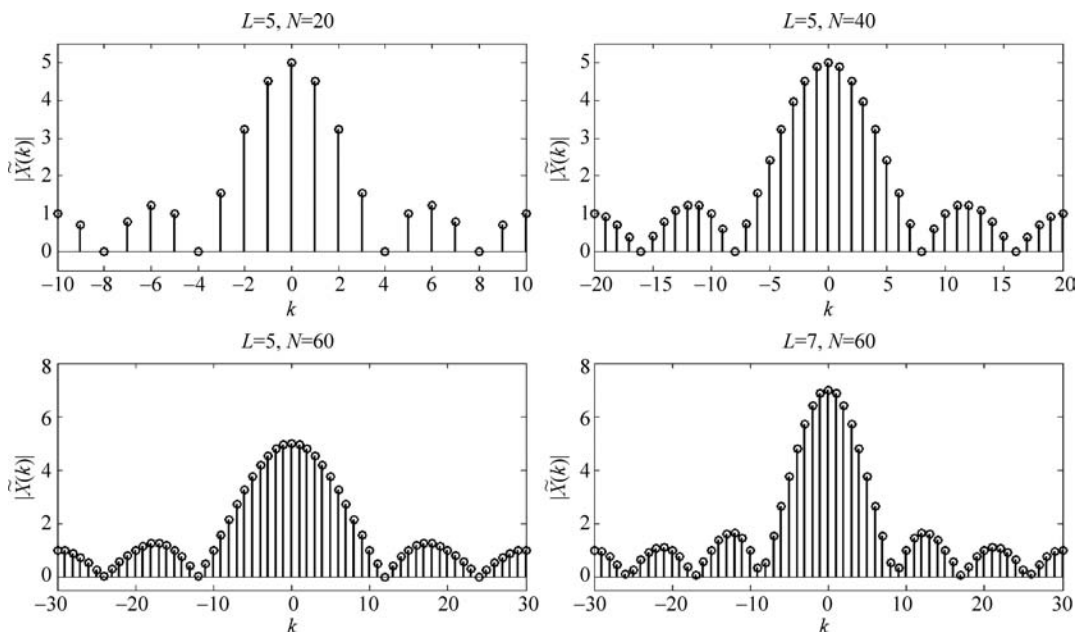


图 3.9 对于不同的 N 和 L , 周期序列的 DFS 图

由图 3.9 可知,这一周期序列的包络类似于 sinc 函数,在 $k=0$ 时的幅度等于 L ,而函数的零点在 N/L 的整数倍点。

【随堂练习】

设 $x(n) = R_4(n)$, 将 $x(n)$ 以 $N = 8$ 为周期进行周期延拓, 形成周期序列 $\tilde{x}(n)$, 求 $\tilde{x}(n)$ 的离散傅里叶级数并用 MATLAB 程序画出其离散傅里叶级数的波形。

3.5 序列的 Z 变换

在模拟信号与系统中, 通常用傅里叶变换进行频域分析, 而拉普拉斯变换则可看成是傅里叶变换的推广, 对信号进行复频域分析。类似于模拟信号与系统, 在时域离散信号与系统中, 通常用序列的傅里叶变换进行频域分析, 而 Z 变换便是其推广, 用其对序列进行复频域分析。Z 变换可以使数字信号和系统的描述更加紧凑, 它可以简单有效地帮助我们求解线性差分方程, 并使数字信号的计算更加容易。

3.5.1 Z 变换的定义

给定离散时间信号即序列 $x(n)$, 其 DTFT 定义为:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \quad (3.46)$$

注意 $X(e^{j\omega})$ 通常情况下是数字频率变量 ω 的复值函数。

类似于将因子 $e^{-\sigma t}$ 加到傅里叶变换中就得到了拉普拉斯变换, 将因子 r^{-n} 加到式(3.46)中, 则有:

$$X'(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)r^{-n}e^{-j\omega n} \quad (3.47)$$

式(3.47)可改写为:

$$X'(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(re^{j\omega})^{-n} \quad (3.48)$$

令 $z = re^{j\omega}$, z 是一个复变量, 它所在的复平面称为 Z 平面。因此 $X'(e^{j\omega})$ 可改写成 z 函数:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (3.49)$$

式(3.49)定义的函数 $X(z)$ 就被称为序列 $x(n)$ 的双边 Z 变换。 $x(n)$ 的单边 Z 变换仍用 $X(z)$ 来表示, 定义为:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \cdots \quad (3.50)$$

由式(3.50)可知, 单边 Z 变换是 z^{-1} 的幂级数, 其系数是序列 $x(n)$ 的值。

注意, 若 $x(n) = 0, n = -1, -2, \dots$, 即序列 $x(n)$ 是因果序列, 用两种 Z 变换定义计算的结果是一样的。本书中除特别说明外, 均用双边 Z 变换对信号进行分析和变换。

式(3.49)中 Z 变换存在的条件是等号右边级数收敛, 要求级数绝对可和, 即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)z^{-n}| < \infty \quad (3.51)$$



使式(3.51)成立的 z 变量的所有取值的集合称为收敛域。一般收敛域为环状域,即

$$R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

将 $z = re^{j\omega}$ 代入上式得到 $R_{x-} < |r| < R_{x+}$, 收敛域是分别以 R_{x+} 和 R_{x-} 为收敛半径的两个圆形成的环状域(如图 3.10 中所示的斜线部分)。当然, R_{x-} 可以小到零, R_{x+} 可以大到无穷大。

常用的 Z 变换是一个有理数,用两个多项式之比表示:

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

分子多项式 $P(z)$ 的根是 $X(z)$ 的零点,分母多项式 $Q(z)$ 的根是 $X(z)$ 的极点。在极点处 Z 变换不存在,因此收敛域中没有极点,收敛域总是用极点限定其边界。

对比序列的傅里叶变换定义式(3.2),很容易得到序列的傅里叶变换和 Z 变换之间的关系:

$$X(e^{j\omega}) = X(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} \quad (3.52)$$

其中, $z = e^{j\omega}$ 表示在 Z 平面上 $r=1$ 的圆,该圆称为单位圆。式(3.52)表明单位圆上的 Z 变换就是序列的傅里叶变换。如果已知序列的 Z 变换,就可用式(3.52)很方便地求出序列的傅里叶变换,条件是收敛域中包含单位圆。

【例 3.9】 计算 $x(n) = u(n)$ 的 Z 变换 $X(z)$ 。

解:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}$$

$X(z)$ 存在的条件是 $|z^{-1}| < 1$, 得到收敛域为 $|z| > 1$, 因此

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad |z| > 1$$

$X(z)$ 表达式表明,极点是 $z=1$,单位圆上的 Z 变换不存在,或者说收敛域不包含单位圆,因此其傅里叶变换不存在,不能用式(3.52)求其傅里叶变换。该例题说明一个序列的傅里叶变换不存在,但在一定收敛域内 Z 变换是可以存在的。

【随堂练习】

求下列序列的 Z 变换及其收敛域: ① $x(n) = 2^{-n}u(n)$; ② $x(n) = -2^{-n}u(-n-1)$; ③ $x(n) = 2^{-n}u(-n)$; ④ $x(n) = \delta(n)$; ⑤ $x(n) = \delta(n-1)$; ⑥ $x(n) = 2^{-n}[u(n) - u(n-10)]$ 。

3.5.2 序列特性与收敛域的关系

序列的特性会影响其 Z 变换的收敛域,了解序列特性与收敛域的一般关系,有助于更好地使用 Z 变换。

1. 有限长序列

若序列 $x(n)$ 满足下式:

$$x(n) = \begin{cases} x(n) & n_1 \leq n \leq n_2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

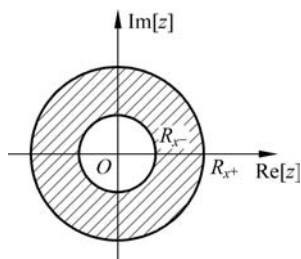


图 3.10 Z 变换的收敛域



即序列 $x(n)$ 从 n_1 到 n_2 的序列值不全为零,此范围之外序列值为零,这样的序列称为有限长序列。其 Z 变换为

$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x(n)z^{-n}$$

设 $x(n)$ 为有界序列,由于是有限项求和,除 0 与 ∞ 两点是否收敛与 n_1, n_2 取值情况有关外,整个 Z 平面均收敛。如果 $n_1 < 0$,则收敛域不包括 ∞ 点;如果 $n_2 > 0$,则收敛域不包括 $z=0$ 点;如果是因果序列,收敛域包括 $z=\infty$ 点。具体有限长序列的收敛域表示如下:

$$n_1 < 0, n_2 \leq 0 \text{ 时, } 0 \leq |z| < \infty$$

$$n_1 < 0, n_2 > 0 \text{ 时, } 0 < |z| < \infty$$

$$n_1 \geq 0, n_2 > 0 \text{ 时, } 0 < |z| < \infty$$

【例 3.10】 求 $x(n)=R_N(n)$ 的 Z 变换及其收敛域。

解:
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_N(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n} = \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$$

这是一个因果的有限长序列,因此收敛域为 $0 < |z| \leq \infty$ 。但由结果的分母可以看出,似乎 $z=1$ 是 $X(z)$ 的极点,但同时分子多项式在 $z=1$ 时也有一个零点,极、零点对消, $X(z)$ 在单位圆上仍存在,求 $R_N(n)$ 的傅里叶变换,可将 $z=e^{j\omega}$ 代入 $X(z)$ 得到,其结果和例 3.1 中的结果是相同的。

【随堂练习】

有没有序列 Z 变换的收敛域是全部 Z 平面,即 $0 \leq |z| \leq \infty$?

2. 右边序列

右边序列是指 $n \geq n_1$ 时,序列值不全为零,而在 $n < n_1$ 时,序列值全为零的序列。右边序列的 Z 变换表示为

$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=n_1}^{-1} x(n)z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

第一项为有限长序列,设 $n_1 \leq -1$,其收敛域为 $0 \leq |z| < \infty$ 。第二项为因果序列,其收敛域为 $R_x < |z| \leq \infty$, R_x 是第二项最小的收敛半径。将两收敛域相与,其收敛域为 $R_x < |z| < \infty$ 。如果是因果序列,收敛域为 $R_x < |z| \leq \infty$ 。

【例 3.11】 求 $x(n)=a^n u(n)$ 的 Z 变换及其收敛域。

解:
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

在收敛域中必须满足 $|az^{-1}| < 1$,因此收敛域为 $|z| > |a|$ 。

3. 左边序列

左边序列是指 $n \leq n_2$ 时,序列值不全为零,而在 $n > n_2$ 时,序列值全为零的序列。左边序列的 Z 变换表示为:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{n_2} x(n)z^{-n}$$

如果 $n_2 \leq 0$, $z=0$ 点收敛, $z=\infty$ 点不收敛,其收敛域是在某一圆(半径为 R_{x+})的圆内,



收敛域为 $0 \leq |z| < R_{x+}$ 。如果 $n_2 > 0$, 则收敛域为 $0 < |z| < R_{x+}$ 。

【例 3.12】 求 $x(n) = -a^n u(-n-1)$ 的 Z 变换及其收敛域。

解: 这里 $x(n)$ 是一个左边序列, 当 $n \geq 0$ 时, $x(n) = 0$,

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -a^n u(-n-1) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} -a^n z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} -a^{-n} z^n$$

$X(z)$ 需满足条件 $|a^{-1}z| < 1$, 即收敛域为 $|z| < |a|$, 因此

$$X(z) = \frac{-a^{-1}z}{1 - a^{-1}z} = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad |z| < |a|$$

注意到, 例 3.11 和例 3.12 的序列是不同的, 即一个是左边序列, 一个是右边序列, 但其 Z 变换 $X(z)$ 的函数表示式相同, 仅收敛域不同。换句话说, 同一个 Z 变换函数表达式, 收敛域不同, 对应的序列是不相同的。所以, $X(z)$ 的函数表达式及其收敛域是一个不可分离的整体, 求 Z 变换就包括求其收敛域。

4. 双边序列

一个双边序列可以看作是一个左边序列和一个右边序列之和, 其 Z 变换表示为

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = X_1(z) + X_2(z)$$

$$X_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n) z^{-n} \quad 0 \leq |z| < R_{x+}$$

$$X_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} \quad R_{x-} < |z| \leq \infty$$

$X(z)$ 的收敛域是 $X_1(z)$ 和 $X_2(z)$ 收敛域的交集。如果 $R_{x+} > R_{x-}$, 则其收敛域为 $R_{x-} < |z| < R_{x+}$, 是一个环状域; 如果 $R_{x+} < R_{x-}$, 两个收敛域没有交集, $X(z)$ 则没有收敛域, 因此 $X(z)$ 不存在。

【例 3.13】 已知 $x(n) = a^{|n|}$, a 为实数, 求 $x(n)$ 的 Z 变换及其收敛域。

$$\text{解: } X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{|n|} z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} a^n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}$$

第一部分收敛条件为 $|az| < 1$, 得到的收敛域为 $|z| < |a|^{-1}$; 第二部分收敛条件为 $|az^{-1}| < 1$, 得到的收敛域为 $|z| > |a|$ 。如果 $|a| < 1$, 两部分的公共收敛域为 $|a| < |z| < |a|^{-1}$, 其 Z 变换如下:

$$X(z) = \frac{az}{1 - az} + \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{1 - a^2}{(1 - az)(1 - az^{-1})} \quad |a| < |z| < |a|^{-1}$$

如果 $|a| \geq 1$, 则无公共收敛域, 因此 $X(z)$ 不存在。当 $0 < a < 1$ 时, $x(n)$ 的波形及 $X(z)$ 的收敛域如图 3.11 所示。

此外, 因为收敛域中无极点, 收敛域总是以极点为界, 所以如果求出序列的 Z 变换, 找出其极点, 则可以根据序列的特性, 较简单地确定其收敛域。例如在例 3.11 中, 其极点为 $z = a$, 根据 $x(n)$ 是一个因果序列, 其收敛域必为 $|z| > |a|$; 又例如在例 3.12 中, 其极点为 $z = a$, 但 $x(n)$ 是一个左序列, 收敛域一定在某个圆内, 即 $|z| < |a|$ 。

序列的 Z 变换可以用 MATLAB 语言里的 `ztrans` 命令简单地实现, 例 3.14 给出了求



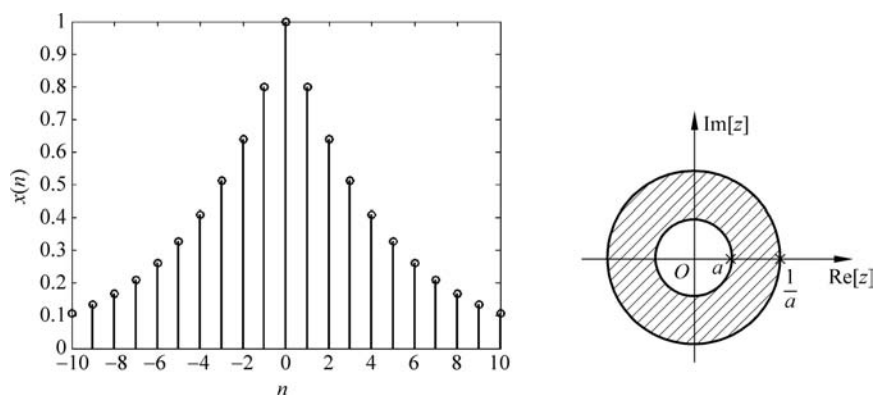


图 3.11 例 3.13 图

解序列 Z 变换的 MATLAB 程序及运行结果。

【例 3.14】 用 `ztrans` 命令求下列序列的 Z 变换：

$$(1) x(n) = \left[\left(\frac{1}{2} \right)^n + \left(\frac{1}{4} \right)^n \right] u(n);$$

$$(2) x(n) = \sin(an + b)u(n)。$$

解：MATLAB 程序：

```
syms n a b
f1 = 0.5^n + 0.25^n
f2 = sin(a * n + b)
F1 = ztrans(f1)
F2 = ztrans(f2)
```

运行结果：

```
F1 = z/(z - 1/2) + z/(z - 1/4)
F2 = (z * cos(b) * sin(a))/(z^2 - 2 * cos(a) * z + 1) + (z * sin(b) * (z - cos(a)))/(z^2 - 2 * cos(a) * z + 1)
```

但是，收敛域还是需要手动求解。

【随堂练习】

求下列序列的 Z 变换及其收敛域，并与 MATLAB 程序实现的结果进行对比：① $x(n) =$

$$\left[\left(\frac{1}{2} \right)^n + \left(\frac{3}{4} \right)^n \right] u(n-10); \quad ② x(n) = \begin{cases} 1 & -10 \leq n \leq 10 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}; \quad ③ x(n) = 2^n u(-n)。$$

3.5.3 逆 Z 变换(Z 反变换)

已知序列的 Z 变换 $X(z)$ 及其收敛域，求原序列 $x(n)$ 的过程称为求逆 Z 变换。求解逆 Z 变换有多种方法，包括留数法、部分分式展开法和幂级数法(长除法)。因为幂级数法(长除法)一般很难得到闭合解，所以这里仅介绍留数法和部分分式展开法，重点是留数法。



1. 用留数定理求逆 Z 变换

序列的 Z 变换及其逆 Z 变换表示如下:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z)z^{n-1} dz \quad (3.53)$$

其中, c 是 $X(z)$ 收敛域中一条包围原点的逆时针的闭合围线, 如图 3.12 所示。求逆 Z 变换时, 直接计算围线积分是比较麻烦的, 用留数定理求则很容易。为了表示简单, 用 $F(z)$ 表示被积函数:

$$F(z) = X(z)z^{n-1}$$

如果 $F(z)$ 在围线 c 内的极点用 z_k 表示, 则根据留数定理有

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z)z^{n-1} dz = \sum_k \text{Res}[F(z), z_k] \quad (3.54)$$

其中, $\text{Res}[F(z), z_k]$ 表示被积函数 $F(z)$ 在极点 $z = z_k$ 的留数, 逆 Z 变换是围线 c 内所有的极点留数之和。

如果 z_k 是单阶极点, 则根据留数定理有

$$\text{Res}[F(z), z_k] = (z - z_k) \cdot F(z) \big|_{z=z_k} \quad (3.55)$$

如果 z_k 是 m 阶极点, 则根据留数定理有

$$\text{Res}[F(z), z_k] = \frac{1}{(m-1)!} \frac{dz}{dz^{m-1}} [(z - z_k)^m \cdot F(z)] \big|_{z=z_k} \quad (3.56)$$

式(3.56)表明, 对于 m 阶极点, 要求 $m-1$ 次导数, 这是比较麻烦的。如果 c 内有多阶极点, 而 c 外没有多阶极点, 则可以用以下方法使问题简单化。

如果 $F(z)$ 在 Z 平面上有 N 个极点, 在收敛域内的封闭曲线 c 将 Z 平面上的极点分成两部分: 一部分是 c 内极点, 设有 N_1 个极点, 用 z_{1k} 表示; 另一部分是 c 外极点, 有 N_2 个, 用 z_{2k} 表示。 $N = N_1 + N_2$ 。根据留数辅助定理, 则有:

$$\sum_{k=1}^{N_1} \text{Res}[F(z), z_{1k}] = - \sum_{k=1}^{N_2} \text{Res}[F(z), z_{2k}] \quad (3.57)$$

注意: 式(3.57)成立的条件是 $F(z)$ 的分母阶次应比分子阶次高二阶或二阶以上。设 $X(z) = P(z)/Q(z)$, $P(z)$ 和 $Q(z)$ 分别是 M 与 N 阶多项式。式(3.57)成立的条件是:

$$N - M - n + 1 \geq 2$$

因此要求

$$n < N - M \quad (3.58)$$

如果满足式(3.58), c 内极点中有多阶极点, 而 c 外没有多阶极点, 则逆 Z 变换的计算可以按照式(3.57), 改求 c 外极点留数之和, 最后加一个负号。

【例 3.15】 已知 $X(z) = \frac{3}{1-0.5z^{-1}} + \frac{2}{1-2z^{-1}}$, 求对应 $X(z)$ 的各种可能的序列表达式。

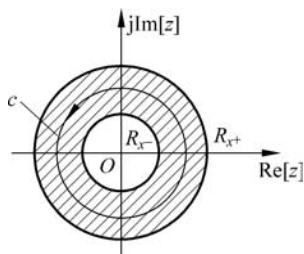


图 3.12 围线积分路径

解: $X(z)$ 有两个极点, $z_1=0.5, z_2=2$, 因为收敛域总是以极点为界, 所以收敛域有以下 3 种情况: $|z|<0.5, 0.5<|z|<2, |z|>2$, 这 3 种收敛域对应 3 种原序列。

(1) 当收敛域为 $|z|<0.5$ 时,

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz$$

令

$$\begin{aligned} F(z) &= X(z) z^{n-1} = \frac{5 - 7z^{-1}}{(1 - 0.5z^{-1})(1 - 2z^{-1})} z^{n-1} \\ &= \frac{5z - 7}{(z - 0.5)(z - 2)} z^n \end{aligned}$$

当 $n \geq 0$ 时, c 内无极点, $x(n)=0$;

当 $n \leq -1$ 时, c 内有极点 0, 但 $z=0$ 是一个 n 阶极点, 改求 c 外极点留数, c 外极点有 $z_1=0.5, z_2=2$, 那么

$$\begin{aligned} x(n) &= -\text{Res}[F(z), 0.5] - \text{Res}[F(z), 2] \\ &= \frac{(5z - 7)z^n}{(z - 0.5)(z - 2)} (z - 0.5) \Big|_{z=0.5} - \frac{(5z - 7)z^n}{(z - 0.5)(z - 2)} (z - 2) \Big|_{z=2} \\ &= - \left[3 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^n + 2 \cdot 2^n \right] u(-n-1) \end{aligned}$$

(2) 当收敛域为 $0.5 < |z| < 2$ 时,

$$F(z) = \frac{5z - 7}{(z - 0.5)(z - 2)} z^n$$

当 $n \geq 0$ 时, c 内有极点 0.5,

$$x(n) = \text{Res}[F(z), 0.5] = 3 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

当 $n < 0$ 时, c 内有极点 0.5, 0, 但 0 是一个 n 阶极点, 改求 c 外极点留数, c 外极点只有一个, 即 2, $x(n) = -\text{Res}[F(z), 2] = -2 \cdot 2^n u(-n-1)$ 。

最后得到

$$x(n) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^n u(n) - 2 \cdot 2^n u(-n-1)$$

(3) 当收敛域为 $|z| > 2$ 时,

$$F(z) = \frac{5z - 7}{(z - 0.5)(z - 2)} z^n$$

当 $n \geq 0$ 时, c 内有极点 0.5, 2。

$$\begin{aligned} x(n) &= \text{Res}[F(z), 0.5] + \text{Res}[F(z), 2] \\ &= \frac{(5z - 7)z^n}{(z - 0.5)(z - 2)} (z - 0.5) \Big|_{z=0.5} + \frac{(5z - 7)z^n}{(z - 0.5)(z - 2)} (z - 2) \Big|_{z=2} \\ &= \left[3 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^n + 2 \cdot 2^n \right] u(n) \end{aligned}$$

当 $n < 0$ 时, 由收敛域判断, 这是一个因果序列, 因此 $x(n)=0$ 。或者用另一种分析方法, c 内有极点 0.5, 2, 0, 但 0 是一个 n 阶极点, 改求 c 外极点留数, c 外无极点, 所以 $x(n)=0$ 。

最后得到:

$$x(n) = \left[3 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^n + 2 \cdot 2^n \right] u(n)$$

【随堂练习】

(1) 已知 $X(z) = (1 - 0.5z^{-1})^{-1}$, $|z| > 0.5$, 试用留数法, 求其逆 Z 变换 $x(n)$ 。

(2) 已知 $X(z) = \frac{1-a^2}{(1-az)(1-az^{-1})}$, $|a| < 1$, 试用留数法, 求其逆 Z 变换 $x(n)$ 。

2. 部分分式展开法

对于大多数单阶极点的序列, 常常也用部分分式展开法求逆 Z 变换。

设 $x(n)$ 的 Z 变换 $X(z)$ 是有理函数, 分母多项式是 N 阶, 分子多项式是 M 阶, 将 $X(z)$ 展开成一些简单的常用的部分分式之和, 通过查表(参考表 3.4)求得各部分的逆变换, 再相加便得到原序列 $x(n)$ 。设 $X(z)$ 只有 N 个一阶极点, 可展成:

$$X(z) = A_0 + \sum_{m=1}^N \frac{A_m z}{z - z_m} \quad (3.59)$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{A_0}{z} + \sum_{m=1}^N \frac{A_m}{z - z_m} \quad (3.60)$$

观察式(3.60), $X(z)/z$ 在 $z=0$ 的极点留数就是系数 A_0 , 在极点 $z=z_m$ 的留数就是系数 A_m 。

$$A_0 = \text{Res} \left[\frac{X(z)}{z}, 0 \right] \quad (3.61)$$

$$A_m = \text{Res} \left[\frac{X(z)}{z}, z_m \right] \quad (3.62)$$

求出系数 A_m ($m=0, 1, 2, \dots, N$) 后, 查表 3.4 可求得序列 $x(n)$ 。

【例 3.16】 已知 $X(z) = \frac{5z^{-1}}{1+z^{-1}-6z^{-2}}$, $2 < |z| < 3$, 求逆 Z 变换。

$$\text{解: } \frac{X(z)}{z} = \frac{5z^{-2}}{1+z^{-1}-6z^{-2}} = \frac{5}{z^2+z-6} = \frac{5}{(z-2)(z+3)} = \frac{A_1}{z-2} + \frac{A_2}{z+3}$$

$$A_1 = \text{Res} \left[\frac{X(z)}{z}, 2 \right] = \frac{X(z)}{z} (z-2) \Big|_{z=2} = 1$$

$$A_2 = \text{Res} \left[\frac{X(z)}{z}, -3 \right] = \frac{X(z)}{z} (z+3) \Big|_{z=-3} = -1$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z+3}$$

$$X(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}} - \frac{1}{1+3z^{-1}}$$

因为收敛域为 $2 < |z| < 3$, 第一部分极点是 $z=2$, 因此收敛域为 $2 < |z|$ 。第二部分极点是 $z=-3$, 因此收敛域应为 $|z| < 3$ 。查表 3.4, 得到:

$$x(n) = 2^n u(n) + (-3)^n u(-n-1)$$



注意：在进行部分分式展开时，也用到求留数问题；求各部分分式对应的原序列时，还要确定它的收敛域在哪里，因此一般情况下不如直接用留数法求方便。

例 3.16 可以用一个 MATLAB 函数 `residuez` 来校核留数计算，首先将 $X(z)$ 写成以 z^{-1} 升幂的函数： $X(z) = \frac{5z^{-1}}{1+z^{-1}-6z^{-2}} = \frac{0+5z^{-1}}{1+z^{-1}-6z^{-2}}$ ，分子和分母的系数矢量分别为： $\mathbf{b}=[0,5]$ ； $\mathbf{a}=[1,1,-6]$ ，则运行下列程序：

```
a = [1, 1, -6]
b = [0, 5]
[R, p, C] = residuez(b, a)
```

结果为：

```
R =
    -1
     1
p =
    -3
     2
C =
    []
```

其中，R 为留数；P 为极点位置；C 为直接项。

一些常见序列的 Z 变换可参考表 3.4。

表 3.4 常见序列的 Z 变换

序 列	Z 变 换	收 敛 域
$\delta(n)$	1	整体 Z 平面
$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z > 1$
$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z > a $
$R_N(n)$	$\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$	$ z > 0$
$-a^n u(-n-1)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z < a $
$nu(n)$	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$ z > 1$
$na^n u(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z > a $
$e^{j\omega_0 n} u(n)$	$\frac{1}{1-e^{j\omega_0} z^{-1}}$	$ z > 1$
$\sin(\omega_0 n) u(n)$	$\frac{z^{-1} \sin \omega_0}{1-2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}$	$ z > 1$
$\cos(\omega_0 n) u(n)$	$\frac{1-z^{-1} \cos \omega_0}{1-2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}$	$ z > 1$

【随堂练习】

(1) 已知 $X(z) = \frac{2-3z^{-1}}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}$, 试用部分分式法分别求: 收敛域为 $1 < |z| < 2$ 对应的原序列 $x(n)$; 收敛域为 $|z| > 2$ 对应的原序列 $x(n)$ 。

(2) 试用部分分式法, 求下列 $X(z)$ 的逆 Z 变换: ① $X(z) = \frac{1-\frac{1}{3}z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}} \quad |z| > \frac{1}{2}$;

② $X(z) = \frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}} \quad |z| < \frac{1}{2}$ 。

3.5.4 Z 变换的性质和定理

Z 变换的性质和傅里叶变换的性质类似, 但也有一些不同, 可以进行对照学习。

1. 线性性质

设 $m(n) = ax(n) + by(n)$ a, b 为常数, $x(n)$ 和 $y(n)$ 的 Z 变换表示为:

$$X(z) = ZT[x(n)] \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$Y(z) = ZT[y(n)] \quad R_{y-} < |z| < R_{y+}$$

则

$$M(z) = ZT[m(n)] = aX(z) + bY(z) \quad R_{m-} < |z| < R_{m+} \quad (3.63)$$

$$R_{m+} = \min(R_{x+}, R_{y+})$$

$$R_{m-} = \max(R_{x-}, R_{y-})$$

这里, $M(z)$ 的收敛域 (R_{m-}, R_{m+}) 是 $X(z)$ 和 $Y(z)$ 的公共收敛域, 如果没有公共收敛域, 例如当 $R_{x+} > R_{x-} > R_{y+} > R_{y-}$ 时, 则 $M(z)$ 不存在。

2. 序列的移位性质

设

$$X(z) = ZT[x(n)] \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

则

$$ZT[x(n - n_0)] = z^{-n_0} X(z) \quad R_{x-} < |z| < R_{x+} \quad (3.64)$$

3. 序列乘以指数序列的性质

设

$$X(z) = ZT[x(n)] \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$y(n) = a^n x(n) \quad a \text{ 为常数}$$

则

$$Y(z) = ZT[a^n x(n)] = X(a^{-1}z) \quad |a| R_{x-} < |z| < |a| R_{x+} \quad (3.65)$$

4. 序列乘以 n 的 ZT

设

$$X(z) = ZT[x(n)] \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

则

$$ZT[nx(n)] = -z \frac{dX(z)}{dz} \quad R_{x-} < |z| < R_{x+} \quad (3.66)$$

5. 复共轭序列的 ZT

设

$$X(z) = ZT[x(n)] \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

则

$$ZT[x^*(n)] = X^*(z^*) \quad R_{x-} < |z| < R_{x+} \quad (3.67)$$

6. 初值定理

设 $x(n)$ 是因果序列, $X(z) = ZT[x(n)]$, 则

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) \quad (3.68)$$

7. 终值定理

若 $x(n)$ 是因果序列, 其 Z 变换的极点, 除可以有一个一阶极点在 $z=1$ 上, 其他极点均在单位圆内, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z) \quad (3.69)$$

终值定理也可用 $X(z)$ 在 $z=1$ 点的留数表示, 因为

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z) = \text{Res}[X(z), 1]$$

因此

$$x(\infty) = \text{Res}[X(z), 1] \quad (3.70)$$

如果在单位圆上 $X(z)$ 无极点, 则 $x(\infty) = 0$ 。

8. 时域卷积定理

设

$$w(n) = x(n) * y(n)$$

$$X(z) = ZT[x(n)] \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$Y(z) = ZT[y(n)] \quad R_{y-} < |z| < R_{y+}$$

则

$$W(z) = ZT[w(n)] = X(z)Y(z) \quad R_{w-} < |z| < R_{w+} \quad (3.71)$$

$$R_{w+} = \min(R_{x+}, R_{y+})$$

$$R_{w-} = \max(R_{x-}, R_{y-})$$

【例 3.17】 已知某网络的单位脉冲响应 $h(n) = a^n u(n)$, $|a| < 1$, 网络输入序列 $x(n) = u(n)$, 求该网络的输出序列 $y(n)$ 。

解: 求 $y(n)$ 可用两种方法, 一种是直接求解线性卷积, 另一种是 Z 变换法。

(1) 直接求解线性卷积法, 则有:

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} a^m u(m)u(n-m) \\ &= \left(\sum_{m=0}^n a^m \right) u(n) = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} u(n) \end{aligned}$$



(2) Z 变换法, 因为:

$$H(z) = ZT[a^n u(n)] = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad |z| > |a|$$

$$X(z) = ZT[u(n)] = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad |z| > 1$$

根据时域卷积定理有:

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{1}{(1 - z^{-1})(1 - az^{-1})} \quad |z| > 1$$

求其逆 Z 变换, 得到:

$$y(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{z^{n+1}}{(z-1)(z-a)} dz$$

由收敛域判定

$$y(n) = 0 \quad n < 0$$

$n \geq 0$ 时,

$$\begin{aligned} y(n) &= \text{Res}[Y(z)z^{n-1}, 1] + \text{Res}[Y(z)z^{n-1}, a] \\ &= \frac{1}{1-a} + \frac{a^{n+1}}{a-1} = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \end{aligned}$$

最后将 $y(n)$ 表示为

$$y(n) = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} u(n)$$

9. 复卷积定理

如果

$$X(z) = ZT[x(n)] \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$Y(z) = ZT[y(n)] \quad R_{y-} < |z| < R_{y+}$$

$$w(n) = x(n) * y(n)$$

则

$$W(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(v)Y\left(\frac{z}{v}\right) \frac{dv}{v} \quad (3.72)$$

其中, c 是 v 平面收敛域中任一条环绕原点的逆时针方向的闭合围线, $W(z)$ 的收敛域为

$$R_{x-} R_{y-} < |z| < R_{x+} R_{y+} \quad (3.73)$$

式(3.72)中 v 平面上, 被积函数的收敛域为

$$\max\left(R_{x-}, \frac{|z|}{R_{y+}}\right) < |v| < \min\left(R_{x+}, \frac{|z|}{R_{y-}}\right) \quad (3.74)$$

10. 帕塞瓦尔定理

设

$$X(z) = ZT[x(n)] \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$Y(z) = ZT[y(n)] \quad R_{y-} < |z| < R_{y+}$$

$$R_{x-} R_{y-} < 1, \quad R_{x+} R_{y+} > 1$$

那么

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(v)Y^*\left(\frac{1}{v^*}\right) \frac{dv}{v} \quad (3.75)$$

其中, c 是 $X(v)Y^*\left(\frac{1}{v^*}\right)$ 收敛域中任一条环绕原点的逆时针方向的闭合围线, v 的收敛域为

$$\max\left(R_{x^-}, \frac{1}{R_{y^+}}\right) < |v| < \min\left(R_{x^+}, \frac{1}{R_{y^-}}\right)$$

如果 $x(n)$ 和 $y(n)$ 都满足绝对可和, 即单位圆上收敛, 令 $v = e^{j\omega}$, 得到:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega}) d\omega$$

令 $x(n) = y(n)$, 得到:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x^*(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (3.76)$$

式(3.76)等号的左边表示时间信号的能量, 等号的右边表示信号频谱的能量。因此帕塞瓦尔定理的物理意义是: 在时域中计算得到的序列能量与在频域中计算得到的能量相等。式(3.76)还可以表示为:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z)X(z^{-1}) \frac{dz}{z} \quad (3.77)$$

注意: 式(3.77)中 $X(z)$ 收敛域包含单位圆, 当 $x(n)$ 为实序列时,

$$X(e^{-j\omega}) = X^*(e^{j\omega})$$

3.6 时域离散系统的系统函数

3.6.1 系统函数与差分方程

首先需要知道什么是时域离散系统的系统函数? 如何得到系统函数?

根据前面的知识, 一个时域离散系统可以用差分方程来描述系统的功能和特性。比如 $y(n) = 3x(n)$ 这样一个差分方程, 可以对输入的信号放大 3 倍, 表示的是一个具有放大功能的系统, 类似于麦克风。假设一个任意的时域离散系统可以用下面这个 N 阶线性常系数差分方程描述:

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{l=0}^M b_l x(n-l) \quad (3.78)$$

那么对式(3.78)求 Z 变换, 则需要对方程中的每一项都进行 Z 变换, 即可得到:

$$\sum_{k=0}^N a_k Y(z)z^{-k} = \sum_{l=0}^M b_l X(z)z^{-l} \quad (3.79)$$

然后在 Z 域对系统的输出与输入求比值得:

$$\begin{aligned} H(z) &= Y(z)/X(z) \\ &= \frac{\sum_{l=0}^M b_l z^{-l}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \end{aligned} \quad (3.80)$$



其中, $H(z)$ 就称为时域离散系统的系统函数(也称传输函数)。系统函数表示的是系统输出与输入的关系, 包含了时域离散系统的所有信息。它不仅可以表征线性时不变系统的动态特性, 而且还可以借以研究系统的结构或参数变化对系统性能的影响, 是了解系统和计算系统输出的极为有用的工具。

虽然实际系统基本都有非线性的输入输出特性, 但是许多系统在标称参数范围内的运行状态非常接近于线性, 所以实际应用中完全可以用线性时不变系统理论表示其输入输出行为。

【例 3.18】 求下列差分方程所描述系统的系统函数:

$$2y(n) + 3y(n-1) + 0.8y(n-2) = 2x(n) + x(n-3)$$

解: 对上面的差分方程逐项进行 Z 变换得:

$$2Y(z) + 3z^{-1}Y(z) + 0.8z^{-2}Y(z) = 2X(z) + z^{-3}X(z)$$

$Y(z)$ 是系统输出 $y(n)$ 的 Z 变换, $X(z)$ 是系统输入 $x(n)$ 的 Z 变换, 上式左右两边分别提取公因式 $Y(z)$ 和 $X(z)$ 有:

$$(2 + 3z^{-1} + 0.8z^{-2})Y(z) = (2 + z^{-3})X(z)$$

最后得时域离散系统的系统函数为:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2 + z^{-3}}{2 + 3z^{-1} + 0.8z^{-2}}$$

【随堂练习】

(1) 求下列差分方程所描述系统的系统函数: ① $2y(n) + y(n-1) + 0.8y(n-2) = x(n-1) + x(n-3)$; ② $y(n) = 0.7x(n) - 0.3x(n-2) - 0.01x(n-3)$ 。

(2) 求下列系统函数的差分方程: ① $H(z) = \frac{1+0.7z^{-1}}{1-0.7z^{-1}}$; ② $H(z) = \frac{z}{(2z-1)(3z+1)}$ 。



3.6.2 系统函数与单位脉冲响应

到目前为止, 已介绍了 3 种描述系统特性的方法, 包括差分方程、单位脉冲响应和系统函数。如图 3.13 所示。如果对卷积式(2.25)求 Z 变换, 可以得到单位脉冲响应与系统函数的关系:

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m)$$

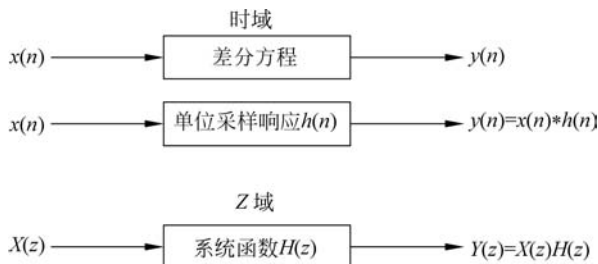


图 3.13 时域、 Z 域系统的输出

两边求 Z 变换,得:

$$\begin{aligned}
 Y(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n)z^{-n} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m)x(n-m) \right] \cdot z^{-n} \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n-m) \cdot z^{-n} \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m) \cdot \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} x(n') \cdot z^{-(n'+m)} \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m)z^{-m} \cdot \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} x(n') \cdot z^{-n'} \\
 &= H(z)X(z)
 \end{aligned} \tag{3.81}$$

其中, $Y(z)$ 是 $y(n)$ 的 Z 变换, $X(z)$ 是 $x(n)$ 的 Z 变换。需要特别注意的是, $H(z)$ 是 $h(n)$ 的 Z 变换,换句话说,系统的系统函数是其单位脉冲响应的 Z 变换。由 Z 变换的定义可以求解:

$$\begin{aligned}
 H(z) &= ZT[h(n)] \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^{-n}
 \end{aligned} \tag{3.82}$$

【随堂练习】

设数字滤波器的单位采样响应为:

$$h(n) = \delta(n) + 0.5\delta(n-1) + 0.2\delta(n-2) + 0.06\delta(n-3)$$

求此滤波器的系统函数和差分方程。

3.6.3 利用 Z 变换计算系统输出



第2章介绍了两种计算系统输出的方法:一种是通过数字卷积运算计算系统输出,还有一种是通过递推的方法直接计算差分方程得出系统的输出,这两种方法都是在时域中的运算。下面介绍一种在 Z 域,利用系统的传输函数 $H(z)$ 和 Z 变换求解系统的输出。这种方法将求解差分方程变成求解代数方程,让求解过程更加简单。

设 N 阶线性常系数差分方程描述为:

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) \tag{3.83}$$

1. 求稳态解

如果输入序列 $x(n)$ 是在 $n=0$ 以前 ∞ 时加上的, n 时刻的 $y(n)$ 是稳态解,对式(3.83)求 Z 变换,得到:

$$\sum_{k=0}^N a_k Y(z)z^{-k} = \sum_{k=0}^M b_k X(z)z^{-k}$$

$$Y(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \cdot X(z) \quad (3.84)$$

对 $Y(z)$ 求逆 Z 变换, 便可得到系统的输出信号 $y(n)$, 即

$$y(n) = \text{IZT}[Y(z)] \quad (3.85)$$

此时的 $y(n)$ 是系统的稳态解。

2. 求暂态解

对于 N 阶差分方程, 求暂态解必须已知 N 个初始条件。设 $x(n)$ 是因果序列, 即 $x(n) = 0, n < 0$, 已知初始条件 $y(-1), y(-2), \dots, y(-N)$ 。对式(3.83)进行 Z 变换时(注意这里要用单边 Z 变换), 该方程式的右边由于 $x(n)$ 是因果序列, 单边 Z 变换与双边 Z 变换是相同的。下面先求移位序列的单边 Z 变换。

设

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} y(n) z^{-n} \\ \text{ZT}[y(n-m)u(n)] &= \sum_{n=0}^{\infty} y(n-m) z^{-n} \\ &= z^{-m} \sum_{n=0}^{\infty} y(n-m) z^{-(n-m)} \\ &= z^{-m} \sum_{k=-m}^{\infty} y(k) z^{-k} \\ &= z^{-m} \left[\sum_{k=0}^{\infty} y(k) z^{-k} + \sum_{k=-m}^{-1} y(k) z^{-k} \right] \\ &= z^{-m} \left[Y(z) + \sum_{k=-m}^{-1} y(k) z^{-k} \right] \end{aligned} \quad (3.86)$$

按照式(3.86)对式(3.83)进行单边 Z 变换, 有

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} \left[Y(z) + \sum_{l=-k}^{-1} y(l) z^{-l} \right] &= \sum_{k=0}^M b_k X(z) z^{-k} \\ Y(z) &= \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \cdot X(z) - \frac{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} \sum_{l=-k}^{-1} y(l) z^{-l}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \end{aligned} \quad (3.87)$$

其中右边第一部分与系统初始状态无关, 称为零状态解; 而第二部分与输入信号无关, 称为零输入解。求零状态解时, 可用双边 Z 变换求解也可用单边 Z 变换求解, 求零输入解却必须考虑初始条件, 用单边 Z 变换求解。

【例 3.19】 已知差分方程 $y(n) = 0.5y(n-1) + x(n)$, 设输入为 $x(n) = 0.7u(n)$, 初始条件为(1) $y(-1) = 1.5$, (2) $y(-1) = 0$, 求 $y(n)$ 。

解: (1) $y(-1)=1.5$ 时, 将已知差分方程进行单边 Z 变换:

$$Y(z) - 0.5z^{-1}Y(z) + 0.5y(-1) = X(z)$$

$$Y(z) = \frac{X(z) - 0.5y(-1)}{1 - 0.5z^{-1}}$$

其中

$$X(z) = \frac{0.7}{1 - z^{-1}}, \quad y(-1) = 1.5$$

于是

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{0.7}{(1 - 0.5z^{-1})(1 - z^{-1})} + \frac{0.75}{1 - 0.5z^{-1}} \\ &= \frac{0.7z^2}{(z - 0.5)(z - 1)} + \frac{0.75z}{z - 0.5} \end{aligned}$$

部分分式展开得

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{-0.7z}{z - 0.5} + \frac{1.4z}{z - 1} + \frac{0.75z}{z - 0.5} \\ &= \frac{1.4z}{z - 1} + \frac{0.05z}{z - 0.5} \end{aligned}$$

取逆 Z 变换, 得

$$y(n) = (-0.05 \times 0.5^n + 1.4)u(n)$$

(2) 若 $y(-1)=0$, 则 Z 变换方程为

$$Y(z) - 0.5z^{-1}Y(z) = X(z)$$

故

$$Y(z) = \frac{-0.7z}{z - 0.5} + \frac{1.4z}{z - 1}$$

则有

$$y(n) = (1.4 - 0.7 \times 0.5^n)u(n)$$

以上计算也可以用 MATLAB 语言中的 filter 来求出其数值解, 程序如下:

```
clc
clear
n = [0:7]
x = 0.7 * ones(1,8)
xic1 = [1.5]
xic2 = [0]
b = [1]
a = [1, -0.5]
format long
y1 = filter(b,a,x,xic1)
y2 = filter(b,a,x,xic2)
```

运行结果为:

```

y1 =
Columns 1 through 4
    2.200000000000000    1.800000000000000    1.600000000000000    1.500000000000000
Columns 5 through 8
    1.450000000000000    1.425000000000000    1.412500000000000    1.406250000000000
y2 =
Columns 1 through 4
    0.700000000000000    1.050000000000000    1.225000000000000    1.312500000000000
Columns 5 through 8
    1.356250000000000    1.378125000000000    1.389062500000000    1.394531250000000

```

【随堂练习】

用 Z 变换法解下列差分方程：① $y(n) - 0.9y(n-1) = 0.05u(n)$ ，当 $n \leq -1$ 时， $y(n) = 0$ ；② $y(n) - 0.9y(n-1) = 0.05u(n)$ ，且 $y(-1) = 1$ ，且当 $n < -1$ 时， $y(n) = 0$ ；③ $y(n) - 0.8y(n-1) - 0.15y(n-2) = \delta(n)$ ，且 $y(-1) = 0.2$ ， $y(-2) = 0.5$ ，且当 $n < -2$ 时， $y(n) = 0$ 。

3.6.4 系统函数的级联和并联

通过前面内容的学习，了解到滤波器的输出 $y(n)$ 既可以通过直接计算差分方程得出，也可通过数字卷积运算计算得到，这两种方法都是在时域的运算。在 Z 域，可以利用 $Y(z) = H(z)X(z)$ ，求解 $Y(z)$ 的逆 Z 变换得到输出信号 $y(n)$ 。这种方法的最大优点就是乘法运算一般要比卷积运算简单，而最大的缺点在于要计算 Z 变换和逆 Z 变换。

这种利用系统函数 $H(z)$ 计算滤波器输出的思想，也可以扩展到更加复杂的系统，即系统函数的级联和并联，如图 3.14 所示。图 3.14(a) 是滤波器的级联组合，第一级滤波器的输出是第二级的输入，因此级联组合的系统函数是 $H_1(z)$ 和 $H_2(z)$ 的乘积。图 3.14(b) 是滤波器的并联组合，并联组合的系统函数是系统函数之和 $H_1(z) + H_2(z)$ 。

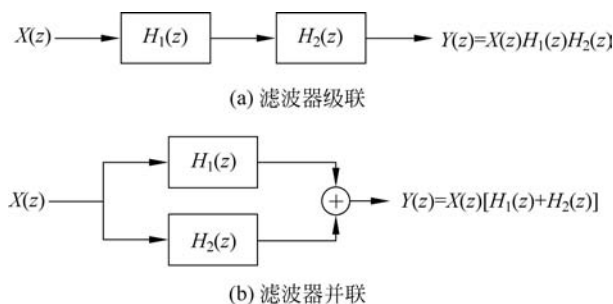


图 3.14 滤波器的级联与并联

【随堂练习】

两个滤波器的差分方程分别为： $y_1(n) + 0.2y_1(n-1) = x_1(n) - 0.2x_1(n-1)$ ； $y_2(n) - 0.1y_2(n-1) + 0.4y_2(n-2) = 0.5x_2(n-1)$ ，① 滤波器级联，求总的传输函数；② 滤波器并联，求总的传输函数。

3.7 利用 Z 变换分析系统的频率响应特性

3.7.1 频率响应函数、系统函数和单位脉冲响应



1. 频率响应函数与系统函数

频率响应函数与系统函数 $H(z)$ 之间有密切的联系。设系统初始状态为零, 系统对输入为单位脉冲序列 $\delta(n)$ 的输出称为系统的单位脉冲响应 $h(n)$ 。根据上一节的介绍, 对 $h(n)$ 进行 Z 变换, 可以得到系统函数 $H(z)$, 它表征了系统对复频域的响应特性。

同样如果对 N 阶差分方程式(3.83)进行 Z 变换, 也可得到系统函数的一般表示:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{l=0}^M b_l z^{-l}}{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}} \quad (3.88)$$

而如果对 $h(n)$ 进行序列的傅里叶变换(DTFT), 可以得到:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-j\omega n} = |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)} \quad (3.89)$$

一般称 $H(e^{j\omega})$ 为系统的频率响应函数, 它表征系统的频率响应特性。 $|H(e^{j\omega})|$ 称为幅频响应特性函数, $\varphi(\omega)$ 称为相频响应特性函数。

如果 $H(z)$ 的收敛域包含单位圆 $|z|=1$, 则 $H(e^{j\omega})$ 与 $H(z)$ 之间的关系如下:

$$H(e^{j\omega}) = H(z) \big|_{z=e^{j\omega}} \quad (3.90)$$

即在 $z=e^{j\omega}$ 时, 系统的频率响应和系统函数相等。换言之, 把系统函数 $H(z)$ 中所有的 z 换成 $e^{j\omega}$, 即可得到系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$ 。

类比前面利用 Z 变换求解系统的输出, 理论上利用 DTFT 的方法也可以用来求解系统的输出。但 Z 变换在计算一般输出时更方便, 而 DTFT 仅限于计算输入为正弦信号时的系统的输出。这是因为系统的频率响应显示了滤波器在每个频率上的特性, 当输入信号是单一频率的正弦信号时, 根据滤波器的频率响应特性很容易确定输出信号。同时, 根据前面的知识, 大多数复杂信号可由各种不同频率、幅度和相位的正弦信号叠加而成, 甚至还可以构成复数形式的信号, 因此, 滤波器的输出仍然可以用 DTFT 的方法求解, 这样就扩大了应用的范围, 下面举例阐述。

设系统输入一个复数信号 $x(n) = \cos(\omega n) + j\sin(\omega n) = e^{j\omega n}$, 则利用卷积和求解, 系统输出信号为

$$\begin{aligned} y(n) &= h(n) * x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) x(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) e^{j\omega(n-m)} \\ &= e^{j\omega n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) e^{-j\omega m} = H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} \end{aligned}$$

即

$$y(n) = H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} = |H(e^{j\omega})| e^{j[\omega n + \varphi(\omega)]} \quad (3.91)$$

式(3.91)说明, 单频复指数信号 $e^{j\omega n}$ 通过频率响应函数为 $H(e^{j\omega})$ 的系统后, 输出仍为

单频复指数序列,其幅度放大 $|H(e^{j\omega})|$ 倍,相移为 $\varphi(\omega)$ 。

为了加深读者对 $H(e^{j\omega})$ 物理意义的理解,再以常见的正弦信号为例进行讨论。当系统输入信号 $x(n)=\cos(\omega n)$ 时,求系统的输出信号 $y(n)$:

因为

$$x(n)=\cos(\omega n)=\frac{1}{2}(e^{j\omega n}+e^{-j\omega n})$$

所以,利用上面的结论可得到:

$$y(n)=\frac{1}{2}[H(e^{j\omega})e^{j\omega n}+H(e^{j(-\omega)})e^{-j\omega n}]$$

设 $h(n)$ 为实序列,则 $H^*(e^{j\omega})=H(e^{-j\omega})$, $|H(e^{j\omega})|=|H(e^{-j\omega})|$, $\varphi(\omega)=-\varphi(-\omega)$,故

$$\begin{aligned} y(n) &= \frac{1}{2} [|H(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)} e^{j\omega n} + |H(e^{-j\omega})| e^{j\varphi(-\omega)} e^{-j\omega n}] \\ &= \frac{1}{2} |H(e^{j\omega})| \{ e^{j[\omega n + \varphi(\omega)]} + e^{-j[\omega n + \varphi(\omega)]} \} \\ &= |H(e^{j\omega})| \cos[\omega n + \varphi(\omega)] \end{aligned} \quad (3.92)$$

由式(3.92)可见,线性时不变系统对单频正弦信号 $\cos(\omega n)$ 的响应为同频正弦信号,其幅度放大 $|H(e^{j\omega})|$ 倍,相移增加 $\varphi(\omega)$,这就是“频率响应函数”“幅频响应”和“相频响应”的物理含义。如果系统输入为一般的序列 $x(n)$,则 $H(e^{j\omega})$ 对 $x(n)$ 的不同的频率成分进行加权处理。对感兴趣的频段取 $|H(e^{j\omega})|=1$,其他频段 $|H(e^{j\omega})|=0$,则 $Y(e^{j\omega})=X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega})$,就实现了对输入序列 $x(n)$ 的理想滤波处理。

【例 3.20】 设输入信号为数字频率 $\omega=1.5\text{rad}$ 的余弦波:

$$x(n)=30\cos(1.5n+20^\circ)$$

在此频率下,滤波器系统增益为 -21dB ,相位差为 68° ,则输出信号的幅度和相位是多少?

解: 因为输入信号为 $x(n)=30\cos(1.5n+20^\circ)$,用极坐标形式可以简写为 $30\angle 20^\circ$ 。在 1.5rad 处,滤波器的增益为 -21dB ,但分贝不能用于计算,必须转换成线性值。根据题意, $20\lg|H(e^{j\times 1.5})|=-21\text{dB}$,有

$$|H(e^{j\times 1.5})|=10^{\frac{-21}{20}}=0.0891$$

因为相位差为 68° ,即 $\varphi(\omega)|_{\omega=1.5}=68^\circ$,所以频率响应可简化为 $0.0891\angle 68^\circ$ 。

这样,根据式(3.92)可得输出信号为:

$$y(n)=30 \times 0.0891 \times \cos(1.5n+20^\circ+68^\circ)=2.673\cos(1.5n+88^\circ)$$

【随堂练习】

已知线性因果系统用下面的差分方程描述: $y(n)=0.9y(n-1)+x(n)+0.9x(n-1)$,
①求系统函数 $H(z)$ 及其单位脉冲响应 $h(n)$; ②写出频率响应函数 $H(e^{j\omega})$ 的表达式,并定性画出其幅频特性曲线; ③设输入 $x(n)=e^{j\omega_0 n}$,求输出 $y(n)$ 。

2. 频率响应函数与单位脉冲响应

DTFT 提供了另一种描述滤波器的方法,这样所有描述滤波器的方法包括:差分方程、单位脉冲响应、系统函数和频率响应函数。像其他描述方法一样,滤波器的频率响应含有滤波器的所有信息,利用这些信息,可以预测滤波器的工作状态。根据前面的知识,滤波器的

系统函数 $H(z)$ 是单位脉冲响应 $h(n)$ 的 Z 变换。那么,当滤波器的输入 $x(n)$ 是一个单位脉冲序列 $\delta(n)$ 时,对应的输出 $y(n)$ 是 $h(n)$ 。分别对 $x(n)$ 和 $y(n)$ 求 DTFT 得:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) e^{-j\omega n} = 1$$

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-j\omega n}$$

因为滤波器的频率响应 $H(e^{j\omega}) = Y(e^{j\omega})/X(e^{j\omega})$, 所以

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-j\omega n}}{1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-j\omega n} \quad (3.93)$$

因此,滤波器的频率响应 $H(e^{j\omega})$ 是单位脉冲响应 $h(n)$ 的 DTFT。滤波器的单位脉冲响应、频率响应和系统函数的关系,如图 3.15 所示。

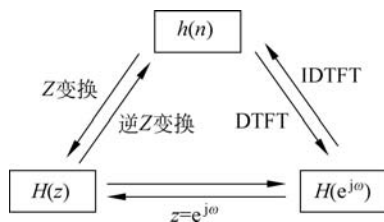


图 3.15 滤波器单位脉冲响应、频率响应和系统函数的关系图

3.7.2 系统函数与系统的因果性和稳定性

滤波器的系统函数是描述滤波器特性的一个重要表现形式,根据式(3.88),滤波器的系统函数一般形式为:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{l=0}^M b_l z^{-l}}{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}}$$

有关 $H(z)$ 的收敛域问题有以下结论:

(1) 一个因果(可实现)系统的单位脉冲响应 $h(n)$ 一定是因果序列。因此,根据前面所学的序列及其收敛域的关系可知,因果系统函数 $H(z)$ 的收敛域一定是因果序列的收敛域,即

$$R_- < |z| \leq \infty$$

(2) 系统稳定要求 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < \infty$, 这是 $H(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[h(n)]$ 存在的条件,对照 Z 变换与傅里叶变换的关系可知,如果单位圆外有极点,则系统不稳定(Unstable); 如果单位圆上有极点,则系统是临界稳定(Marginally Stable); 如果系统的所有极点都在单位圆内,则系统是稳定的(Stable)。

因此,系统稳定的条件是 $H(z)$ 的收敛域包含单位圆。如果要求系统因果且稳定,收敛



域包含 ∞ 点和单位圆,那么 $H(z)$ 的收敛域可表示为

$$R_- < |z| \leq \infty \quad 0 < R_- < 1$$

这样 $H(z)$ 的极点集中在单位圆的内部。此外,如果每个极点的模值都小于 1,也说明系统是稳定的。下面通过例 3.21 说明。

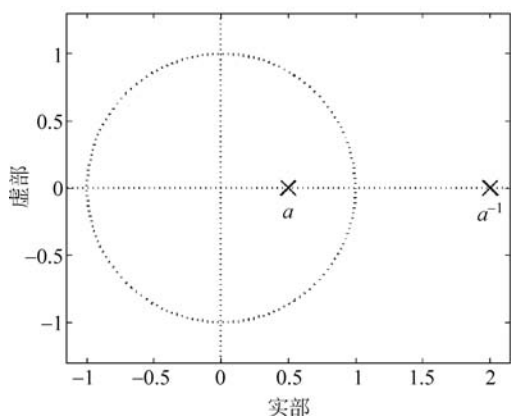
【例 3.21】 已知 $H(z) = \frac{1-a^2}{(1-az^{-1})(1-az)}$ $0 < a < 1$, 分析其因果性和稳定性。

解: $H(z)$ 的极点为 $z=a, z=a^{-1}$, 如图 3.16(a) 所示。

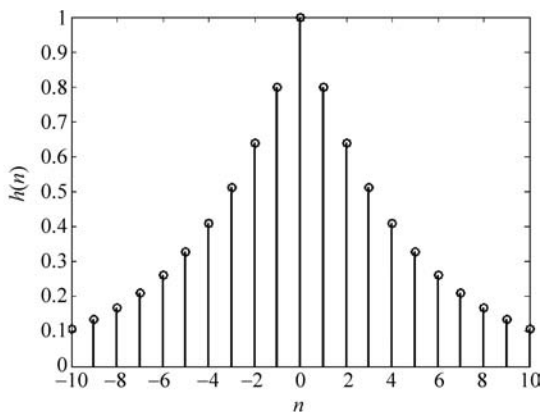
(1) 收敛域为 $a^{-1} < |z| \leq \infty$: 对应的系统是因果系统,但由于收敛域不包含单位圆,因此是不稳定系统。单位脉冲响应 $h(n) = (a^n - a^{-n})u(n)$, 这是一个因果序列,但不收敛。

(2) 收敛域为 $0 \leq |z| < a$: 对应的系统是非因果且不稳定系统。其单位脉冲响应 $h(n) = (a^{-n} - a^n)u(-n-1)$, 这是一个非因果且不收敛的序列。

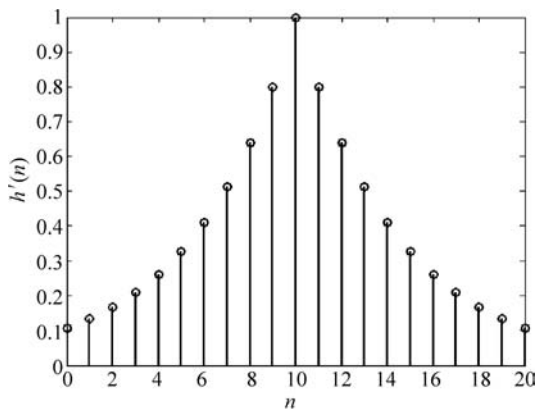
(3) 收敛域为 $a < |z| < a^{-1}$: 对应一个非因果系统,但由于收敛域包含单位圆,因此是稳定系统。其单位脉冲响应 $h(n) = a^{|n|}$, 这是一个收敛的双边序列,如图 3.16(b) 所示。



(a) $H(z)$



(b) 单位脉冲响应 $h(n)$



(c) $h'(n)$ 序列

图 3.16 例 3.21 图

下面分析例 3.21 表示的系统的可实现性。

$H(z)$ 的 3 种收敛域中,前两种系统不稳定,不能选用;最后一种收敛域,系统稳定但非因果,还是不能具体实现。因此严格地讲,这样的系统是无法具体实现的。但是利用数字系统或者说计算机的存储性质,可以近似实现第三种情况。方法是将图 3.16(b)在 $-N \sim N$ 截取一段,再向右移,形成如图 3.16(c)所示的 $h'(n)$ 序列,将 $h'(n)$ 作为具体实现的系统单位脉冲响应。 N 愈大, $h'(n)$ 表示的系统愈接近 $h(n)$ 系统。具体实现时,预先将 $h'(n)$ 存储起来,备运算时应用。这种非因果但稳定的系统的近似实现性,是数字信号处理技术比模拟信息处理技术优越的地方。

需说明的是,对一个实际物理实现系统,其 $H(z)$ 的收敛域是唯一的。

【例 3.22】 数字滤波器的系统函数为:

$$H(z) = \frac{1 - z^{-2}}{1 + 0.7z^{-1} + 0.9z^{-2}}$$

试判断该滤波器的稳定性。

解: 将系统函数转换成 Z 正幂级数形式:

$$H(z) = \frac{z^2 - 1}{z^2 + 0.7z + 0.9}$$

其零点为: $z = \pm 1$, 极点为: $z = \frac{-0.7 \pm j\sqrt{3.11}}{2} = -0.35 \pm j0.8818$

这些极点到单位圆圆心的距离为:

$$|z| = \sqrt{(-0.35)^2 + 0.8818^2} = 0.9487 < 1$$

因此该滤波器系统稳定。

【例 3.23】 已知一因果系统 $y(n] = 0.7y(n-1) + x(n)$ 试求 $H(z)$ 并用 MATLAB 软件画出它的零-极点图、 $|H(e^{j\omega})|$ 及 $\angle H(e^{j\omega})$ 。

解: 将差分方程写为:

$$y(n] - 0.7y(n-1) = x(n]$$

两边取 Z 变换并按式(3.93)得:

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.7z^{-1}}$$

由于系统为因果系统,因此收敛域为 $|z| > 0.7$ 。

为画出其零-极点图,编写以下程序:

```
b = [1, 0]
a = [1, -0.7]
zplane(b, a)
```

运行结果为图 3.17。以下程序用于画出 $|H(e^{j\omega})|$ 及 $\angle H(e^{j\omega})$:

```
b = [1, 0]
a = [1, -0.7]
[H w] = freqz(b, a, 100)
magH = abs(H)
```



```

phaH = angle(H)
subplot(2,1,1)
plot(w/pi,magH, 'b')
grid
subplot(2,1,2)
plot(w/pi,phaH, 'b')
grid

```

所得图形如图 3.18 所示。

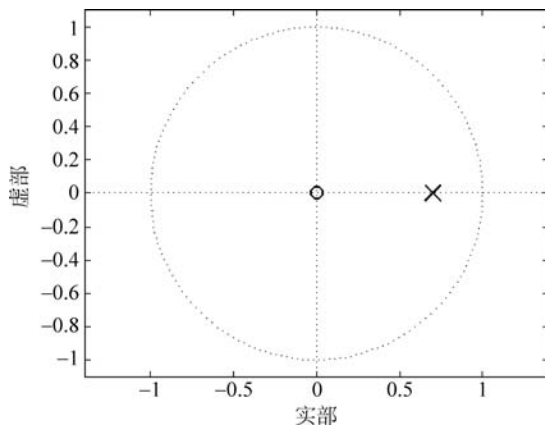


图 3.17 零-极点图

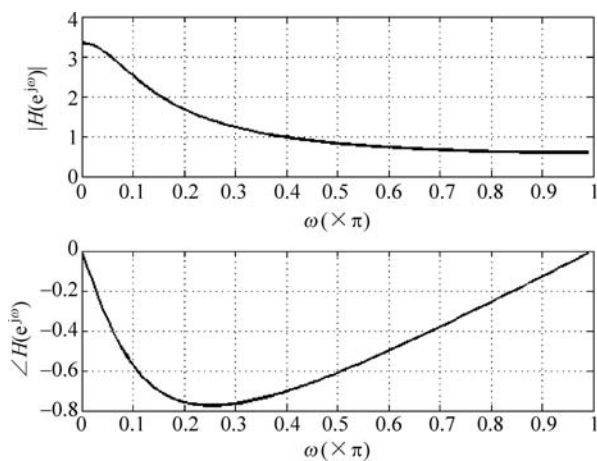


图 3.18 幅度响应 $|H(e^{j\omega})|$ 及相位响应 $\angle H(e^{j\omega})$

【随堂练习】

若一个线性时不变系统的输入为 $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + 2^n u(-n-1)$, 输出为 $y(n) = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - 6 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n u(n)$, 求系统函数 $H(z)$, 并判断系统是否稳定和因果。

3.7.3 利用系统零-极点分布分析系统的单位脉冲响应和阶跃响应特性



由于滤波器的系统函数是描述滤波器特性的一个重要表现形式, $H(z)$ 的一般形式为:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{l=0}^M b_l z^{-l}}{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}}$$

因此, $H(z)$ 就可能存在零点和极点。其中极点(Pole)是系统函数分母为零时 z 的取值, 零点(Zero)是系统函数分子为零时 z 的取值。极点对数字滤波器特性的影响最大, 零点用来调整极点所引起的滤波器特性, 调整的大小取决于零点与极点的相对位置。

为了更好地理解极点位置对系统特性的影响, 此处不进行复杂的理论推导, 通过研究一组二阶滤波器系统来发现规律。在此讨论 6 个系统函数:

$$(1) H(z) = \frac{z^{-2}}{1 + 0.2z^{-1} + 0.01z^{-2}};$$

$$(2) H(z) = \frac{z^{-2}}{1 + 1.7z^{-1} + 0.7625z^{-2}};$$

$$(3) H(z) = \frac{z^{-2}}{1 - 1.7z^{-1} + 0.6z^{-2}};$$

$$(4) H(z) = \frac{z^{-2}}{1 - 1.6z^{-1} + 0.9425z^{-2}};$$

$$(5) H(z) = \frac{1 - 0.3z^{-1}}{1 - 1.6z^{-1} + 0.9425z^{-2}};$$

$$(6) H(z) = \frac{1 - 1.6z^{-1} + 0.8z^{-2}}{1 - 1.6z^{-1} + 0.9425z^{-2}}.$$

每个系统函数的形式相同, 为了确定极点, 将系统函数化为 z 的正幂级数形式:

$$H(z) = \frac{z^{-2}}{1 + \alpha z^{-1} + \beta z^{-2}} = \frac{1}{z^2 + \alpha z + \beta} \quad (3.94)$$

单位脉冲响应和单位阶跃响应可由下列差分方程求解:

$$y(n) = -\alpha y(n-1) - \beta y(n-2) + x(n-2)$$

由于输入有两位时延, 每个输出响应也有起始两位的时延。

用下面的 MATLAB 程序将以上各系统的单位脉冲响应、单位阶跃响应和零-极点图画出来, 如图 3.19 所示(以下程序中使用系统(1)中参数):

```
% 输入是脉冲信号
m1 = [0, 0, 1];
m2 = zeros(1, 57);
m = [m1, m2];
a = 1; % 分子的系数
b = [1, 0.2, 0.01]; % 分母的系数
h = filter(a, b, m);
n = 1:60;
```

```

subplot(2,2,3)
stem(n,h(n))
xlabel('n')
ylabel('h(n)')
% 输入是阶跃序列时的输出
u1 = [0,0,1];
u2 = ones(1,57);
u = [u1,u2];
s = filter(a,b,u);
n = 1:60;
subplot(2,2,4)
stem(n,s(n))
xlabel('n')
ylabel('s(n)')
% 画零-极点图
[z,p,k] = tf2zp(a,b)
% 求解零点、极点和增益值
subplot(2,2,1)
zplane(a,b)
title('(a) 极点: -0.1, -0.1')

```

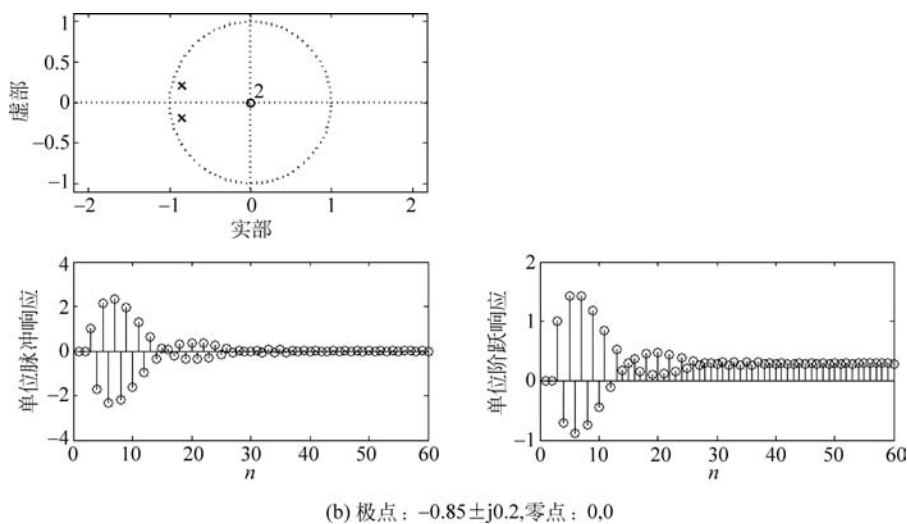
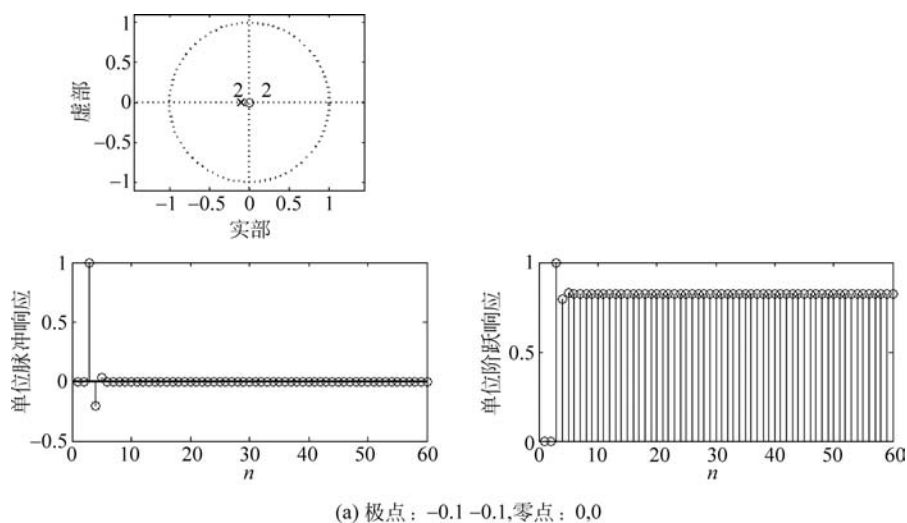
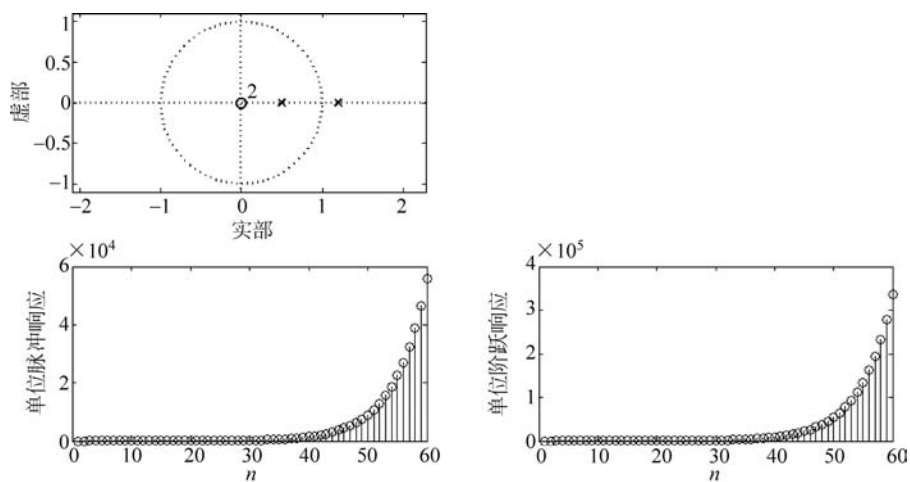


图 3.19 零-极点位置对系统响应的影响



(c) 极点: 1.2, 0.5, 零点: 0, 0

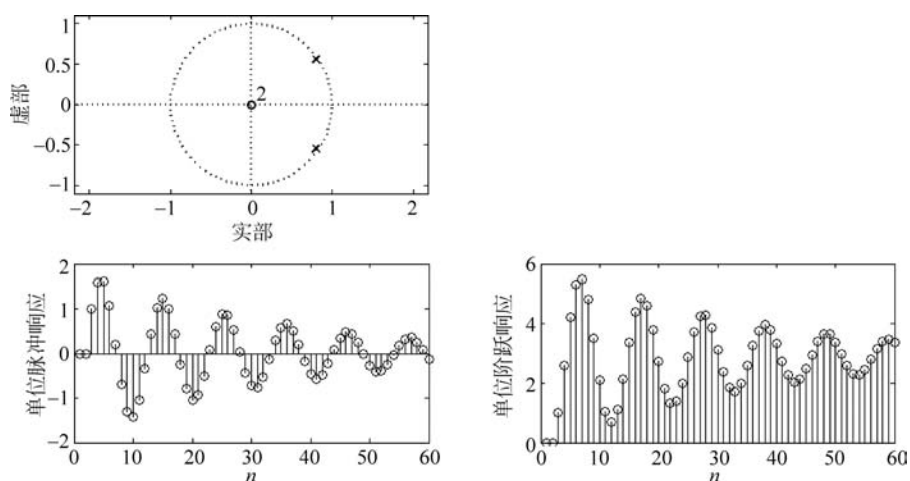
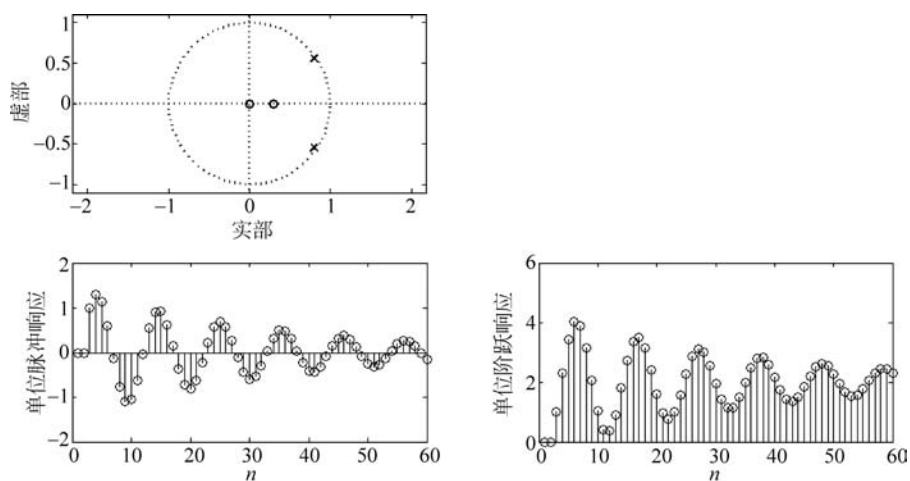

 (d) 极点: $0.8 \pm j0.55$, 零点: 0, 0

 (e) 极点: $0.8 \pm j0.55$, 零点: 0, 0.3

图 3.19 (续)

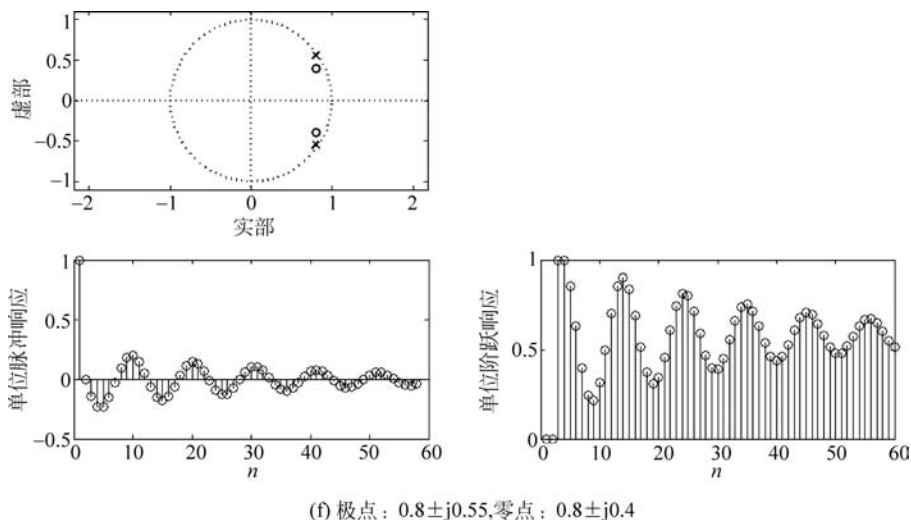


图 3.19 (续)

从图 3.19 的结果可以看出,零-极点的位置对系统响应的影响。图 3.19(a)、图 3.19(b)和图 3.19(c) 对应的零点都在原点,极点的模值对系统趋于最终的稳态值所需的时间有很大影响,在图 3.19(a)中,极点的模值为 0.1,系统用了不到 3 个采样点就稳定了,而图 3.19(b)和图 3.19(e)中极点的模值靠近单位圆,因此输出稳定需很长时间。图 3.19(c)中极点的模值超出了单位圆,则输出就不稳定,这与前面的讨论是一致的。图 3.19(d)、图 3.19(e)和图 3.19(f)有相同的极点,零点的位置逐渐接近极点,这时脉冲响应的幅度逐渐减小。



3.8 用几何方法研究零-极点分布对系统频率响应的影响

将系统函数 $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{l=0}^M b_l z^{-l}}{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}}$ 因式分解,得到:

$$H(z) = A \frac{\prod_{r=1}^M (1 - c_r z^{-1})}{\prod_{r=1}^N (1 - d_r z^{-1})} \quad (3.95)$$

其中, $A = \frac{b_0}{a_0}$, c_r 是 $H(z)$ 的零点, d_r 是 $H(z)$ 的极点。A 参数影响频率响应函数的幅度大小。影响系统特性的是零点 c_r 和极点 d_r 的分布。下面采用几何方法研究不同零-极点分布对系统频率响应特性的影响。

将式(3.95)的分子、分母同乘以 z^{N+M} , 得到:

$$H(z) = A z^{N-M} \frac{\prod_{r=1}^M (z - c_r)}{\prod_{r=1}^N (z - d_r)} \quad (3.96)$$

设系统稳定,将 $z = e^{j\omega}$ 代入上式,得到频率响应函数

$$H(e^{j\omega}) = A e^{j\omega(N-M)} \frac{\prod_{r=1}^M (e^{j\omega} - c_r)}{\prod_{r=1}^N (e^{j\omega} - d_r)} \quad (3.97)$$

在 Z 平面上, $e^{j\omega} - c_r$ 用一根由零点 c_r 指向单位圆上 $e^{j\omega}$ 点 B 的向量 $c_r \mathbf{B}$ 表示,同样, $e^{j\omega} - d_r$ 用一根由极点 d_r 指向单位圆上 $e^{j\omega}$ 点 B 的向量 $d_r \mathbf{B}$ 表示,如图 3.20 所示,即 $c_r \mathbf{B}$ 和 $d_r \mathbf{B}$ 分别称为零点向量和极点向量,将它们用极坐标表示:

$$c_r \mathbf{B} = \rho_r \cdot e^{j\alpha_r}$$

$$d_r \mathbf{B} = l_r \cdot e^{j\beta_r}$$

将 $c_r \mathbf{B}$ 和 $d_r \mathbf{B}$ 表示式代入式(3.97),得到:

$$H(e^{j\omega}) = A e^{j\omega(N-M)} \frac{\prod_{r=1}^M c_r \mathbf{B}}{\prod_{r=1}^N d_r \mathbf{B}} = |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)} \quad (3.98)$$

$$|H(e^{j\omega})| = |A| \frac{\prod_{r=1}^M \rho_r}{\prod_{r=1}^N l_r} \quad (3.99)$$

$$\varphi(\omega) = \omega(N-M) + \sum_{r=1}^M \alpha_r - \sum_{r=1}^N \beta_r \quad (3.100)$$

系统的频率响应特性由式(3.99)和式(3.100)确定。当频率 ω 从 0 变化到 2π 时,这些向量的终点 B 沿单位圆逆时针旋转一周,按照式(3.99)和式(3.100),分别估算出系统的幅频特性和相频特性。例如图 3.20 表示了具有一个零点和两个极点的频率特性。

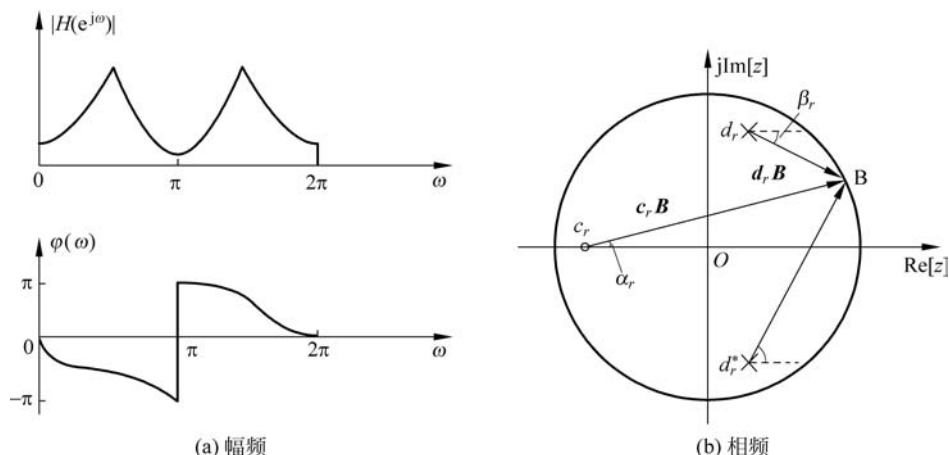


图 3.20 频率响应的几何表示法

按照式(3.99),知道零-极点的分布后,可以很容易地确定零-极点位置对系统特性的影响。当B点转到极点附近时,极点向量长度最短,因而幅度特性可能出现峰值,且极点越靠近单位圆,极点向量长度越短,峰值越高越尖锐。如果极点在单位圆上,则幅度特性为 ∞ ,系统不稳定。对于零点,情况正好相反,当B点转到零点附近时,零点向量长度最短,因而幅度特性可能出现谷值,且零点越靠近单位圆,零点向量长度越短,谷值越接近零。如果零点在单位圆上,则幅度特性为零。综上所述,极点位置主要影响频响的峰值位置及尖锐程度,零点位置主要影响频响的谷点位置及形状。

这种通过零-极点位置分布分析系统频率响应特性的几何方法提供了一个直观的概念,对于分析和设计系统是十分有用的。

【例 3.24】 设线性时不变系统的系统函数为 $H(z) = \frac{1-a^{-1}z^{-1}}{1-az^{-1}}$, a 为实数。

(1) 在 Z 平面上用几何方法证明该系统是全通网络(即系统频率响应的幅度在所有频率 ω 处皆为常数), $|H(e^{j\omega})| = \text{常数}$;

(2) 参数 a 如何取值,才能使系统因果稳定? 画出极点、零点分布与收敛域。

解: (1) $H(z) = \frac{1-a^{-1}z^{-1}}{1-az^{-1}} = \frac{z-a^{-1}}{z-a}$, 极点 $z=a$, 零点 $z=a^{-1}$, $|H(e^{j\omega})| = \left| \frac{e^{j\omega}-a^{-1}}{e^{j\omega}-a} \right|$, $z=e^{j\omega}$, 单位圆中 $OA=1$, 如图 3.21 所示。

设 $a=0.6$

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{AB}{AC}$$

在 $\triangle AOC$ 和 $\triangle BOA$ 中, $\angle AOC = \angle BOA$

$$\frac{AO}{OC} = \frac{1}{a}; \frac{BO}{OA} = \frac{1}{a}$$

$\therefore \triangle AOC \sim \triangle BOA$, $|H(e^{j\omega})| = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{a}$ 为常数。

$\therefore H(z)$ 是全通网络。

(2) 当 $|a| < 1$, 才能使收敛域包含单位圆, 如图 3.22 所示。设 $a=0.6$, 极点: $z=0.6$; 零点: $z=\frac{1}{0.6}=1.66$; 收敛域: $|z| > 0.6$ 。

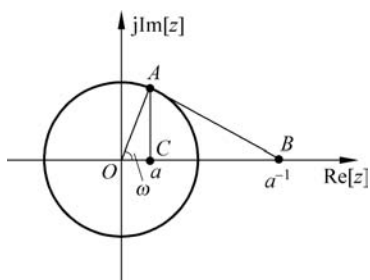


图 3.21 几何方法图

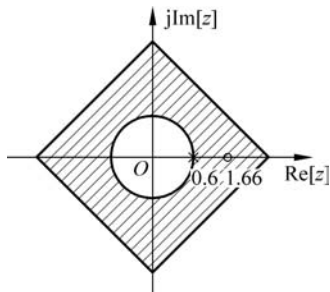


图 3.22 系统的零-极点图

【随堂练习】

(1) 已知 $H(z) = z^{-1}$, 分析其频率特性。

(2) 设一阶系统的差分方程为:

$$y(n) = by(n-1) + x(n)$$

用几何法分析其幅度特性。

习题

1. 写出下列序列的 DTFT 的表达式:

(1) $x_1(n) = \delta(n) - \delta(n-1) + \delta(n-2)$;

(2) $x_2(n) = e^{-j0.1n} [u(n) - u(n-4)]$;

(3) $x_3(n) = \delta(n) + 0.5\delta(n-1) + 0.25\delta(n-2)$ 。

2. 设图 3.23 所示的序列 $x(n]$ 的 DTFT 用 $X(e^{j\omega})$ 表示, 不直接求出, 完成下列运算或工作:

(1) $X(e^{j0})$;

(2) $\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) d\omega$;

(3) $X(e^{j\pi})$;

(4) $\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$;

(5) $\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} \right|^2 d\omega$ 。

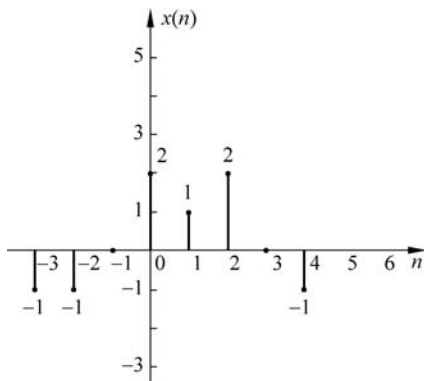


图 3.23 习题 2 图

3. 设 $x(n) = R_3(n)$, 试求 $x(n)$ 的共轭对称序列 $x_e(n)$ 和共轭反对称序列 $x_o(n)$, 并分别用图表示。

4. 已知 $x(n) = 0.5^n u(n)$, 分别求出其偶函数 $x_e(n)$ 和奇函数 $x_o(n)$ 的傅里叶变换。

5. 若序列 $x(n)$ 是实因果序列, $x(0) = 1$, 其傅里叶变换的虚部为

$$X_I(e^{j\omega}) = \sin\omega$$

求序列 $x(n)$ 及其傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 。

6. 求下列序列的 Z 变换:

(1) $x_1(n) = 3\sin\left(\frac{\pi}{5}n\right)u(n)$;

(2) $x_2(n) = 0.5nu(n)$;

(3) $x_3(n) = 2e^{-j0.2n} \cos\left(\frac{\pi}{7}n\right)u(n)$ 。

7. 求下列 $X(z)$ 的逆 Z 变换:

(1) $X(z) = \frac{z}{z+0.12} \quad |z| > 0.12$

(2) $X(z) = \frac{5}{1-z^{-1}} \quad |z| < 1$

$$(3) X(z) = \frac{4}{z^2(z-0.5)} \quad |z| > \frac{1}{2}$$

$$(4) X(z) = \frac{2z-1}{z-0.9} \quad |z| < 0.9$$

$$(5) X(z) = \frac{1}{(z-0.2)(z+0.4)} \quad |z| > 0.4$$

$$(6) X(z) = \frac{1}{z(z+0.2)(z-1)} \quad |z| > 1$$

8. 由滤波器的单位脉冲响应 $h(n) = 2\delta(n) - 1.5\delta(n-1) + \delta(n-2) + 0.5\delta(n-3)$, 求系统函数和差分方程。

9. 两个滤波器级联, 它们的单位脉冲响应分别为 $h_1(n) = 0.2^n [u(n) - u(n-3)]$ 和 $h_2(n) = -3n[u(n) - u(n-4)]$, 用 Z 变换求级联系统的单位脉冲响应。

10. 滤波器的系统函数如下式, 试求其频率响应表达式:

$$(1) H(z) = \frac{1}{1 - 1.1z^{-1} + 0.4z^{-2}};$$

$$(2) H(z) = \frac{z-0.7}{z^2-0.5z+0.3}.$$

11. 滤波器的差分方程为:

$$y(n) + 0.8y(n-1) - 0.9y(n-2) = x(n-2)$$

判断滤波器的稳定性。

12. 滤波器的传输函数为

$$H(z) = \frac{2}{1 - 0.4z^{-1}}$$

- (1) 确定滤波器的差分方程;
- (2) 找出零点和极点, 判断其稳定性;
- (3) 求解并画出单位脉冲响应。

13. 数字滤波器的传输函数为:

$$H(z) = \frac{z-0.2}{z^2(z-0.7)}$$

- (1) 系统是否稳定?
- (2) 如果输入 $x(n) = 0.9^n u(n)$, 求输出 $y(n)$ 。

14. 如图 3.24 所示的两个线性时不变系统的单位脉冲响应分别为 $h_1(n)$ 和 $h_2(n)$, 已知系统 $h_1(n)$ 的输出满足差分方程 $x(n) = s(n) - e^{-8\alpha} s(n-8)$, 其中 $\alpha > 0$ 。

(1) 求 $H_1(z)$ 的系统函数 $H_1(z)$, 画出零-极点图并说明收敛域。

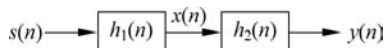


图 3.24 习题 14 图

(2) 设系统 $h_2(n)$ 的输出为 $y(n) = s(n)$, 求 $h_2(n)$ 的系统函数 $H_2(z)$ 及其收敛域, 并说明系统是否稳定和因果。

(3) 求能够使输出为 $y(n) = s(n)$ 的稳定的 $h_2(n)$ 的一般表达式。