

第5章 三维变换与投影

现实世界是三维的,三维物体的运动是通过三维变换实现的。光栅扫描显示器是二维平面显示器,要在二维屏幕上绘制出三维场景就要通过投影变换来降低维数。本章主要介绍三维变换、正交投影、斜投影与透视投影。

5.1 三维变换

5.1.1 三维变换矩阵

同二维变换类似,三维变换同样引入了齐次坐标,在四维空间内进行讨论。用 (x, y, z, w) 表示一个点(其中 $w=1$),而不是用 (x, y, z) 。三维变换就可以表示为某一变换矩阵与物体顶点集合的齐次坐标矩阵相乘的形式。三维变换矩阵是一个 4×4 的方阵。

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a & b & c & l \\ d & e & f & m \\ g & h & i & n \\ p & q & r & s \end{bmatrix} \quad (5-1)$$

设 $\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ 为 3×3 的子矩阵,用于对物体进行比例、旋转、反射和错切变换;

$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix}$ 为 3×1 的子矩阵,用于对物体进行平移变换;

$\mathbf{M}_3 = [p \ q \ r]$ 为 1×3 的子矩阵,用于对物体进行投影变换;

$\mathbf{M}_4 = [s]$ 为 1×1 的子矩阵,用于对物体进行整体比例变换。

5.1.2 三维变换形式

物体的几何变换通常是以点变换为基础的。三维变换的基本方法是把变换矩阵作为一个算子,作用到变换前物体顶点集合的齐次坐标矩阵上,得到变换后新的顶点集合的齐次坐标矩阵。连接新的物体顶点,就可以绘制出变换后的三维物体模型。

设变换前物体顶点矩阵

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-1} \\ y_0 & y_1 & \cdots & y_{n-1} \\ z_0 & z_1 & \cdots & z_{n-1} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

变换后物体新的顶点矩阵为

$$\mathbf{P}' = \begin{bmatrix} x'_0 & x'_1 & \cdots & x'_{n-1} \\ y'_0 & y'_1 & \cdots & y'_{n-1} \\ z'_0 & z'_1 & \cdots & z'_{n-1} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

三维变换矩阵为

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a & b & c & l \\ d & e & f & m \\ g & h & i & n \\ p & q & r & s \end{bmatrix}$$

则三维变换公式为 $\mathbf{P}' = \mathbf{M} \cdot \mathbf{P}$, 可以写成

$$\begin{bmatrix} x'_0 & x'_1 & \cdots & x'_{n-1} \\ y'_0 & y'_1 & \cdots & y'_{n-1} \\ z'_0 & z'_1 & \cdots & z'_{n-1} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c & l \\ d & e & f & m \\ g & h & i & n \\ p & q & r & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-1} \\ y_0 & y_1 & \cdots & y_{n-1} \\ z_0 & z_1 & \cdots & z_{n-1} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (5-2)$$

5.2 三维基本变换

三维基本变换是指将 $P(x, y, z)$ 点从一个坐标位置变换到另一个坐标位置 $P'(x', y', z')$ 的过程。三维基本变换和二维基本变换一样是相对于坐标系原点或坐标轴进行的几何变换, 包括平移、比例、旋转、反射和错切 5 种变换。因为三维变换矩阵的推导过程与二维变换矩阵的推导过程类似, 这里只给出结论。

5.2.1 平移变换

平移变换的坐标表示为

$$\begin{cases} x' = x + T_x \\ y' = y + T_y \\ z' = z + T_z \end{cases}$$

因此, 三维平移变换矩阵为

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5-3)$$

其中, T_x 、 T_y 、 T_z 是平移参数。

5.2.2 比例变换

比例变换的坐标表示为

$$\begin{cases} x' = xS_x \\ y' = yS_y \\ z' = zS_z \end{cases}$$

因此,三维比例变换矩阵为

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5-4)$$

其中, S_x 、 S_y 、 S_z 是比例系数。

5.2.3 旋转变换

三维旋转变换一般看作二维旋转变换的组合,可以分为绕 x 轴旋转、绕 y 轴旋转、绕 z 轴旋转。绕坐标轴的旋转角用 β 表示。 β 正向的定义符合右手螺旋法则:大拇指指向旋转轴正向,其余四指的转向为转角的方向。

1. 绕 x 轴旋转

绕 x 轴旋转变换的坐标表示为

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \cos \beta - z \sin \beta \\ z' = y \sin \beta + z \cos \beta \end{cases}$$

因此,绕 x 轴的三维旋转变换矩阵为

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5-5)$$

其中, β 为正向旋转角。

2. 绕 y 轴旋转

同理可得,绕 y 轴旋转变换的坐标表示为

$$\begin{cases} x' = x \cos \beta + z \sin \beta \\ y' = y \\ z' = -x \sin \beta + z \cos \beta \end{cases}$$

因此,绕 y 轴的三维旋转变换矩阵

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5-6)$$

其中, β 为正向旋转角。

3. 绕 z 轴旋转

同理可得,绕 z 轴旋转变换的坐标表示为

$$\begin{cases} x' = x \cos \beta - y \sin \beta \\ y' = x \sin \beta + y \cos \beta \\ z' = z \end{cases}$$

因此,绕 z 轴的三维旋转变换矩阵为

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5-7)$$

其中, β 为正向旋转角。

5.2.4 反射变换

三维反射可以分为关于坐标轴的反射和关于坐标平面的反射两类。

1. 关于 x 轴的反射

关于 x 轴反射变换的坐标表示为

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \\ z' = -z \end{cases}$$

因此, 关于 x 轴的三维反射变换矩阵为

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5-8)$$

2. 关于 y 轴的反射

关于 y 轴反射变换的坐标表示为

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \\ z' = -z \end{cases}$$

因此, 关于 y 轴的三维反射变换矩阵为

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5-9)$$

3. 关于 z 轴的反射

关于 z 轴反射变换的坐标表示为

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \\ z' = z \end{cases}$$

因此, 关于 z 轴的三维反射变换矩阵为

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5-10)$$

4. 关于 xOy 平面的反射

关于 xOy 平面反射变换的坐标表示为

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = -z \end{cases}$$

因此,关于 xOy 平面的三维反射变换矩阵为

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5-11)$$

5. 关于 yOz 平面的反射

关于 yOz 平面反射变换的坐标表示为

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

因此,关于 yOz 平面的三维反射变换矩阵为

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5-12)$$

6. 关于 zOx 平面的反射

关于 zOx 平面反射变换的坐标表示为

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \\ z' = z \end{cases}$$

因此,关于 zOx 平面的三维反射变换矩阵为

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5-13)$$

5.2.5 错切变换

三维错切变换的坐标表示为

$$\begin{cases} x' = x + by + cz \\ y' = dx + y + fz \\ z' = gx + hy + z \end{cases}$$

因此,三维错切变换矩阵为

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & b & c & 0 \\ d & 1 & f & 0 \\ g & h & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5-14)$$

三维错切变换中,一个坐标的变化受另外两个坐标变化的影响。如果变换矩阵第 1 行中元素 b 和 c 不为 0,则产生沿 x 轴方向的错切;如果第 2 行中元素 d 和 f 不为 0,则产生沿 y 轴方向的错切;如果第 3 行中元素 g 和 h 不为 0,则产生沿 z 轴方向的错切。

1. 沿 x 方向错切

此时, $d=0, f=0, g=0, h=0$ 。因此,沿 x 方向错切变换矩阵为

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & b & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5-15)$$

当 $b=0$ 时,错切平面离开 z 轴,沿 x 方向移动 c_z 距离;当 $c=0$ 时,错切平面离开 y 轴,沿 x 方向移动 b_y 距离。

2. 沿 y 方向错切

此时, $b=0, c=0, g=0, h=0$ 。因此,沿 y 方向错切变换矩阵为

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ d & 1 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5-16)$$

当 $d=0$ 时,错切平面离开 z 轴,沿 y 方向移动 f_z 距离;当 $f=0$ 时,错切平面离开 x 轴,沿 y 方向移动 d_x 距离。

3. 沿 z 方向错切

此时, $b=0, c=0, d=0, f=0$ 。因此,沿 z 方向错切变换矩阵为

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ g & h & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5-17)$$

当 $g=0$ 时,错切平面离开 y 轴,沿 z 方向移动 h_y 距离;当 $h=0$ 时,错切平面离开 x 轴,沿 z 方向移动 g_x 距离。

5.3 三维复合变换

三维基本变换是相对于坐标系原点或坐标轴进行的几何变换。同二维复合变换类似,三维复合变换是指对图形进行一次以上的基本变换,总变换矩阵是每一步变换矩阵相乘的结果。

$$\mathbf{P}' = \mathbf{M} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{M}_n \cdot \mathbf{M}_{n-1} \cdot \cdots \cdot \mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{P}, \quad \text{其中 } n > 1$$

其中, $\mathbf{M}$ 为复合变换矩阵, $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \cdots, \mathbf{M}_n$ 为 n 个单一的基本变换矩阵。

5.3.1 相对于任意一个参考点的三维变换

在三维基本变换中,旋转变换和比例变换是与参考点相关的。相对于任意一个参考点的比例变换和旋转变换应表达为复合变换形式。变换方法是首先将参考点平移到坐标系原点,相对于坐标系原点作比例变换或旋转变换,然后再进行反平移,将参考点平移回原位置。

5.3.2 相对于任意一个参考方向的三维变换

相对于任意方向的变换方法是首先对任意方向做旋转变换,使任意方向与某个坐标轴重合,然后对该坐标轴进行三维基本变换,最后做反向旋转变换,将任意方向还原回原来的方向。三维几何变换中需要进行两次旋转变换,才能使任意方向与某一坐标轴重合。一般做法是先将任意方向旋转到某个坐标平面内,然后再旋转到与该坐标平面内的某个坐标轴重合。某个坐标轴可以是 3 个坐标轴中的任意一个,其中 z 轴是个不错的选择。

例 5-1 任意向量 n 用 3 个坐标轴上的方向余弦表示为 $n = (\cos\alpha_x, \cos\alpha_y, \cos\alpha_z)$, 求空间中一点 $P(x, y, z)$ 绕 n 逆时针方向旋转 β 后的分步变换矩阵, 如图 5-1 所示。

将 n 分别绕 x 轴、 y 轴旋转适当角度与 z 轴重合, 有多种方法可以实现二次旋转。这里采用将 n 变换到 yOz 平面, 然后使用绕 x 轴的旋转将 n 变换到 z 轴上的方法。完成二次旋转后, 再绕 z 轴逆时针旋转 β 角, 最后再进行上述变换的逆变换, 使 n 回到原来位置, 如图 5-2 所示。

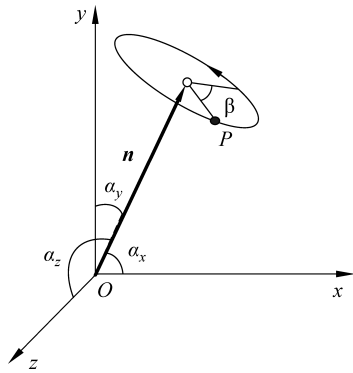


图 5-1 绕空间向量旋转

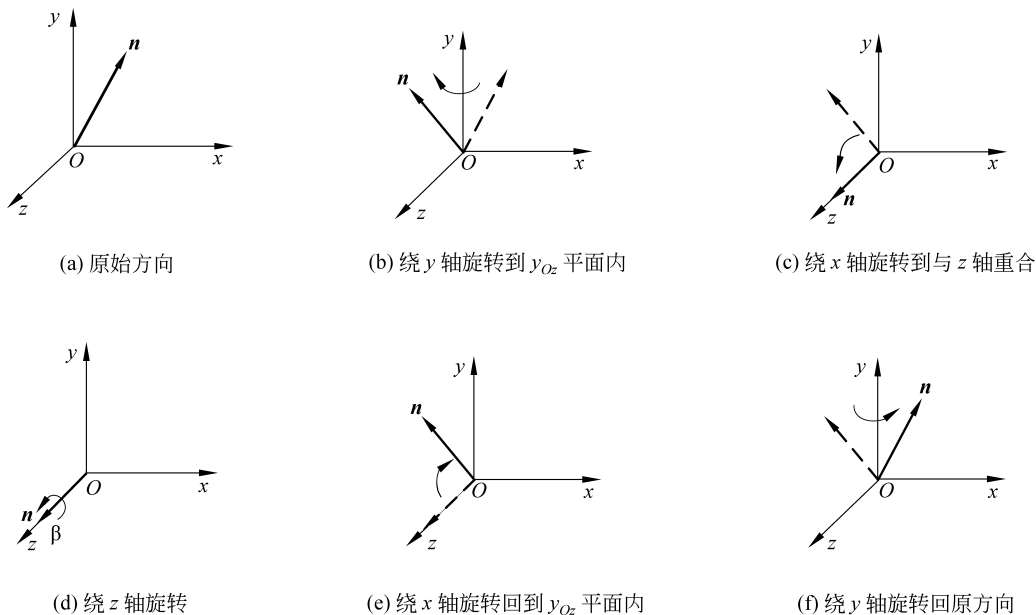


图 5-2 相对于任意方向的三维变换步骤

(1) 将 n 绕 y 轴顺时针方向旋转 β_y 后, 与 yOz 平面重合, 变换矩阵为

$$M_1 = \begin{bmatrix} \cos\beta_y & 0 & -\sin\beta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\beta_y & 0 & \cos\beta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5-18)$$

(2) 将 n 绕 x 轴逆时针方向旋转 β_x 后,与 z 轴重合,变换矩阵为

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta_x & -\sin\beta_x & 0 \\ 0 & \sin\beta_x & \cos\beta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5-19)$$

(3) 将 $P(x, y, z)$ 点绕 z 轴逆时针方向旋转 β 后,变换矩阵为

$$M_3 = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5-20)$$

(4) 将 n 绕 x 轴顺时针旋转 β_x 后,变换矩阵为

$$M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta_x & \sin\beta_x & 0 \\ 0 & -\sin\beta_x & \cos\beta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5-21)$$

(5) 将 n 绕 y 轴逆时针方向旋转 β_y 后,变换矩阵为

$$M_5 = \begin{bmatrix} \cos\beta_y & 0 & \sin\beta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\beta_y & 0 & \cos\beta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5-22)$$

式(5-22)中, $\sin\beta_x$ 、 $\cos\beta_x$ 、 $\sin\beta_y$ 、 $\cos\beta_y$ 为中间变量。将 n 投影到 xOz 平面上,投影向量为 u , u 与 z 轴正向的夹角为 β_y 。将 n 绕 y 轴顺时针旋转 β_y 后到 yOz 平面上,得到向量 v , v 与 z 轴正向的夹角为 β_x ,如图 5-3 所示。不需要计算 β_x 和 β_y 的值,只计算其正弦值与余弦值,就可以定义变换矩阵 M_1 、 M_2 、 M_4 和 M_5 。

n 在 3 个坐标轴上的投影分别为 $n_x = \cos\alpha_x$ 、 $n_y = \cos\alpha_y$ 、 $n_z = \cos\alpha_z$ 。取 z 轴上一单位向量 k ,将其绕 x 轴顺时针方向旋转 β_x 后,再绕 y 轴逆时针方向旋转 β_y 后,单位向量 k 将与单位向量 n 重合,变换过程为

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha_x \\ \cos\alpha_y \\ \cos\alpha_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta_y & 0 & \sin\beta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\beta_y & 0 & \cos\beta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta_x & \sin\beta_x & 0 \\ 0 & -\sin\beta_x & \cos\beta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta_x \sin\beta_y \\ \sin\beta_x \\ \cos\beta_x \cos\beta_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

即

$$\cos\beta_x \sin\beta_y = \cos\alpha_x, \sin\beta_x = \cos\alpha_y, \cos\alpha_z = \cos\beta_x \cos\beta_y$$

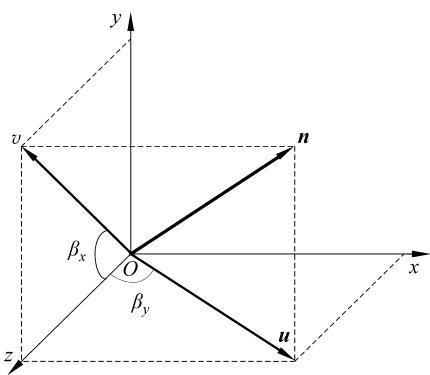


图 5-3 空间向量旋转角示意图

可解得

$$\begin{cases} \cos\beta_x = \sqrt{1 - \sin^2\beta_x} = \sqrt{1 - \cos^2\alpha_y} = \sqrt{\cos^2\alpha_x + \cos^2\alpha_z} \\ \sin\beta_x = \cos\alpha_y \\ \cos\beta_x = \sqrt{\cos^2\alpha_x + \cos^2\alpha_z} \\ \sin\beta_y = \frac{\cos\alpha_x}{\sqrt{\cos^2\alpha_x + \cos^2\alpha_z}} \\ \cos\beta_y = \frac{\cos\alpha_z}{\sqrt{\cos^2\alpha_x + \cos^2\alpha_z}} \end{cases} \quad (5-23)$$

或者表示为

$$\begin{cases} \sin\beta_x = n_y \\ \cos\beta_x = \sqrt{n_x^2 + n_z^2} \\ \sin\beta_y = \frac{n_x}{\sqrt{n_x^2 + n_z^2}} \\ \cos\beta_y = \frac{n_z}{\sqrt{n_x^2 + n_z^2}} \end{cases} \quad (5-24)$$

将式(5-23)和式(5-24)代入式(5-18)、式(5-19)、式(5-21)和式(5-22)中,即可计算出变换矩阵 M_1 、 M_2 、 M_4 和 M_5 。相对于任意方向旋转的复合变换矩阵 $M = M_5 \cdot M_4 \cdot M_3 \cdot M_2 \cdot M_1$ 。立方体绕主对角线旋转的效果如图 5-4 所示。

说明:虽然称为任意方向,但实际上并不包含 y 轴方向。在 $n = (0, 1, 0)$ 上,出现了 $\cos\beta_x = 0$,因而不能定义 $\sin\beta_y$ 、 $\cos\beta_y$ 。绕 y 轴旋转时,应直接使用相关的旋转矩阵。

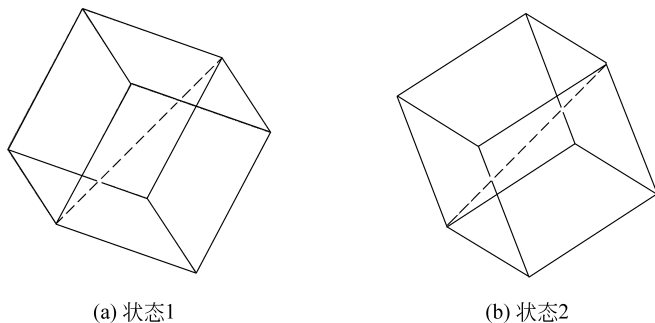


图 5-4 立方体沿主对角线旋转



算法 19: 三维几何变换算法

5.4 平行投影

由于显示器屏幕只能显示二维图形,因此要输出三维物体,就要通过投影来降低维数。投影就是从投影中心(center of projection, COP)发出射线,经过三维物体上的每一点后,与投影面相交所形成的交点集合,因此把三维坐标转换为二维坐标的过程称为投影变换。根据投影中心与投影面之间的距离的不同,投影可分为平行投影和透视投影。当投影中心到

投影面的距离为有限值时,得到的投影称为透视投影;若此距离为无穷大,则投影称为平行投影。正透视投影(简称透视投影)要求存在一条投影中心线垂直于投影面,且其他投影线对称于投影中心线,否则为斜透视投影。平行投影分为正投影和斜投影。投影方向垂直于投影面的平行投影称为正投影,投影方向不垂直于投影面的平行投影称为斜投影。正投影的最大特点是无论物体距离视点(眼睛或摄像机)多远,投影后的物体尺寸保持不变。物体的三视图就是按照正投影绘制的。投影分类如图 5-5 所示。

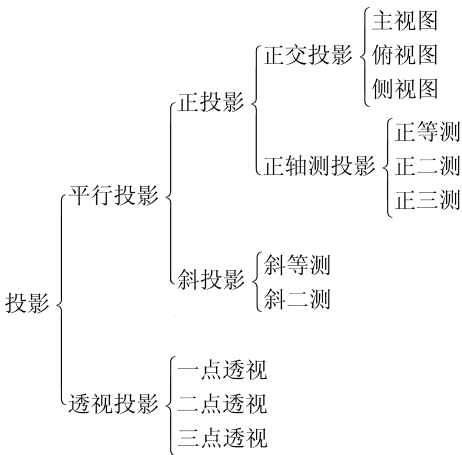


图 5-5 投影的分类

5.4.1 正交投影

设物体上任意一点的三维坐标为 $P(x,y,z)$,投影后的三维坐标为 $P'(x',y',z')$,则正交投影方程

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = 0 \end{cases}$$

齐次坐标矩阵表示为

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

正交投影变换矩阵为

$$\mathbf{M}_{\text{orth}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5-25}$$

对图 5-6 所示为立方体线框模型进行正交投影,假定投影面为 xOy ,投影坐标为 (x,y) ,只要简单地取立方体每个三维顶点坐标 $P(x,y,z)$ 的 x 分量和 y 分量,用直线连接各个二维点,就可以绘制出立方体在 xOy 平面内的正交投影。