第 3 章 正弦稳态电路分析

CHAPTER 3

电路中的电流和电压都按一定频率的正弦规律变化，处于这种稳定状态的电路称为正弦稳态电路，也称为正弦交流电路。本章介绍正弦量的概念、相量表示形式、相量分析法的基础和正弦交流电路的分析计算。

视频讲解

3.1 正弦电路的基本概念

3.1.1 正弦交流电的三要素

电路中，随时间按正弦规律变化的电流、电压称为正弦交流电，简称正弦量。以电流为例，其数学表达式为

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi) \tag{3.1}$$

式中，i 表示正弦交流电流，I_m、ω、ψ 分别称为最大值(maximum value)、角频率(angular frequency)和初相位(initial phase angle)。这三个量一旦确定，正弦交流电也随之确定。因此，这三个量称为正弦量的三要素。下面结合图 3.1 所示的正弦电流的波形，分别介绍这三个要素。

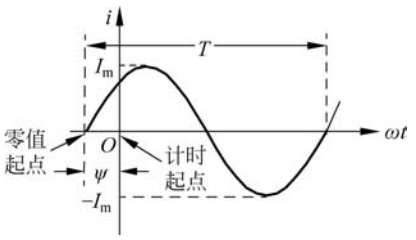


图 3.1 正弦波形及参数

1. 角频率与频率、周期

正弦交流电量是周期函数，变化一周所需的时间称为周期(period) T，其单位是 s(秒)。单位时间内(每秒变化)的周期数称为频率(frequency) f，其单位是 Hz(赫兹)。周期 T 与频率 f 互为倒数，即

$$f = \frac{1}{T} \tag{3.2}$$

交流电每交变一次变化 2π 个弧度，即 $\omega T = 2\pi$。角频率与周期、频率的关系为

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \tag{3.3}$$

式中，ω 的电位是 rad/s(弧度/秒)。

2. 最大值与有效值

正弦量是一个等幅振荡的、正负交替变化的周期函数。I_m 是正弦量在整个交变过程中到达的最大值，也就是 $\sin(\omega t + \psi) = 1$ 时的正弦电量值。$-I_m \sim I_m$ 是正弦交流电流 i 的幅

值变化范围，称为峰－峰值。

周期性变化的正弦交流电，其瞬时值随时间而变，为了衡量其平均效果，工程上采用有效值(effective value)表示。它的定义为：如果周期电流 i 通过电阻 R 在一个周期 T 内所做的功与直流电流 I 在相同时间内通过相同电阻所做的功相等，则直流量就是正弦交流量的有效值，即 $\int_0^T Ri^2\mathrm{d}t = RI^2T$，则正弦交流电流的有效值为

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2\mathrm{d}t} = \frac{I_\mathrm{m}}{\sqrt{2}} \tag{3.4}$$

同理，正弦电压 u 的有效值为

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2\mathrm{d}t} = \frac{U_\mathrm{m}}{\sqrt{2}} \tag{3.5}$$

引入有效值的概念后，式(3.1)也可写为

$$i = \sqrt{2}\,I\sin(\omega t + \psi) \tag{3.6}$$

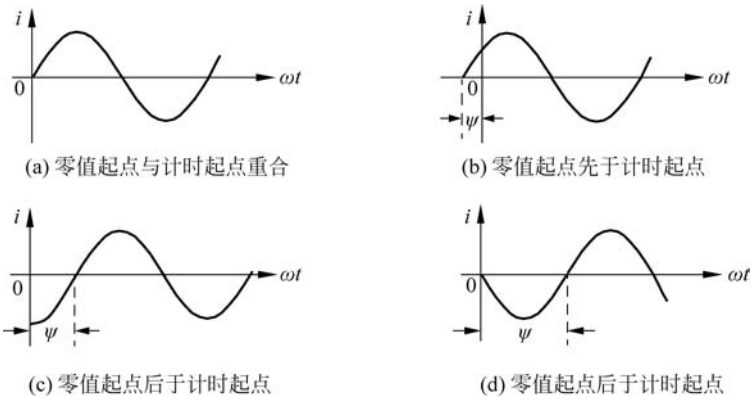
3. 初相位

式(3.1)和式(3.6)中，随时间变化的角度$(\omega t+\psi)$称为正弦量的相位或相位角，单位为rad(弧度)或deg(度)。正弦量在不同时刻的相位是不同的，瞬时值也不同。因此，相位反映了正弦量的变化过程。

ψ 是正弦量在 $t=0$ 时刻的相位，称为初相位或初相角，简称初相。ψ 的单位为rad(弧度)或deg(度)，两者的对应关系为 $\pi(\mathrm{rad})=180°(\mathrm{deg})$。通常，初相位在 $-\pi\sim\pi$ 或 $-180°\sim180°$的范围内取值。

正弦量的初相位 ψ 的大小和正负与计时起点有关。在图3.1所示的波形上，$(\omega t+\psi)=0$且正弦量瞬时值由负变正时的零值点称为零值起点。计时起点就是 $\omega t=0$ 的点，即坐标原点。初相位 ψ 是计时起点对零值起点(以零值起点为参考)的电角度。

图3.2为4种不同计时起点时的正弦波形。其中，图3.2(a)中，零值起点与计时起点重合，$\psi=0°$，这时正弦电流的表达式为 $i=I_\mathrm{m}\sin\omega t$；图3.2(b)中，零值起点先于计时起点，$\psi>0°$，这时正弦电流的表达式为 $i=I_\mathrm{m}\sin(\omega t+\psi)$；图3.2(c)中，零值起点后于计时起点，$\psi<0°$，这时正弦电流的表达式为 $i=I_\mathrm{m}\sin(\omega t-\psi)$；图3.2(d)中，零值起点后于计时起点，$\psi=-180°$，这时正弦电流的表达式为 $i=I_\mathrm{m}\sin(\omega t-180°)$。



(a) 零值起点与计时起点重合　(b) 零值起点先于计时起点

(c) 零值起点后于计时起点　(d) 零值起点后于计时起点

图3.2　4种不同计时起点时的正弦波形

3.1.2　正弦交流电的相位差

相位差为两个同频率正弦电量的相位之差。相位差用 φ 表示，取值范围为 $-\pi\sim\pi$ 或 $-180°\sim180°$。正弦稳态交流电路中，任何两个同频率正弦量之间的相位关系可以通过它们的相位差来描述，并用“超前”“滞后”“同相”“反相”等术语说明。例如，设两个同频率的正弦电压和正弦电流分别为

$$u=\sqrt{2}U\sin(\omega t+\psi_u) \tag{3.7}$$

$$i=\sqrt{2}I\sin(\omega t+\psi_i) \tag{3.8}$$

如果选取电流 i 为参考量，则电压 u 与电流 i 之间的相位差为

$$\varphi=(\omega t+\psi_u)-(\omega t+\psi_i)=\psi_u-\psi_i \tag{3.9}$$

式(3.9)表明，两个同频率正弦电量的相位之差等于初相位之差。

对于式(3.7)和式(3.8)，如果选取电压 u 为参考量，则电流 i 与电压 u 之间的相位差表示为

$$\varphi=(\omega t+\psi_i)-(\omega t+\psi_u)=\psi_i-\psi_u \tag{3.10}$$

式(3.9)和式(3.10)表明，两个同频率正弦量的相位关系是相对的。

下面分析 4 种典型的相位关系。

(1) $\varphi=\psi_u-\psi_i>0$，表示电压 u 超前电流 i 的相位角为 φ，或者说电流 i 滞后电压 u 的相位角为 φ，波形如图 3.3(a)所示。电压 u 比电流 i 先到达最大值。

(2) $\varphi=\psi_u-\psi_i<0$，表示电压 u 滞后电流 i 的相位角为 φ，或者说电流 i 超前电压 u 的相位角为 φ，波形如图 3.3(b)所示。电流 i 比电压 u 先到达最大值。

(3) $\varphi=\psi_u-\psi_i=0$，表示电压 u 与电流 i 相位相同，简称同相，波形如图 3.3(c)所示。电压 u 与电流 i 同时到达最大值。

(4) $\varphi=\psi_u-\psi_i=\pm180°$，表示电压 u 与电流 i 的相位相反，简称反相，波形如图 3.3(d)所示。电压 u 到达最大值时，电流 i 到达最小值。

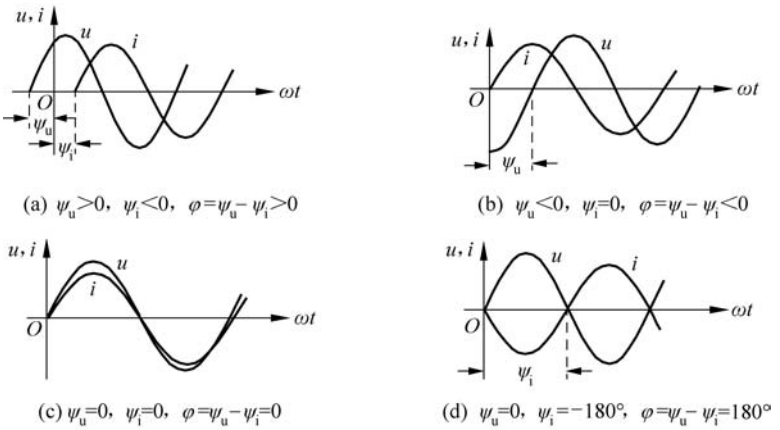


图 3.3　同频率正弦量的相位关系

3.2 正弦量的相量表示

正弦量是由最大值、角频率、初相位三要素决定的。但在线性电路中，若所有的电源均为频率相同的正弦电源，那么电路各部分的电流、电压都是与电源频率相同的正弦量。所以在分析此类电路时，只要计算出电流和电压的最大值/有效值和初相位就可以了，这样可以简化分析计算过程。一个正弦量的最大值/有效值和初相位可以用一个复数表示，这就是正弦量的相量(phasor)表示法。

3.2.1 复数及其运算

1. 复数的表示形式

一个复数有多种表示形式。复数的代数形式为

$$A = a + \mathrm{j}b \tag{3.11}$$

A 表示复数，a 为复数的实部，记作 $a = \mathrm{Re}[A] = \mathrm{Re}[a + \mathrm{j}b]$，$b$ 为复数的虚部，记作 $b = \mathrm{Im}[A] = \mathrm{Im}[a + \mathrm{j}b]$，$\mathrm{j} = \sqrt{-1}$ 称为虚数单位。

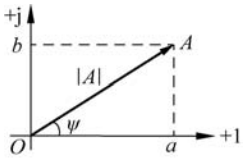


图 3.4 复数的表示

复数 A 在复平面上可以用一个从原点 O 指向 A 对应坐标点的有向线段(矢量)表示，如图 3.4 所示。矢量的长度计作 $|A|$，称为复数 A 的模。矢量与正实数轴之间的夹角 ψ 称为复数的辐角。根据这一表示方式，复数的三角函数形式为

$$A = |A|\cos\psi + \mathrm{j}|A|\sin\psi \tag{3.12}$$

其中，$|A|$、ψ 与 a 和 b 的关系为

$$\begin{cases} a = |A|\cos\psi \\ b = |A|\sin\psi \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} |A| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \psi = \arctan\dfrac{b}{a} \end{cases}$$

根据欧拉公式，有

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi} = \cos\psi + \mathrm{j}\sin\psi$$

将复数的三角函数表示形式变换为指数形式，即

$$A = |A|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi} \tag{3.13}$$

式(3.13)可以简写为极坐标形式，即

$$A = |A|\underline{/\psi} \tag{3.14}$$

2. 复数的代数运算

复数加减运算采用代数形式。设复数 $A_1 = a_1 + \mathrm{j}b_1$，$A_2 = a_2 + \mathrm{j}b_2$，则

$$A_1 \pm A_2 = (a_1 + \mathrm{j}b_1) \pm (a_2 + \mathrm{j}b_2) = (a_1 \pm a_2) + \mathrm{j}(b_1 \pm b_2)$$

即复数的加、减运算就是把它们的实部、虚部分别相加、减。

复数乘除运算采用极坐标形式。设复数 $A_1 = |A_1|\underline{/\psi_1}$，$A_2 = |A_2|\underline{/\psi_2}$，则

$$A_1A_2 = |A_1|\underline{/\psi_1}\,|A_2|\underline{/\psi_2} = |A_1|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_1}|A_2|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_2} = |A_1||A_2|\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\psi_1+\psi_2)}$$
$$= |A_1||A_2|\underline{/\psi_1 + \psi_2}$$

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{|A_1|\underline{/\psi_1}}{|A_2|\underline{/\psi_2}}=\frac{|A_1|e^{j\psi_1}}{|A_2|e^{j\psi_2}}=\frac{|A_1|}{|A_2|}e^{j(\psi_1-\psi_2)}=\frac{|A_1|}{|A_2|}\underline{/\psi_1-\psi_2}$$

即复数相乘时，其模相乘，辐角相加；复数相除时，其模相除，辐角相减。

视频讲解

3.2.2　正弦量的相量表示方法

下面介绍如何用复数表示正弦量。设正弦电流为

$$i=\sqrt{2}I\sin(\omega t+\psi_i)$$

构造一个复指数函数 $\sqrt{2}Ie^{j(\omega t+\psi_i)}$。由欧拉公式，有

$$\sqrt{2}Ie^{j(\omega t+\psi_i)}=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\psi_i)+j\sqrt{2}I\sin(\omega t+\psi_i)$$

从上式可看出，复指数函数的虚部恰好是正弦电流 i 的表示式，即

$$i=\sqrt{2}I\sin(\omega t+\psi_i)=\mathrm{Im}[\sqrt{2}Ie^{j(\omega t+\psi_i)}] \tag{3.15}$$

通过这种数学方法，得到一个实数域的正弦函数与一个复数域的复指数函数的一一对应关系。将式(3.15)进一步整理，可以得到

$$i=\mathrm{Im}[\sqrt{2}Ie^{j(\omega t+\psi_i)}]=\mathrm{Im}[\sqrt{2}Ie^{j\psi_i}\cdot e^{j\omega t}]=\mathrm{Im}[\sqrt{2}\dot{I}\cdot e^{j\omega t}]$$

其中，$Ie^{j\psi_i}$ 是一个复常数，这个复常数定义为正弦电流 i 的有效值相量(effective value phasor)，简写为

$$\dot{I}=I\underline{/\psi_i} \tag{3.16}$$

字母上的“·”(点)号用来表示相量，并区别相量与一般复数。相量的模表示正弦量的有效值，相量的幅角表示正弦量的初相位。

同理，最大值相量(maximum value phasor)记作

$$\dot{I}_m=I_m\underline{/\psi_i}=\sqrt{2}\dot{I} \tag{3.17}$$

由此可见，一个正弦量的相量就是在给定角频率 ω 的条件下，用它的有效值/最大值及初相位两个要素的表征量。

正弦电流量、正弦电压量和相量有确定的对应变换关系，如

$$\sqrt{2}I\sin(\omega t+\psi_i)\Longleftrightarrow I\underline{/\psi_i}$$

$$I_m\sin(\omega t+\psi_i)\Longleftrightarrow I_m\underline{/\psi_i}$$

$$\sqrt{2}U\sin(\omega t+\psi_u)\Longleftrightarrow U\underline{/\psi_u}$$

$$U_m\sin(\omega t+\psi_u)\Longleftrightarrow U_m\underline{/\psi_u}$$

由于相量是复数，因此在复平面上可以用矢量表示，称为相量图。

例 3.1　已知正弦电流 $i_1=6\sqrt{2}\sin(\omega t+30°)$A，$i_2=4\sqrt{2}\sin(\omega t+60°)$A，两者相加的总电流为 i，即 $i=i_1+i_2$。求出 i 的数学表达式，画出相量图，并说明 i 的有效值是否等于 i_1 和 i_2 的有效值之和。

解：采用有效值相量运算，先将 i_1、i_2 用有效值相量表示，即

$$\dot{I}_1=6\underline{/30°}=6(\cos30°+j\sin30°)=5.196+j3$$

$$\dot{I}_2=4\underline{/60°}=4(\cos60°+j\sin60°)=2+j3.46$$

由此求得

$$\dot{I}=\dot{I}_1+\dot{I}_2=(6.96+\mathrm{j}3+2+\mathrm{j}3.46)\mathrm{A}=(7.196+\mathrm{j}6.46)\mathrm{A}=9.67\underline{/41.9^\circ}\mathrm{A}$$

$$i=9.67\sqrt{2}\sin(\omega t+41.9^\circ)\mathrm{A}$$

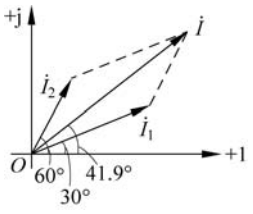


图 3.5　例 3.1 的相量图

相量图如图 3.5 所示。由于 i_1 的初相位 $\psi_{i1}=30^\circ$，故 $\dot{I}_1$ 位于正实轴逆时针方向转 30°的位置。i_2 的初相位 $\psi_{i2}=60^\circ$，故 $\dot{I}_2$ 位于正实轴逆时针方向转 60°的位置。长度分别等于有效值 I_1、I_2。i 的相量 $\dot{I}$ 位于 $\dot{I}_1$、$\dot{I}_2$ 组成的平行四边形的对角线上。

由于 i_1、i_2 及 i 的有效值 I_1、I_2、I 分别为 6A、4A、9.67A，显然 $I\neq I_1+I_2$。这是因为 i_1、i_2 的初相位不同，它们的最大值不是在同一时刻出现的，故有效值之间不能进行代数求和。

3.3　两类约束的相量形式

在正弦交流电路中，各处的电压、电流的频率总是相同的。对正弦交流电路的分析，就是用相量确定电路中电压与电流的相位和大小关系。下面用有效值相量分析两类约束的相量形式，所得结论也适合最大值相量。

3.3.1　电路元件伏安关系的相量形式

1. 电阻元件

设通过图 3.6(a)所示电阻元件 R 的电流为

$$i_\mathrm{R}=\sqrt{2}I_\mathrm{R}\sin(\omega t+\psi_\mathrm{i})=\mathrm{Im}[\sqrt{2}I_\mathrm{R}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_\mathrm{i}}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]=\mathrm{Im}[\sqrt{2}\dot{I}_\mathrm{R}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

则在关联参考方向下电阻两端的电压为

$$u_\mathrm{R}=Ri_\mathrm{R}=R\cdot\mathrm{Im}[\sqrt{2}\dot{I}_\mathrm{R}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]=\mathrm{Im}[\sqrt{2}R\dot{I}_\mathrm{R}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]=\mathrm{Im}[\sqrt{2}\dot{U}_\mathrm{R}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

因此，有

$$\dot{U}_\mathrm{R}=R\dot{I}_\mathrm{R} \tag{3.18}$$

式(3.18)就是电阻元件的伏安关系，即欧姆定律的相量形式，按照该式画出的电阻元件的相量模型如图 3.6(b)所示。

式(3.18)可改写为

$$U_\mathrm{R}\underline{/\psi_\mathrm{u}}=RI_\mathrm{R}\underline{/\psi_\mathrm{i}}$$

从而有

$$U_\mathrm{R}=RI_\mathrm{R},\quad \psi_\mathrm{u}=\psi_\mathrm{i}$$

表明电阻元件的电压有效值和电流有效值之间符合欧姆定律，且电压和电流的相位同相。图 3.6(c)和图 3.6(d)分别为电阻元件上电压、电流的相量图与波形图。

2. 电容元件

设通过图 3.7(a)所示电容元件 C 的电流为

$$i_\mathrm{C}=\sqrt{2}I_\mathrm{C}\sin(\omega t+\psi_\mathrm{i})=\mathrm{Im}[\sqrt{2}I_\mathrm{C}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_\mathrm{i}}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]=\mathrm{Im}[\sqrt{2}\dot{I}_\mathrm{C}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

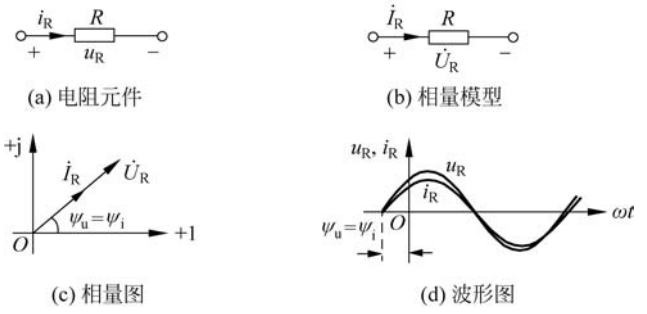


图 3.6　正弦交流电路的电阻元件

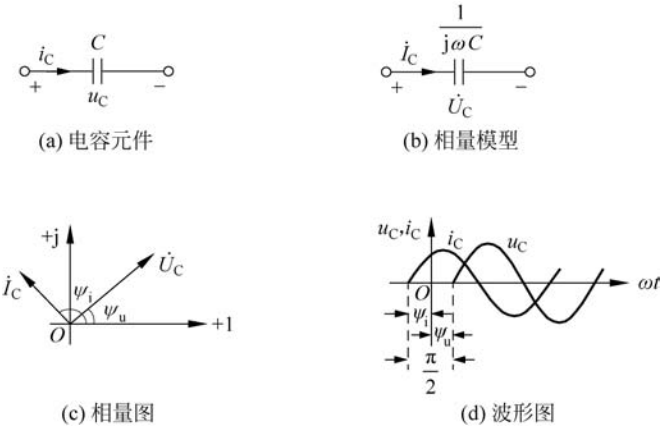


图 3.7　正弦交流电路的电容元件

则在关联参考方向下电容两端的电压为

$$u_C=\frac{1}{C}\int i_C\,\mathrm{d}t=\frac{1}{C}\int \mathrm{Im}[\sqrt{2}\,\dot{I}_C\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]\,\mathrm{d}t=\frac{1}{C}\mathrm{Im}\left[\int \sqrt{2}\,\dot{I}_C\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t\right]$$

$$=\mathrm{Im}\left[\sqrt{2}\left(\frac{\dot{I}_C}{\mathrm{j}\omega C}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]=\mathrm{Im}[\sqrt{2}\dot{U}_C\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

因此，有

$$\dot{U}_C=\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\cdot\dot{I}_C=-\mathrm{j}\frac{1}{\omega C}\cdot\dot{I}_C \tag{3.19}$$

式(3.19)就是电容元件的伏安关系的相量形式，按照该式画出的电容元件的相量模型如图 3.7(b)所示。

式(3.19)可改写为

$$U_C\underline{/\psi_u}=\frac{1}{\omega C}\cdot I_C\underline{/\psi_i-\frac{\pi}{2}}$$

从而有

$$U_C=\frac{1}{\omega C}I_C,\quad \psi_u=\psi_i-\frac{\pi}{2}$$

式中，$\frac{1}{\omega C}$称为电容的电抗，简称容抗，用符号 X_C 表示，它具有与电阻相同的量纲，单位为 Ω

（欧姆）。它表明电容元件的电压有效值和电流有效值之间符合欧姆定律，且电压滞后电流 $\frac{\pi}{2}$。图 3.7(c)和图 3.7(d)分别为电容元件上电压、电流的相量图与波形图。

3. 电感元件

设通过图 3.8(a)所示电感元件 L 的电流为

$$i_L=\sqrt{2}I_L\sin(\omega t+\psi_i)=\mathrm{Im}[\sqrt{2}I_L e^{j\psi_i}\cdot e^{j\omega t}]=\mathrm{Im}[\sqrt{2}\dot{I}_L\cdot e^{j\omega t}]$$

则在关联参考方向下电感两端的电压为

$$u_L=L\frac{di_L}{dt}=L\frac{d}{dt}\mathrm{Im}[\sqrt{2}\dot{I}_L\cdot e^{j\omega t}]=L\,\mathrm{Im}\left[\frac{d}{dt}(\sqrt{2}\dot{I}_L\cdot e^{j\omega t})\right]$$

$$=\mathrm{Im}[\sqrt{2}(j\omega L)\dot{I}_L\cdot e^{j\omega t}]=\mathrm{Im}[\sqrt{2}\dot{U}_L\cdot e^{j\omega t}]$$

因此，有

$$\dot{U}_L=j\omega L\dot{I}_L \tag{3.20}$$

式(3.20)就是电感元件的伏安关系的相量形式，按照该式画出的电感元件的相量模型如图 3.8(b)所示。

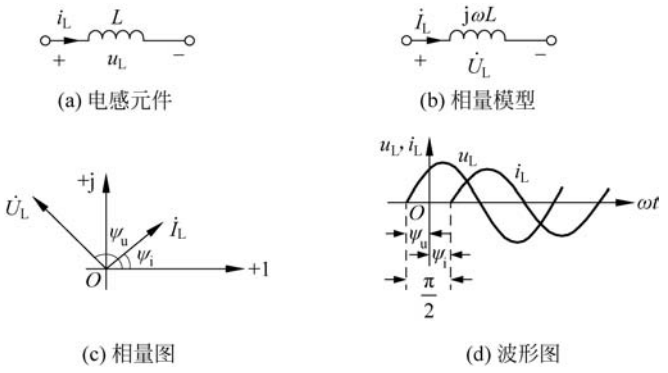


图 3.8　正弦交流电路的电感元件

式(3.20)可改写为

$$U_L\underline{/\psi_u}=\omega LI_L\underline{/\psi_i+\frac{\pi}{2}}$$

从而有

$$U_L=\omega LI_L,\quad \psi_u=\psi_i+\frac{\pi}{2}$$

式中，ωL 称为电感的电抗，简称感抗，用符号 X_L 表示，它具有与电阻相同的量纲，单位为 Ω（欧姆）。这表明电感元件的电压有效值和电流有效值之间符合欧姆定律，且电压超前电流 $\frac{\pi}{2}$。图 3.8(c)和图 3.8(d)分别为电感元件上电压、电流的相量图与波形图。

视频讲解

3.3.2　基尔霍夫定律的相量形式

基尔霍夫电流定律(KCL)指出：电路中任一结点上所有支路电流的代数和为 0。当电路处于正弦稳态时，各支路电流都是同频率的正弦量，因此，对任一结点，KCL 可以表示为

$$\sum i=\sum \mathrm{Im}[\sqrt{2}\dot{I}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]=\mathrm{Im}[\sqrt{2}\sum \dot{I}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]=0$$

因为上式对任何时间 t 都成立，因此有

$$\sum \dot{I}=0 \tag{3.21}$$

式(3.21)就是 KCL 的相量形式。它表明在正弦稳态电路中，任一结点上所有支路电流相量的代数和为 0。

基尔霍夫电压定律(KVL)指出：在电路的任何一个回路中，沿某一方向绕行一周时各部分电压的代数和为 0。当电路处于正弦稳态时，一个回路中各部分电压都是同频率的正弦量，因此，对任一回路 KVL 可以表示为

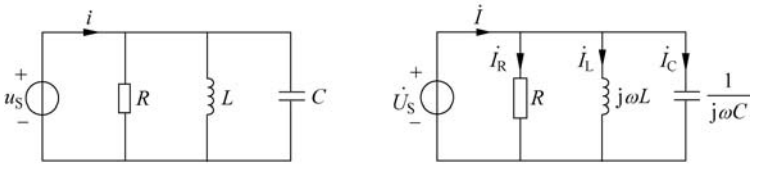
$$\sum u=\sum \mathrm{Im}[\sqrt{2}\dot{U}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]=\mathrm{Im}[\sqrt{2}\sum \dot{U}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]=0$$

因为上式对任何时间 t 都成立，因此有

$$\sum \dot{U}=0 \tag{3.22}$$

式(3.22)就是 KVL 的相量形式。它表明在正弦稳态电路中，任何一个回路沿某一方向绕行一周时各部分电压相量的代数和为 0。

例 3.2　正弦稳态电路如图 3.9(a)所示。已知 $u_S=120\sqrt{2}\sin(100t)\mathrm{V}$，$R=10\Omega$，$L=0.1\mathrm{H}$，$C=200\mu\mathrm{F}$，试求电流 i。



(a) 电路图　　(b) 电路的相量模型

图 3.9　例 3.2 的电路

解：画出电路的相量模型，如图 3.9(b)所示。其中，$\dot{U}_S=120\underline{/0°}\mathrm{V}$，$\mathrm{j}\omega L=(\mathrm{j}100\times0.1)\Omega=\mathrm{j}10\Omega$，$\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}=\left(-\mathrm{j}\dfrac{1}{100\times2000\times10^{-6}}\right)\Omega=-\mathrm{j}5\Omega$。

由元件 VAR，求得各支路电流相量为

$$\dot{I}_R=\frac{\dot{U}_S}{R}=\frac{120}{10}\mathrm{A}=12\mathrm{A}$$

$$\dot{I}_L=\frac{\dot{U}_S}{\mathrm{j}\omega L}=\frac{120}{\mathrm{j}10}\mathrm{A}=-\mathrm{j}12\mathrm{A}=12\underline{/-90°}\mathrm{A}$$

$$\dot{I}_C=\frac{\dot{U}_S}{\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}}=\frac{120}{-\mathrm{j}5}\mathrm{A}=\mathrm{j}24\mathrm{A}=24\underline{/90°}\mathrm{A}$$

由 KCL 的相量形式，有

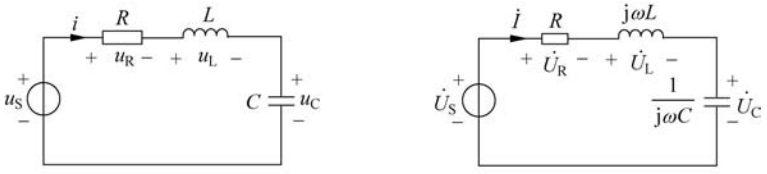
$$\dot{I}=\dot{I}_R+\dot{I}_L+\dot{I}_C=(12-\mathrm{j}12+\mathrm{j}24)\mathrm{A}=16.97\underline{/45°}\mathrm{A}$$

将相量形式的结果转换成正弦量，得

$$i=16.97\sqrt{2}\sin(10t+45°)\mathrm{A}$$

例 3.3 正弦稳态电路如图 3.10(a)所示。已知 $u_S=220\sqrt{2}\sin(314t+30°)$V，$R=30\Omega$，$L=254$mH，$C=80\mu$F。试求电流 i 的表达式及各部分电压 u_R、u_L、u_C 的表达式。

解：画出电路的相量模型，如图 3.10(b)所示。其中，$\dot{U}_S=220\angle 30°$V，$j\omega L=(j314\times 254\times 10^{-3})\Omega\approx j80\Omega$，$\dfrac{1}{j\omega C}=\left(-j\dfrac{1}{314\times 80\times 10^{-6}}\right)\Omega\approx -j40\Omega$。



(a) 电路图　　(b) 电路的相量模型

图 3.10　例 3.3 的电路

由 KVL 的相量形式，有

$$\dot{I}=\frac{\dot{U}_S}{R+j\omega L+\dfrac{1}{j\omega C}}=\left(\frac{220\angle 30°}{30+j80-j40}\right)A=4.4\angle -23°A$$

将相量形式的结果转换成正弦量，得

$$i=4.4\sqrt{2}\sin(314t-23°)A$$

由元件 VAR，求得各部分电压相量为

$$\dot{U}_R=R\dot{I}=(30\times 4.4\angle -23°)V=132\angle -23°V$$

$$\dot{U}_L=j\omega L\dot{I}=(80\times 4.4\angle 90°-23°)V=352\angle 67°V$$

$$\dot{U}_C=\frac{1}{j\omega C}\dot{I}=(40\times 4.4\angle -90°-23°)V=176\angle -113°V$$

将相量形式的结果转换成正弦量，得

$$u_R=132\sqrt{2}\sin(314t-23°)V$$

$$u_L=352\sqrt{2}\sin(314t+67°)V$$

$$u_C=176\sqrt{2}\sin(314t-113°)V$$

视频讲解

3.4　正弦交流电路 Multisim 仿真示例

1. 相量形式 KCL 的 Multisim 仿真

在 Multisim 14 中构建相量形式 KCL 仿真测试电路如图 3.11 所示，电路参数与例 3.2 相同。其中，4 个数字电流表设置成交流模式，分别用于测量总电流 I 及三个支路电流 I_R、I_L 和 I_C 的有效值，电压源的频率 $f=\dfrac{\omega}{2\pi}=\dfrac{100}{6.28}Hz\approx 15.9235$Hz。仿真测量结果及理论计算结果如表 3.1 所示。

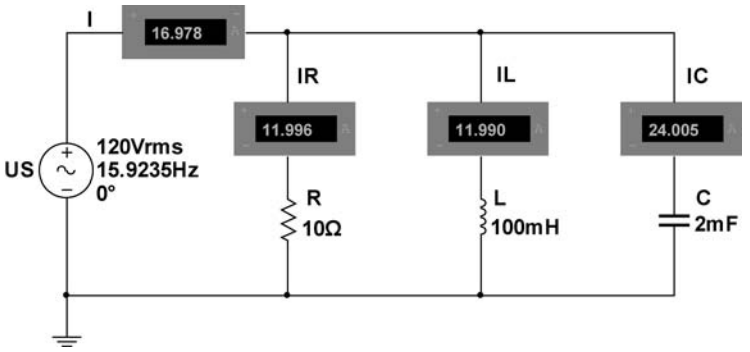


图 3.11　相量形式 KCL 的仿真测试电路

表 3.1　相量形式 KCL 的仿真结果

	I_R/A	I_L/A	I_C/A	I/A
理论计算值	12	12	24	16.97
测量值	11.996	11.990	24.005	16.978

2. 相量形式 KVL 的 Multisim 仿真

在 Multisim 14 中构建相量形式 KVL 仿真测试电路如图 3.12 所示，电路参数与例 3.3 相同。其中，4 个数字电流表设置成交流模式，分别用于测量电源电压 U_S 及三个元件上的电压 U_R、U_L 和 U_C 的有效值，电压源的频率 $f=\dfrac{\omega}{2\pi}=\dfrac{314}{6.28}\text{Hz}\approx 50\text{Hz}$。

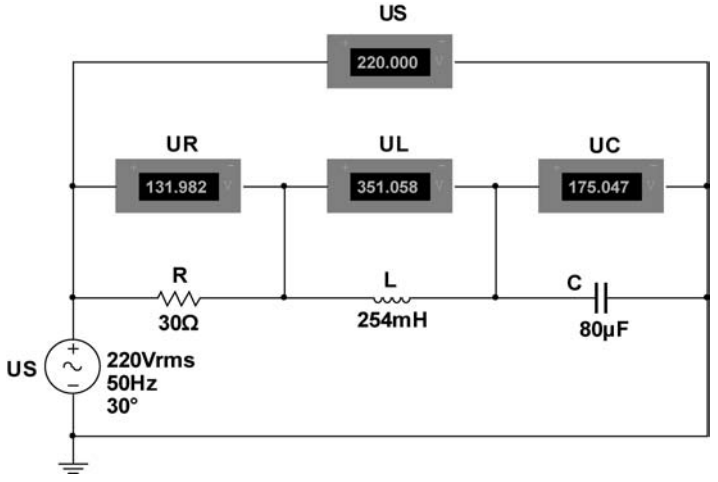


图 3.12　相量形式 KVL 的仿真测试电路

仿真测量结果及理论计算结果如表 3.2 所示。其中，理论计算值为例 3.3 的结果。由表 3.2 可知，仿真测量结果与例 3.3 中的理论计算结果基本相同，略有误差是电压源的频率和角频率转换有误差所致。

表 3.2 相量形式 KVL 的仿真结果

	U_R/V	U_L/V	U_C/V	U_S/V
理论计算值	132	352	176	220
测量值	131.982	351.058	175.047	220

本章小结

本章介绍了正弦稳态电路中正弦量的概念、正弦量的相量表示形式和相量分析法的基础。

(1) 正弦电流 $i=I_m\sin(\omega t+\psi)$的最大值为 I_m，角频率为 ω，初相位为 ψ。I_m、ω 和 ψ 三个量称为正弦量的三要素。周期 $T=\dfrac{\omega}{2\pi}$，频率 $f=\dfrac{1}{T}$，有效值 $I=\dfrac{I_m}{\sqrt{2}}$。

(2) 设两个同频率的正弦量 $i_1=\sqrt{2}I_1\sin(\omega t+\psi_{i1})$，$i_2=\sqrt{2}I_2\sin(\omega t+\psi_{i2})$，它们的相位差 $\varphi=\psi_{i1}-\psi_{i2}$，规定 $|\varphi|\leqslant 180°$(或$\leqslant\pi$)。若 $\varphi>0$，则称 i_1 超前 i_2；若 $\varphi<0$，则称 i_1 滞后 i_2；若 $\varphi=0$，则称 i_1、i_2 同相。

(3) 正弦电流 $i=\sqrt{2}I\sin(\omega t+\psi_i)$可写成 $i=\mathrm{Im}[\sqrt{2}I\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\psi_i)}]=\mathrm{Im}[\sqrt{2}\dot{I}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$，其中 $\dot{I}=I\underline{/\psi_i}$ 称为电流 i 的有效值相量。同理，还可导出电流 i 的最大值相量及电压的有效值相量、最大值相量。

(4) 正弦电流量、正弦电压量和相量有确定的对应变换关系：

$$\sqrt{2}I\sin(\omega t+\psi_i)\Longleftrightarrow I\underline{/\psi_i}$$

$$I_m\sin(\omega t+\psi_i)\Longleftrightarrow I_m\underline{/\psi_i}$$

$$\sqrt{2}U\sin(\omega t+\psi_u)\Longleftrightarrow U\underline{/\psi_u}$$

$$U_m\sin(\omega t+\psi_u)\Longleftrightarrow U_m\underline{/\psi_u}$$

(5) 若以 ψ_u、ψ_i 表示元件电压、电流的初相位，则当元件为电阻时，$\psi_u=\psi_i$；当元件为电容时，$\psi_u=\psi_i-\dfrac{\pi}{2}$，电压滞后电流$\dfrac{\pi}{2}$；当元件为电感时，$\psi_u=\psi_i+\dfrac{\pi}{2}$，电压超前电流$\dfrac{\pi}{2}$。

(6) 在关联参考方向下，电阻元件相量形式的 VAR 关系式为 $\dot{U}_R=R\dot{I}_R$，电容元件相量形式的 VAR 关系式为 $\dot{U}_C=\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot{I}_C=-\mathrm{j}\dfrac{1}{\omega C}\dot{I}_C$，电感元件相量形式的 VAR 关系式为 $\dot{U}_L=\mathrm{j}\omega L\dot{I}_L$。

(7) 基尔霍夫定律的相量形式为 $\sum\dot{I}=0$，$\sum\dot{U}=0$。

自测题

一、单项选择题

在各小题备选答案中选择出一个正确的答案，将正确答案前的字母填在题干后的括

号内。

1. 已知正弦电压 $t=0$ 时 220V，其初相位为 45°，则其有效值为(　　)。

A. $220\sqrt{2}$V　　B. 220V　　C. 380V　　D. $110\sqrt{2}$V

2. 两个正弦电压 $u_1=110\sqrt{2}\sin(314t-30°)$V，$u_2=220\sqrt{2}\sin(314t-45°)$V，在相位上(　　)。

A. u_1 超前 u_2 的角度为 75°　　B. u_1 滞后 u_2 的角度为 75°

C. u_1 超前 u_2 的角度为 15°　　D. u_1 滞后 u_2 的角度为 15°

3. 两个同频率的正弦电流 $i_1=I_{m1}\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right)$A，$i_2=I_{m2}\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)$A，在相位上(　　)。

A. i_1 滞后 i_2 的相位为 $\frac{3}{4}\pi$　　B. i_1 超前 i_2 的相位为 $\frac{3}{4}\pi$

C. i_1 滞后 i_2 的相位为 $\frac{5}{4}\pi$　　D. i_1 超前 i_2 的相位为 $\frac{5}{4}\pi$

4. 正弦电流 $i=5\sqrt{2}\sin(314t+90°)$A 的相量形式为 $\dot{I}=$(　　)。

A. j5A　　B. −j5A　　C. 5A　　D. −5A

5. 已知一个正弦量的相量为 $\dot{U}=-30\underline{/-30°}$V，$\omega=200$rad/s，则对应的正弦量为(　　)。

A. $u=-30\sqrt{2}\sin(200t-30°)$V　　B. $u=30\sqrt{2}\sin(200t-30°)$V

C. $u=-30\sin(200t-30°)$V　　D. $u=30\sin(200t-30°)$V

6. 在正弦交流电路中，电阻元件伏安关系表示错误的是(　　)。

A. $u=iR$　　B. $U=IR$　　C. $\dot{U}_m=R\dot{I}$　　D. $\dot{U}=R\dot{I}$

7. 已知电容两端电压 $u=10\sin(\omega t+30°)$V，则通过电容的电流为 $i=$(　　)。

A. $j\omega C\sin(\omega t+30°)$A　　B. $\omega C\sin(\omega t+30°)$A

C. $10\omega C\sin(\omega t+120°)$A　　D. $10\omega C\sin(\omega t-60°)$A

8. 已知通过 0.5F 电容的电流 $i=\sqrt{2}\sin(100t-30°)$A，则电容两端电压为(　　)。

A. $u=0.02\sin(100t-120°)$V　　B. $u=0.02\sqrt{2}\sin(100t-120°)$V

C. $u=0.707\sin(100t-30°)$V　　D. $u=0.5\sin(100t-90°)$V

9. 在纯电感正弦交流电路中，以下关系式正确的是(　　)。

A. $\dot{U}_L=jX_L\dot{I}_L$　　B. $X_L=\frac{\dot{U}_L}{\dot{I}_L}$　　C. $X_L=\frac{U_L}{i_L}$　　D. $X_L=\frac{u_L}{i_L}$

10. 已知电感两端的电压 $u_L=80\sin(1000t+105°)$V，若电感 $L=0.02$H，则通过电感中的电流为(　　)。

A. $i_L=4\sqrt{2}\sin(1000t+15°)$A　　B. $i_L=4\sin(1000t+15°)$A

C. $i_L=4000\sin(1000t+105°)$A　　D. $i_L=4000\sqrt{2}\sin(1000t+105°)$A

11. 某正弦交流电路中的一部分如图 3.13 所示，已知 $i_1=10\sin\omega t$A，$i_2=10\sin(\omega t+90°)$A，则 i_3 的有效值为(　　)。

A. 10A　　B. 20A　　C. $\frac{10}{\sqrt{2}}$A　　D. $20\sqrt{2}$A

12. RC 串联电路如图 3.14 所示，u、i 的相位关系为（　　）。

A. i 超前 u 的相位角为 90°　　B. i 滞后 u 的相位角为 90°

C. i 超前 u 的相位角小于 90°　　D. i 滞后 u 的相位角小于 90°

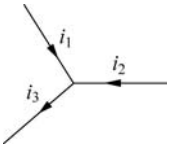


图　3.13

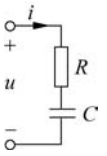


图　3.14

13. 图 3.15 所示的电路中，已知 $U=20\text{V}$，$U_\text{L}=16\text{V}$，则 $U_\text{R}=$（　　）。

A. 10V　　B. 12V　　C. 24V　　D. 36V

14. 图 3.16 所示的电路中，已知 $\dot{U}=220\angle 0°\text{V}$，电流 I 的值是（　　）。

A. 110/7A　　B. 22A　　C. 22.5A　　D. $22\sqrt{2}$ A

15. 图 3.17 所示的正弦交流电路中，$i_2(t)$ 和 $i_1(t)$ 的相位关系是（　　）。

A. $i_2(t)$ 滞后 $i_1(t)$ 的相位角为 90°

B. $i_2(t)$ 超前 $i_1(t)$ 的相位角为 90°

C. $i_2(t)$ 和 $i_1(t)$ 相位差为 180°

D. $i_2(t)$ 和 $i_1(t)$ 相位差为 0°

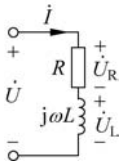


图　3.15

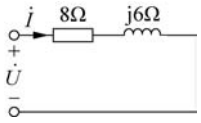


图　3.16

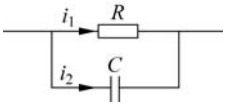


图　3.17

二、填空题

1. 正弦交流电的三要素是_____、_____和_____。

2. 一个正弦电流的表达式为 $i=6\sin(5t-30°)\text{A}$，其有效值 $I=$_____ A，角频率 $\omega=$_____ rad/s，周期 $T=$_____ s，初相位 $\psi=$_____。

3. 有一正弦交流电压 $u_\text{C}=100\sqrt{2}\sin(314t+30°)\text{V}$ 加在一容抗 $X_\text{C}=50\Omega$ 的理想电容元件两端，电容中的电流 $i_\text{C}=$_____。

4. 已知两个正弦交流电流为 $i_1=5\sqrt{2}\sin(314t+30°)\text{A}$，$i_2=8\sqrt{2}\sin(314t-45°)\text{A}$，$i_1$、$i_2$ 之间的相位差 $\varphi=$_____。

5. 已知一正弦交流电压 $u=220\sqrt{2}\sin(314t+60°)\text{V}$，它的相量式为 $\dot{U}=$_____。

习题

1. 试计算下列正弦量的相位差，并说明相位关系。

(1) $u=10\sin(\omega t+45°)\text{V}$，$i=20\sin(\omega t-20°)\text{A}$

（2）$u_1=10\sin(\omega t+10°)\text{V}$，$u_2=-20\sin(\omega t+95°)\text{V}$

（3）$u=10\sin(\omega t+10°)\text{V}$，$i=5\cos(\omega t-15°)\text{A}$

（4）$i_1=-10\sin\omega t\,\text{A}$，$i_2=-10\cos(\omega t+30°)\text{A}$

2. 一个正弦电流 i 的有效值为 $I=5\text{A}$，角频率 $\omega=314\text{rad/s}$，初相位 $\psi=30°$，试写出该电流的瞬时值表达式及有效值相量表达式。

3. 已知电流 $i_1=\sqrt{2}I\sin314t\,\text{A}$，$i_2=-\sqrt{2}\sin(314t+120°)\text{A}$，求 $i_3=i_1+i_2$。

4. 已知电感两端的电压 $u_\text{L}=80\sin(1000t+105°)\text{V}$，电感 $L=0.02\text{H}$，求电感中的电流 i_L。

5. 电路如图 3.18 所示。已知 $u_\text{S}=10\sqrt{2}\sin2t\,\text{V}$，$R=2\Omega$，$L=2\text{H}$，$C=0.25\text{F}$，试求电流 i 的表达式及各部分电压 u_R、u_L、u_C 的表达式。

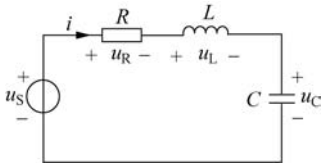


图　3.18