第5章 函　数

本章研究一种称为函数的特殊关系，主要涉及把一个有限集合变换成另一个有限集合的离散函数，它是高等数学与复变函数中所讨论的单值函数概念的推广，是一类应用广泛的重要函数。在一般地介绍函数的概念后，将讨论一些重要而基本的函数（如满射函数、单射函数及双射函数）、复合函数及逆函数、特征函数和模糊子集等。本章中所研究的内容，对于后续课程（如数据结构、开关理论、程序语言的设计与实现、形式语言与自动机等）以及进行科学研究都是不可缺少的工具。

5.1 函数的基本概念

函数是满足某些条件的关系，即函数是关系，但关系不一定都是函数。下面给出函数的定义。

定义 5.1.1 设 f 是从集合 X 到集合 Y 的关系。如果对任意一个 $x\in X$，都存在唯一的 $y\in Y$，使 $\langle x,y\rangle\in f$，则称关系 f 为**函数**(function)或**映射**(mapping)，并记为 $f: X\to Y$ 或 $X\xrightarrow{f}Y$。

如果 $\langle x,y\rangle\in f$，也可写成 $y=f(x)$。

对于函数 $f: X\to Y$，如果有 $\langle x,y\rangle\in f$，则称 x 为**自变量**(independent variable)，y 称为函数 f 在 x 处的**值**(value)；或称 y 为在映射 f 下 x 的**像**(image)，称 x 为 y 的**原像**(preimage)。如果函数 $f: X\to Y$，则称 X 为 f 的**定义域**(domain)，Y 称为 f 的**陪域**(codomain)；R_f 是 f 的**值域**(range)，有时也用 $f(X)$表示函数 f 的值域 R_f，即

$$f(X)=R_f=\{y \mid y\in Y\wedge(\exists x)(x\in X\wedge y=f(x))\}$$

显然，$R_f\subseteq Y$。

由定义 5.1.1 可知，函数 $f: X\to Y$ 满足下面两个性质。

(1) 全域性。函数的定义域必须是集合 X，而不能是它的真子集，即 $D_f=X$。

(2) 唯一性(单值)。给定 X 中的任意元素 x，在 Y 中只能有唯一的元素 y，使 $\langle x,y\rangle\in f$，即对 $x\in X$，若存在 $y,z\in Y$，使得 $\langle x,y\rangle\in f$，$\langle x,z\rangle\in f$，则必有 $y=z$。

【例 5.1.1】 已知 $f: X\to Y$，其中 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$，$Y=\{y_1,y_2,y_3,y_4,y_5,y_6\}$，$f=\{\langle x_1,y_5\rangle,\langle x_2,y_1\rangle,\langle x_3,y_2\rangle,\langle x_4,y_3\rangle\}$。求 f 的定义域、值域、陪域。

解 显然 f 满足全域性和唯一性，因此 f 是函数，且其定义域为 $D_f=X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$，值域为 $R_f=\{y_1,y_2,y_3,y_5\}$，陪域为 $Y=\{y_1,y_2,y_3,y_4,y_5,y_6\}$，示意图如图 5.1.1 所示。

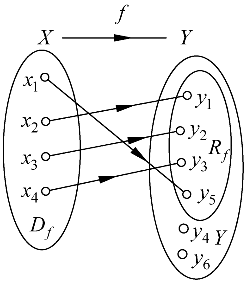

图 5.1.1 定义域、值域、陪域示意图

【**例 5.1.2**】 图 5.1.2 中给出了 4 个关系图,试判断哪些关系是函数,哪些不是函数。

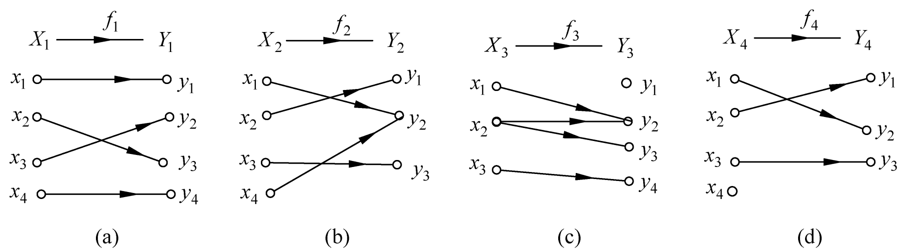

图 5.1.2 关系图

解 在图 5.1.2 中,因为 $D_{f_1}=X_1$,$D_{f_2}=X_2$,且都满足唯一性,所以 f_1 和 f_2 是函数。f_3 满足全域性,即 $D_{f_3}=X_3$,但 x_2 有两个像,即 y_2 和 y_3,即 f_3 不满足唯一性,因此 f_3 不是函数。f_4 满足唯一性,但 $D_{f_4}\subset X_4$,其中 x_4 没有像,即不满足全域性,故 f_4 不是函数。

【**例 5.1.3**】 判断下列关系中哪些能构成函数。

(1) $f_1=\{\langle x_1,x_2\rangle \mid x_1,x_2\in\mathbf{N},x_1+x_2<10\}$。

(2) $f_2=\{\langle x_1,x_2\rangle \mid x_1,x_2\in\mathbf{R},x_2^2=x_1\}$。

(3) $f_3=\{\langle x_1,x_2\rangle \mid x_1,x_2\in\mathbf{N},x_2$ 为小于或等于 x_1 的素数的个数$\}$。

(4) $f_4=\{\langle x_1,x_2\rangle \mid x_1,x_2\in\mathbf{R},x_1^2=x_2\}$。

解 (1) $f_1=\{\langle x_1,x_2\rangle \mid x_1,x_2\in\mathbf{N},x_1+x_2<10\}$不能构成函数。原因有以下两点。

① 不满足全域性。$D_f=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}\subset\mathbf{N}$。

② 不满足唯一性。例如,$f_1(1)=1$,$f_1(1)=2$,…,$f_1(1)=8$,即 x_1 对应的 x_2 可以为 1,2,…,7 或 8 等。

(2) $f_2=\{\langle x_1,x_2\rangle \mid x_1,x_2\in\mathbf{R},x_2^2=x_1\}$不能构成函数。原因有以下两点。

① 不满足全域性。$D_f=\mathbf{R}_+\cup\{0\}\subset\mathbf{R}$。

② 不满足唯一性。一个 x_1 对应两个不同的 x_2,如 $2^2=4$,$(-2)^2=4$。

(3) $f_3=\{\langle x_1,x_2\rangle \mid x_1,x_2\in\mathbf{N},x_2$ 为小于或等于 x_1 的素数的个数$\}$能构成函数。显然满足全域性;因为对于任意一个自然数 x_1,小于 x_1 的素数个数是唯一的,所以也满足唯一性。

举例如下。

因为小于或等于 0 的素数不存在,所以 $f_3(0)=0$。

因为小于或等于 1 的素数不存在,所以 $f_3(1)=0$。

因为小于或等于 2 的素数只有 2，所以 $f_3(2)=1$。

因为小于或等于 3 的素数有 2 和 3，所以 $f_3(3)=2$。

因为小于或等于 4 的素数有 2 和 3，所以 $f_3(4)=2$。

(4) 因为 f_4 满足全域性和唯一性，所以 f_4 是函数。

【例 5.1.4】 设 $\mathbf{N}$ 是自然数集合，函数 $S:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ 定义成 $S(n)=n+1$。显然

$$S(0)=1, S(1)=2, S(2)=3, \cdots$$

它满足全域性和唯一性，所以 S 是一个函数。

定义 5.1.2 设 X 和 Y 是两个集合，并且有 $X'\subseteq X$。于是，任何函数 $f: X'\to Y$ 都称为从 X 到 Y 的**偏函数**(partial function)。对于任何元素 $x\in X-X'$，没有定义 $f(x)$ 的值。

显然，如果 f 是从 X 到 Y 的函数，则 f 也必然是从 X 到 Y 的偏函数；但因为偏函数不一定满足函数的全域性，所以偏函数却不一定是函数。为了强调函数的全域性，故把函数称为**全函数**(total function)。有了全函数的概念，则偏函数的意义就更明显了。但是，由于主要研究的是全函数，故仍把全函数简称为函数。

【例 5.1.5】 设 $\mathbf{R}$ 为实数集合，$\mathbf{R}_+$ 为正实数集合，$\mathbf{R}_+\subset\mathbf{R}$，令 $f: \mathbf{R}_+\to\mathbf{R}$，使 $f(x)=\sqrt{x}$（取正值）。因为在 $\mathbf{R}-\mathbf{R}_+$ 内，f 是没有定义的，所以 f 是从 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的偏函数。但 f 是从 $\mathbf{R}_+$ 到 $\mathbf{R}$ 的函数。

因为一个关系是可以用关系图和关系矩阵来表示的，而函数是一种特殊的关系，所以函数也可以用图和矩阵来表示。

函数 f 的图记为 G_f：如果 $f(x)=y$，则从结点 x 有一条到结点 y 的有向边。

函数 f 的关系矩阵记为 $\boldsymbol{M}_f$：由函数的全域性和唯一性知，矩阵 $\boldsymbol{M}_f$ 中的每一行有且仅有一个元素为“1”。于是，可以将 $\boldsymbol{M}_f$ 进行简化，简化后的 $\boldsymbol{M}_f$ 是一个两列矩阵，第一列由定义域 D_f 中的元素组成，第二列由值域 R_f 中的元素组成。

【例 5.1.6】 设 $X=\{a,b,c,d,e\}$，$Y=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\}$，$f=\{\langle a,\alpha\rangle,\langle b,\gamma\rangle,\langle c,\gamma\rangle,\langle d,\varepsilon\rangle,\langle e,\beta\rangle\}$。求 D_f，R_f，G_f，$\boldsymbol{M}_f$ 和简化的 $\boldsymbol{M}_f$。

解 $D_f=X=\{a,b,c,d,e\}$；$R_f=\{\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon\}\subseteq Y$；$G_f$ 如图 5.1.3 所示。

函数 f 的关系矩阵为

$$\boldsymbol{M}_f=\begin{array}{c} \\ a\\ b\\ c\\ d\\ e\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}\alpha&\beta&\gamma&\delta&\varepsilon\end{array}\\ \begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}\end{array}$$

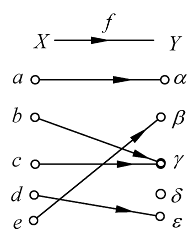

图 5.1.3 G_f 图

简化的关系矩阵为

$$\boldsymbol{M}_f=\begin{pmatrix}a&\alpha\\b&\gamma\\c&\gamma\\d&\varepsilon\\e&\beta\end{pmatrix}$$

众所周知，笛卡儿乘积 $X\times Y$ 的任意一个子集都是从 X 到 Y 的关系。但笛卡儿乘积的子集不一定能构成从 X 到 Y 的函数。

【例 5.1.7】 已知 $X=\{a,b,c\}$，$Y=\{0,1\}$，则存在多少个从 X 到 Y 的二元关系？存在多少个从 X 到 Y 的函数？

解 $X\times Y=\{\langle a,0\rangle,\langle a,1\rangle,\langle b,0\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,0\rangle,\langle c,1\rangle\}$，$|X\times Y|=6$，关系是笛卡儿乘积的子集，而 $|\rho(X\times Y)|=2^6$，所以存在 2^6 个从 X 到 Y 的二元关系。但是函数是满足全域性和唯一性的二元关系，其中只有 $|Y|^{|X|}=2^3$ 个关系可以构成函数，如图 5.1.4 所示。

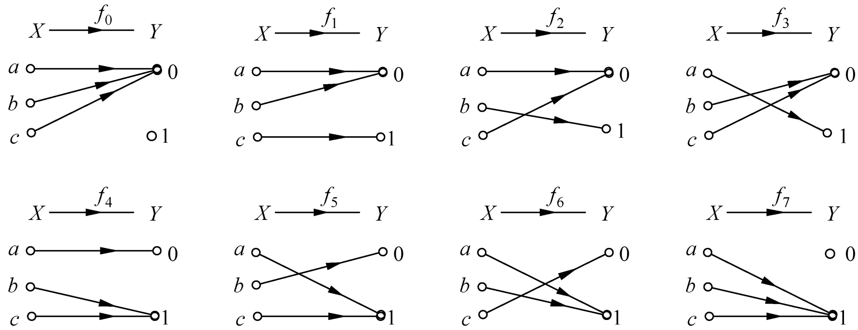

图 5.1.4 从 X 到 Y 的所有函数

即这些函数有

$$f_0=\{\langle a,0\rangle,\langle b,0\rangle,\langle c,0\rangle\},\qquad f_1=\{\langle a,0\rangle,\langle b,0\rangle,\langle c,1\rangle\},$$
$$f_2=\{\langle a,0\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,0\rangle\},\qquad f_3=\{\langle a,1\rangle,\langle b,0\rangle,\langle c,0\rangle\},$$
$$f_4=\{\langle a,0\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,1\rangle\},\qquad f_5=\{\langle a,1\rangle,\langle b,0\rangle,\langle c,1\rangle\},$$
$$f_6=\{\langle a,1\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,0\rangle\},\qquad f_7=\{\langle a,1\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,1\rangle\}。$$

由此可以看出构成函数的一个规律：因为函数的定义域是 X，而 X 中的每个元素有且仅有一个像，故以 Y 中某一元素为像的序偶一定有 $|X|$ 个；其次 X 中任一元素都可以从 Y 中任选一元素作它的像，所以每个元素的像有 $|Y|$ 种选法，因此可以构成 $|Y|^{|X|}$ 个函数。

如果令 Y^X 表示从 X 到 Y 的所有函数组成的集合，即

$$Y^X=\{f\mid f:X\rightarrow Y\}$$

以 $|Y^X|$ 表示这些函数的数目，且令 $|X|=m$，$|Y|=n$，则 $|Y^X|=n^m$。如上例中 $|X|=3$，$|Y|=2$，则 $|Y^X|=2^3=8$（种）。

有了函数的概念后，再来了解几种重要的特殊函数，这些特殊函数对研究某些具体领域中的实际问题是十分有用的。

定义 5.1.3 给定函数 $f:X\rightarrow Y$。

(i) 如果 $f(X)=R_f=Y$，则称 f 是**满射的**(surjective)或**满射函数**(surjection)。

(ii) 对任意 x_1、$x_2\in X$，如果 $x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$（或 $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$），则称 f 是**单射的**(injective)或**单射函数**(injection)。

(iii) 如果 f 既是单射的又是满射的，则称 f 为**双射的**(bijective)或**双射函数**(bijection)。

当 X 和 Y 都是有限集合时，如果 f 是满射的，必有 $|X|\geqslant|Y|$；如果 f 是单射的，必有

$|X| \leqslant |Y|$。如果 f 是双射函数,必有 $|X|=|Y|$。

定义 5.1.4 函数 $I_X: X \to X$,对于所有的 $x \in X$,都有 $I_X(x)=x$,则称 I_X 为**恒等函数**(identity function)。

由定义可知,恒等函数一定是双射函数。

【例 5.1.8】 设 f_1, f_2, f_3, f_4 为以下定义的从 **R** 到 **R** 的函数,问它们各是什么函数?

(1) $f_1(x)=x^2$。

(2) $f_2(x)=2^x$。

(3) $f_3(x)=x^3$。

(4) $f_4(x)=x^3-x^2$。

解 (1) 因为 $f_1(x)=f_1(-x)=x^2$,所以 f_1 不是单射函数;因为 $R_{f_1} \subseteq \mathbf{R}$,即 $R_{f_1} \neq \mathbf{R}$,所以 f_1 不是满射函数。

(2) 显然 f_2 是单射函数;因为 $R_{f_2} \subseteq \mathbf{R}$,即 $R_{f_2} \neq \mathbf{R}$,所以 f_2 不是满射函数。

(3) 显然 f_3 是满射函数,也是单射函数,所以 f_3 是双射函数。

(4) 显然 $f_4(x)$是满射函数,不是单射函数,如 $f_4(1)=0, f_4(0)=0$。

下面给出几个常用的函数。

【例 5.1.9】 设 $f: X \to Y$,如果存在 $C \in Y$,使得对所有的 $x \in X$ 都有 $f(x)=C$,则称 f 是**常数函数**(constant function),记为 $f(x) \equiv C$。

【例 5.1.10】 设 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,对任意 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$,如果 $x_1 < x_2$,则有 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$,就称 f 为**单调递增的**(increasing);如果 $x_1 < x_2$,则有 $f(x_1) < f(x_2)$,就称 f 为**严格单调递增的**(strictly increasing)。如果 $x_1 < x_2$,则有 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$,就称 f 为**单调递减的**(decreasing);如果 $x_1 < x_2$,则有 $f(x_1) > f(x_2)$,就称 f 为**严格单调递减的**(strictly decreasing)。它们统称为单调函数。

习题 5.1

(1) 设 $A=\{a,b,c\}, B=\{1,2,3\}$,试说明下列从 A 到 B 的二元关系中,哪些能构成函数。

① $f_1=\{\langle a,1\rangle, \langle a,2\rangle, \langle b,1\rangle, \langle c,3\rangle\}$。

② $f_2=\{\langle a,1\rangle, \langle b,1\rangle, \langle c,1\rangle\}$。

③ $f_3=\{\langle a,2\rangle, \langle c,3\rangle\}$。

④ $f_4=\{\langle a,3\rangle, \langle b,2\rangle, \langle c,3\rangle, \langle b,3\rangle\}$。

⑤ $f_5=\{\langle a,2\rangle, \langle b,1\rangle, \langle b,2\rangle\}$。

(2) 设 **I** 为整数集合,$\mathbf{I}_+$ 为正整数集合,给定函数 $f: \mathbf{I} \to \mathbf{I}_+$,且具体给定成 $f(i)=|2i|+2$。试求出 f 的值域。

(3) 设 E 是全集,$\rho(E)$是 E 的幂集,定义 $f: \rho(E) \times \rho(E) \to \rho(E)$,且具体给定成:对任意 $S_1, S_2 \in \rho(E)$,有 $f(\langle S_1, S_2\rangle)=S_1 \cap S_2$。试证明 f 是函数,且 f 的陪域与值域相等。

(4) 令 $X=\{1,2,3,4\}$,判定下列关系是否是从 X 到 X 的函数。若是函数,请指出它的

定义域和值域。

① $f_1=\{\langle 2,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,4\rangle\}$。

② $f_2=\{\langle 3,1\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 1,1\rangle\}$。

③ $f_3=\{\langle 2,1\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$。

④ $f_4=\{\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 4,1\rangle\}$。

(5) 设 **N** 是自然数集合,**R** 为实数集合。下列函数中哪些是满射函数?哪些是单射函数?哪些是双射函数?

① $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}, f(n)=n^2+2$。

② $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}, f(n)=n(\bmod 3)$。

③ $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}, f(n)=\begin{cases}1, n\text{ 是奇数}\\0, n\text{ 是偶数}\end{cases}$。

④ $f:\mathbf{N}\to\{0,1\}, f(n)=\begin{cases}1, n\text{ 是奇数}\\0, n\text{ 是偶数}\end{cases}$。

⑤ $f:\mathbf{N}\to\mathbf{R}, f(n)=\lg n$。

⑥ $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(r)=r^2+2r-15$。

⑦ $f:\mathbf{N}^2\to\mathbf{N}, f(n_1,n_2)=n_1^{n_2}$。

(6) 设 X 和 Y 都是有穷集合,且 $|X|=m$,$|Y|=n$,则从 X 到 Y 有多少种不同的单射函数?有多少种不同的双射函数?存在单射函数和双射函数的必要条件是什么?

(7) 令 $A=\{1,2,3,\cdots,10\}$,找出一个从 A^2 到 A 的函数,能否找到一个从 A^2 到 A 的满射函数?能否找到一个从 A^2 到 A 的单射函数?为什么?

(8) 证明函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(r)=2r-15$ 是双射函数。

(9) 设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$,试证明任何从 A 到 A 的函数,如果它是单射函数,则它必是满射函数;反之亦真。

5.2 复合函数与逆函数

前面曾经指出,函数是一类特殊关系。关系有合成运算,故函数也有合成运算。下面给出函数合成运算的定义。

定义 5.2.1 设 $f: X\to Y$;$g: Y\to Z$ 是两个函数,于是

$$g\circ f=\{\langle x,z\rangle \mid x\in X\wedge z\in Z\wedge(\exists y)(y\in Y\wedge y=f(x)\wedge z=g(y))\}$$

称为 f 和 g 的**合成函数**(composition function),习惯上称为**复合函数**。

注意:由定义可知,复合函数 $g\circ f$ 与合成关系 $f\circ g$ 实际上表示同一个集合(合成关系)。这里把符号的次序颠倒过来,并把合成函数称为复合函数,是为了与《高等数学》中复合函数的表示法取得一致。在下文中,谈及复合函数时,$g\circ f$ 均按定义 5.2.1 理解。

定理 5.2.1 设函数 $f: X\to Y$;$g: Y\to Z$,则复合函数 $g\circ f$ 是从 X 到 Z 的函数,并且对每个 $x\in X$,都有 $(g\circ f)(x)=g(f(x))$。

证 显然 $g\circ f$ 是从 X 到 Z 的关系,下面来证 $g\circ f$ 也是从 X 到 Z 的函数。

先证全域性。对于任意 $x \in X$，因为 f 是函数，f 满足全域性，所以存在 x 的像 $y \in Y$，使 $\langle x, y\rangle \in f$。又因为 g 是函数，g 也满足全域性，所以对于每个 $y \in Y$，必有 y 的像 $z \in Z$，使 $\langle y, z\rangle \in g$。根据复合关系的定义，由 $\langle x, y\rangle \in f$ 且 $\langle y, z\rangle \in g$ 可知，必有 $\langle x, z\rangle \in g \circ f$。因此，对每个 $x \in X$，在 Z 中都存在与之对应的像 z，即 $D_{g \circ f} = X$。所以，$g \circ f$ 满足全域性。

再证唯一性。假定 $g \circ f$ 中包含序偶 $\langle x, z_1\rangle$ 和 $\langle x, z_2\rangle$，由 $\langle x, z_1\rangle, \langle x, z_2\rangle \in g \circ f$ 知，必存在 y_1、$y_2 \in Y$，使 $\langle x, y_1\rangle \in f$，且 $\langle y_1, z_1\rangle \in g$ 和 $\langle x, y_2\rangle \in f$，且 $\langle y_2, z_2\rangle \in g$。因为 f 是一个函数，由唯一性知，$y_1 = y_2$，记之为 y，于是有 $\langle y, z_1\rangle, \langle y, z_2\rangle \in g$。又因为 g 也是一个函数，也满足唯一性，所以也必有 $z_1 = z_2$，即对任意 $x \in X$，只能存在唯一的 $z \in Z$，使 $\langle x, z\rangle \in g \circ f$。所以 $g \circ f$ 满足唯一性。

综上知，$g \circ f$ 是从 X 到 Z 的函数。

令 $f(x) = y, g(y) = z$，则 $(g \circ f)(x) = z = g(y) = g(f(x))$。定理得证。 ■

【例 5.2.1】 设集合 $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$ 和 $Z = \{z_1, z_2, z_3\}$。给定函数 $f: X \to Y$；$g: Y \to Z$ 为

$$f = \{\langle x_1, y_2\rangle, \langle x_2, y_1\rangle, \langle x_3, y_3\rangle, \langle x_4, y_5\rangle\}$$

$$g = \{\langle y_1, z_1\rangle, \langle y_2, z_2\rangle, \langle y_3, z_3\rangle, \langle y_4, z_3\rangle, \langle y_5, z_2\rangle\}$$

求复合函数 $g \circ f$，并给出它的图解。

解 $g \circ f = \{\langle x_1, z_2\rangle, \langle x_2, z_1\rangle, \langle x_3, z_3\rangle, \langle x_4, z_2\rangle\}$。

图 5.2.1 给出了 $g \circ f: X \to Z$ 的图解。

定理 5.2.2 函数的复合运算满足结合律，即如果 $f: X \to Y, g: Y \to Z, h: Z \to W$ 都是函数，则有

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

证 设函数 $f: X \to Y$；$g: Y \to Z$ 和 $h: Z \to W$，且令 $f(x) = y, g(y) = z, h(z) = w$，则

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) = h(g(y)) = h(z) = w$$

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = (h \circ g)(y) = h(g(y)) = h(z) = w$$

再由 $x \in X$ 的任意性知，定理成立。 ■

复合函数满足结合律的图解表示如图 5.2.2 所示。

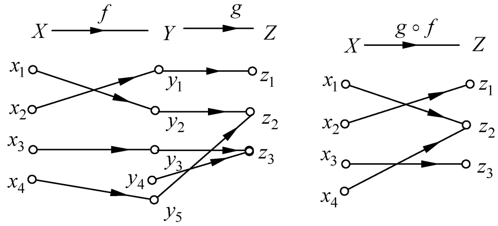

图 5.2.1 复合函数 $g \circ f$ 的图解

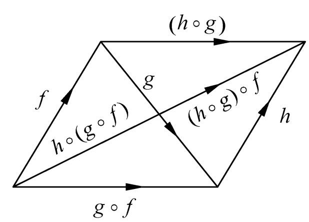

图 5.2.2 复合函数满足结合律

由于复合运算满足结合律，故可略去括号，即写成 $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f = h \circ g \circ f$。

【例 5.2.2】 设 $\mathbf{R}$ 为实数集合，对任意的 $x \in \mathbf{R}$，令 $f(x) = x + 2, g(x) = 2x, h(x) = 3x$。求 $g \circ f, f \circ g, h \circ (g \circ f), (h \circ g) \circ f$。

解

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+2) = 2(x+2)$$
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x) = 2x+2 = 2(x+1)$$

可知

$$g \circ f(x) \neq f \circ g(x)$$

因为

$$\begin{aligned}(h \circ (g \circ f))(x) &= h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) \\ &= h(g(x+2)) = h(2(x+2)) = 6(x+2)\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}((h \circ g) \circ f)(x) &= (h \circ g)f(x) = (h \circ g)(x+2) = h(g(x+2)) \\ &= h(2(x+2)) = 6(x+2)\end{aligned}$$

可见

$$(h \circ (g \circ f))(x) = ((h \circ g) \circ f)(x)$$

即 $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$。

由例 5.2.2 可知,合成函数满足结合律,但是不满足交换律。

定理 5.2.3 设有 n 个函数:$f_1: X_1 \to X_2$;$f_2: X_2 \to X_3$;…;$f_n: X_n \to X_{n+1}$,则

$$f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_1: X_1 \to X_{n+1}$$

若 $X_1 = X_2 = \cdots = X_{n+1} = X$,并且 $f_1 = f_2 = \cdots = f_n = f$,则上述复合运算可表示为

$$f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f: X \to X$$

【例 5.2.3】 设 $\mathbf{I}$ 是整数集合,并且函数 $f: \mathbf{I} \to \mathbf{I}$ 为 $f(i) = 2i+1$。试求复合函数 $f^3(i)$。

解

$$\begin{aligned}f^3(i) &= (f \circ f \circ f)(i) = (f \circ f)(f(i)) = (f \circ f)(2i+1) \\ &= f(f(2i+1)) = f(4i+3) = 8i+7\end{aligned}$$

定义 5.2.2 给定函数 $f: X \to X$,如果 $f^2 = f$,则称 f 为**等幂函数**(idempotent function)。

【例 5.2.4】 设 $\mathbf{I}$ 是整数集合,$\mathbf{N}_m = \{0,1,2,\cdots,m-1\}$,给定函数 $f: \mathbf{I} \to \mathbf{N}_m$,且 $f(i) = i(\bmod m)$。试证明,对于 $n \geqslant 1$ 都有 $f^n = f$。

注:$i(\bmod m)$表示"i 除 m 所得的余数",m 称为**模**(modulus)。

证 对任意 $i \in \mathbf{I}$,有

$$\begin{aligned}f^2(i) &= (f \circ f)(i) = f(f(i)) = f(i(\bmod m)) \\ &= (i(\bmod m))(\bmod m) = i(\bmod m) = f(i)\end{aligned}$$

得 $f^2(i) = f(i)$,故 f 是个等幂函数,即 $f^2 = f$,于是有

$$f^3 = f^2 \circ f = f \circ f = f^2 = f$$
$$f^4 = f^3 \circ f = f \circ f = f^2 = f$$
$$\vdots$$
$$f^n = f^{n-1} \circ f = f \circ f = f^2 = f$$

故对于所有 $n \geqslant 1$ 都有 $f^n = f$,得证。

定理 5.2.4 设函数 $f: X \to Y$；$g: Y \to Z$。

(i) 如果 f 和 g 都是满射函数，则 $g \circ f$ 也是满射函数。

(ii) 如果 f 和 g 都是单射函数，则 $g \circ f$ 也是单射函数。

(iii) 如果 f 和 g 都是双射函数，则 $g \circ f$ 也是双射函数。

证 (i) 对任意 $z \in Z$，因为 g 是满射函数，所以至少存在一个 $y \in Y$，使 $g(y)=z$；又因为 f 是满射函数，所以对于 $y \in Y$，至少存在一个 $x \in X$ 使 $f(x)=y$，由此得 $z=g(y)=g(f(x))=(g \circ f)(x)$，即 $\langle x, z\rangle \in g \circ f$。由 $z \in Z$ 的任意性，可知 $g \circ f$ 是满射函数。

(ii) 设 $x_1, x_2 \in X$ 且 $x_1 \neq x_2$，因为 f 是单射函数，所以 $f(x_1) \neq f(x_2)$；又因为 $f(x_1), f(x_2) \in Y$ 且 g 是单射函数，所以 $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$。因此，当 $x_1, x_2 \in X$ 且 $x_1 \neq x_2$ 时，有 $(g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2)$，即 $g \circ f$ 是单射函数。

(iii) 由(i)和(ii)即可证得(iii)。 ■

定理 5.2.5 设函数 $f: X \to Y$；$g: Y \to Z$。

(i) 如果 $g \circ f$ 是满射函数，则 g 必是满射函数。

(ii) 如果 $g \circ f$ 是单射函数，则 f 必是单射函数。

(iii) 如果 $g \circ f$ 是双射函数，则 g 是满射函数，f 是单射函数。

证 (i) 对任意 $z \in Z$，因为 $g \circ f$ 是满射函数，所以必存在 $x \in X$，使 $\langle x, z\rangle \in g \circ f$；又因为 $\langle x, z\rangle \in g \circ f$，所以必存在 $y \in Y$，使 $\langle x, y\rangle \in f$ 且 $\langle y, z\rangle \in g$。由此可得，对任意 $z \in Z$，必存在 $y \in Y$ 使 $z=g(y)$，故 g 是满射函数。

(ii) 因为 $g \circ f$ 是单射函数，所以对任意 $x_1, x_2 \in X$ 且 $x_1 \neq x_2$，有 $(g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2)$，即 $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$；又因为 g 是函数，满足唯一性，所以由 $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$，知 $f(x_1) \neq f(x_2)$。因此，对任意 $x_1, x_2 \in X$ 且 $x_1 \neq x_2$，有 $f(x_1) \neq f(x_2)$，即 f 是单射函数。

(iii) 由(i)和(ii)即可证得(iii)。 ■

定理 5.2.6 设 $f: X \to Y$，I_X 是 X 上的恒等函数，I_Y 是 Y 上的恒等函数，则

$$f \circ I_X = I_Y \circ f = f$$

证 设 $x \in X, y \in Y$，则 $I_X(x)=x, I_Y(y)=y$，于是有

$$(f \circ I_X)(x)=f(I_X(x))=f(x), \quad (I_Y \circ f)(x)=I_Y(f(x))=f(x)$$

故有 $f \circ I_X = I_Y \circ f = f$ 成立。 ■

由定理 5.2.6 易知，当 $X=Y$ 时，有 $f \circ I_X = I_X \circ f = f$。

给定从 X 到 Y 的关系 R，其逆关系 R^{-1} 一定是从 Y 到 X 的关系，即一个关系的逆关系总是存在的。但是，当把从 X 到 Y 的函数 f 看作关系时，其逆关系 f^{-1} 是否也一定是 Y 到 X 的函数呢？下面的定理回答了这个问题。

定理 5.2.7 设函数 $f: X \to Y$，f 的逆关系 f^{-1} 是从 Y 到 X 的函数，当且仅当 f 是双射函数。

证 (充分性)因为 f 是双射函数，从而是满射函数，所以对任意 $y \in Y$，都存在 $x \in X$，

使得$\langle x,y\rangle\in f$，即$\langle y,x\rangle\in f^{-1}$，故任意$y\in Y=D_{f^{-1}}$，$y$在$f^{-1}$对应下都有像$x$，满足全域性；又由$f$是单射函数，知对任意$y\in Y$，存在唯一的$x\in X$，使得$\langle x,y\rangle\in f$，即$\langle y,x\rangle\in f^{-1}$，从而任意$y\in Y=D_{f^{-1}}$，$y$在$f^{-1}$对应下的像$x$都唯一，即$f^{-1}$满足唯一性。所以，$f^{-1}$是从$Y$到$X$的函数(还可进一步证明$f^{-1}$也是双射函数)。

(必要性)使用反证法。如果f不是单射函数，即存在$x_1,x_2\in X$，$x_1\neq x_2$，且存在$y\in Y$，使得$\langle x_1,y\rangle\in f$，$\langle x_2,y\rangle\in f$，即$\langle y,x_1\rangle\in f^{-1}$，$\langle y,x_2\rangle\in f^{-1}$，即$y$在$f^{-1}$对应下有两个不同的像$x_1$和$x_2$，即$f^{-1}$不满足唯一性，这和$f^{-1}$是函数矛盾，所以$f$是单射函数。如果$f$不是满射函数，则存在$y\in Y$，在$X$中没有元素与之对应，即$R_f\subset Y$，因此$D_{f^{-1}}=R_f\subset Y$，所以$f^{-1}$不满足全域性，这也和$f^{-1}$是函数矛盾，所以$f$是满射函数。因此$f$是双射函数。■

【例 5.2.5】 设函数$f_1:X\to Y$，$f_2:X\to Z$，其中$X=\{a,b,c\}$，$Y=\{1,2,3,4\}$，$Z=\{1,2,3\}$，$f_1=\{\langle a,1\rangle,\langle b,2\rangle,\langle c,3\rangle\}$，$f_2=\{\langle a,2\rangle,\langle b,3\rangle,\langle c,1\rangle\}$。问$f_1$和$f_2$的逆关系是否为函数？

解 (方法1)对函数f_1，Y中元素4没有原像，即f_1不是满射函数，如图5.2.3(a)所示，从而Y中元素4在f_1^{-1}对应下没有像，即f_1^{-1}不满足全域性，如图5.2.3(b)所示，因此f_1^{-1}不是函数。

对函数f_2，f_2的逆关系$f_2^{-1}=\{\langle 1,c\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 3,b\rangle\}$，如图5.2.3(d)所示，因为$Z$中任一元素在$f_2^{-1}$对应下均有像，因此$f_2^{-1}$满足全域性；因为$Z$中不同元素在$f_2^{-1}$对应下的像均不同，因此$f_2^{-1}$满足唯一性。所以$f_2^{-1}$是函数。

(方法2)因为f_1不是满射函数，所以f_1不是双射，因此由定理5.2.7知，f_1^{-1}不是函数。不难验证f_2是双射函数，如图5.2.3(c)所示，因此由定理5.2.7知，f_2^{-1}是函数。

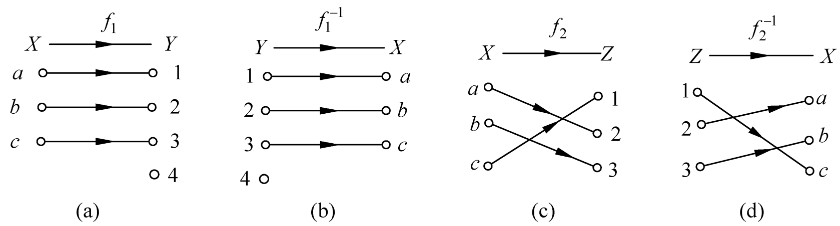

图5.2.3 函数映射

定义 5.2.3 设$f:X\to Y$是一个双射函数，f的逆关系为一个函数，称为f的**逆函数**或**反函数**(inverse function)，并记为f^{-1}，并称f是**可逆的**(invertible)。

如例5.2.5中的f_1是不可逆的，f_2是可逆的，且其反函数为$f_2^{-1}=\{\langle 1,c\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 3,b\rangle\}$。

定理 5.2.8 如果函数$f:X\to Y$是可逆的，则有$f^{-1}\circ f=I_X$、$f\circ f^{-1}=I_Y$。

证 设$x\in X$、$y\in Y$，如果$f(x)=y$，则$f^{-1}(y)=x$，可得

$$(f^{-1}\circ f)(x)=f^{-1}(f(x))=f^{-1}(y)=x$$

即

$$f^{-1} \circ f = I_X$$

同理可证

$$(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$$

即

$$f \circ f^{-1} = I_Y$$ ■

【例 5.2.6】 设 $f: X \to Y$，其中 $X=\{0,1,2\}$，$Y=\{a,b,c\}$，$f=\{\langle 0,c\rangle,\langle 1,a\rangle,\langle 2,b\rangle\}$。求 $f^{-1}\circ f$，$f\circ f^{-1}$。

解 不难验证 f 是一个双射函数，因此它的反函数 f^{-1} 存在，且

$$f^{-1}=\{\langle c,0\rangle,\langle a,1\rangle,\langle b,2\rangle\}$$

从而有

$$(f^{-1}\circ f)(0)=f^{-1}(f(0))=f^{-1}(c)=0$$

$$(f^{-1}\circ f)(1)=f^{-1}(f(1))=f^{-1}(a)=1$$

$$(f^{-1}\circ f)(2)=f^{-1}(f(2))=f^{-1}(b)=2$$

即

$$f^{-1}\circ f=\{\langle 0,0\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle\}=I_X$$

又因为

$$(f\circ f^{-1})(a)=f(f^{-1}(a))=f(1)=a$$

$$(f\circ f^{-1})(b)=f(f^{-1}(b))=f(2)=b$$

$$(f\circ f^{-1})(c)=f(f^{-1}(c))=f(0)=c$$

所以

$$f\circ f^{-1}=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle\}=I_Y$$

定理 5.2.9 如果 f 是双射函数，则 $(f^{-1})^{-1}=f$。

证 由双射函数的定义知，$\langle x,y\rangle\in(f^{-1})^{-1}\Leftrightarrow\langle y,x\rangle\in f^{-1}\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in f$。再由 $\langle x,y\rangle$ 的任意性可知，定理成立。 ■

定理 5.2.10 已知函数 $f: X\to Y$ 和 $g: Y\to Z$ 都是可逆的，则 $g\circ f$ 也是可逆的，且

$$(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$$

证 首先证明 $g\circ f$ 是可逆的。因为 f 和 g 都是可逆的，由定理 5.2.7 知，它们必都是双射函数；进而由定理 5.2.4 知，$g\circ f$ 也为双射函数，故由定理 5.2.7 知，$(g\circ f)^{-1}$ 存在，即 $g\circ f$ 也是可逆的。

其次证明 $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$。对任意 $\langle z,x\rangle\in(g\circ f)^{-1}$，有

$$\begin{aligned}\langle z,x\rangle\in(g\circ f)^{-1}&\Leftrightarrow\langle x,z\rangle\in g\circ f\Leftrightarrow(\exists y)(y\in Y\wedge\langle x,y\rangle\in f\wedge\langle y,z\rangle\in g)\\&\Leftrightarrow(\exists y)(y\in Y\wedge\langle z,y\rangle\in g^{-1}\wedge\langle y,x\rangle\in f^{-1})\Leftrightarrow\langle z,x\rangle\in f^{-1}\circ g^{-1}\end{aligned}$$

再由 $\langle z,x\rangle$ 的任意性可知，$(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$。 ■

【例 5.2.7】 令 F_X 表示从 X 到 X 的所有双射函数组成的集合，其中 $X=\{1,2,3\}$，求 F_X 的所有元素及其逆函数。

解 $F_X=\{f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6\}$，其中

$f_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}=I_X$， $f_2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle\}$，

$f_3=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$， $f_4=\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,1\rangle\}$，

$f_5=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle\}$， $f_6=\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,2\rangle\}$。

它们的逆函数分别是 $f_1^{-1}=f_1, f_2^{-1}=f_2, f_3^{-1}=f_3, f_4^{-1}=f_4, f_5^{-1}=f_6, f_6^{-1}=f_5$。任取 $f_i, f_j\in F_X, f_i\circ f_j$ 的复合运算由表 5.2.1 给出。

表 5.2.1 合成运算表

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_1	f_6	f_5	f_4	f_3
f_3	f_3	f_5	f_1	f_6	f_2	f_4
f_4	f_4	f_6	f_5	f_1	f_3	f_2
f_5	f_5	f_3	f_4	f_2	f_6	f_1
f_6	f_6	f_4	f_2	f_3	f_1	f_5

例 5.2.7 中定义的函数对应集合 X 中元素的排列。3 个元素的这样排列有 $3!=6$ 种，因而有 6 个从 X 到 X 的函数是双射的。如果 X 有 n 个元素，那么有 $n!$ 个从 X 到 X 的双射函数。

习题 5.2

(1) 设函数 $f: X\to Y$；$g: Y\to X$，则当且仅当 $g\circ f=I_X$ 和 $f\circ g=I_Y$ 时，有 $g=f^{-1}$。

(2) 设函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 和 $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 分别给定成 $f(x)=2x+1, g(x)=x^2-2$，求 $g\circ f$，$f\circ g, f^2, (g\circ f)\circ f$ 和 $g\circ f^2$。

(3) 设 f,g,h 均为从 $\mathbf{N}$ 到 $\mathbf{N}$ 的函数，其中 $\mathbf{N}$ 是自然数集合，使得

$$f(n)=n+1,\quad g(n)=2n,\quad h(n)=\begin{cases}0, n\ \text{是偶数}\\ 1, n\ \text{是奇数}\end{cases}$$

求 $f\circ f, f\circ g, g\circ f, g\circ h$、$h\circ g$ 和 $(f\circ g)\circ h$。

(4) 设 f,g 和 h 均为从 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的偏函数，其中 $f(x)=1/x, g(x)=x^2, h(x)=\sqrt{x}$。

① 求出各偏函数的定义域。

② 求出各偏函数的像。

③ 试求出复合函数 $f\circ f, h\circ g$ 和 $g\circ h$ 的代数表达式。

(5) 设函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 为 $f(x)=x^3-2$。试求出其逆函数 f^{-1}。

(6) 设集合 $X=\{1,2,3,4\}$。试定义一个函数 $f: X\to X$，能使 $f\neq I_X$，并且是单射的。

① 求 f^2, f^3, f^{-1} 和 $f\circ f^{-1}$。

② 能否求出另一个函数 $g: X\to X$，能使 $g\neq I_X$，但是 $g\circ g=I_X$。

5.3 特征函数与模糊子集

本节讨论一种从全集 E 到集合$\{0,1\}$的函数，这种函数把全集 E 中的元素均映射到 0 或 1。这些简单的函数能够建立元素与集合、集合与集合之间的一一对应关系。借助这些

函数，可对集合进行运算，并能以此推广到表达模糊集合的概念。

定义 5.3.1 设 E 是全集，$A\subseteq E$，函数 $\psi_A: E\to\{0,1\}$ 定义为

$$\psi_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A\\ 0, & x\notin A\end{cases}$$

则称 ψ_A 为集合 A 的**特征函数**(characteristic function)或**指示函数**(indicator function)。

【例 5.3.1】 设全集 $E=\{a,b,c\}$，它有 8 个子集。

对于空集$\varnothing$，有 $\psi_\varnothing(a)=0,\psi_\varnothing(b)=0,\psi_\varnothing(c)=0$，故空集$\varnothing$的特征函数为 $\psi_\varnothing=\{\langle a,0\rangle,\langle b,0\rangle,\langle c,0\rangle\}$。

对于子集$\{a\}$，有 $\psi_{\{a\}}(a)=1,\psi_{\{a\}}(b)=0,\psi_{\{a\}}(c)=0$，故子集$\{a\}$的特征函数为 $\psi_{\{a\}}=\{\langle a,1\rangle,\langle b,0\rangle,\langle c,0\rangle\}$。

对于子集$\{a,b\}$，有 $\psi_{\{a,b\}}(a)=1,\psi_{\{a,b\}}(b)=1,\psi_{\{a,b\}}(c)=0$，故 $\psi_{\{a,b\}}=\{\langle a,1\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,0\rangle\}$。

同理，可求得其他子集的特征函数；反之，若给定某集合的特征函数，也可求得该集合。例如，给定 $\psi_B=\{\langle a,0\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,1\rangle\}$，则 $B=\{b,c\}$。

可见，特征函数与集合之间建立了一一对应关系。下面给出特征函数的一些基本性质。

定理 5.3.1 设 A,B 为全集 E 的任意两个子集，对所有 $x\in E$，有以下性质。

(i) $\psi_A(x)=0\Leftrightarrow A=\varnothing$。

(ii) $\psi_A(x)=1\Leftrightarrow A=E$。

(iii) $\psi_A(x)\leqslant\psi_B(x)\Leftrightarrow A\subseteq B$。

(iv) $\psi_A(x)=\psi_B(x)\Leftrightarrow A=B$。

(v) $\psi_{\sim A}(x)=1-\psi_A(x)$。

(vi) $\psi_{A\cup B}(x)=\psi_A(x)+\psi_B(x)-\psi_{A\cap B}(x)$。

(vii) $\psi_{A\cap B}(x)=\psi_A(x)\cdot\psi_B(x)$。

(viii) $\psi_{A-B}(x)=\psi_A(x)-\psi_{A\cap B}(x)$。

证 (iii) 先证 $\psi_A(x)\leqslant\psi_B(x)\Rightarrow A\subseteq B$。对任意 $x\in E$，若 $\psi_A(x)=0$，则 $\psi_B(x)=0$ 或 $\psi_B(x)=1$，即若 $x\notin A$，则 $x\notin B$ 或 $x\in B$；若 $\psi_A(x)=1$，则必有 $\psi_B(x)=1$，即若 $x\in A$，则必有 $x\in B$。综上，知 $A\subseteq B$。从而有 $\psi_A(x)\leqslant\psi_B(x)\Rightarrow A\subseteq B$。

再证 $A\subseteq B\Rightarrow\psi_A(x)\leqslant\psi_B(x)$。对任意 $x\in E$，若 $x\in A$，则由 $A\subseteq B$，知 $x\in B$，即若 $\psi_A(x)=1$，则 $\psi_B(x)=1$，此时 $\psi_A(x)\leqslant\psi_B(x)$成立；若 $x\notin A$，此时 $x\in B$ 或 $x\notin B$，即若 $\psi_A(x)=0$，则 $\psi_B(x)=1$ 或 $\psi_B(x)=0$，此时 $\psi_A(x)\leqslant\psi_B(x)$也成立。从而有 $A\subseteq B\Rightarrow\psi_A(x)\leqslant\psi_B(x)$。

综上知，$\psi_A(x)\leqslant\psi_B(x)\Leftrightarrow A\subseteq B$。

(vi) 对任意 $x\in E$，分以下两种情况。

① 若 $x\in A\cup B$，则 $\psi_{A\cup B}(x)=1$。$x\in A\cup B$ 有以下 3 种可能。

- 如果 $x\in A\wedge x\in B$，则 $\psi_A(x)=1,\psi_B(x)=1,\psi_{A\cap B}(x)=1$，此时等式成立。
- 如果 $x\in A\wedge x\notin B$，则 $\psi_A(x)=1,\psi_B(x)=0,\psi_{A\cap B}(x)=0$，此时等式成立。

• 如果 $x\notin A\wedge x\in B$，则 $\psi_A(x)=0,\psi_B(x)=1,\psi_{A\cap B}(x)=0$，此时等式成立。

② 若 $x\notin A\cup B$，则 $\psi_{A\cup B}(x)=0$。由 $x\notin A\cup B$ 知 $x\notin A\wedge x\notin B$，即 $x\notin A\cap B$，因此 $\psi_A(x)=0,\psi_B(x)=0,\psi_{A\cap B}(x)=0$，此时等式也成立。

综上知，$\psi_{A\cup B}(x)=\psi_A(x)+\psi_B(x)-\psi_{A\cap B}(x)$。

其余的证明类似，留作练习。■

【例 5.3.2】 证明：$\sim(\sim A)=A$。

证 任意 $x\in E$，由定理 5.3.1(v)，得

$$\psi_{\sim(\sim A)}(x)=1-\psi_{\sim A}(x)=1-(1-\psi_A(x))=\psi_A(x)$$

因此由定理 5.3.1(iv)，知 $\sim(\sim A)=A$ 成立。

【例 5.3.3】 证明：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$。

证 任意 $x\in E$，由定理 5.3.1(vii)和(vi)，得

$$\begin{aligned}\psi_{A\cap(B\cup C)}(x)&=\psi_A(x)\cdot\psi_{B\cup C}(x)\\&=\psi_A(x)\cdot(\psi_B(x)+\psi_C(x)-\psi_{B\cap C}(x))\\&=\psi_A(x)\cdot\psi_B(x)+\psi_A(x)\cdot\psi_C(x)-\psi_A(x)\cdot\psi_{B\cap C}(x)\\&=\psi_{A\cap B}(x)+\psi_{A\cap C}(x)-\psi_{A\cap(B\cap C)}(x)\\&=\psi_{A\cap B}(x)+\psi_{A\cap C}(x)-\psi_{(A\cap B)\cap(A\cap C)}(x)\\&=\psi_{(A\cap B)\cup(A\cap C)}(x)\end{aligned}$$

因此由定理 5.3.1(iv)，知 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$。

特征函数不仅可用来描述集合、集合间的关系，而且还可以用来描述集合的运算。例如，设 E 为全集，E 的子集 A,B,C 的特征函数分别是 ψ_A,ψ_B,ψ_C，则：

$C=A\cup B$ 当且仅当对任意 $x\in E$，有 $\psi_C(x)=\max\{\psi_A(x),\psi_B(x)\}$；

$C=A\cap B$ 当且仅当对任意 $x\in E$，有 $\psi_C(x)=\min\{\psi_A(x),\psi_B(x)\}$；

$C=A-B$ 当且仅当对任意 $x\in E$，有 $\psi_C(x)=\psi_A(x)-\psi_{A\cap B}(x)$；

⋮

至此，讨论过的所有集合都具有一个最显著的共同点：当给定某一集合时，可用 3.1 节中给出的 3 种方法(枚举法、部分列举法、构造法)及特征函数对该集合中所含元素给予直观、确切的描述，以便能够明确判断出某一元素属于或不属于该集合。然而，在自然界和人类社会中遇到的许多事物在分类形成“集合”时，多数情形下却难以清楚明确地规定出能够判断作为对象的事物是否属于或不属于某个“集合”的若干准则，如高和矮、美与丑、老年和中年等都没有绝对分明的界限。针对这样的客观事实，1965 年，数学家卢菲特·阿利亚斯卡·扎德(Lotfi Aliasker Zadeh)发表了关于模糊集(fuzzy set)的开创性论文，由此创立了模糊集合论。模糊集合可以看作第 3 章学过的集合的推广，这也是上文中的集合加上引号的原因。

隶属函数是模糊集合论中的基本概念之一，它实际上是特征函数的推广。这里只对模糊集合论的最基础知识给予介绍，即模糊集的概念及其运算和模糊关系。

设 $E=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，将 E 的任一子集 A 表示为$\{\langle x_1,\psi_A(x_1)\rangle,\langle x_2,\psi_A(x_2)\rangle,\cdots,\langle x_n,\psi_A(x_n)\rangle\}$，其中

$$\psi_A(x_i)=\begin{cases}1, & x_i\in A\\0, & x_i\notin A\end{cases}$$

如果将 $\psi_A(x_i)$的取值范围不仅局限于 0 和 1,而是取 0 和 1 之间的任何数(包括 0 和 1),例如

$$\underset{\sim}{A}=\{\langle x_1,0.2\rangle,\langle x_2,0\rangle,\langle x_3,0.3\rangle,\langle x_4,1\rangle,\langle x_5,0.8\rangle\}$$

那么,$\underset{\sim}{A}$ 可做以下理解:它表示 x_1 属于 $\underset{\sim}{A}$ 的可能性小,x_2 不属于 $\underset{\sim}{A}$,x_3 属于 $\underset{\sim}{A}$ 的可能性也很小,x_4 属于 $\underset{\sim}{A}$,x_5 属于 $\underset{\sim}{A}$ 的可能性较大(或基本上属于 $\underset{\sim}{A}$)。这样的一个集合 $\underset{\sim}{A}$ 就是一个模糊子集,其中 0.2,0.3,0.8,…分别表示对应元素属于该集合 $\underset{\sim}{A}$ 的程度。下面给出它的一般化定义。

定义 5.3.2 设 E 为全集,M 为闭区间$[0,1]$,$A\subseteq E$。建立函数

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}: E\to M$$

则称 $\mu_{\underset{\sim}{A}}$ 为**隶属函数**(membership function),子集 $\underset{\sim}{A}$ 称为 $\mu_{\underset{\sim}{A}}$ 所表示特征的**模糊子集**(fuzzy subset),E 称为 $\mu_{\underset{\sim}{A}}$ 所决定的**论域**(universe of discourse)。对于元素 $x\in E$,$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$称为 x 属于模糊子集 $\underset{\sim}{A}$ 的**程度**或**隶属度**(membership degree)。

$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$靠近 1,表示 x 属于 $\underset{\sim}{A}$ 的程度高;$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$靠近 0,表示 x 属于 $\underset{\sim}{A}$ 的程度低。

注:当 $M=\{0,1\}$时,隶属函数就变为特征函数了,而模糊子集 $\underset{\sim}{A}$ 即为通常意义上的集合。

【例 5.3.4】 令 $\underset{\sim}{A}$ 表示"比 0 大得多的实数",这就是一个模糊子集,且此时描述 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属函数显然具有主观意识。例如,可令

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+\dfrac{100}{x^2}}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases},\quad x\in\mathbf{R}$$

定义 5.3.3 设 E 为全集,$\mu_{\underset{\sim}{A}}$,$\mu_{\underset{\sim}{B}}$,$\mu_{\underset{\sim}{C}}$ 分别为模糊子集 $\underset{\sim}{A}$,$\underset{\sim}{B}$,$\underset{\sim}{C}$ 的隶属函数,任意 $x\in E$,有:

(i) 若 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)=\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$,则称 $\underset{\sim}{A}$ 与 $\underset{\sim}{B}$ **相等**(equal),记为 $\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{B}$。

(ii) 若 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)=0$,则称 $\underset{\sim}{A}$ 为**空集**(empty),记为 $\underset{\sim}{A}=\varnothing$。

(iii) 若 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\leqslant\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$,则称 $\underset{\sim}{A}$ 为 $\underset{\sim}{B}$ 的**子集**(subset),记为 $\underset{\sim}{A}\subseteq\underset{\sim}{B}$。

(iv) 若 $\mu_{\underset{\sim}{C}}(x)=\max\{\mu_{\underset{\sim}{A}}(x),\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)\}$,称 $\underset{\sim}{C}$ 为 $\underset{\sim}{A}$ 与 $\underset{\sim}{B}$ 的**并集**(union),记为 $\underset{\sim}{C}=\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}$。

(v) 若 $\mu_{\underset{\sim}{C}}(x)=\min\{\mu_{\underset{\sim}{A}}(x),\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)\}$,称 $\underset{\sim}{C}$ 为 $\underset{\sim}{A}$ 与 $\underset{\sim}{B}$ 的**交集**(intersection),记为 $\underset{\sim}{C}=\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}$。若 $\min\{\mu_{\underset{\sim}{A}}(x),\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)\}=0$,称 $\underset{\sim}{A}$ 与 $\underset{\sim}{B}$ **不相交**(disjoint),记为 $\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}=\varnothing$。

(vi) 由 $\mu_{\sim\underset{\sim}{A}}(x)=1-\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$表示特征的模糊子集,$\sim\underset{\sim}{A}$ 称为 $\underset{\sim}{A}$ 的**补集**(complement)。

【例 5.3.5】 设 E 为某高校全体学生,$\underset{\sim}{A}$ 表示"身材特别高的人"的模糊子集,$\underset{\sim}{B}$ 表示"身材高的人"的模糊子集,则有 $\underset{\sim}{A}\subseteq\underset{\sim}{B}$。

【例 5.3.6】 令 $E=\{a,b,c,d,e\}$,给定子集 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属函数 $\mu_{\underset{\sim}{A}}$ 为

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(a)=1,\quad \mu_{\underset{\sim}{A}}(b)=0.9,\quad \mu_{\underset{\sim}{A}}(c)=0.4,\quad \mu_{\underset{\sim}{A}}(d)=0.2,\quad \mu_{\underset{\sim}{A}}(e)=0$$

则可表示为

$$\underset{\sim}{A}=\{\langle a,1\rangle,\langle b,0.9\rangle,\langle c,0.4\rangle,\langle d,0.2\rangle,\langle e,0\rangle\}$$

也可采用扎德记法来表示 $\underset{\sim}{A}$ 为

$$\underset{\sim}{A}=1/a+0.9/b+0.4/c+0.2/d+0/e$$

注意上式右端不是分式求和，这里分母位置放的是全集 E 中的所有元素，分子位置放的是元素相应的隶属程度。

【例 5.3.7】 设 $E=\{a,b,c,d,e\}$，$\underset{\sim}{A}$ 和 $\underset{\sim}{B}$ 为 E 上的两个模糊子集（扎德记法），其中

$$\underset{\sim}{A}=0.2/a+0.3/b+0.5/c+0.8/d+0.1/e$$

$$\underset{\sim}{B}=0.1/a+0.7/b+0.4/c+0.1/d+0.9/e$$

试求 $\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}$，$\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}$，$\sim\underset{\sim}{A}$，$\sim\underset{\sim}{B}$，$\underset{\sim}{A}\cup\sim\underset{\sim}{A}$ 和 $\underset{\sim}{A}\cap\sim\underset{\sim}{A}$。

解 $\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}=0.2/a+0.7/b+0.5/c+0.8/d+0.9/e$

$\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}=0.1/a+0.3/b+0.4/c+0.1/d+0.1/e$

$\sim\underset{\sim}{A}=0.8/a+0.7/b+0.5/c+0.2/d+0.9/e$

$\sim\underset{\sim}{B}=0.9/a+0.3/b+0.6/c+0.9/d+0.1/e$

$\underset{\sim}{A}\cup\sim\underset{\sim}{A}=0.8/a+0.7/b+0.5/c+0.8/d+0.9/e$

$\underset{\sim}{A}\cap\sim\underset{\sim}{A}=0.2/a+0.3/b+0.5/c+0.2/d+0.1/e$

可见，$\underset{\sim}{A}\cup\sim\underset{\sim}{A}\neq E$，$\underset{\sim}{A}\cap\sim\underset{\sim}{A}\neq\varnothing$。

模糊集合的包含关系、运算的基本性质如下。

定理 5.3.2 设 $\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{B}$，$\underset{\sim}{C}$ 为任意 3 个模糊子集，则下列结论成立。

（1）自反性：$\underset{\sim}{A}\subseteq\underset{\sim}{A}$。

（2）反对称性：如果 $\underset{\sim}{A}\subseteq\underset{\sim}{B}$，$\underset{\sim}{B}\subseteq\underset{\sim}{A}$，则 $\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{B}$。

（3）传递性：如果 $\underset{\sim}{A}\subseteq\underset{\sim}{B}$，$\underset{\sim}{B}\subseteq\underset{\sim}{C}$，则 $\underset{\sim}{A}\subseteq\underset{\sim}{C}$。

（4）等幂律：$\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{A}$。

（5）交换律：$\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{B}\cup\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{B}\cap\underset{\sim}{A}$。

（6）结合律：$(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})\cup\underset{\sim}{C}=\underset{\sim}{A}\cup(\underset{\sim}{B}\cup\underset{\sim}{C})$；$(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B})\cap\underset{\sim}{C}=\underset{\sim}{A}\cap(\underset{\sim}{B}\cap\underset{\sim}{C})$。

（7）吸收律：$\underset{\sim}{A}\cap(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})=\underset{\sim}{A}$；$\underset{\sim}{A}\cup(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B})=\underset{\sim}{A}$。

（8）分配律：$\underset{\sim}{A}\cap(\underset{\sim}{B}\cup\underset{\sim}{C})=(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B})\cup(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{C})$；$\underset{\sim}{A}\cup(\underset{\sim}{B}\cap\underset{\sim}{C})=(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})\cap(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{C})$。

（9）双重否定律：$\sim(\sim\underset{\sim}{A})=\underset{\sim}{A}$。

（10）德·摩根律：$\sim(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})=\sim\underset{\sim}{A}\cap\sim\underset{\sim}{B}$；$\sim(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B})=\sim\underset{\sim}{A}\cup\sim\underset{\sim}{B}$。

（11）同一律：$\underset{\sim}{A}\cup\varnothing=\underset{\sim}{A}$；$\underset{\sim}{A}\cap E=\underset{\sim}{A}$。

（12）零律：$\underset{\sim}{A}\cup E=E$；$\underset{\sim}{A}\cap\varnothing=\varnothing$。

证 这里仅证明(5)和(9)，其余的请读者自行完成。

(5) 任意 $x \in E$，都有

$$\mu_{\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}}(x) = \max\{\mu_{\underset{\sim}{A}}(x), \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)\} = \max\{\mu_{\underset{\sim}{B}}(x), \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\} = \mu_{\underset{\sim}{B} \cup \underset{\sim}{A}}(x)$$

$$\mu_{\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}}(x) = \min\{\mu_{\underset{\sim}{A}}(x), \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)\} = \min\{\mu_{\underset{\sim}{B}}(x), \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\} = \mu_{\underset{\sim}{B} \cap \underset{\sim}{A}}(x)$$

故由模糊子集相等的定义(定义 5.3.3(i))，得 $\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{B} \cup \underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{B} \cap \underset{\sim}{A}$。

(9) 任意 $x \in E$，都有

$$\mu_{\sim(\sim \underset{\sim}{A})}(x) = 1 - \mu_{\sim \underset{\sim}{A}}(x) = 1 - [1 - \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)] = \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$$

故由模糊子集相等的定义(定义 5.3.3(i))，得 $\sim(\sim \underset{\sim}{A}) = \underset{\sim}{A}$。 ■

注意，由例 5.3.7 可知，$\underset{\sim}{A} \cup \sim \underset{\sim}{A} \neq E$，$\underset{\sim}{A} \cap \sim \underset{\sim}{A} \neq \varnothing$，即一般来说模糊子集不满足补余律，这一点与在 3.2 节中学习的经典集合的运算性质不同。

定义 5.3.4 笛卡儿乘积 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ 的子集 $\underset{\sim}{R}$ 称为一个**模糊关系**(fuzzy relation)，其中 $\underset{\sim}{R}$ 的隶属函数为

$$\mu_{\underset{\sim}{R}}(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in [0,1]$$

其中 $x_i \in A_i (i=1,2,\cdots,n)$。特别是，当 $n=2$，$A_1 = A_2 = A$ 时，称 $\underset{\sim}{R}$ 为 A 上的**二元模糊关系**(binary fuzzy relation)。

显然，模糊关系 $\underset{\sim}{R}$ 也是用隶属函数 $\mu_{\underset{\sim}{R}}$ 来描述的，$\mu_{\underset{\sim}{R}}(x_i, x_j)$ 的值接近于 1，表示 x_i 和 x_j 有 $\underset{\sim}{R}$ 关系的程度大；$\mu_{\underset{\sim}{R}}(x_i, x_j)$ 的值接近于 0，表示 x_i 和 x_j 有 $\underset{\sim}{R}$ 关系的程度小。

【例 5.3.8】 设 $A = \{$全体汽车$\}$，定义 A 的关系 $\underset{\sim}{R}$ 为：对任意 $x, y \in A$，$\langle x, y \rangle \in \underset{\sim}{R}$ 当且仅当 x 比 y 好，显然 $\underset{\sim}{R}$ 就是一个模糊关系；又如设 $A = \{$全体中国人$\}$，$\langle x, y \rangle \in \underset{\sim}{R}$ 当且仅当 x 和 y 相像，显然 $\underset{\sim}{R}$ 也是一个模糊关系。

【例 5.3.9】 设 **R** 为实数集合，**R** 上的模糊关系 $\underset{\sim}{S}$ 的隶属函数 $\mu_{\underset{\sim}{S}}$ 定义为

$$\mu_{\underset{\sim}{S}}(x, y) = \begin{cases} 0, & x \leqslant y \\ 1/(1 + 100/(x-y)^2), & x > y \end{cases}$$

同前面讨论过的关系一样，模糊关系也可用关系图和关系矩阵来表示，并且还可定义模糊关系的逆关系、模糊关系的复合运算等，在此不做更深入的讨论。值得一提的是，模糊的概念已经应用到了自然科学与社会科学的许多方面，目前已形成了模糊拓扑、模糊概率论、模糊最优化、模糊逻辑与模糊推理等内容，并在气象、地震、模糊识别与人工智能、故障诊断、信息检索、医疗诊断、机器人等方面都有许多实际的应用和研究。

习题 5.3

(1) 利用特征函数的性质证明下列集合恒等式。

① $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$。

② $A \cap (A \cup B) = A$。

③ $A \cap (A - B) = A - B$。

④ $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$。

(2) 用特征函数表示下列各式成立的充要条件。

① $(A-B)\cup(A-C)=A$。

② $A\oplus B=\varnothing$。

③ $A\oplus B=A$。

④ $A\cap B=A\cup B$。

(3) 设 $\underset{\sim}{A}$,$\underset{\sim}{B}$ 是 E 上的两个模糊子集,它们的并集 $\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}$ 和交集 $\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}$ 都仍然是模糊子集。试证明模糊子集的$\cup$和$\cap$运算均满足等幂律、结合律、吸收律、分配律和德·摩根律。

(4) 设 $E=\{a,b,c,d,e\}$,给定 E 上的两个模糊子集 $\underset{\sim}{A}$ 和 $\underset{\sim}{B}$ 为

$$\underset{\sim}{A}=\{\langle a,0.2\rangle,\langle b,0.3\rangle,\langle c,0.5\rangle,\langle d,0.8\rangle,\langle e,0.1\rangle\}$$

$$\underset{\sim}{B}=\{\langle a,0.1\rangle,\langle b,0.7\rangle,\langle c,0.4\rangle,\langle d,0.1\rangle,\langle e,0.9\rangle\}$$

求 $\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}$,$\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}$,$\sim\underset{\sim}{A}$和$\sim\underset{\sim}{B}$。

5.4 集合的基数

在抽象地研究集合时(即对集合中元素的性质不加考虑时),一个集合中元素的多少是一个极其重要的属性。我们经常要回答一个集合有多大,两个集合哪个大、哪个小?这便是集合的大小与比较问题,而基数是度量一个集合“大小”的唯一标志。对于有限集合来说,其大小与比较问题总是可以实现的。问题是对于两个无限集合 S_1 和 S_2,是否还可以比较它们的大小呢?这正是本节所要研究的问题。

众所周知,一个无限集合中含有无穷多个元素。显然,对于无限集来说,“元素个数”这个概念是完全没有意义的,也不可能再以元素个数的大小来度量两个无限集合的大小。乔治·康托尔(George Cantor)系统地研究了两个无限集合数目相等的特征,提出了一一对应的概念,把两个集合能否建立一一对应关系作为它们数目是否相同的标准。为此,首先引入“势”(cardinality)的概念。

定义 5.4.1 如果集合 A 与 B 的元素之间存在一个双射函数 $f: A\to B$,则称 A 与 B 具有**相同的基数**,或称 A 与 B **等势**(equinumerous),记为 $A\sim B$。

因为对于有限集合来说,A 与 B 元素个数相同的充要条件是它们之间存在一个双射函数,因此两个集合“具有相同的基数”是有限集合的“具有同样多个元素”这一概念的推广。

【例 5.4.1】 设正整数的平方数集合 $S_1=\{1,4,9,16,\cdots\}$,正整数集合 $S_2=\{1,2,3,4,\cdots\}$,令函数 $f: S_2\to S_1$,其中 $f(n)=n^2$,$n\in S_2$。显然在定义域 S_2 上 f 是个双射函数,即得 $S_1\sim S_2$。

【例 5.4.2】 设 S_1 是开区间$(0,1)$上所有实数构成的集合,S_2 是半轴$(0,+\infty)$上所有实数构成的集合,则 $S_1\sim S_2$。

证 令 $f: S_1\to S_2$,其中 $f(x)=\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$,$x\in(0,1)$。显然 f 是从$(0,1)$到$(0,+\infty)$的双射,即得 $S_1\sim S_2$。

对于以上两例,注意到 $S_1\sim S_2$,说明它们具有相同的基数,另外 S_1 又是 S_2 的一个真子集。此例揭示了一个极其重要的事实,即对于无限集合来说,它可以和它的一个真子集一

一对应，这是有限集做不到的。这个现象说明了无限集与有限集之间的一个重要区别。

定理 5.4.1 在集合族上的等势关系是一个等价关系。

证 设 S 为集合族，则

对任意 $A\in S$，必有 $A\sim A$，即等势关系具有自反性；

对任意 $A,B\in S$，若 $A\sim B$，必有 $B\sim A$，即等势关系具有对称性；

对任意 $A,B,C\in S$，若 $A\sim B$，$B\sim C$，必有 $A\sim C$，即等势关系具有传递性。

综上知，结论成立。 ■

定义 5.4.2 与自然数集合 **N** 等势的任意集合称为**可数集合**(countably infinite set)，可数集合的基数记为 $\aleph_0$，读做"阿列夫(Aleph)零"。

例如，无穷集合 $A=\{1,4,9,\cdots,n^2,\cdots\}$，$B=\{1,8,27,\cdots,n^3,\cdots\}$，$C=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\right\}$均为可数集合，如果分别令它们的基数为 $|A|$，$|B|$，$|C|$，则有 $|A|=|B|=|C|=\aleph_0$。

定理 5.4.2 A 为可数集合的充要条件是 A 可以排成无穷序列

$$A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots\}$$

的形式。

证 若 A 可排成上述无穷序列形式，可令函数 $f:\mathbf{N}\to A$，且给定成 $f(n)=a_{n+1}$，$n\in\mathbf{N}$，显然 f 是个双射函数，故 A 是可数集合。

反之，若 A 为可数集，那么存在双射函数 $f:\mathbf{N}\to A$，故 $A=\{f(0),f(1),f(2),\cdots\}$，令 $a_{n+1}=f(n)$，则有 $A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots\}$。定理得证。 ■

定理 5.4.3 任一无限集，必含有可数子集。

证 令 A 为一无限集，从 A 中取一元素 a_1，因为 A 是无限的，$A-\{a_1\}$非空，所以从 $A-\{a_1\}$中可取元素 a_2 且 $a_1\neq a_2$，得 a_1,a_2；又因为 $A-\{a_1,a_2\}$非空，所以可从其中取元素 a_3 且 $a_1\neq a_3$，$a_2\neq a_3$，得 a_1,a_2,a_3。如此继续下去，就得到 A 的一个无穷序列 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots$，且它们彼此互异，如果令

$$A^*=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots\}$$

显然 $A^*\subset A$，且 A^* 是个可数集。 ■

定理 5.4.3 说明，可数集合的基数是无限集合的基数中最小者。

定理 5.4.4 任一无限集，必与它的某个真子集等势。

证 设 M 为任一无限集，由定理 5.4.3 知，M 必有一个可数子集 $M^*=\{a_1,a_2,a_3,\cdots\}$，令 $B=M-M^*$，则 $M-\{a_1\}$是 M 的一个真子集。令函数 $f:M\to M-\{a_1\}$，且给定成

$$\begin{cases} f(a_i)=a_{i+1}, a_i\in M^*, i=1,2,3,\cdots \\ f(b)=b, b\in B \end{cases}$$

则 f 是 M 与 $M-\{a_1\}$间的一个双射函数，故定理得证。 ■

这一定理标志了无限集的特征，因此也可用它作为无限集的定义，以此来判别一个集合是有限集还是无限集。下面给出可数集合的一些主要性质(定理 5.4.5～定理 5.4.8)。

定理 5.4.5 可数集合的任意一个无限子集也是可数的。

证 设 A 是可数集合，A_1 是 A 的一个无限真子集。因为 A 可数，所以 A 中的元素可排列成 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$。现在从 a_0 开始向右逐个检查，把那些不属于 A_1 的元素从序列中删除，剩下的元素形成一个新的序列，并将其重新编号为

$$a_{i0},a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in},\cdots$$

可得 $A_1=\{a_{i0},a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in},\cdots\}$，令 $f(n)=a_{in}$，$n\in\mathbf{N}$，则 f 是从 $\mathbf{N}$ 到 A_1 的双射函数，故 A_1 是可数的。 ■

定理 5.4.6 若 A 是可数集合，B 是有限集合，且 $A\cap B=\varnothing$，则 $A\cup B$ 也是可数集合。

证 因为 A 是可数集合，所以 A 中元素可排成无穷序列形式

$$A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots\}$$

设 B 中有 n 个元素，即 $B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$，则

$$A\cup B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n,a_1,a_2,a_3,\cdots\}$$

可见，$A\cup B$ 可排成无穷序列形式，因而由定理 5.4.2 知，$A\cup B$ 是可数集合。 ■

定理 5.4.7 若 A、B 都是可数集合，且 $A\cap B=\varnothing$，则 $A\cup B$ 也是可数集合。

证 设 $A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots\}$，$B=\{b_1,b_2,b_3,\cdots\}$，则

$$A\cup B=\{a_1,b_1,a_2,b_2,a_3,b_3,\cdots\}$$

因此由定理 5.4.2 知，$A\cup B$ 可数。 ■

推论 1 若 A 是可数集合，B 是可数集合或有限集合，则 $A\cup B$ 是可数集合。

证 令 $C=B-A\cap B$，则 $A\cap C=\varnothing$，$A\cup B=A\cup C$。

如果 B 是可数集合，此时若 C 是有限集合，由定理 5.4.6 知，$A\cup C$ 是可数集合，即 $A\cup B$ 是可数集合；若 C 是可数集合，由定理 5.4.7 知，$A\cup C$ 是可数集合，即 $A\cup B$ 是可数集合。

如果 B 是有限集合，则 C 是有限集，由定理 5.4.6 知，$A\cup C$ 是可数集合，即 $A\cup B$ 是可数集合。

综上可知，$A\cup B$ 可数。 ■

【例 5.4.3】 证明：整数集合 $\mathbf{I}=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$是可数集合。

证 显然，正整数集合 $\mathbf{I}_+=\{1,2,3,\cdots\}$和负整数集合 $\mathbf{I}_-=\{-1,-2,-3,\cdots\}$都是可数集合，由定理 5.4.7 知 $\mathbf{I}_+\cup\mathbf{I}_-$ 是可数集合，再由定理 5.4.6 知 $\mathbf{I}=\mathbf{I}_+\cup\mathbf{I}_-\cup\{0\}$也是可数集合。

定理 5.4.8 设 $A_i(i=1,2,3,\cdots)$都是可数集合，$A_i\cap A_j=\varnothing(i\neq j)$，则 $\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty}A_i$ 也是可数集合。

证 因为 $A_i(i=1,2,3,\cdots)$都是可数集合，所以可设

$$A_1=\{a_{11},a_{12},a_{13},\cdots,a_{1n},\cdots\}$$

$$A_2=\{a_{21},a_{22},a_{23},\cdots,a_{2n},\cdots\}$$

$$A_3=\{a_{31},a_{32},a_{33},\cdots,a_{3n},\cdots\}$$

$$\vdots$$

令 $A=A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots$，$A$ 中元素的排列如图 5.4.1 所示。

于是得

$$A=\{a_{11},a_{12},a_{21},a_{31},a_{22},a_{13},a_{14},a_{23},\cdots\}$$

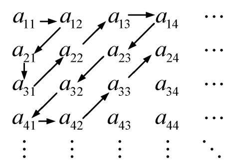

图 5.4.1　A 中元素的排列

显然，A 中元素可以无穷序列方式排列，故 A 是可数集合，即 $\bigcup_{i=1}^{+\infty}A_i$ 是可数集合。■

推论 2　设 $A_i(i=1,2,3,\cdots)$ 都是可数集合，则 $\bigcup_{i=1}^{+\infty}A_i$ 也是可数集合。

证　令 $C_1=A_1$，$C_i=A_i-A_i\cap\left(\bigcup_{j=1}^{i-1}A_j\right)(i\geqslant 2)$，则 C_i 是有限集合或可数集合，且 $C_i\cap C_j=\varnothing(i\neq j)$。但 $\bigcup_{i=1}^{+\infty}A_i=\bigcup_{i=1}^{+\infty}C_i$，故 $\bigcup_{i=1}^{+\infty}A_i$ 是可数集合。■

【例 5.4.4】　证明：有理数集合 $\mathbf{Q}$ 是可数集合。

证　设 $A_i=\left\{\frac{1}{i},\frac{2}{i},\frac{3}{i},\cdots\right\}(i=1,2,3,\cdots)$，则 A_i 是可数的，于是由推论 2 可知所有正有理数组成的集合 $\mathbf{Q}_+=\bigcup_{i=1}^{+\infty}A_i$ 可数。同理，可证所有负有理数集合 $\mathbf{Q}_-$ 可数。再由定理 5.4.6 和定理 5.4.7 可知，全体有理数集 $\mathbf{Q}=\mathbf{Q}_+\cup\mathbf{Q}_-\cup\{0\}$是可数的。

至此，大家或许会想，是否任意两个无限集都可以使之一一对应呢？假如这样引入“势”的概念就没有什么意义了。另外，由例 5.4.3 可知，有理数集合是无限集合，同时它也是个可数集合。是否任意无限集合都是可数集合呢？下面介绍几个定理。

定理 5.4.9　集合$[0,1]$是不可数的。

证　假设$[0,1]$是可数的，则其所有元素可排成下列无穷序列形式，即

$$a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,\cdots$$

任取 $x\in[0,1]$，将其表示成无穷小数形式 $a_i=0.y_1y_2y_3\cdots$，其中 $y_i\in\{0,1,2,\cdots,9\}$（如 0.2 可表示为 0.1999…，0.123 可表示为 0.122 999…）。于是上述序列可表示为

$$a_1=0.a_{11}a_{12}a_{13}\cdots a_{1n}\cdots$$

$$a_2=0.a_{21}a_{22}a_{23}\cdots a_{2n}\cdots$$

$$a_3=0.a_{31}a_{32}a_{33}\cdots a_{3n}\cdots$$

$$\vdots$$

现在构造一个无穷小数 q，其形式为 $0.q_1q_2q_3\cdots$，使

$$q_j=\begin{cases}1, & a_{jj}\neq 1\\ 2, & a_{jj}=1\end{cases}\qquad j=1,2,3,\cdots$$

则 $q\in[0,1]$且与所有的 $a_i(i=1,2,3,\cdots)$均不相同,这说明 q 不包括在上述序列之中,与题设矛盾,所以$[0,1]$是不可数的。■

把集合$[0,1]$的基数记为$\aleph_1$,读为"阿列夫 1"。显然$\aleph_1\neq\aleph_0$,后面还将证明$\aleph_1>\aleph_0$,常称$\aleph_1$ 为**连续统**(continuum)**的势**。

推论 3 开区间$(0,1)$的基数也是$\aleph_1$。

证 令 $f:[0,1]\to(0,1)$,且给定成

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & x=0\\ \dfrac{1}{n+2}, & x=\dfrac{1}{n} \quad n=1,2,3,\cdots\\ x, & \text{其他}\end{cases}$$

显然,f 是$[0,1]$到$(0,1)$的一个双射函数,从而$[0,1]$与$(0,1)$等势,故基数相同。■

定理 5.4.10 全体实数组成的集合 $\mathbf{R}$ 是不可数的,并且它的基数就是$\aleph_1$。

证 令 $f:(0,1)\to(-\infty,+\infty)$,且给定成

$$f(x)=\tan\left(\pi x-\frac{\pi}{2}\right)$$

显然,f 是$(0,1)$到$(-\infty,+\infty)$的一个双射函数,从而$(0,1)$与$(-\infty,+\infty)$等势,故 $\mathbf{R}$ 是不可数,且基数也为$\aleph_1$。■

有了可数集与不可数集的基数概念后,再来讨论集合大小与比较问题。为此先给出下面的定义。

定义 5.4.3 设 A,B 是任意集合,用$|A|,|B|$分别表示 A 和 B 的基数。

(i) 如果存在从 A 到 B 的双射函数,则称 A 和 B 的**基数相同**,记为$|A|=|B|$。

(ii) 如果存在从 A 到 B 的单射函数,则称 A **的基数不大于** B **的基数**,记为$|A|\leqslant|B|$。

(iii) 如果存在从 A 到 B 的单射,但不存在从 A 到 B 的双射,则称 A **的基数小于** $\boldsymbol{B}$ **的基数**,记为$|A|<|B|$。

前面讨论了欲证明两个集合等势,必须构造这两个集合间的双射函数,这往往是比较困难的。下面介绍一种较为简单的方法,它的基本思想是基于下面两个定理(定理 5.4.11 和定理 5.4.12)。

定理 5.4.11(策梅罗定理,Zermelo's Theorem) 设 A,B 为任意集合,则以下 3 种情况有且仅有一条成立。

(i) $|A|=|B|$。

(ii) $|A|<|B|$。

(iii) $|A|>|B|$。

此定理也称为基数的三歧性定理,它的证明依赖于选择公理,限于篇幅,这里不予证明。

定理 5.4.12(康托尔-伯恩斯坦定理,Cantor-Bernstein Theorem) 设 A,B 为任意集合,如果$|A|\leqslant|B|$、$|B|\leqslant|A|$,则$|A|=|B|$。

证 设$|A|\neq|B|$，则由定理5.4.11知，或者$|A|<|B|$，或者$|B|<|A|$，且只能是其中一种情况。

若$|A|<|B|$，则$|B|<|A|$不成立，且$|A|\neq|B|$，这与$|B|\leqslant|A|$矛盾。

若$|B|<|A|$，则$|A|<|B|$不成立，且$|A|\neq|B|$，这与$|A|\leqslant|B|$矛盾。

综上知，$|A|=|B|$。 ■

这个定理为证明两个集合具有相同基数提供了更为简便的方法：如果能够构造一个单射函数$f:A\to B$，即说明$|A|\leqslant|B|$；如果能构造单射函数$g:B\to A$，即有$|B|\leqslant|A|$；若上述单射函数f和g同时存在，则根据本定理即可得到$|A|=|B|$。

【例 5.4.5】 证明$[0,1]$与$(0,1)$具有相同的基数。

证 构造单射函数为

$$f:(0,1)\to[0,1],\quad f(x)=x,x\in(0,1)$$

$$g:[0,1]\to(0,1),\quad g(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{4},x\in[0,1]$$

再根据定理5.4.12可知，$[0,1]$与$(0,1)$具有相同的基数。

定理 5.4.13 设A为有限集，则$|A|<\aleph_0<\aleph_1$。

证 先证明$|A|<\aleph_0$。令$|A|=n$，则$A\sim\{0,1,2,\cdots,n-1\}$。令函数$f:\{0,1,2,\cdots,n-1\}\to\mathbf{N}$且给定成$f(i)=i,i\in\{0,1,2,\cdots,n-1\}$。显然，$f$是个单射函数，故$|A|\leqslant\aleph_0$。

另外，设g为$\{0,1,2,\cdots,n-1\}\to\mathbf{N}$的任意函数，再令

$$k=1+\max\{g(0),g(1),g(2),\cdots,g(n-1)\}$$

则$k\in\mathbf{N}$，但$g(0)\neq k,g(1)\neq k,\cdots,g(n-1)\neq k$，于是对给定的$k\in\mathbf{N}$，在$\{0,1,2,\cdots,n-1\}$中找不到$i$使$g(i)=k$，故$g$不是满射函数。再由$g$的任意性可知，$\{0,1,2,\cdots,n-1\}$与$\mathbf{N}$之间不存在满射函数，因此也就不存在双射函数。由此得证$|A|<\aleph_0$。

其次证明$\aleph_0<\aleph_1$。令函数$f:\mathbf{N}\to[0,1]$，且给定成$f(n)=\dfrac{1}{n+1}$，显然f是个单射函数，故有$\aleph_0\leqslant\aleph_1$；又因为$\mathbf{N}$是可数集，$[0,1]$是不可数集，所以$\mathbf{N}$与$[0,1]$间不存在双射函数，故$\aleph_0<\aleph_1$。

综上知，$|A|<\aleph_0<\aleph_1$。 ■

定理 5.4.14（康托尔定理，Cantor's Theorem） 设A为任意集合，则$|A|<|\rho(A)|$。

证 首先证明$|A|\leqslant|\rho(A)|$。定义从A到$\rho(A)$的函数f：任意$x\in A$，$f(x)=\{x\}$。显然f为一个单射，从而$|A|\leqslant|\rho(A)|$。

其次证明$|A|\neq|\rho(A)|$。若不然，假设存在从A到$\rho(A)$的双射函数g，使得任意$x\in A$，$g(x)\in\rho(A)$。定义集合$S=\{x\mid x\notin g(x)\}$，当然$S\subseteq A$，故$S\in\rho(A)$。由于g为从A到$\rho(A)$满射函数，存在$y\in A$，使$g(y)=S$，考虑$y\in S$与否，可知

$$y\in S\Leftrightarrow y\in\{x\mid x\notin g(x)\}\Leftrightarrow y\notin g(y)\Leftrightarrow y\notin S$$

即$y\in S$且$y\notin S$同时成立，矛盾，因此从A到$\rho(A)$的双射函数g不存在，得$|A|\neq|\rho(A)|$。

综上可知，$|A|<|\rho(A)|$。 ■

这一定理表明，无论一个集合的基数多么大，还有基数比它更大的集合存在，也就是说，

不可能存在一个最大基数的集合。

习题 5.4

(1) 求下列集合的基数。

① $A=\{x \mid x\in\mathbf{N}, x^2=5\}$。

② $B=\{10,20,30,40,\cdots\}$。

③ $C=\{x \mid x\in\mathbf{Q}, 0\leqslant x\leqslant 1\}$。

(2) 构造从集合 A 到 B 的双射函数,从而说明 A 和 B 具有相同的势。

① $A=(0,1), B=(0,2)$。

② $A=\mathbf{N}, B=\mathbf{N}\times\mathbf{N}$。

③ $A=\mathbf{R}, B=(0,+\infty)$。

④ $A=[0,1], B=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$。