



3.1 引言

在控制系统中,通常用稳定性来描述系统能否长时间运行。通俗地说,系统稳定是指其状态不会随时间无限增长,或者系统中的各个状态都会有各自的上界。稳定性是对于系统的一种固有性质的描述,它与外界激励信号的形式及其大小无关。显然,稳定是系统能够长时间正常工作的前提。对于一个控制系统而言,只有在这个前提得到保证以后,讨论进一步的性能指标,例如,控制的精度、响应的快速性、对于各种干扰的鲁棒性等才有意义。

系统的稳定性通常有两种定义方式,即系统状态的稳定性和关于平衡点的稳定性^[1]。对于线性系统而言,由于它具有叠加性等良好性质,所有稳定性都是针对全局意义而言的,并且所有稳定的线性系统都具有指数收敛的特性。因此,对于线性系统而言,上述两种稳定性是完全等价的。但是,对于非线性系统而言,系统状态的稳定性和关于平衡点的稳定性却具有完全不同的含义。在李雅普诺夫分析中,着重讨论的是平衡点的稳定性,即主要分析当系统在外作用下,轻微偏离平衡点以后,是否具有回复到平衡点的能力^[2-3]。当系统偏离平衡点以后,如果它能自动回复到平衡点,则它关于该平衡点是稳定的;反之则为不稳定的平衡点。一般而言,系统偏离平衡点以后,回复的速度越快,趋势越明显,则系统在该平衡点的稳定性越好。

对于如下的系统

$$\dot{x} = f(x) \quad (3.1)$$

其平衡点可以通过求解代数方程得到

$$f(x) = 0$$

假设 $x = x_s$ 是系统的一个平衡点,则有

$$f(x_s) = 0$$

如果定义如下的平移变换

$$y \stackrel{\text{def}}{=} x - x_s \quad (3.2)$$

将其代入式(3.1),并经过整理后可以得到

$$\dot{y} = \dot{x} = f(x) = f(y + x_s)$$

显然,对于这个系统而言,其平衡点为 $y_s = 0$ 。因此,通过平移变换式(3.2)可以把原来关于 $x(t)$ 在 x_s 的平衡点转换到系统 $y(t)$ 中在原点的平衡点 $y_s = 0$ 。对于任意一个系统,如果它存在非零的平衡点,则可以采用同样的线性变换方法,把该平衡点转换到原点。因此,在以下的讨论中,只分析位于原点的平衡点的特性,而对于其他的非零平衡点,可以采用上述方法将它转换到原点以后,再进行讨论。

稳定性问题是自动控制系统分析的一个基本问题,同时也是进行系统设计时必须考虑的核心问题。随着控制理论不断发展,人们首先提出了适用于线性系统的稳定性分析方法,如针对连续系统的劳斯判据和赫尔维茨判据,以及根轨迹方法,适用于线性离散系统的朱利判据等。但是,对于非线性系统而言,由于其不满足叠加性原理,动态特性非常复杂,因此能够对非线性系统进行稳定性分析的数学工具较少,其中,李雅普诺夫方法是由俄国科学家李雅普诺夫(Lyapunov)在19世纪末提出的一种方法,它可以适用于线性、非线性、定常、时变等各类系统^[4,5]。迄今为止,这种方法仍然是非线性系统设计与稳定性分析的重要理论工具。此外,它也是当前自适应控制等方法的理论基础,因此在非线性控制领域具有非常重要的地位^[6,7]。

3.2 稳定性定义

定义 3.1(李雅普诺夫意义下的稳定性) 对任意时刻 t_0 和任意正常数 $\epsilon \in \mathbf{R}^+$, 如果存在正数 $\delta(\epsilon, t_0) \in \mathbf{R}^+$ 满足如下条件:当初始条件 $\|x(t_0)\| < \delta$ 时,系统的状态 $\|x(t)\| < \epsilon, \forall t \geq t_0$, 在这种情况下,称系统的平衡点 $x_s = 0$ 是稳定的;进一步地,如果 δ 的选择依赖于 t_0 , 即 $\delta = \delta(\epsilon)$, 则称平衡点 $x_s = 0$ 是一致稳定的。

需要指出的是,李雅普诺夫意义下的稳定性是用来描述系统在平衡点附近的稳定性,它不同于平常意义下系统状态的有界性。事实上,对于某些系统而言,尽管它的状态总是有界的,但它并不是李雅普诺夫稳定的。

定义 3.2(渐近稳定性) 如果系统的平衡点 $x_s = 0$ 是稳定的,且对任意时刻 t_0 , 存在正常数 $\delta(t_0) \in \mathbf{R}^+$, 当初始条件 $\|x(t_0)\| < \delta$ 时,系统的状态收敛于零,即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$$

则称平衡点 $x_s = 0$ 是渐近稳定的。

渐近稳定相对于李雅普诺夫意义下的稳定性而言,是一个更强的结论,它表明平衡点是系统的一个吸引子。需要指出的是,上述定义仅仅探讨了系统在平衡点附近区域的收敛特性,因此它是一个局部的结论。而且,尽管系统的状态收敛于零,但是对于其收敛速度并没有给出任何限制,因此无法分析系统的暂态特性。为了进一步描述这些特性,针对性能更为优越的系统,分别有如下全局渐近稳定和指数稳定的定义^[8]。

定义 3.3(全局渐近稳定性) 如果系统的平衡点 $x_s = \mathbf{0}$ 是稳定的, 且对于任意初始条件 $x(t_0)$, 系统的状态 $x(t)$ 收敛于零: $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$, 则称平衡点 $x_s = \mathbf{0}$ 是全局渐近稳定的。

定义 3.4(指数稳定性) 对于一个系统而言, 如果存在正的常数 $\alpha, \lambda \in \mathbf{R}^+$, 当初始状态位于以原点为中心的球域范围之内, 即 $x(t_0) \in B_r(0, r)$ 时, 系统的状态 $x(t)$ 具有如下包络线

$$\|x(t)\| \leq \alpha \|x(t_0)\| e^{-\lambda(t-t_0)} \quad (3.3)$$

则称平衡点 $x_s = \mathbf{0}$ 是指数稳定的。进一步地, 如果对于任意初始条件 $x(t_0)$, 式(3.3)成立, 则称平衡点 $x_s = \mathbf{0}$ 是全局指数稳定的。

例 3.1 试判断如图 3.1~图 3.3 所示系统的稳定性。

(1) 对于任意初始条件, 系统将在以初始状态为半径, 原点为圆心的圆周上运动(见图 3.1)。

解 显然只要取 $\delta = \varepsilon$, 则根据定义可以证明该系统在李雅普诺夫意义下是一致稳定的, 但是由于系统状态并不会趋向于原点, 因此, 它不是渐近稳定的。

(2) 当初始状态在单位圆内时, 系统状态单调递减, 且逐渐衰减到零; 而当初始条件位于单位圆外时, 系统状态将最终趋向于无穷大(见图 3.2)。

解 显然, 系统状态满足稳定性定义, 并且由于在单位圆内, 状态逐渐衰减到零, 因此系统在原点附近是局部渐近稳定的。

(3) 对于任意初始状态, 系统都将在某一时刻先回到单位圆上, 在单位圆上转动半个圆周后, 然后再逐渐衰减到零(见图 3.3)。

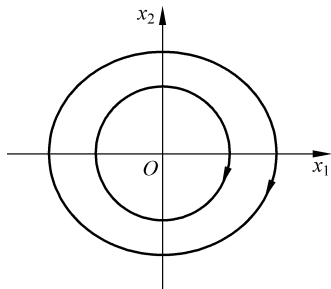


图 3.1 稳定系统

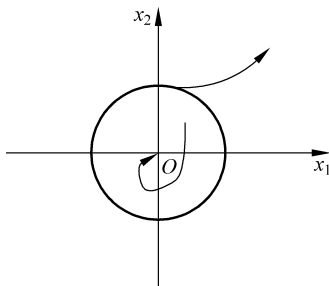


图 3.2 局部渐近稳定系统

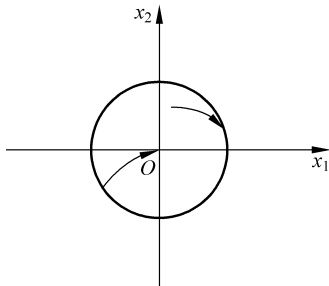


图 3.3 不稳定系统

解 这个系统看似渐近稳定的。但是按照稳定性定义 3.1, 可以看出, 系统不是李雅普诺夫意义下稳定的。事实上, 对于 $\varepsilon = 0.5$, 由于系统状态总是会在单位圆上运行一段时间, 因此找不到相对应的 δ , 使之满足稳定性定义的要求。因此, 就李雅普诺夫意义下的稳定性而言, 该系统是不稳定的。 ■

3.3 李雅普诺夫间接法

李雅普诺夫间接法是通过分析系统状态方程解的特性来判断其稳定性的方法,它通常也被称为李雅普诺夫第一方法,或者李雅普诺夫线性化方法。对于线性系统而言,李氏稳定的充要条件是系统矩阵 $\mathbf{A}$ 的全部特征值位于复平面左半部^[9-10]。而对于非线性系统,为了判断其在平衡点上的稳定性,先要将其在平衡点附近进行线性化,即将系统的动态特性利用泰勒级数展开,并仅仅保留其中的一次项,从而将原来的非线性系统转化为一个线性系统。根据李雅普诺夫第一方法,对于原非线性系统在该平衡点附近的稳定性,可以通过分析所得到的线性系统的特征值来进行判断^[11]。显然,由于这种方法是建立在线性近似的基础之上的,因此它只能得到关于平衡点附近的局部性质。

对于如下的非线性多维自治系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (3.4)$$

其中, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ 表示系统的状态, $\mathbf{x}_s = \mathbf{0}$ 是系统的平衡点。假设非线性函数 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 是连续可微的,利用泰勒级数展开将该系统线性化后得到

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (3.5)$$

其中, $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 表示如下所定义的雅可比矩阵

$$\mathbf{A} = \left(\frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}_s = \mathbf{0}}$$

上述线性系统(3.5)通常称为原非线性系统(3.4)在平衡点处的线性近似。

李雅普诺夫早在 1892 年就得到了线性系统(3.5)和原来的非线性系统(3.4)在稳定性方面的相互关系,其主要结论如定理 3.1 所述。

定理 3.1(李雅普诺夫线性化方法) 对于非线性系统(3.4)和它的线性近似系统(3.5),它们之间的稳定性存在如下关系:

- (1) 如果线性系统(3.5)严格稳定,即系统矩阵 $\mathbf{A}$ 的所有特征值都位于左半平面,则原非线性系统(3.4)关于该平衡点是局部渐近稳定的;
- (2) 如果线性系统(3.5)不稳定,即系统矩阵 $\mathbf{A}$ 具有位于右半平面的特征值,则原非线性系统(3.4)关于该平衡点是不稳定的;
- (3) 如果线性系统(3.5)临界稳定,即系统矩阵 $\mathbf{A}$ 没有位于右半平面的特征值,但是至少有一对特征值位于虚轴上,则无法判断原非线性系统(3.4)关于该平衡点的稳定性。

考虑到篇幅的原因,本书对于该定理不做严格的数学证明。值得指出的是,当仅仅在平衡点附近分析系统的稳定性时,上述线性化近似显然具有较高的准确性。因此,对于前两种情况而言,由于系统具有非常清楚的性质(即特征值分别位于稳定和 unstable 区域的内部),因此只要对主要的线性项进行分析就可以得到原来非线性系统的性质了。但是对于最后一种情况,由于系统处于稳定和 unstable 的边界上,此

时单纯利用线性项无法确定原非线性系统的稳定性,因此必须同时利用所忽略掉的高次项才能判断系统的稳定性。

例 3.2 对于如下的非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1 + cx_1x_2 + x_1^3 \\ \dot{x}_2 = x_1^2 + bx_2 - dx_1^2x_2^2 \end{cases}$$

其中, $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ 为常数。试利用李雅普诺夫间接法分析系统在原点附近的稳定性。

解 对该系统关于原点进行线性化后得到

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x}$$

其中, $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2]^T$, 系统矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

因此,当 $a < 0$ 且 $b < 0$ 时,非线性系统在原点附近是渐近稳定的;

当 $a > 0$ 或 $b > 0$ 时,非线性系统在原点附近是不稳定的;

当 $ab = 0$ 时,无法判断原非线性系统的稳定性。 ■

3.4 李雅普诺夫直接法

1892年,李雅普诺夫在其博士学位论文《运动稳定性的一般问题》中,提出了用于分析非线性系统稳定性的李雅普诺夫函数法,现在一般称为直接法。他通过构造一个类似于系统能量的函数(通常称之为李雅普诺夫候选函数),并分析其随时间变化的性质来判断系统的稳定性。迄今为止,李雅普诺夫直接法仍然是用来分析非线性系统大范围稳定性的一种重要工具^[12-13],它主要包括如下局部稳定性和全局稳定性两个判断定理。值得指出的是,这些定理描述的都是关于系统稳定性的充分条件,而不是充要条件。因此,它们只能用来判断系统的稳定性,而不能用来判别系统是否一定不稳定。

定理 3.2(局部稳定性定理) 设 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 是系统的平衡点,如果对于球域 B_{R_0} ,存在一个标量函数 $V(\mathbf{x}): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^+$ 满足如下条件:

(1) 函数 $V(\mathbf{x})$ 在球域 B_{R_0} 上是正定的,即 $V(\mathbf{x}) \geq 0$, 且 $V(\mathbf{x}) = 0$ 当且仅当 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 时成立;

(2) 函数 $V(\mathbf{x})$ 关于时间的导函数 $\dot{V}(\mathbf{x})$ 在球域 B_{R_0} 上是负半定的;

则平衡点 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 是局部稳定的。进一步地,如果函数 $\dot{V}(\mathbf{x})$ 在球域 B_{R_0} 上是负定的,则平衡点 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 是局部渐近稳定的。其中,满足条件(1)的函数通常称为李雅普诺夫候选函数,而同时满足条件(1)和(2)的函数则称为李雅普诺夫函数。

定理 3.3(全局稳定性定理) 设 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 是系统的平衡点,如果存在一个标量函数 $V(\mathbf{x}): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^+$ 满足如下条件:

(1) 函数 $V(\mathbf{x})$ 是正定的,即 $V(\mathbf{x}) \geq 0$, 且 $V(\mathbf{x}) = 0$ 当且仅当 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 时成立;

(2) 函数 $V(\mathbf{x})$ 关于时间的导函数 $\dot{V}(\mathbf{x})$ 是负半定的;

(3) 当 $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ 时, $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$;

则平衡点 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 是全局稳定的。进一步地,如果函数 $\dot{V}(\mathbf{x})$ 是负定的,则平衡点 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 是全局渐近稳定的。需要指出的是,在上述定理中,条件(3)是必不可少的,它主要用来保证函数 $V(\mathbf{x})$ 能够充满全状态空间,这个条件通常也称为径向无界条件。

如前所述,李雅普诺夫稳定性定理是一个充分非必要条件。因此,如果找不到同时满足条件(1)和(2)的函数 $V(\mathbf{x})$,并不表明系统一定是不稳定的。实际上,上述稳定性定理只能用来说明系统的稳定性。要想证明系统的不稳定性,尚需借助其他的判别定理。

例 3.3 对于以下系统

$$\ddot{\theta} + \dot{\theta} + \sin\theta = 0$$

试判断系统的稳定性。

解 由于这是一个二阶系统,它包含两个状态变量 θ 和 $\dot{\theta}$ 。为了便于分析,定义系统的状态为

$$\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2]^T = [\theta \quad \dot{\theta}]^T$$

则该系统可以改写如下

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\sin x_1 - x_2 \end{cases}$$

按照通常的选择,选取李雅普诺夫候选函数为

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$$

其关于时间的导数计算如下

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = x_1 x_2 - x_2 \sin x_1 - x_2^2$$

显然,函数 $\dot{V}(\mathbf{x})$ 是不定函数,无法根据该李雅普诺夫候选函数来判断系统的稳定性,因此必须选择另外不同的函数来进行尝试。

选择如下的李雅普诺夫候选函数

$$V_2(\mathbf{x}) = 1 - \cos x_1 + \frac{1}{2}x_2^2$$

显然,该函数在集合 $\Omega = (-2\pi, 2\pi) \times \mathbf{R}$ 上是正定的。对上式进行求导并整理后可以得到导函数 $\dot{V}_2(\mathbf{x})$ 如下

$$\dot{V}_2(\mathbf{x}) = x_2 \sin x_1 + x_2 \dot{x}_2 = -x_2^2$$

显然,函数 $\dot{V}_2(\mathbf{x})$ 在集合 Ω 上是负半定的。根据稳定性定理可知,系统的平衡点 ($\theta=0, \dot{\theta}=0$) 在李雅普诺夫意义下是局部稳定的。

进一步地,如果我们再选择另外一个候选函数

$$V_3(\mathbf{x}) = 1 - \cos x_1 + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$$

其中, $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.9 \\ 0.9 & 1 \end{bmatrix}$ 为正定对称矩阵,因此函数 $V_3(\mathbf{x})$ 是正定的。 $V_3(\mathbf{x})$ 关于时间的导数可以计算如下

$$\dot{V}_3(\mathbf{x}) = -0.9x_1 \sin x_1 - 0.1x_2^2$$

在集合 $\Omega_2 = (-\pi, \pi) \times \mathbf{R}$ 上, $\dot{V}_3(\mathbf{x})$ 是负定的,所以,系统的平衡点 ($\theta=0, \dot{\theta}=0$) 是局部渐近稳定的。■

从以上例子可以看出,在运用李雅普诺夫方法分析系统的稳定性时,最关键的步骤是选取一个合适的李雅普诺夫候选函数。对于不同的候选函数,可能会得到不一样的结论。这也从另一个方面说明李雅普诺夫方法是一种非常保守的方法,采用该方法并不能保证分析得到系统关于平衡点最强的稳定性结论。例如,在上述例子中,如果选择函数 $V_2(\mathbf{x})$ 进行分析,则只能得到该系统在平衡点局部稳定的结论。但是,如果选择候选函数为 $V_3(\mathbf{x})$,则可以证明系统的平衡点是局部渐近稳定的。遗憾的是,对于李雅普诺夫候选函数,虽然研究人员针对不同的系统提出了各种适应性不同的构造方法,但是在目前尚没有找到一种具有普遍性意义的候选函数。事实上,对于任意一个非线性系统,如何构造一个合适的候选函数来进行分析,是李雅普诺夫方法的关键,同时也是运用这种方法来分析系统特性时遇到的最大困难之一^[14]。

例 3.4 对于标量系统: $\dot{x} + f(x) = 0$, 其中, $f(x)$ 为连续函数,且当 $x \neq 0$ 时, $xf(x) > 0$, 试判断系统在平衡点附近的稳定性。

解 由 $f(x)$ 的性质,容易得到

$$\begin{cases} f(x) > 0, & \text{当 } x > 0 \text{ 时} \\ f(x) < 0, & \text{当 } x < 0 \text{ 时} \end{cases}$$

由于 $f(x)$ 是连续函数,因此由上式可知 $f(0)=0$, 所以原点是该系统的唯一平衡点。为了分析平衡点的稳定性,选取李雅普诺夫候选函数为

$$V(x) = \frac{1}{2} x^2$$

显然,当 $|x| \rightarrow \infty$ 时, $V(x) \rightarrow \infty$ 。 $V(x)$ 关于时间的导数可以计算得到

$$\dot{V}(x) = x\dot{x} = -xf(x)$$

根据对于 $f(x)$ 的分析可知, $\dot{V}(x)$ 是负定的,所以平衡点 $x=0$ 是全局渐近稳定的。■

例 3.5 对于下列摩擦系统

$$\dot{v} + 2av |v| + bv = c$$

其中, $a, b, c > 0$ 为系统常数,试求系统的平衡点并分析其稳定性。

解 为了得到系统的平衡点,需要求解如下代数方程

$$2av |v| + bv = c$$

情形 1: 当 $v \geq 0$ 时, 方程可以改写为

$$2av^2 + bv - c = 0 \quad (3.6)$$

根据一元二次方程的求根公式可以得到

$$v_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 8ac}}{4a} > 0, \quad v_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 + 8ac}}{4a} < 0$$

显然, v_2 不满足 $v \geq 0$ 的前提条件, 应舍弃, 而 $v_1 > 0$ 则是系统的一个平衡点, 它满足如下约束

$$2av_1^2 + bv_1 - c = 0$$

情形 2: 当 $v < 0$ 时, 方程可以改写为

$$2av^2 - bv + c = 0$$

求解上述方程可以得到

$$v_3 = \frac{b + \sqrt{b^2 - 8ac}}{4a} > 0, \quad v_4 = \frac{b - \sqrt{b^2 - 8ac}}{4a} > 0$$

显然, v_3, v_4 均不满足 $v < 0$ 的前提条件, 都应舍弃。由上述分析可知, $v_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 8ac}}{4a}$ 是系统的唯一平衡点。

为了分析系统在该平衡点的稳定性, 引入平移变换

$$y = v - v_1$$

则原系统可以转化为关于 y 的系统

$$\dot{y} = \dot{v} = -2av|v| - bv + c = -2a(y + v_1)|y + v_1| - b(y + v_1) + c$$

经过数学计算后, 可以利用约束式(3.6)将上式改写为

$$\dot{y} = \begin{cases} -y[2a(y + 2v_1) + b], & \text{当 } y \geq -v_1 \text{ 时} \\ 2a(y + v_1)^2 - b(y + v_1) + c, & \text{当 } y < -v_1 < 0 \text{ 时} \end{cases} \quad (3.7)$$

根据上述动态方程, 不难看出系统的唯一平衡点为 $y_s = 0$ 。为了分析平衡点的稳定性, 选取李雅普诺夫候选函数为

$$V(y) = \frac{1}{2}y^2$$

显然, 当 $|y| \rightarrow \infty$ 时, $V(y) \rightarrow \infty$ 。 $V(y)$ 关于时间的导数可以通过下式计算得到

$$\dot{V}(y) = y\dot{y}$$

将式(3.7)代入后可以得到

$$\dot{V}(y) = \begin{cases} -y^2[2a(y + 2v_1) + b], & \text{当 } y \geq -v_1 \text{ 时} \\ y[2a(y + v_1)^2 - b(y + v_1) + c], & \text{当 } y < -v_1 < 0 \text{ 时} \end{cases}$$

由上式可知 $\dot{V}(y)$ 是负定的, 因此系统 y 关于原点全局渐近稳定, 而原系统关于平衡点 $v = v_1$ 全局渐近稳定。 ■

3.5 李雅普诺夫候选函数的选择方法

如前所述,选择一个合适的李雅普诺夫候选函数是采用该方法进行稳定性分析的关键步骤。遗憾的是,对于一般的非线性系统,迄今尚未找到能够构造出合适的李雅普诺夫候选函数的确定方法。实际上,对于一个稳定的系统而言,尽管理论上存在无穷多个李雅普诺夫函数,但是如何找到其中的一个函数则是进行稳定性分析的一个难题。现在一般都是基于经验来寻找李雅普诺夫候选函数,下面介绍一些比较常见的构造方法。

3.5.1 基于能量分析的构造方法

李雅普诺夫方法起源于从系统的能量出发来分析系统的稳定性。因此,对于机械系统而言,选择其动能与势能之和作为系统的李雅普诺夫候选函数是一个非常自然的选择。

例 3.6 对于如下的一阶吊车系统

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{V}_m(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \mathbf{u} \quad (3.8)$$

其中, $\mathbf{q}(t) \in \mathbf{R}^2$ 表示系统的状态: $\mathbf{q} = [x(t) \quad \theta(t)]^T$, $\mathbf{M}(\mathbf{q}) \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$, $\mathbf{V}_m(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$ 分别代表惯性矩阵和柯氏力矩阵

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_c + m_p & -m_p l \cos \theta \\ -m_p l \cos \theta & m_p l^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_m = \begin{bmatrix} 0 & m_p l \sin(\theta \dot{\theta}) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

而 $\mathbf{G}(\mathbf{q}) \in \mathbf{R}^2$, $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^2$ 则分别表示代表重力向量和控制向量

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}) = [0 \quad m_p g l \sin \theta]^T, \quad \mathbf{u}(t) = [F \quad 0]^T$$

当分析系统的稳定性时,构造如下基于能量的李雅普诺夫函数

$$V = \frac{1}{2}k_E E^2 + \frac{1}{2}k_v \dot{x}^2 + \frac{1}{2}k_p e^2$$

其中, $e(t)$ 代表台车的定位误差: $e(t) = x - x_d$, $k_E, k_v, k_p \in \mathbf{R}^+$ 是控制增益,而系统能量 $E(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 定义如下

$$E(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + m_p g l (1 - \cos \theta) \geq 0 \quad \blacksquare$$

根据上述李雅普诺夫函数,可以完成控制器的设计和稳定性的证明,详细情况请参见本章参考文献[15-16]以及本书的第9章。

3.5.2 基于控制目标的构造方法

如前所述,李雅普诺夫方法除了可以分析系统的稳定性之外,它还可以同时进行控制系统设计。即对于给定的性能指标,根据李雅普诺夫分析所得到的要求来设计合适的控制策略,使系统达到相应的目标。

例 3.7 对于如下的非线性系统,试设计控制器使系统状态达到设定值 x_d

$$\dot{x} = \ln(x^2 + 1) - x^3 + u$$

解 根据控制目标,构造李雅普诺夫函数如下

$$V = \frac{1}{2}e^2$$

其中, $e(t)$ 代表控制误差: $e(t) = x(t) - x_d$ 。对上述函数进行求导并整理后得到

$$\dot{V} = e[\ln(x^2 + 1) - x^3 + u]$$

为了使 $\dot{V}(t)$ 为负定函数,设计控制器为

$$u = -\ln(x^2 + 1) + x^3 - ke$$

其中, $k \in \mathbf{R}^+$ 为控制增益,则有

$$\dot{V} = -ke^2$$

所以,系统状态 $x(t)$ 以指数方式收敛于设定值 x_d 。 ■

3.5.3 经验与试探相结合的构造方法

李雅普诺夫方法是现代多种非线性控制策略的理论支柱,对于这些不同的控制方法,如自适应控制、自学习控制等,都需要采用各自不同的李雅普诺夫候选函数来进行系统设计与分析。因此,当采用这些控制方法时,必须根据经验来选择李雅普诺夫候选函数中与它们相对应的标准项,然后在进一步分析的基础上通过试探来完成系统设计与分析。

需要指出的是,在进行非线性系统设计与分析时,通常是综合采用上述各个方法来进行相应的处理。在此基础上,进行多次试探和修改,最终得到合适的李雅普诺夫候选函数来完成系统设计与分析。

例 3.8 对于二阶系统 $\ddot{x} + b(\dot{x}) + c(x) = 0$, 其中, 当 $\dot{x} \neq 0$ 时, $\dot{x}b(\dot{x}) > 0$; 当 $x \neq 0$ 时, $xc(x) > 0$, 试求解系统的平衡点, 并分析平衡点的稳定性。

解 系统的状态为 $\mathbf{x} = (x, \dot{x})$ 。采用和例 3.4 类似的方法可以分析得到

$$\begin{cases} b(\dot{x}) > 0, & \text{当 } \dot{x} > 0 \text{ 时} \\ b(0) = 0 \\ b(\dot{x}) < 0, & \text{当 } \dot{x} < 0 \text{ 时} \end{cases}, \quad \begin{cases} c(x) > 0, & \text{当 } x > 0 \text{ 时} \\ c(0) = 0 \\ c(x) < 0, & \text{当 } x < 0 \text{ 时} \end{cases}$$

根据以上结果容易得到 $(x_s, \dot{x}_s) = (0, 0)$ 是系统的唯一平衡点。

为了分析平衡点的稳定性,选取常规的李雅普诺夫候选函数为

$$V(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\dot{x}^2$$

则其导函数可以计算得到

$$\dot{V}(x, \dot{x}) = x\dot{x} + \dot{x}\ddot{x} = x\dot{x} - \dot{x}b(\dot{x}) - \dot{x}c(x)$$

遗憾的是, $\dot{V}(x, \dot{x})$ 是不定函数, 因此无法利用所定义的李雅普诺夫候选函数 $V(\cdot)$

来判断系统的稳定性。仔细分析 $V(\cdot)$ 及 $\dot{V}(\cdot)$ 的表达式可以发现, $V(\cdot)$ 中的第二项 $\frac{1}{2}\dot{x}^2$ 可以在 $\dot{V}(\cdot)$ 的表达式中贡献一个非正项 $-\dot{x}b(\dot{x})$, 而其第一项则没有起到任何作用。因此, 保持第二项不变, 假设第一项为待定非负函数 $g(x): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+$, 则修改后的李雅普诺夫候选函数为

$$V(\cdot) = g(x) + \frac{1}{2}\dot{x}^2$$

对上式求关于时间的导数可得

$$\dot{V}(\cdot) = \frac{dg}{dx}\dot{x} + \dot{x}\ddot{x} = -\dot{x}b(\dot{x}) + \dot{x}\left(\frac{dg}{dx} - c(x)\right)$$

显然, 如果能选择函数 $g(x)$, 使得

$$\frac{dg}{dx} - c(x) = 0 \quad (3.9)$$

则 $\dot{V}(\cdot)$ 可以转换为负半定函数 $\dot{V}(\cdot) = -\dot{x}b(\dot{x})$ 。对式(3.9)两边关于 x 积分可得

$$g(x) = \int_0^x c(y)dy$$

进一步地, 利用积分中值定理可以证明

$$g(x) = c(\xi)x, \quad \xi \in (0, x) \quad \text{或} \quad \xi \in (x, 0)$$

根据 $c(x)$ 的性质, 从上式可以看出 $g(x)$ 是正定函数。根据以上分析, 对于原系统, 选择如下的候选函数

$$V_1(x) = \int_0^x c(y)dy + \frac{1}{2}\dot{x}^2$$

则 $\dot{V}_1(x, \dot{x})$ 可以计算如下

$$\dot{V}_1(x, \dot{x}) = c(x)\dot{x} + \dot{x}\ddot{x} = -\dot{x}b(\dot{x})$$

因此, $\dot{V}_1(x, \dot{x})$ 为负半定函数。进一步分析可以证明: 当 $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ 时, $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$, 因此平衡点 $(x_s, \dot{x}_s) = (0, 0)$ 是全局稳定的。■

3.6 拉塞尔不变性原理

在利用李雅普诺夫定理进行稳定性分析时, 为了得到渐近稳定的特性, 李雅普诺夫候选函数的导函数 $\dot{V}(\mathbf{x})$ 必须是负定的, 这是一个比较苛刻的条件。在很多情况下, 只能得到 $\dot{V}(\mathbf{x})$ 负半定的结论。这时候, 根据李雅普诺夫定理, 只能得到系统在李雅普诺夫意义下稳定的结论。在某些情况下, 可以利用下面介绍的拉塞尔不变性原理对系统进一步分析, 并最终得到渐近稳定的结论。

定义 3.5 (不变集) 对于定义在集合 Ω 上的动态系统, 如果存在集合 $\Lambda \subseteq \Omega$, 对于任意初始状态 $\mathbf{x}(t_0) \in \Lambda$, 有 $\mathbf{x}(t) \in \Lambda, \forall t \geq t_0$, 则集合 Λ 称为该动态系统的不变集。

例 3.9 试证明对于如下的非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2(x_1^2 + x_2^2 - 10) \\ \dot{x}_2 = x_1^2(x_1^2 + x_2^2 - 10) \end{cases} \quad (3.10)$$

圆周 $\{(x_1, x_2) | x_1^2 + x_2^2 = 10\}$ 是它的一个不变集。

证明 定义函数

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 10$$

对其关于时间求导后得到

$$\frac{d}{dt}f(x_1, x_2) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2$$

代入系统的动态方程式(3.10)并进行整理后得到

$$\frac{d}{dt}f(x_1, x_2) = (2x_1x_2 + 2x_2x_1^2)(x_1^2 + x_2^2 - 10)$$

从上式可知,当系统位于圆周 $\{(x_1, x_2) | x_1^2 + x_2^2 = 10\}$ 上时, $f(x_1, x_2)$ 关于时间的导数为零,因此系统在无其他外力作用的情况下,将保持在该圆周上,所以它是系统的一个不变集。实际上,这个不变集定义了系统式(3.10)的一个极限环。 ■

定理 3.4(局部不变性原理) 对于定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的动态系统 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, 其中, $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 为连续函数, 设 $V(\mathbf{x}) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 是一阶光滑函数, 且满足如下条件:

- (1) 存在正常数 $c \in \mathbf{R}^+$, 使集合 $\Omega_c = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : V(\mathbf{x}) \leq c\}$ 有界;
- (2) 对于任意 $\mathbf{x} \in \Omega_c$, 有 $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$;

定义集合 $S = \{\mathbf{x} \in \Omega_c : \dot{V}(\mathbf{x}) = 0\}$, M 是 S 中的最大不变集, 则对于 $\forall \mathbf{x}_0 \in \Omega_c$, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\mathbf{x}(t)$ 趋于不变集 M 。

定理 3.5(全局不变性原理) 对于定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的动态系统 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, 其中, $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 为连续函数, 设 $V(\mathbf{x}) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 是一阶光滑函数, 且满足如下条件:

- (1) 当 $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ 时, $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$;
- (2) 对于任意 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$;

定义集合 $S = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \dot{V}(\mathbf{x}) = 0\}$, M 是 S 中的最大不变集, 则对于 $\forall \mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\mathbf{x}(t)$ 趋于不变集 M 。

对于定理 3.4 和定理 3.5, 本书不进行证明。需要指出的是, 定理中的最大不变集 M 实际上就是由系统动态方程及约束条件 $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$ 所确定的集合。换言之, 最大不变集 M 可以通过求解如下约束得到

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \dot{V}(\mathbf{x}) = 0 \end{cases}$$

对于局部不变性原理而言, 其解还必须满足 $\mathbf{x} \in \Omega_c$ 的约束。特别地, 如果集合 M 中只包含原点 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 则平衡点 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 是渐近稳定的。

例 3.10 试利用拉塞尔不变性原理进一步分析例 3.8 中平衡点的稳定性。

解 由例 3.8 中的分析得到

$$\dot{V}_1(x) = -\dot{x}b(\dot{x}) \leq 0$$

等号当且仅当 $\dot{x}=0$ 时成立。因此,为了求解系统的最大不变集,需要联立下列方程

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \ddot{x} + b(\dot{x}) + c(x) = 0 \end{cases}$$

在上式中,根据第一个方程得到 $b(\dot{x})=0, \ddot{x}=0$,把上述事实代入第二个方程可以得到 $x=0$ 。因此最大不变集 M 中只包含平衡点 $\mathbf{x}=(0,0)$,该平衡点是渐近稳定的。 ■

习题

1. 试描述李雅普诺夫直接法和间接法的适用条件和主要区别。
2. 请比较分析李雅普诺夫意义下的稳定性、渐近稳定以及指数稳定 3 种稳定性的定义,并具体阐述其联系和主要区别。
3. 请指出李雅普诺夫分析方法的主要优点和不足之处。
4. 试运用李雅普诺夫线性化方法分析下列非线性系统关于平衡点附近的局部稳定性:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases}$$

5. 对于如下的非线性系统,试计算系统的平衡点并利用李雅普诺夫方法分析其稳定性。

系统 1:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1(x_1^2 + x_2^2) - x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases}$$

系统 2: $\dot{x} = -kx^3 + \sin^5 x$

$$\text{系统 3: } \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2^3 \\ \dot{x}_2 = -x_1 x_2^2 \end{cases}$$

系统 4:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{-6x_1}{(1+x_1^2)^2} + 2x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{-2(x_1+x_2)}{(1+x_1^2)^2} \end{cases}$$

6. 已知某系统的动态特性如下

$$\dot{x} = -kx + \sin^3 x + x \cos^2 x$$

其中, $k > 2$ 为常数。试证明:

- (1) 原点为该系统的唯一平衡点;

(2) 该平衡点是全局指数稳定的。

7. 对于以下的非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -a[\sin^2 x_2 + 1]x_1^3 + bx_1x_2^2 \\ \dot{x}_2 = -cx_2 - dx_1^2x_2 \end{cases}$$

其中, $a, b, c, d \in \mathbf{R}^+$ 表示正常数。试计算系统的平衡点并分析其稳定性。

8. 对于以下关于两种生物个体群的 Volterra 方程

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= ax_1 + bx_1x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= cx_2 + dx_1x_2 \end{aligned}$$

式中, $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ 为非零实数。试求出该系统的所有平衡点并讨论它在这些平衡点上的稳定性。

9. 已知某机械系统的闭环动态特性如下

$$\begin{cases} \ddot{x} = -k_1x - k_2\dot{x} - \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} = \dot{x} - A\sin\theta \end{cases}$$

其中, $k_1, k_2, A \in \mathbf{R}^+$ 均为正的常数。试应用李雅普诺夫方法并结合拉塞尔不变性原理证明: $\lim_{t \rightarrow \infty} (x \quad \dot{x} \quad \theta \quad \dot{\theta}) = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$ 。

参 考 文 献

1. 廖晓昕. 稳定性的理论、方法和应用[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 2002.
2. Khalik H K. Nonlinear Systems[M]. Prentice Hall, 1996.
3. Krstic M, et al. Nonlinear and Adaptive Control Design[M]. New York: John Wiley Sons, 1995.
4. 曾癸铨. 李雅普诺夫直接法在自动控制中的应用[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1985.
5. 齐晓慧. “李雅普诺夫稳定性理论”的教学研究[J]. 电力系统及其自动化学报, 2005, 17(3): 91-94.
6. 胡跃明. 非线性控制系统理论与应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2002.
7. 冯纯伯, 费树岷. 非线性控制系统分析与设计[M]. 2 版. 北京: 电子工业出版社, 1998.
8. Slotine J, Li W. Applied Nonlinear Control[M]. Englewood Clis, New Jersey: Prentice Hall, 1991.
9. 罗传翼, 程桂芬, 付家才. 控制工程与信号处理[M]. 北京: 化学工业出版社, 2004.
10. 王枫. 控制系统理论及应用[M]. 北京: 北京邮电大学出版社, 2005.
11. 胡寿松. 自动控制原理[M]. 4 版. 北京: 科学出版社, 2001.
12. 赖旭芝, 黄灿. 体操机器人控制的李雅普诺夫方法[J]. 计算机技术与自动化, 2004, 23(2): 4-7.
13. 叶华文, 戴冠中, 王红. 控制李雅普诺夫函数的镇定应用[J]. 自动化学报, 2004, 30(3): 430-435.
14. 何东武. 李雅普诺夫稳定性理论中 V 函数的构造[J]. 辽宁师范大学学报(自然科学版), 2001, 24(3): 266-271.
15. Fang Y, Zengeroglu E, Dixon W E, et al. Nonlinear Coupling Control Laws for an Overhead Crane System[J]. *Proc. of the IEEE Conference on Control Applications*, 2001, 639-644.
16. 方勇纯, Darren Dawson, 王鸿鹏. 欠驱动吊车非线性控制系统设计及实验[J]. 中南大学学报(自然科学版), 2005, 36(1): 151-155.