第3章 插 值 法

CHAPTER

实际问题中的函数 $f(x)$是各种各样的，有的数学表达式过于复杂，有的只给出某些点上的函数值、导数值等离散数据。为了研究或使用 $f(x)$，往往构造一个简单函数 $p(x)$作为近似函数，通过处理 $p(x)$而获得使用 $f(x)$的效果。如果只需要 $p(x)$处理或给出离散数据，则称为 $f(x)$的插值函数。

选取不同的插值函数 $p(x)$，近似 $f(x)$的效果就会有所不同。由于代数多项式结构简单且计算与分析都比较方便，故常用作科研或工程上的插值函数，这就是代数插值。拉格朗日插值、牛顿插值、埃尔米特插值都可用于寻求整个区间上的代数插值多项式；但当多项式次数太高（涉及数据点太多）时插值效果可能会变差，这就需要使用分段拉格朗日插值、分段埃尔米特插值等方法。如果要求插值函数 $p(x)$是光滑曲线（插值点处的一阶二阶导数连续），还可以使用三次样条函数插值多项式。

3.1 插值及代数插值

插值法就是构造函数的近似表达式 $p(x)$，近似地表达表格函数或者复杂函数 $f(x)$的一种数学方法。如果构造 $p(x)$时，能够满足 x_i 处的 $p(x_i)$与 $f(x_i)$相等，而在别处则以 **$p(x)$近似地代替 $f(x)$**，则称 $p(x)$为 $f(x)$的插值函数。

插值法的第一步是根据待解问题选择恰当的函数类作为原来函数的近似表达式；第二步是具体构造 $p(x)$表达式。

3.1.1 插值的概念

假定通过实验观测，得到如表 3-1 所示的一批数据(x_i,y_i)，$i=0,1,2,\cdots,n$，需要从中找到自变量 x 与因变量 y 之间的函数关系，一般可用一个近似函数 $y=f(x)$来表示。

表 3-1 一般插值数据表

x	x_0	x_1	x_2	…	x_n
y	y_0	y_1	y_2	…	y_n

依据一批给定的数据点(输入、输出变量的数据)来确定函数,就是确定满足特定要求的曲线或者曲面。函数 $y=f(x)$**的产生办法常因观测数据及要求的不同而不同,一般可采用函数插值或数据拟合两种办法来实现。**

如果只有一个输入变量、一个输出变量,则属于一元函数的拟合和插值;如果有多个输入变量,则为多元函数的拟合和插值。

如果要求曲线或曲面通过给定的所有数据点,就是插值问题;如果只是希望反映对象整体的变化趋势,而不强求曲线或曲面通过所有数据点,这就是数据拟合,又称为曲线拟合或曲面拟合。

注:在人工智能、大数据分析的数据挖掘过程中,原始数据中往往存在许多不完整或者偏离的数据。轻则影响执行效率,重则影响执行效果,一般都需要进行数据预处理,较为常用的是数据插补方法。插值法和拟合是两种主要的数据插补方法。

例 3-1 已知 $\sin(35°10')$、$\sin(35°20')$、$\sin(35°30')$三个函数值,如表 3-2 所示。求另外两个函数值 $\sin(35°16')$和 $\sin(35°27')$。

表 3-2 已知点函数值与未知点待求函数值

序　　号	1	2	3	4	5
x	35°10′	35°16′	35°20′	35°27′	35°30′
$\sin x$	0.575 956 8	?	0.578 332 3	?	0.580 703 0

解:构造 $y_i=\sin(x_i)$的近似函数(已知点函数值与原函数相同):

$$p(x_i)=\sin(x_{i-1})+[\sin(x_{i+1})-\sin(x_{i-1})]\times(x_i-x_{i-1})$$

代入求解两个函数值:

$$\sin 35°16'=0.575\,956\,8+(0.578\,332\,3-0.575\,956\,8)\times 0.6=0.577\,382\,1$$

$$\sin 35°27'=0.578\,332\,3+(0.580\,703\,0-0.578\,332\,3)\times 0.7=0.579\,991\,8$$

调用 Windows 计算器求得(精确值):

$$\sin 35°16'=\sin(35+16\div 60)=0.577\,382\,7\cdots$$

$$\sin 35°27'=\sin(35+27\div 60)=0.579\,992\,2\cdots$$

考虑到代入 $p(x)$求未知函数值时,使用的已知函数值是近似数,因此,由近似函数 $p(x)$求得的函数值的精度是比较高的。也就是说,$p(x)$可以作为 $\sin(x)$的插值函数

$$y=\sin(x)\approx p(x)$$

3.1.2 代数插值

由于代数多项式结构简单,计算及理论分析都很方便,故科研与工程上经常选取代数多项式作为插值函数,这就是代数插值。代数插值方法很多,有拉格朗日插值、分段插值、牛顿插值、等距结点插值等。

1. 插值多项式

对于给定的函数(如表格函数)$y=f(x)$,已知 $n+1$ 个互异点 $x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n$,且 $x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n$,这些点上的函数取值为 $y_0,y_1,y_2,\cdots,y_n$,即

$$f(x_i)=y_i,\quad i=0,1,2,\cdots,n$$

求一个 n 次多项式 $y=p_n(x)$，在点 x_i 处满足

$$p_n(x_i)=y_i,\quad i=0,1,2,\cdots,n$$

称这个问题的解 $y=p_n(x)$ 是给定函数 $y=f(x)$ 的插值多项式，即插值函数。而称 $y=f(x)$ 为被插值函数。$x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n$ 称为插值结点（结点、基点）。x_0 为左端点，x_n 为右端点，称此二端点所限定的区间 (x_0,x_n) 为插值区间。

2. 代数插值问题的唯一有解性

代数插值实际上就是根据既定的 $n+1$ 个结点上的函数值，设法构造一个次数不高于 n 的代数多项式

$$p_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$$

即由 $n+1$ 个条件确定 $n+1$ 个待定系数。将

$$p_n(x_i)=y_i,\quad i=0,1,2,\cdots,n$$

代入，得到一个关于 $a_n,a_{n-1},a_{n-2},\cdots,a_1,a_0$ 的 $n+1$ 线性方程组

$$\begin{cases}a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\cdots+a_{n-1}x_0^{n-1}+a_nx_0^n=y_0\\ a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+\cdots+a_{n-1}x_1^{n-1}+a_nx_1^n=y_1\\ \qquad\qquad\vdots\\ a_0+a_1x_{n-1}+a_2x_{n-1}^2+\cdots+a_{n-1}x_{n-1}^{n-1}+a_nx_{n-1}^n=y_{n-1}\\ a_0+a_1x_n+a_2x_n^2+\cdots+a_{n-1}x_n^{n-1}+a_nx_n^n=y_n\end{cases}$$

其系数行列式为范德蒙德（Vandermonde）行列式

$$V(x_0,x_1,\cdots,x_n)=\begin{vmatrix}1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{n-1} & x_0^n\\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & x_1^n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & x_{n-1}^n\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} & x_n^n\end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=0}^{i-1}(x_i-x_j)$$

因为 插值结点 x_i 互不相同；所以 $\prod\limits_{i=1}^{n}\prod\limits_{j=0}^{i-1}(x_i-x_i)\neq 0$。

根据解线性方程组的克拉默（Cramer）法则，方程组的解存在且唯一，从而 $p_n(x)$ 唯一确定。也就是说，n 次代数插值问题的解是存在且唯一的。解的唯一性保证了无论用什么方法求解 $p_n(x)$，其结果总是相同的。

这个证明实际上给出了代数插值多项式的一个构造方法，但因计算范德蒙德行列式的工作量太大，此方法不便于计算机求解。常用的方法有拉格朗日（Lagrange）插值、牛顿（Newton）插值等。

3. 插值的几何意义

代数插值的几何意义，就是通过 $n+1$ 个点 $(x_0,y_0),(x_1,y_1),\cdots,(x_n,y_n)$ 作一条 n 次代数曲线 $y=p_n(x)$，近似于曲线 $y=f(x)$，如图 3-1 所示。

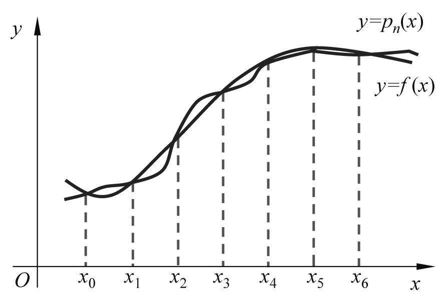

图 3-1　函数及插值函数

在插值区间上，用 $y=p(x)$ 近似 $y=f(x)$，在插值结点 x_i 处，$f(x)=p(x_i)$，而在其他点 x 处，相应函数值就会有误差。令

$$R(x)=f(x)-p(x)$$

则称 $R(x)$为插值多项式的余项，它表示用 $p(x)$近似 $f(x)$的截断误差的大小。一般来说，$|R(x)|$越小，近似程度越好。

3.2 拉格朗日插值

拉格朗日插值是一种重要的代数插值方法，其思路很简单，就是设计基函数 $l(x)$，使得 $L_n(x)$能够拟合 $f(x)$：

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)l_i(x)$$

$l_i(x)$的特点是，当 $x=x_i$ 时，$l_i(x_i)=1$；当 $x=x_j\neq x_i$ 时，$l_i(x_j)=0$。这样，$L_n(x)$就能穿过 $n+1$ 个$(x_i,f(x_i))$。$L_n(x)$称为 n 次拉格朗日插值多项式，$l(x)$又称作 n 次插值基函数，$x_i(i=0,1,2,\cdots,n)$称为插值结点。

3.2.1 线性插值

已知函数 $y=f(x)$在两个互异点 x_0,x_1 上的函数值 $y_0=f(x_0)$，$y_1=f(x_1)$，要求构造一个一次多项式 $y=p_1(x)$，使得

$$p_1(x_0)=y_0,\quad p_1(x_1)=y_1$$

1. 构造插值多项式

构造 $p_1(x)$的方法有如下两种。

(1) 设 $p_1(x_0)=ax+b$，视 a,b 为未知数，求解二元一次方程组

$$\begin{cases}ax_0+b=y_0\\ ax_1+b=y_1\end{cases}$$

即可求得 $p_1(x)$。

(2) 两点间的函数及插值多项式如图 3-2 所示。

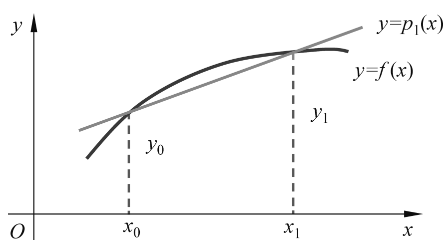

图 3-2 两点间的函数及插值多项式

$y=p_1(x)$表示通过两点 $A(x_0,y_0)$与 $B(x_1,y_1)$的直线。通过 A,B 两点的直线方程即为插值公式：

$$p_1(x)=y_0+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0) \tag{3-1}$$

也可改写成另一种插值公式：

$$p_1(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1 \tag{3-2}$$

这两种形式的 $p_1(x)$都叫作函数 $y=f(x)$的插值多项式。这种插值一般称为线性插值，也称为两点插值。

2. 插值公式的特点

两种插值公式中，先看式(3-1)，其中$\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$就是差商$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$，当 x_1 逼近 x_0 时，趋于导数 $f'(x_0)$。因此，当 x_1 趋于 x_0 时，式(3-1)的极限形式为

$$p_1(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

由此式可知，插值多项式 $y=p_1(x)$ 的极限形式，恰好是 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的一阶泰勒(Taylor)多项式。这个事实在几何上解释为：当 x_1 趋于 x_0 时，割线 $y=p_1(x)$ 逼近曲线 $y=f(x)$ 在点 $A(x_0,f(x_0))$ 处的切线。

再看式(3-2)的结构，如果记

$$A_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1},\quad A_1(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

则式(3-2)可表示为式(3-3)：

$$p_1(x)=A_0(x)\cdot y_0+A_1(x)\cdot y_1 \tag{3-3}$$

其中，$A_0(x)$、$A_1(x)$ 称为线性插值的基函数，或称为以 x_1、x_0 为结点的基本插值多项式。该式说明，所构造的一次多项式 $y=p_1(x)$ 可以用两个线性插值基函数 $A_0(x)$、$A_1(x)$ 通过线性组合的方法构造出来。

将 x_0 与 x_1 分别代入式(3-3)，根据插值条件易知：

$$A_0(x_0)=1,\quad A_0(x_1)=0$$
$$A_1(x_0)=0,\quad A_1(x_1)=1$$

可知基函数 $A_0(x)$、$A_1(x)$ 分别是适用于函数表

x	x_0	x_1
$A_0(x)$	1	0

和

x	x_0	x_1
$A_1(x)$	0	1

的插值多项式，而且

$$A_1(x_0)+A_1(x_1)\equiv 1$$

应该明确，$A_0(x)$、$A_1(x)$ 都是 x 的一次多项式，原因是

$$A_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}=\frac{1}{x_0-x_1}x+\left(-\frac{x_1}{x_1-x_0}\right)$$
$$A_1(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{1}{x_1-x_0}x+\left(-\frac{x_0}{x_1-x_0}\right)$$

例 3-2　已知 $\sqrt{100}=10$，$\sqrt{121}=11$，求 $\sqrt{115}$ 的值。

解：根据题意可知

$$x_0=100,\quad y_0=10$$
$$x_1=121,\quad y_1=11$$
$$x=115$$

代入线性插值式(3-1)：

$$y=p_1(115)=10+\frac{11-10}{121-100}\times(115-100)\approx 10.714\ 285\ 7$$

与精确值 $\sqrt{115}=10.723\ 805\ 29\cdots$ 比较，这个线性插值只有 3 位有效数字，计算精确度是比较低的。

3.2.2　抛物插值

线性插值仅用两个结点上的信息，计算精度自然低。为了提高精度，可以考虑三点插值

(二次、抛物插值)。

已知函数 $y=f(x)$在 3 个互异点 x_0,x_1,x_2 上的函数值

$$y_0=f(x_0),\quad y_1=f(x_1),\quad y_2=f(x_2)$$

要求构造一个二次多项式 $y=p_2(x)$,使得

$$p_2(x_0)=y_0,\quad p_2(x_1)=y_1,\quad p_2(x_2)=y_2$$

构造二次插值多项式 $p_2(x)$的方法有两种。

1. 构造插值函数 $p_2(x)$的第一种方法

设待求插值函数为

$$p_2(x_0)=ax^2+bx+c$$

其中,参数 a、b、c 由插值条件决定,即由下列方程组确定:

$$\begin{cases}ax_0^2+bx_0+c=y_0\\ax_1^2+bx_1+c=y_1\\ax_2^2+bx_2+c=y_2\end{cases}$$

求解这个三元一次方程组,得知三个未知数 a、b、c 的值,即可确定 $p_2(x)$。

因为这里的 $x_i(i=0,1,2)$互异为已知条件。

所以可以证明:如果该方程组的系数行列式非零,其解是唯一的;故可确定 $p_2(x)$就是所要构造的插值函数。

2. 构造插值函数 $p_2(x)$的第二种方法

回顾线性插值

$$p_1(x)=A_0(x)\cdot y_0+A_1(x)\cdot y_1$$

该式中

$$A_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1},\quad A_1(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

是线性插值的基函数,二者均为 x 的一次式,满足条件

$$A_0(x_0)=1,\quad A_0(x_1)=0$$

$$A_1(x_0)=0,\quad A_1(x_1)=1$$

而且,$p_1(x)$为基函数 $A_0(x)$与 $A_1(x)$的线性组合,线性组合的系数恰好为相应的函数值。

以此类推,如果二次插值函数 $p_2(x)$也是基函数的线性组合,则可知二次插值函数 $p_2(x)$的格式为

$$p_2(x)=A_0(x)\cdot y_0+A_1(x)\cdot y_1+A_2(x)\cdot y_2$$

其中,$A_i(x)(i=0,1,2)$为二次插值函数的基函数,且为二次式。于是,构造 $p_2(x)$就化为确定 $A_i(x)(i=0,1,2)$。

根据插值条件,二次插值函数的基函数必须满足如下条件。

条件 1:$A_0(x_0)=1,A_0(x_1)=0,A_0(x_2)=0$;

条件 2:$A_1(x_0)=0,A_1(x_1)=1,A_1(x_2)=0$;

条件 3:$A_2(x_0)=0,A_2(x_1)=0,A_2(x_2)=1$。

1) 先确定 $A_0(x)$

由条件 1 中的 $A_0(x_1)$与 $A_0(x_2)$可知,$A_0(x)$必然包含因子 $x-x_1$ 与 $x-x_2$。

又因为 $A_0(x)$ 为二次式，故令

$$A_0(x)=\lambda(x-x_1)(x-x_2)$$

其中，待定系数 λ 可由条件 1 式中的条件 $A_0(x_0)=1$ 来确定，即

$$A_0(x)=\lambda(x-x_1)(x-x_2)=1$$

求得

$$\lambda=\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)}$$

代入求得

$$A_0(x)=\lambda(x-x_1)(x-x_2)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

2）再构造 $A_1(x)$ 与 $A_2(x)$

同样的步骤，根据条件 2 和条件 3 分别得到

$$A_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$A_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

3）将上述基函数 $A_i(x)(i=0,1,2)$ 代入 $p_2(x)$ 的格式，得到二次插值函数 $p_2(x)$

$$\begin{aligned}p_2(x)&=A_0(x)y_0+A_1(x)y_1+A_2(x)y_2\\&=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2\end{aligned}$$

改写为

$$p_2(x)=y_0\prod_{\substack{j=0\\j\neq 0}}^{2}\frac{(x-x_j)}{(x_0-x_j)}+y_1\prod_{\substack{j=0\\j\neq 1}}^{2}\frac{(x-x_j)}{(x_1-x_j)}+y_2\prod_{\substack{j=0\\j\neq 2}}^{2}\frac{(x-x_j)}{(x_2-x_j)}$$

这就是所要构造的函数 $y=f(x)$ 的二次插值函数公式，也称为抛物插值公式。

3. 二次插值的几何意义

二次插值的几何解释是：用通过三点 (x_0,y_0)，(x_1,y_1)，(x_2,y_2) 所作抛物线 $y=p_2(x)$ 来近似曲线 $y=f(x)$，如图 3-3 所示。这就是二次插值称为抛物插值的缘由。

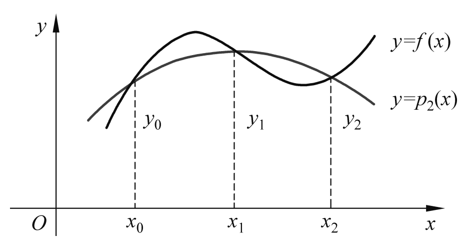

图 3-3　抛物插值的几何意义

例 3-3　已知 $\sqrt{100}=10$，$\sqrt{121}=11$，$\sqrt{144}=12$，求 $\sqrt{115}$ 的值。

解：根据题意可知

$$x_0=100,\quad y_0=10$$
$$x_1=121,\quad y_1=11$$
$$x_2=144,\quad y_2=12$$
$$x=115$$

代入抛物插值公式求解

$$\begin{aligned}y&=p_2(115)\\&=\frac{(115-121)\times(115-144)}{(100-121)\times(100-144)}\times 10+\end{aligned}$$

$$\frac{(115-100)\times(115-144)}{(121-100)\times(121-144)}\times 11+$$
$$\frac{(115-100)\times(115-121)}{(144-100)\times(144-121)}\times 12$$
$$\approx 10.722\ 755\ 5$$

与精确值$\sqrt{115}=10.723\ 805\ 29\cdots$比较，这个抛物插值的计算精度具有 4 位有效数字，比线性插值(3 位有效数字)精确。

3.2.3 拉格朗日插值的一般形式

已知函数 $y=f(x)$有 $n+1$ 个互异点 $x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n$，且 $x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n$，以及这些点上的函数值 $y_0,y_1,y_2,\cdots,y_n$，要求构造一个次数不高于 n 的插值多项式 $p_n(x)$，使得

$$p_n(x_i)=y_i,\quad i=0,1,2,\cdots,n$$

可以仿照构造抛物插值多项式的方法，先构造插值基函数，再利用插值基函数构造多项式 $p_n(x)$。

1. 构造插值基函数

一般形式的插值基函数 $A_k(x)(k=0,1,2,\cdots,n)$是 n 次多项式，且满足条件

$$A_k(x)=\begin{cases}0, & i\neq k\\ 1, & i=k\end{cases}$$

即满足表 3-3 列出的函数表。

表 3-3 $A_k(x)(k=0,1,2,\cdots,n)$满足的函数表

x	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_{k-1}	x_k	x_{k+1}	$\cdots$	x_n
$A_k(x)$	0	0	0	$\cdots$	0	1	0	$\cdots$	0

也就是说，除 x_k 之外的其他所有结点，都是基函数 $A_k(x)$的零点。

按照之前抛物插值基函数的求解方法，可以得到

$$A_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq 0}}^{n}\frac{(x-x_j)}{(x_0-x_j)}$$

$$A_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)}=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq 1}}^{n}\frac{(x-x_j)}{(x_1-x_j)}$$

基函数的一般形式 $A_k(x)$为

$$A_k(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}\frac{(x-x_j)}{(x_k-x_j)}$$

2. 构造插值多项式

在求得 $n+1$ 个 n 次多项式

$$A_k(x),\quad k=0,1,2,\cdots,n$$

即 $n+1$ 个基函数之后，由这些基函数进行线性组合，可得

$$p_n(x)=A_0(x)y_0+A_1(x)y_1+\cdots+A_n(x)y_n$$

$$= y_0 \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 0}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_0-x_j)} + y_1 \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 1}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_1-x_j)} + \cdots + y_k \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_k-x_j)} + \cdots + y_n \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq n}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_n-x_j)}$$

改写为

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(y_k \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_k-x_j)} \right)$$

这就是所要求的插值多项式,称为一般形式的拉格朗日插值公式。

3. 插值多项式的意义

可以看出,拉格朗日插值公式满足插值条件

$$p_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, 2, \cdots, n$$

特别地,当 $n=1$ 时,公式变成线性插值公式;当 $n=2$ 时,公式变成抛物插值公式。

在给定点 x,用插值公式计算 $p_n(x)$的值,并作为函数 $y=f(x)$在点 x 处的近似值,这个过程称为插值。插值多项式的次数称为插值的阶数。点 x 称为插值点。如果插值点 x 位于插值区间内,这种插值过程称为内插,否则称为外插或外推。

例 3-4　已知函数如表 3-4 所示。

表 3-4　已知函数表

$\boldsymbol{x_i}$	0.561 60	0.562 80	0.564 01	0.565 21
$\boldsymbol{y_i}$	0.827 41	0.826 59	0.825 77	0.824 95

用三次拉格朗日插值公式求当 $x=0.5635$ 时的近似值。

解:本例中,求值结果为 $y=0.826\ 115\ 663\ 864\ 317\ 9$。

附:三次拉格朗日插值的 Python 程序。

```
import numpy as np
def lagrange_interpolation(xi, yi, x):
    #拉格朗日插值
    n=len(xi)
    y=0
    for i in range(n):
        p=yi[i]
        for j in range(n):
            if j!=i:
                p *=(x-xi[j])/(xi[i]-xi[j])
        y+=p
    return y
if __name__=='__main__':
    #已知结点及其函数值
    xKnown=np.array([0.56160, 0.56280, 0.56401, 0.56521])
    yKnown=np.array([0.82741, 0.82659, 0.82577, 0.82495])
    #新结点求值
    xNew=0.5635
    yNew=lagrange_interpolation(xKnown, yKnown, xNew)
    print(yNew)
```

3.2.4 插值余项及误差估计

一般来说,插值函数 $p_n(x)$只是近似地刻画了原来的函数 $f(x)$,故在插值点处计算 $p_n(x)$并以此作为 $f(x)$的函数值,往往是有误差的。前面提到过,这种误差可用

$$R(x)=f(x)-p_n(x)$$

来表示。这里的 $R(x)$称为插值余项或者插值函数的截断误差。可见,用插值法求解得到的函数 $f(x)$的近似值是否准确有效,还要看误差 $R(x)$是否满足所要求的精度。这就需要研究插值误差 $R(x)$的估计方法。

1. 拉格朗日余项定理

设区间$[a,b]$含有结点 $x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n$,而 $f(x)$在区间$[a,b]$内具有直到 $n+1$ 阶的导数,并且给定了

$$f(x_i)=y_i,\quad i=0,1,2,\cdots,n$$

则当 $x\in[a,b]$时,对于公式

$$p_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\left(y_k\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}\frac{(x-x_j)}{(x_k-x_j)}\right)$$

给出的 $p_n(x)$,有

$$R(x)=f(x)-p_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)$$

该式中,ξ 是与 x 有关的点,包含在由点 $x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n$ 和 x 所界定的范围内,因而 $\xi\in[a,b]$。

注:ξ 并非一个常数,目标计算的 x 不同,ξ 会不同。也就是说,ξ 是 x 的一个函数。

可以看出,想要通过拉格朗日余项定理来估计插值误差 $R(x)$是比较困难的。不仅因为公式中的 ξ 点不易确定,其中的高阶导数 $f^{(n+1)}(\xi)$往往也不容易求得;而且,有时候 $y=f(x)$函数是一种不给出具体表达式的表格函数,更不能用这个公式来估计 $R(x)$。

2. 误差的事后估计

考虑 3 个插值结点 x_0、x_1、x_2。

先用 x_0、x_1 作线性插值。对于给定的插值点 x,求出 $y=f(x)$的一个近似值,记作 y_1;再用 x_0、x_2 作线性插值求得另一个近似值,记作 y_2。

按拉格朗日余项定理,有

$$y-y_1=\frac{f''(\xi_1)}{2}(x-x_0)(x-x_1)$$

$$y-y_2=\frac{f''(\xi_2)}{2}(x-x_0)(x-x_2)$$

两式中的 ξ_1、ξ_2 均属于所考虑的插值区间。假设在该区间内 $f''(x)$变化不大,将上面两式两端相除,消去近似相等的 $f''(\xi_1)$和 $f''(\xi_2)$,则有

$$\frac{y-y_1}{y-y_2}\approx\frac{x-x_1}{x-x_2}$$

整理成为

$$y\approx\frac{x-x_2}{x_1-x_2}y_1+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}y_2$$

将上式两端同时减去 y_1，得到插值结果 y_1 的误差估计式

$$y-y_1\approx\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\quad(y_2-y_1)$$

可以看出，插值结果 y_1 的误差 $y-y_1$，可以通过两个插值结果的偏差 y_2-y_1 来估计。这种直接用计算结果来估计误差的方法就是误差的事后估计法。

例 3-5　已知 $\sqrt{100}=10$，$\sqrt{121}=11$，估计线性插值法求解 $\sqrt{115}$ 时的误差。

先取 $x_0=100$，$x_1=121$ 作结点，在例 3-2 中，已求得近似值

$$y_1=p_1(115)=10+\frac{11-10}{121-100}\times(115-100)\approx 10.714\ 285\ 7$$

再取 $x_0=100$、$x_2=144$ 作结点，求得近似值

$$y_2=p_1(115)=10+\frac{12-10}{144-100}\times(115-100)\approx 10.681\ 818\ 2$$

代入误差估计式，得到插值结果 y_1 的误差估计

$$y-y_1\approx\frac{115-121}{144-121}\times(10.681\ 818\ 2-10.714\ 285\ 7)\approx 0.008\ 469\ 78$$

如果用这个误差值来修正插值结果 y_1，则可求得新的近似值

$$y+\Delta y=10.714\ 285\ 7+0.008\ 469\ 78=10.722\ 755\ 48$$

可见，这个近似值与抛物插值(例 3-3)的结果是一致的。

3.3　分段插值

分析插值余项公式可知，适当提高插值公式的阶数(增大 n 值)可以改善插值效果，但是，应用阶数太高的插值公式，效果往往会变差。实际插值时，常将插值范围划分为若干段，然后在每个分段上使用低阶插值，如线性插值或抛物插值，这就是分段插值法。

应用分段插值的关键是恰当地挑选插值结点。由余项公式

$$R_n(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

可知，选取的结点 x_i 离插值点 x 越近，插值误差 $|R_n|$ 越小，插值效果越好。

1. 多项式插值的龙格现象

当在一个固定区间上拉格朗日插值逼近一个函数时，使用的结点越多，插值多项式的次数就越高，那么，当插值多项式次数增加时，$p_n(x)$ 是否更加靠近被逼近函数呢？龙格(Runge)给出了一个等距结点插值多项式 $p_n(x)$ 不收敛于 $f(x)$ 的例子。

$$f(x)=\frac{1}{1+25x^2},\quad x\in[-1,1]$$

考虑区间 $[-1,1]$ 上的一个等距划分，分点为

$$x_i=-1+\frac{2i}{n},\quad i=0,1,2,\cdots,n$$

则拉格朗日插值多项式为

$$p_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{1+25x^2}A_i(x)$$

其中,$A_i(x)$,$i=0,1,2,\cdots,n$ 是 n 次拉格朗日插值基函数。

实践证明,7 次多项式在区间[-2,2]之外,已经完全偏离了真实函数,5 次多项式次之,3 次多项式近似程度最好。也就是说,在本例中,次数越高,结果偏离越大。这就是龙格现象:给定一些样本点,对其进行多项式拟合时,有时候多项式次数越高,反而与真实函数的差距越大。

2. 分段线性插值

将线性插值公式

$$y=y_0+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)$$

中的 x_0、x_1 换成 x_{i-1}、x_i;y_0、y_1 换成 y_{i-1}、y_i,则成为

$$y=y_{i-1}+\frac{y_i-y_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}(x-x_{i-1})$$

这就是分段线性插值公式。也可以改写为

$$y=\frac{x-x_i}{x_{i-1}-x_i}y_{i-1}+\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}y_i$$

其中,x 为插值点。

问题在于,如果已知 $y_i=f(x_i)(i=0,1,2,\cdots,n)$,对于给定的插值点 x,应该选取哪两个插值结点来计算,即公式中的下标 i 应该取什么值呢?

(1) 如果能判定插值点 x 位于某两个结点 x_{k-1} 与 x_k 之间,则自然可取这两个结点进行内插,这时候下标 $i=k$。

(2) 如果 x 在 x_0 的左侧,则应取最靠近 x 的 x_0 和 x_1 作为插值结点,这时 $i=1$;若 x 在 x_n 的右侧,则应取最靠近 x_n 的 x_{n-1} 和 x_n 作为插值结点,这时 $i=n$。这两种插值称为外推。

综上所述,下标 i 的确定方法为

$$i=\begin{cases}1, & x\leqslant x_0\\ k, & x_{k-1}<x\leqslant x_k, \quad 1\leqslant k\leqslant n\\ n, & x>x_n\end{cases}$$

这样,插值结点的选择便可由选择结构来控制而自动实现了。

注:分段线性插值也有缺点,因其连线为折线,整体的曲线不够光滑。

例 3-6 已知一批 $y=x^2$ 的函数值,如表 3-5 所示。

表 3-5 一批 $y=x^2$ 的函数值

x_i	-30	-20	-10	0	10	20	30	40	50	60	70
y_i	900	400	100	0	100	400	900	1600	2500	3600	4900

通过分段线性插值法,构造函数 $y=x^2$ 在区间 $x\in[-30,70]$的近似曲线(多段折线)。

解:本例通过执行 Python 程序完成任务。程序运行结果如图 3-4 所示。

附:分段线性插值的 Python 程序。

(−30, 900)　(−20, 400)　(−10, 100)　(0, 0)　(10, 100)　(20, 400)
(30, 900)　(40, 1600)　(50, 2500)　(60, 3600)　(70, 4900)

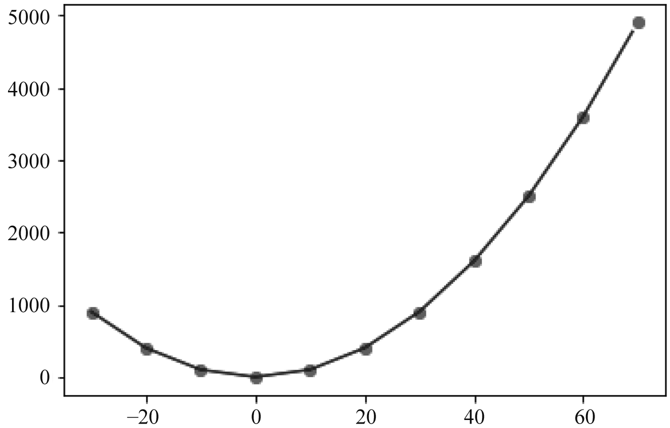

图 3-4　分段线性插值构造的 $y=x^2$ 近似曲线

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def getLine(xn, yn):
    "分段线性插值闭包"
    def line(x):
        index=-1
        for i in range(1,len(xn)):
            "寻找 x 所属区间"
            if x>xn[i]:
                i=i+1
            else:
                index=i-1
                break
        if index==-1:
            return -100
        '''a0=(x-x_i+1)/(x_i-x_i+1)、a1=(x-x_i)/(x_i+1-x_i)
        插值: y=a0*y(i)+a1*y(i+1)'''
        a0=(x-xn[index+1])/float((xn[index]-xn[index+1]))
        a1=(x-xn[index])/float((xn[index+1]-xn[index]))
        return a0*yn[index]+a1*yn[index+1]
    return line
#生成并输出已知函数值列表
xn,yn=[],[]
for i in range(-30,80,10):
    print((i,i**2),end=' ')
    xn.append(i)
    yn.append(i**2)
#分段线性插值
interpolat=getLine(xn, yn)
x=[i for i in range(-30, 70)]
```

```
y=[interpolat(i) for i in x]
#画函数图像
plt.plot(xn, yn, 'ro')
plt.plot(x, y, 'b-')
plt.show()
```

3. 分段抛物插值

如果有较高的计算精度要求，一般采用分段抛物插值。将抛物插值公式中的 x_0、x_1、x_2 换成 x_{i-1}、x_i、x_{i+1}，则成为

$$y=\frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})}y_{i-1}+\frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})}y_i+\frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)}y_{i+1}$$

这就是分段抛物插值公式。

对于给定的插值点 x，究竟选用哪 3 个结点来进行插值计算呢？换句话说，该式中下标 i 应取何值，插值效果才最好呢？

(1) 如果插值点 x 位于某两个结点 x_{k-1} 与 x_k 之间，则第三个结点可取 x_{k-1}，也可取 x_{k+1}，为了提高计算精度，当然应该选靠近 x 的那一点。

(2) 进一步判断 x 究竟偏向区间 (x_{k-1},x_k) 的哪一侧。

- 当 x 靠近 x_{k-1}，即 $|x-x_{k-1}|\leqslant|x-x_k|$ 时，在 x_{k-2} 和 x_{k+1} 中 x_{k-2} 靠近 x，这时应取 x_{k-2} 为第三个插值结点，即令 $i=k-1$；
- 反之，当 x 靠近 x_k，即当 $|x-x_{k-1}|>|x-x_k|$ 时，应取 x_{k+1} 为第三个插值结点，这时令 $i=k$。

与分段线性插值相类似，当 $x\leqslant x_1$ 时，要进行外推，这时令 $i=1$，即取 x_0、x_1、x_2 为插值结点；$x>x_{n-1}$ 时，令 $i=n-1$，即取 x_{n-2}、x_{n-1}、x_n 为插值结点。

按上述分析，下标 i 的取值应为

$$i=\begin{cases}1, & x\leqslant x_1\\ k-1, & x_{k-1}<x\leqslant x_k \text{ 且 } |x-x_{k-1}|\leqslant|x-x_k| \quad (k=2,3,\cdots,n-1)\\ k, & x_{k-1}<x\leqslant x_k \text{ 且 } |x-x_{k-1}|>|x-x_k| \quad (k=2,3,\cdots,n-1)\\ n-1, & x>x_{n-1}\end{cases}$$

3.4 差商、差分与牛顿插值

应用拉格朗日插值法对 $y=f(x)$ 插值时，如果阶数不同，则每一项都必须重新计算。这样，进行高阶插值时，就不能利用低阶插值的结果而要重复计算。牛顿插值法解决了这个问题。牛顿插值多项式来自差商，其意义在于具有“承袭性”。即在插值过程中，增加的一项可以从上一项推算出来。

3.4.1 差商与拉格朗日插值公式

差商即均差。k 阶差商可表示为 $f(x_0),f(x_1),\cdots,f(x_k)$ 的线性组合。一次和二次插值的拉格朗日公式可以用差商形式表示。为了建立具有承袭性的插值公式，有必要引进差商的一般概念并研究其基本性质。

1. 差商的概念与性质

一阶差商是函数值之差与自变量之差之比

$$f[x_0,x_k]=\frac{f(x_k)-f(x_0)}{x_k-x_0}$$

可以作为一阶导数的近似值。二阶差商是一阶差商的差商

$$f[x_0,x_1,x_k]=\frac{f[x_1,x_k]-f[x_0,x_k]}{x_k-x_0}$$

一般地,有了 $k-1$ 阶差商,即可递推地定义 k 阶差商

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\frac{f[x_1,\cdots,x_{k-1},x_k]-f[x_0,x_1,\cdots,x_{k-1}]}{x_k-x_0}$$

利用差商的递推定义,可以构造如表 3-6 所示的差商表来计算差商。

表 3-6　差商表

x_i	$f(x_i)$	一 阶 差 商	二 阶 差 商	三 阶 差 商	四 阶 差 商
x_0	$\underline{f(x_0)}$				
x_1	$f(x_1)$	$\underline{f[x_0,x_1]}$			
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1,x_2]$	$\underline{f[x_0,x_1,x_2]}$		
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	$\underline{f[x_0,x_1,x_2,x_3]}$	
x_4	$f(x_4)$	$f[x_3,x_4]$	$f[x_2,x_3,x_4]$	$f[x_1,x_2,x_3,x_4]$	$\underline{f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

下面是将要用到的两个 n 阶差商的基本性质。

(1) n 阶差商 $f[x_0,x_1,\cdots,x_n]$是由函数值 $f(x_0),f(x_1),\cdots,f(x_n)$线性组合而成的

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\sum_{k=0}^{n}\frac{f(x_k)}{\prod\limits_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n}(x_k-x_j)}$$

(2) 差商具有对称性,即在 n 阶差商 $f[x_0,x_1,\cdots,x_n]$中任意调换两个结点的顺序,其值不变。例如

$$f[x_0,x_1]=f[x_1,x_0]$$
$$f[x_0,x_1,x_2]=f[x_1,x_0,x_2]=f[x_0,x_2,x_1]$$

2. 线性插值公式的差商形式

如果将

$$p_0(x)=f(x_0)$$

当作零次插值多项式,考察线性插值公式

$$p_1(x)=f(x_0)+\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x-x_0)$$

可以理解为:$p_1(x)$是由 $p_0(x)$修正得到的。其中修正项$(x-x_0)$的系数

$$c_1=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

它实际上是函数增量与自变量增量之比,也就是函数 $y=f(x)$ 在相应区间 (x_0,x_1) 上的平均变化率,称这为 $f(x)$ 的一阶差商,并记为

$$f[x_0,x_1]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

于是线性插值公式成为

$$p_1(x)=f(x_0)+(x-x_0)f[x_0,x_1]$$

3. 抛物插值公式的差商形式

可以修正 $p_1(x)$,得到抛物插值公式。

由于 $p_2(x)$ 通过点 $(x_0,f(x_0))$、$(x_1,f(x_1))$ 及 $(x_2,f(x_2))$,故可将 $p_2(x)$ 写成

$$p_2(x)=p_1(x)+c_2(x-x_0)(x-x_1)$$

也就是

$$p_2(x)=f(x_0)+\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x-x_0)+c_2(x-x_0)(x-x_1)$$

该式中,c_2 是修正项的系数。显然,因为

$$p_2(x_0)=f(x_0),\quad p_2(x_1)=f(x_1),\quad p_2(x_2)=f(x_2)$$

并将 $x=x_2$ 代入上式,可得

$$p_2(x_2)=f(x_0)+\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x_1-x_0)+c_2(x_2-x_0)(x_2-x_1)=f(x_2)$$

改写为

$$c_2=\frac{\dfrac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}-\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2-x_1}$$

这个系数实际上是一阶差商的差商,用

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_0,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_1}$$

表示,称为二阶差商。

这样,抛物插值公式就可以表示为

$$p_2(x)=f(x_0)+(x-x_0)f[x_0,x_1]+(x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2]$$

3.4.2 牛顿插值

根据差商定义,可将一次与二次差商形式的拉格朗日插值公式推广到 $n+1$ 个插值结点的情形,同时还可得到插值多项式的余项。

1. 牛顿插值公式

在 $n+1$ 个插值结点 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 之外,再给一个结点 $x\neq x_i(i=1,2,\cdots,n)$,则由差商定义得

$$\begin{aligned}
&f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f[x,x_0]\\
&f[x,x_0]=f[x_0,x_1]+(x-x_1)f[x,x_0,x_1]\\
&f[x,x_0,x_1]=f[x_0,x_1,x_2]+(x-x_2)f[x,x_0,x_1,x_2]\\
&\qquad\vdots
\end{aligned}$$

$$f[x,x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}]=f[x_0,x_1,\cdots,x_n]+(x-x_n)f[x,x_0,x_1,\cdots,x_n]$$

将其中第二式 $f[x,x_0]$代入第一式 $f(x)$，得到

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f[x_0,x_1]+(x-x_0)(x-x_1)f[x,x_0,x_1]$$

也就是

$$f(x)=p_1(x)+R_1(x)$$

其中，$p_1(x)$就是差商形式的一次(线性)插值多项式，而 $R_1(x)$为线性插值余项，可表示为

$$R_1(x)=f(x)-p_1(x)=(x-x_0)(x-x_1)f[x,x_0,x_1]$$

类似地，将第三式代入，则有

$$\begin{aligned}f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f[x_0,x_1]+\\(x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2]+\\(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)f[x,x_0,x_1,x_2]\end{aligned}$$

也就是

$$f(x)=p_2(x)+R_2(x)$$

其中，$p_2(x)$就是差商形式的二次(抛物)插值多项式，而 $R_2(x)$为线性插值余项，可表示为

$$R_2(x)=f(x)-p_2(x)=(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)f[x,x_0,x_1,x_2]$$

至此，可以推断出一般规律：每增加一个插值点，只要将高一阶差商代入其前一公式。以此类推，即可得到

$$\begin{aligned}f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f[x_0,x_1]+\\(x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2]+\cdots+\\(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})f[x_0,x_1,\cdots,x_n]+\\(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)f[x,x_0,x_1,\cdots,x_n]\end{aligned}$$

记该式中最后一项为 $R_n(x)$，即

$$R_n(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)f[x,x_0,x_1,\cdots,x_n]$$

再记该式中前 $n+1$ 项为 $p_n(x)$，即(差商形式的插值公式)

$$\begin{aligned}p_n(x)=f(x_0)+(x-x_0)f[x_0,x_1]+\\(x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2]+\cdots+\\(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})f[x_0,x_1,\cdots,x_n]\end{aligned}$$

则有

$$f(x)=p_n(x)+R_n(x)$$

注意到插值余项 $R_n(x_i)=0(i=1,2,\cdots,n)$，故构造而成 n 次多项 $p_n(x)$式必然满足

$$p_n(x_i)=f(x_i),\quad i=1,2,\cdots,n$$

可见，$p_n(x)$就是符合要求的插值多项式。这种差商形式的插值公式称为牛顿插值公式。

2. 牛顿插值的计算

牛顿插值公式具有承袭性，其优点是计算工作量小，特别是当提高插值阶数时，拉格朗日插值公式中每项都必须重新计算，而牛顿插值公式中却只需计算最后一项，将此项值累加到前一阶插值结果上即可。牛顿插值公式可用于求非等距结点的函数值。

应用牛顿插值法，大体上按以下步骤操作。

S1　计算各阶差商值，即构造差商表。

S2　按牛顿插值公式计算插值结果。

S3　比较插值结果，判断：需要高一阶插值吗？是则转 S2。

S4　输出插值结果。

S5　结束。

例 3-7　列表函数 $f(x)=\lg(x)$的值如表 3-7 所示，用牛顿插值法求 lg4.01 的值。

表 3-7　lg$x$ 函数表

x	4.0002	4.0104	4.0233	4.0294
$f(x)$	0.6020817	0.6031877	0.6045824	0.6052404

解：已知 $x_0=4.0002$，$x_1=4.0104$，$x_2=4.0233$，$x_3=4.0294$。

根据给定的函数表作差商表，如表 3-8 所示。

表 3-8　求 lg4.01 的差商表

x	$f(x)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商
4.0002	0.6020817			
4.0104	0.6031877	0.108431		
4.0233	0.6045824	0.108116	−0.013636	
4.0294	0.6052404	0.107869	−0.013000	0.021781

代入牛顿插值公式，求得

$$\begin{aligned}\lg 4.01 &= f(x_0)+(x-x_0)f[x_0,x_1]+\\&\quad (x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2]+\\&\quad (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)f[x_0,x_1,x_2,x_3]\\&=0.6020817+(4.01-4.0002)\times 0.108431+\\&\quad (4.01-4.0002)\times(4.01-4.0104)\times(-0.013636)+\\&\quad (4.01-4.0002)\times(4.01-4.0104)\times(4.01-4.0294)\times 0.021781\\&=0.6031443\end{aligned}$$

注：插值多项式 $p_n(x)$的系数就是差商表斜线上的各阶差商。如果需要更高阶的差商，则可按差商定义进行计算，将表向下向右延伸，当给定 x 而要计算 $p_n(x)$的值时，可将 $x-x_i$ 的值列在表右端，更便于计算。

附　牛顿插值的 Python 程序。

```
import numpy as np
def newton(xi,fi,x):
    #牛顿插值：计算各阶差商
    n=len(xi)
    c=np.zeros((n,n))
    for i in range(n):
```

```
            c[i,0]=fi[i]
        for i in range(1,n):
            for j in range(i,n):
                c[j,i]=(c[j,i-1]-c[j-1,i-1])/(xi[j]-xi[j-i])
        #牛顿插值：计算插值结果
        s=fi[0]
        for i in range(1,n):
            t=1
            for j in range(0,i):
                t*=(x-xi[j])
            s+=c[i,i]*t
        return s
    if __name__=='__main__':
        #已知结点及其函数值
        xKnown=np.array([4.0002, 4.0104, 4.0233, 4.0294])
        fKnown=np.array([0.6020817, 0.6031877, 0.6045824, 0.6052404])
        #新结点求值
        xNew=4.01
        fNew=newton(xKnown, fKnown, xNew)
        print(fNew)
```

程序的运行结果如下：

```
0.6031443812538274
```

3. 牛顿插值公式的余项

对于差商表示的插值余项

$$R_n(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)f[x,x_0,x_1,\cdots,x_n]$$

可通过差商与导数的关系，推导出用导数表示的插值余项。

根据微分中值定理，在(x_0,x_1)区间内存在一点ξ，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=f[x_0,x_1]$$

从该式得到差商与一阶导数的关系，再推广到n阶导数，则有

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

其中，ξ为插值区间内一点。这个公式的正确性可用洛尔定理证明。

类似地，只要再增加一个点$x\neq x_i(i=1,2,\cdots,n)$，即可将插值余项$R_n(x)$中的$n+1$阶差商，用$n+1$阶导数表示为

$$f[x,x_0,x_1,\cdots,x_n]=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

其中，ξ、x均为插值区间内的点，且ξ依赖于x，即当x变化时ξ也随之变化。将此结果代入差商表示的插值余项式，即可得到用导数表示的插值余项

$$R_n(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

改写为

$$R_n(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

这就是牛顿插值的余项公式，与拉格朗日插值余项公式完全一样。

由插值多项式的唯一性可知，牛顿插值多项式与拉格朗日插值多项式是相等的，它们的余项也是相等的。故可得到这样的一个等式关系。

与拉格朗日插值多项式相比，牛顿插值多项式更具有一般性。其误差项对于仅由离散点给出的 $f(x)$ 或者导数不存在的 $f(x)$ 仍然适用，从而应用更为广泛。

3.4.3 差分、差商及导数的关系

在实际问题中，列表函数的自变量往往按等距离的点给出。这种情况下，函数插值就要用差分而不是差商了。也就是说，当所有插值结点都是等距离时，可将插值公式表示为简单的差分形式。

1. 向前差分

设函数 $f(x)$ 在等距结点 $x=x_0+ih(i=1,2,\cdots,n)$ 上的值为 $y_0=f(x_i)$，则 $f(x)$ 在每个小区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 上的改变量 $y_{i+1}-y_i$，称为 $f(x)$ 在点 x_i 上的一阶差分或向前差分。记作

$$\Delta y_i=y_{i+1}-y_i$$

对一阶差分再取一次差分就是二阶差分，记为

$$\begin{aligned}\Delta^2 y_i&=\Delta y_{i+1}-\Delta y_i\\&=(y_{i+2}-y_{i+1})-(y_{i+1}-y_i)\\&=y_{i+2}-2y_{i+1}+y\end{aligned}$$

一般地，n 阶差分为 $n-1$ 阶差分的差分，即

$$\Delta^n y_i=\Delta^{n-1}y_{i+1}-\Delta^{n-1}y_i$$

依据差分逐层递推的特点，计算向前差分时，用如表 3-9 所示向前差分表(给出四阶差分)较为方便。

表 3-9 向前差分表

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$		
x_3	y_3	Δy_3			
x_4	y_4				

2. 向后差分

与向前差分相仿，对于函数 $f(x)$，将每个等长小区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 上的改变量 $f(x_i)-f(x_{i-1})$ 称为 $f(x)$ 在点 x_i 处的一阶向后差分。记作

$$\nabla y_i=y_i-y_{i-1}$$

类似地，二阶差分为一阶差分的差分

$$\nabla^2 y_i=\nabla y_i-\nabla y_{i-1}$$