第 章 集合论

数学历史上出现过**三次危机**：

第一次数学危机：发现了“无理数”。毕达哥拉斯是公元前五世纪古希腊的著名数学家与哲学家，创立了毕达哥拉斯学派，提出了著名命题“万物皆数”，该数均可表示成整数或整数之比。毕达哥拉斯的一个弟子发现边长为1的正方形的对角线是不能用任何比例来表示的，对于毕氏学派来说，这是天大的罪过，结果他被扔进海里喂了鲨鱼。

第二次数学危机：关于微积分。在牛顿和莱布尼茨发现微积分的年代里，总是有人跟他们作对，其中有一位爱尔兰的大主教贝克莱就讥讽牛顿的无穷小量是“已死量的幽灵”。经过柯西(微积分收官人)用极限的方法定义了无穷小量，微积分理论得以发展和完善，从而使数学大厦变得更加辉煌美丽。

第三次数学危机：康托尔创立了著名的集合论。在集合论刚产生时，曾遭到许多人的猛烈攻击，但不久这一开创性成果就为广大数学家所接受了，并且获得广泛而高度的赞誉。“一切数学成果可建立在集合论基础上”这一发现使数学家们为之陶醉。1903年，一个震惊数学界的消息传出：集合论是有漏洞的！这就是英国数学家罗素提出的著名的罗素悖论。危机产生后，数学家纷纷提出自己的解决方案，人们希望能够对康托尔的集合论进行改造。1908年，策梅洛在自己这一原则基础上提出第一个公理化集合论体系，后来经其他数学家改进，称为ZF系统。这一公理化集合系统很大程度上弥补了康托尔朴素集合论的缺陷。除ZF系统外，集合论的公理系统还有多种，如冯·诺依曼等人提出的NBG系统等。公理化集合系统成功排除了集合论中出现的悖论。

3.1 集合与表示

前两章我们学习了命题公式及谓词公式，其中谓词公式是对命题公式的一个量上的约束，在约束时，提供了论域。本章开始，我们学习如何限定这个论域，或者称之为集合。下面我们给出集合的定义：

定义3-1(集合)　若一类**互异事物**具有某**一组规定的属性**A，那么这类事物称之为一个具有属性A的集合S，记作$S=\{e|V(e,A)\}$，其中每一个满足属性的e称之为集合**元素**，简单谓词公式$V(e,A)$表示的是e具有属性A。

定义3-1中需要注意的是A是一组规定的属性，它是将至少一个属性可以通过合取

或者析取形成的表达式，或者就是一个属性。同时也发现集合的定义中并没有给定元素的顺序，因而集合内元素是无序的，而且，定义中规定元素必须互异，所以集合中的元素是唯一的。

如果一个集合的元素数量有限，我们称它为有限集合，否则称为无限集合。集合可以用两种方式表示：**枚举方式和属性方式**。定义 3-1 给的就是属性方式。当然，如果集合是有限集合，就可以使用枚举方式①。例如，我们可以把一年中的月份枚举表示成$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$或者属性表示成$\{m \mid m\in \mathbf{Z}^+ \wedge 1\leqslant m\leqslant 12\}$，具体选择使用哪种表示方法看使用需要。

日常生活中的集合与数学中定义的集合在理解上有一定的细微差别，比如中学阶段学习的：自然数全部是正整数或表示成 $\mathbf{N}=\{x \mid x\in \mathbf{Z}^+\}$，这里包含了同时具有正负的零。但是我们有时把这样的一类看似没有任何同一属性的也称之为集合，例如：$\{a,-1,\pm 0,\ll,@\}$这个集合被称之为**目标选择集合**，即其中的事物均具有被选择进这个集合中的属性。因而定义 3-1 也可以应用到这个集合上，只是属性变成了随意被选择的。当然集合内还可以嵌套集合，例如$\{1,2,\{3,4\}\}$，还有一个集合是比较特别的，那就是空集，记作$\varnothing$，我们给出它的定义：

定义 3-2（空集） 若集合内剔除所有元素得到的集合称为空集，记作$\varnothing=\{\}$。

由于$\varnothing$是一个**集合**而不是一个元素，因而对于集合内嵌套空集$\{\varnothing\}\neq\varnothing$，这是因为$\{\varnothing\}$相当于$\{\{\}\}$。我们可以把空集想象成里面有一个属于空集的特殊元素，这个特殊元素是组成集合的基本元素，它无法剔除，我们把它称为**集合基底**。

下面我们定义集合的相等与从属关系：

定义 3-3（集合相等） 如果两个集合 A，B 相等，当且仅当 A，B 里的元素全部相等，记作 $A=B$；若两个集合中存在不同的元素，那么称这两个集合不等，记作 $A\neq B$。

定义 3-4（元素从属） 若 x 是集合 S 里的任一元素，那么称元素 x 属于集合 S，记作 $x\in S$，读作 x 属于集合 S，或读作 x 取自集合 S；若 x 不属于集合 S，那么记作 $x\notin S$，读作 x 不属于集合 S，或读作 x 不是取自集合 S。

定义 3-5（集合从属） 若集合 A 的任意元素 x 也是集合 B 的元素，那么称集合 A 为集合 B 的子集，记作 $A\subseteq B$，读作集合 A **包含于**集合 B，或读作集合 B **包含**集合 A，或者集合 A 是集合 B 的**子集**；若此时 $A\neq B$ 且 $A\subseteq B$ 那么称集合 A 是集合 B 的**真子集**，记作 $A\subset B$。

集合还有这样的性质：

（传递性）若集合 A，B，C，它们满足 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$ 那么 $A\subseteq C$。

（自反性）集合 A 对其自身有 $A\subseteq A$。

定理 3-1（空集从属） 对于任意一个集合 A，空集$\varnothing\subseteq A$。

对于空集从属的定理 3-1，我们可以从空集的定义中看出，对于一个集合 A 可以剔除其中的所有元素得到空集，自然我们可以认为空集中那个**不存在的集合基底元素**既属于空集也属于任何其他集合。

① 枚举是指将集合中的元素一个个列举出来。

定理 3-2(**集合等价的充要条件**) 若两个集合 A,B 相等,当且仅当 $A\subseteq B\wedge B\subseteq A$。

定义 3-6(**全集**) 若给定一组限定属性 A,由**所有**满足这组属性的元素所组成的集合称为条件 A 下的全集 E,简称全集 E,或论域 E。

需要注意的是,全集的定义与集合的定义有相似之处,区别在于定义 3-6 将**所有**满足条件的元素**都包含**在集合内,而定义 3-1 只是指出满足条件的元素组成的集合。

定义 3-7(**幂集**) 给定集合 S,由 S 的**所有子集**为元素组成的集合称为集合 S 的幂集,记作 $P(S)$。

例如,集合 $S=\{a,b,c\}$,那么它的幂集:

$$P(S)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{b,c\},\{c,a\},\{a,b,c\}\}$$

这里需要关注两点:第一,空集符号$\varnothing$与其他集合性质一样是一个集合,且为幂集的一个元素;第二,在实际生成幂集时可以按照先选一个,再选两个,等等依次选择。

定理 3-3(**幂集中元素个数**) 有限集合 A 包含 n 个元素,那么幂集 $P(A)$中包含的元素个数为 2^n。

证明 根据幂集的定义,从集合 A 的 n 个元素中挑选出 k 个不同的元素组成一个幂集中的元素,显然空集单独一个,那么从 A 挑选出 k 个不同元素共

$$\mathrm{C}_n^k=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

种不同结果,那么幂集的元素个数可以表示成

$$N=1+\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^2+\cdots+\mathrm{C}_n^k+\cdots+\mathrm{C}_n^n=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k$$

根据二项式定理:

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k x^k y^{n-k}$$

我们令 $x=y=1$,那么得到

$$N=(1+1)^n=2^n$$

证毕。

3.2 集合运算

作为一个集合,如果给定一个研究域,或者给定一个论域,可以在这个论域内进行有限的加减等集合运算。这种集合的运算是按照一定的规则进行的,在介绍集合运算前,先介绍文氏图①。

文氏图是在平面图形上的**论域内**对所研究的集合进行标识,其中**阴影部分**是所需要的区域,每个集合用**闭曲线表示**,独立元素用**点表示**。例如图 3-1 所示,阴影部分为所研

① J.Venn(1834—1923)英国逻辑学家,于 1881 年在《符号逻辑》一书中,首先使用相交区域的图解来说明类与类之间的关系。后来人们以他的名字命名这种用图形表示集合间的关系和集合的基本运算的方法,称为文氏图(Venn Diagram)。

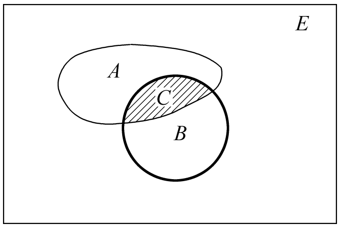


图 3-1　集合的交

究的部分，这表示了一个交集，其中 E 是研究的论域，集合 A,B 的公共部分。一般情况下论域 E 不需要特别指明，默认出现的集合都满足随机选择属性的要求。

下面开始定义集合的基本运算：

定义 3-8（**交集**）　E 内给定两个集合 A,B，那么由 A,B 共同元素组成的集合称之为 A,B 的交集，记作 $A\cap B$①，属性定义为 $S=A\cap B=\{x\mid x\in A\wedge x\in B\}$。

文氏图如图 3-1 所示，其中 C 就是 A,B 的交集。

【例 3-1】　计算集合的交集 S，其中 $A=\{a,b,3,6,d,0\}$，$B=\{b,h,=,s,0\}$。

解　选择公共的元素，那么 $S=A\cap B=\{b,0\}$。

【例 3-2】　求证，当 $A\subseteq B$ 时，有 $A\cap S\subseteq B\cap S$。

证明　由于 S 未给定，我们按照默认，S 与 A,B 在同一个选择属性集合里，那么，设元素 $x\in A$，必然由 $A\subseteq B\Rightarrow x\in B$，那么也必然存在 $x\in A\cap S$，这个式子等价于$(\exists x)(x\in A\wedge x\in S)$，可以得到 $\exists x(x\in S)$，由 $x\in B$ 与 $\exists x(x\in S)$ 共同得到 $x\in B\cap S$，那么可以根据集合从属的定义得到 $A\cap S\subseteq B\cap S$。

证毕。

可以利用前面所学得到交的这些运算性质：

(1) $A\subseteq B\Rightarrow A\cap B=A$　　(2) $A\cap B=B\cap A$

(3) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$　　(4) $A\cap B\subseteq A$，$A\cap B\subseteq B$

当有很多个集合交时，可以采用一种符号来表示。当集合 P 表示

$$P=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$$

那么可以使用符号表示

$$P=\bigcap_{i=1}^{n}A_i$$

定义 3-9（**并集**）　E 内给定两个集合 A,B，那么由 A,B 的全部元素组成的集合称之为 A,B 的并集或 A,B 的和，记作 $A\cup B$，属性定义为 $S=A\cup B=\{x\mid x\in A\vee x\in B\}$。

文氏图如图 3-2 所示，其中公共阴影就是 A,B 的并集。

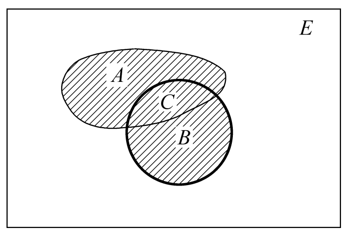


图 3-2　集合的并

【例 3-3】　计算集合的并集 S，其中 $A=\{a,b,3,6,d,0\}$，$B=\{b,h,=,s,0\}$。

解　选择全部的元素，并去除重复的，那么 $S=A\cup B=\{a,b,3,6,d,0,h,=,s,\}$。

并的运算性质：

(1) $A\subseteq B\Rightarrow A\cup B=B$

(2) $A\cup B=B\cup A$

① 部分计算机专业程序设计教材和概率论上通常将 $A\cap B\Leftrightarrow AB$，$A\cup B\Leftrightarrow A+B$，$A-B\Leftrightarrow A\bar{B}$。

(3) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

(4) $A\subseteq A\cup B, B\subseteq A\cup B$

当有很多个集合并时，我们可以采用一种符号来表示。当集合 P 表示

$$P=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$$

那么我们可以使用符号表示

$$P=\bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

定理 3-4（集合的分配律） 设 E 下的三个集合 A,B,C，那么有

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$
$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

我们只证其中一个，另外一个可以自行推导。

证明 设 $x\in A\cup(B\cap C)$，那么 $x\in A\vee x\in B\cap C\Leftrightarrow x\in A\vee(x\in B\wedge x\in C)$。

根据命题逻辑的分配律有

$$\begin{aligned}x\in A\cup(B\cap C)&\Leftrightarrow(x\in A\vee x\in B)\wedge(x\in A\vee x\in C)\\&\Leftrightarrow x\in(A\vee B)\wedge x\in(A\vee C)\\&\Leftrightarrow x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)\end{aligned}$$

证毕。

同样我们还可以得到

(1) $A\cup(A\cap B)=A$　　(2) $A\cap(A\cup B)=A$

定理 3-5（从属判定） 若要得到 $A\subseteq B$，当且仅当 $A\cup B=B$ 或 $A\cap B=A$。

定义 3-10（相对补集） 设 E 下的任意集合 A,B，将所有属于集合 A 但不属于集合 B 的元素组成的新的集合 S 称为 B 对于 A 的相对补集，或 B 对于 A 的差集，记作 $S=A-B$，属性定义为 $S=\{x\mid x\in A\wedge x\notin B\}$。

文氏图如图 3-3 所示，其中公共阴影就是 $A-B$。

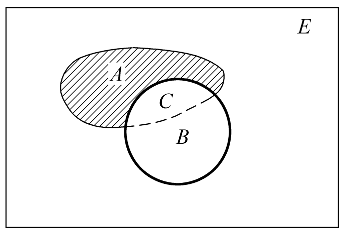


图 3-3　集合的相对差

定义 3-11（绝对补集） 设 E 下的任意集合 A，将所有不属于集合 A 但属于集合 E 的元素组成的新的集合称为 A 的绝对补集，记作 $\overline{A}$，属性定义为 $\overline{A}=\{x\mid x\notin A\wedge x\in E\}$。

显然定义 3-10 与定义 3-11 的差别在于范围的选取，相对差相对于 A，绝对补相对于全集 E。

根据它的定义，我们可以得到这些补集公式：

(1) $\overline{\overline{A}}=A$　　(2) $\overline{\varnothing}=E$　　(3) $A\cup\overline{A}=E$　　(4) $A\cap\overline{A}=\varnothing$

(5) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$　　(6) $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$　　(7) $A-B=A\cap\overline{B}$

(8) $A-B=A-(A\cap B)$　　(9) $A\cap(B-C)=A\cap B-A\cap C$

定理 3-6（补的逆从属） 若 E 下任意两个集合 A,B，且 $A\subseteq B$，那么 $\overline{B}\subseteq\overline{A}$，且还有 $(B-A)\cup A=B$。

证明 第一个结论部分。设 $x\in A$，已知 $A\subseteq B$，那么 $x\in B$，当 $x\notin B$ 必然在 A 中也找不到 x，或 $x\notin A$，那么显然在补集较小的 $\overline{B}$ 中存在 $x\in\overline{B}$，则在范围更大的 $\overline{A}$，也能有

$x \in \overline{A}$，因而得证 $A \subseteq B$。

第二个结论部分。

$$(B-A)\cup A \Leftrightarrow (B\cap \overline{A})\cup A \Leftrightarrow (B\cup A)\cap(\overline{A}\cup A)\Leftrightarrow B\cup A$$

由于 $A\subseteq B$，所以 $B\cup A=B$。

证毕。

定义 3-12（集合的对称差或异或） E 下任意两个集合 A，B，那么 A，B 的对称差为集合 S，其中 S 中的元素或属于 A，或属于 B，但不同时属于 A 和 B，记作 $S=A\oplus B$，属性定义为 $A\oplus B=\{x \mid x\in A \oplus x\in B\}$。

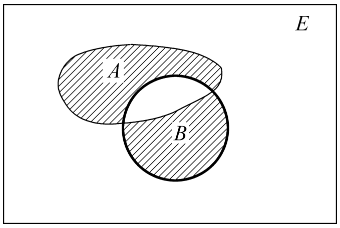


图 3-4　集合的对称差

文氏图如图 3-4 所示，其中阴影部分就是 $A\oplus B$。

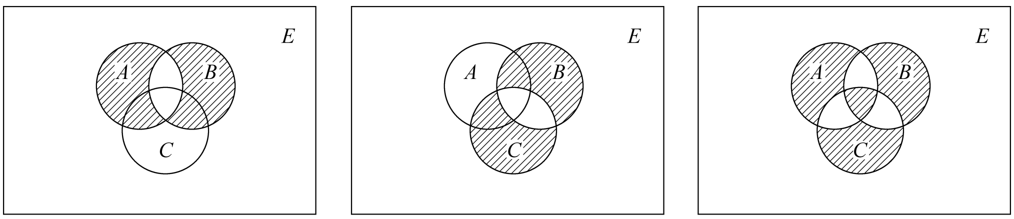
对称差有很多可以推导的公式：

(1) $A\oplus B=B\oplus A$　(2) $A\oplus\varnothing=A$　(3) $A\oplus A=\varnothing$

(4) $A\oplus B=(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)$

(5) $(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$

（对称差奇偶步差应用）对称差还有一个在计算机作图软件上常用的功能，从直观上来说，如果一个共同的区域被重叠奇数次，那么最终的集合包含该区域，如果是重叠偶数次，那么最终的集合不包含该区域，下面用图 3-5 说明。



$A\oplus B$　　$B\oplus C$　　$A\oplus(B\oplus C)$

图 3-5　对称差的奇偶步差应用

【例 3-4】 证明表达式 $A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$成立。

证明

$$(A\cap B)\oplus(A\cap C)=((A\cap B)\cap\overline{(A\cap C)})\cup(\overline{(A\cap B)}\cap(A\cap C))$$

$$=((A\cap B)\cap(\overline{A}\cup\overline{C}))\cup((\overline{A}\cup\overline{B})\cap(A\cap C))$$

$$=((A\cap B\cap\overline{A})\cup(A\cap B\cap\overline{C}))\cup((A\cap C\cap\overline{A})\cup(A\cap C\cap\overline{B}))$$

$$=(A\cap B\cap\overline{C})\cup(A\cap C\cap\overline{B})=A\cap((B\cap\overline{C})\cup(C\cap\overline{B}))=A\cap(B\oplus C)$$

证毕。

在集合的运算中还有一类特殊的集合，它们的元素均为一对有序序列，通常这个序列中包含两个元素，例如表示坐标的$\langle x,y\rangle$，$\langle 3,4\rangle$，它们是有序的，调换前后顺序会表达不同的意义，所以我们通常把有两个量的序列称之为**序偶**，或者**序对**。

定义 3-13（序偶） 当用两个量 x，y 来表示有序关系时，我们把这种关系称之为序偶，记作$\langle x,y\rangle$，其中 x 称之为第一元素，y 称之为第二元素。

定义 3-14(序偶相等) 若序偶$\langle x,y\rangle$与$\langle u,v\rangle$相等,当且仅当 $x=u,y=v$。

序偶描述了两个量之间的关系,我们现在把它进行扩展。

定义 3-15(n 元组) 若对有序序列 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 将最后一个元素作为第二元素,将剩余的有序序列作为第一元素,这样再对第一元素重复划分得到的序偶称之为 n 元组。记作$\langle\langle\langle\cdots\langle x_1,x_2\rangle,x_3\rangle\cdots,x_{n-1}\rangle,x_n\rangle$,或简写为$\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle$,其中第 i 个元素 x_i 称之为 n 元组的第 i 个**坐标**,n 元组本身称之为 n **维坐标**。

举例来说,一个三元组可以表示成$\langle x_1,x_2,x_3\rangle$或$\langle\langle x_1,x_2\rangle,x_3\rangle$,四元组可以表示成$\langle x_1,x_2,x_3,x_4\rangle$或$\langle\langle\langle x_1,x_2\rangle,x_3\rangle,x_4\rangle$或$\langle\langle x_1,x_2,x_3\rangle,x_4\rangle$,由于我们限定了第一元素和第二元素的大小,所以$\langle x_1,\langle x_2,x_3\rangle\rangle$不是三元组。

对于二元组的序偶,我们称之为二维坐标,由于二维坐标的序偶$\langle x_1,x_2\rangle$的第一元素可以来自任意给定的集合 A,第二元素来自集合 B,这样就可以定义一个概念。

定义 3-16(笛卡儿积①) 给定任意两个集合 A 和 B,若序偶的第一元素来自集合 A,第二元素来自集合 B,将所有满足条件的序偶组成的集合 S 称之为集合 A 和 B 的笛卡儿积或直积,记作 $S=A\times B$,属性定义为 $A\times B=\{\langle x,y\rangle\mid x\in A\wedge y\in B\}$。

【例 3-5】 若 $A=\{a,b\}$,$B=\{1,2,3\}$,求 $A\times B$,$B\times A$,$A\times A$,$(A\times B)\cap(B\times A)$。

解 笛卡儿积计算时,直接选定其中一个,然后从第二个集合中依次挑选组成

$$A\times B=\{\langle a,1\rangle,\langle a,2\rangle,\langle a,3\rangle,\langle b,1\rangle,\langle b,2\rangle,\langle b,3\rangle\}$$
$$B\times A=\{\langle 1,a\rangle,\langle 1,b\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 3,a\rangle,\langle 3,b\rangle\}$$
$$A\times A=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,b\rangle\}$$

显然$(A\times B)\cap(B\times A)=\varnothing$。

我们约定若 $A=\varnothing$或 $B=\varnothing$,那么 $A\times B=\varnothing$,另外,我们还可以知道

$$(A\times B)\times C=\{\langle x,y,z\rangle\mid x\in A\wedge y\in B\wedge z\in C\}$$
$$A\times(B\times C)=\{\langle x,\langle y,z\rangle\rangle\mid x\in A\wedge y\in B\wedge z\in C\}$$

显然$(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C)$,因为后一项并不是序偶。

(**直积的几个等式**)设任意三个集合 A,B,C,那么存在

(1) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$ (2) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

(3) $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$ (4) $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$

我们对其中的第三个进行证明,其余读者可以参照证明。

证明 若

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle\in(A\cup B)\times C&\Leftrightarrow x\in(A\cup B)\wedge y\in C\Leftrightarrow(x\in A\vee x\in B)\wedge(y\in C)\\&\Leftrightarrow(x\in A\wedge y\in C)\vee(x\in B\wedge y\in C)\\&\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in A\times C\vee\langle x,y\rangle\in B\times C\\&\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in((A\times C)\cup(B\times C))\end{aligned}$$

证毕。

① 笛卡儿(René Descartes,1596—1650)法国著名的哲学家、数学家、物理学家,解析几何学奠基人之一。在巴黎安葬民族先贤的圣日耳曼圣心堂中,庄重的大理石墓碑上镌刻着“笛卡儿,欧洲文艺复兴以来,第一个为人类争取并保证理性权利的人”。

定理 3-7（**扩展与缩小等价性**） 若 $C\neq\varnothing$，那么

$$A\subseteq B\Leftrightarrow A\times C\subseteq B\times C\Leftrightarrow C\times A\subseteq C\times B$$

定理 3-7 给出的是等价特性，并不是直积结果相同，它是一种互相蕴涵的表达式。证明可以直接由直积的前后有序性得到，下面给出证明。

证明 （1）证明 $A\subseteq B$ 可以得到

$$(A\times C)\subseteq(B\times C)$$

若 $y\in C$，$C\neq\varnothing$且 $x\in A\subseteq B\Rightarrow x\in B$，那么

$$\begin{aligned}&\langle x,y\rangle\in(A\times C)\\ \Leftrightarrow&(x\in A\wedge y\in C)\subseteq(x\in B\wedge y\in C)\\ \Leftrightarrow&(A\times C)\subseteq(B\times C)\end{aligned}$$

（2）证明反过程，若已知 $y\in C$，$C\neq\varnothing$，由$(A\times C)\subseteq(B\times C)$得到

$$\begin{aligned}&\langle x,y\rangle\in(A\times C)\subseteq\langle x,y\rangle\in(B\times C)\\ \Leftrightarrow&(x\in A\wedge y\in C)\subseteq(x\in B\wedge y\in C)\\ \Leftrightarrow&[(x\in A)\subseteq(x\in B)]\wedge y\in C\\ \Leftrightarrow&[(x\in A)\subseteq(x\in B)]\wedge \mathrm{T}\\ \Leftrightarrow&A\subseteq B\end{aligned}$$

证毕。

其中第三步中由于已知 $y\in C$，$C\neq\varnothing$必定为真，那么就转化为 T，定理的第二部分可以用同样的办法。

定理 3-8（**直积的对应从属**） 设四个非空集合 A，B，C，D，那么 $A\times B\subseteq C\times D$ 的充要条件是$A\subseteq C$，$B\subseteq D$。

证明 充分性：若 $A\times B\subseteq C\times D$，那么

$$\begin{aligned}&(x\in A\wedge y\in B)\\ \Rightarrow&\langle x,y\rangle\in(A\times B)\subseteq\langle x,y\rangle\in(C\times D)\\ \Rightarrow&(x\in C\wedge y\in D)\end{aligned}$$

由对应关系可以知道 $A\subseteq C$ 且 $B\subseteq D$。

必要性：若 $A\subseteq C$，$B\subseteq D$，那么

$$\begin{aligned}&\langle x,y\rangle\in(A\times B)\\ \Leftrightarrow&(x\in A\wedge y\in B)\subseteq(x\in C\wedge y\in D)\\ \Rightarrow&\langle x,y\rangle\in(C\times D)\\ \Rightarrow&A\times B\subseteq C\times D\end{aligned}$$

证毕。

3.3 集合的计数与划分

集合的运算可以用在**有限元素**集合的计数上，计数问题常常运用在概率统计和一些小规模的问题上，下面我们做具体介绍。

定义 3-17（集合的规模或基数） 我们将一个集合 A 所包含的元素个数 n 称为集合的基数，或称为势，记作 $|A|=n$ 或 $\mathrm{card}(A)=n$。

显然根据这个定义我们可以得到集合规模的一些关系：

(1) $|A\cup B|\leqslant|A|+|B|$ (2) $|A\cap B|\leqslant\min(|A|,|B|)$

(3) $|A-B|\geqslant|A|-|B|$ (4) $|A\oplus B|=|A|+|B|-2|A\cap B|$

定理 3-9（包含排斥） 若有限集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，$n\geqslant 2$，其中的元素个数分别为 $|A_1|$，$|A_2|,\cdots,|A_n|$，那么

$$
\begin{aligned}
|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|=&(-1)^0\sum_{i=1}^{n}|A_i|+(-1)^1\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|A_i\cap A_j|+\\
&(-1)^2\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\cdots+\\
&(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap A_3\cap\cdots\cap A_n|
\end{aligned}
$$

证明略，包含排斥是由归纳法逐步得到的，其中在实际运用中常用的是二元和三元包含排斥。

（二元包含排斥） $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$

（三元包含排斥） $|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|C\cap A|+|A\cap B\cap C|$

对于包含排斥的可用文氏图来解释，如图 3-6 所示。

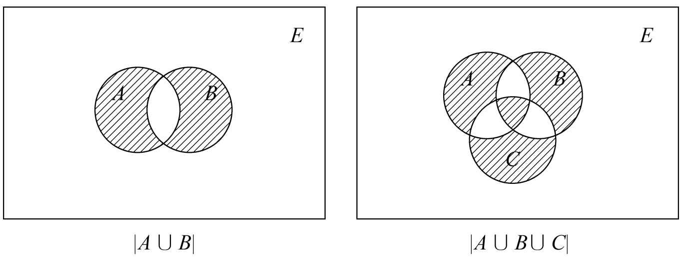


图 3-6 包含排斥原理

图 3-6 左侧显示的二元包含排斥的关系，可将它理解为中间空白部分在计数时计算了两次，因而在最后的表达式中需要减去重复计数的部分。而三元包含排斥需要在偶次重叠的地方减去一次（对应空白＋中心部分），由于这一步多减去了一个中心，所以需要再加上一次。

例 3-6 一支参加体育比赛的队伍共有 21 人，其中参加 A 组比赛的有 9 人，B 组比赛的有 10 人，C 组有 12 人，同时由于比赛时间安排充裕，有 3 人同时参加了 A 和 B 组，也有 3 人同时参加了 A 和 C 组，已知其中 1 个人三组都参加了，请问同时参加 B 和 C 组的有多少人？

解 本题作为概率论中常出现的题目，我们给出两种做法。

首先将文字描述转化为公式，那么

$$|A\cup B\cup C|=21,|A|=9,|B|=10,|C|=12,$$
$$|A\cap B|=3,|A\cap C|=3,|A\cap B\cap C|=1$$

第一种方法。文氏图，如图 3-7 所示。首先将$|A\cap B\cap C|=1$填入，并设所求的部分为 x，那么$|B\cap C|=1+x$，再依次填入其余数字$|A\cap B|=3$，$|A\cap C|=3$，再根据$|A|=9$，$|B|=10$，$|C|=12$ 填入剩余数字，最后利用总数$|A\cup B\cup C|=21$ 计算得到 $x=4$。

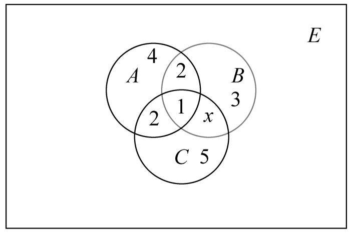


图 3-7　文氏图

第二种方法。公式推导，根据已知条件，可以得到

$$\begin{aligned}|A\cup B\cup C|&=|A|+|B|+|C|\\&=12-|A\cap B|-|A\cap C|-\\&\quad|B\cap C|+|A\cap B\cap C|=21\end{aligned}$$

代入得到

$$9+10+12-3-3-(1+x)+1=21\Rightarrow x=4$$

在实际使用集合理论时，还常常涉及另外一种对集合的操作，这就是将集合划分成若干小集合，它也是推动概率论发展的重要支撑，其中著名的贝叶斯概率和全概率论就是利用集合的有限划分来推理的。

定义 3-18(集合的划分)　将集合 A 的所有元素不可重复的分配给它的非空子集 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，我们称它们组成的集合$\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$为 A 的一个划分。

属性定义为 $A_i\subseteq A$，$A_i\cap A_j=\varnothing(i\neq j)$，$A_i\neq\varnothing$，$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=A$

定义 3-19(集合的覆盖)　将集合 A 的所有元素可重复的分配给它的非空子集 A_1，$A_2,\cdots,A_n$，我们称$\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$为 A 的一个覆盖。

属性定义为 $A_i\subseteq A$，$A_i\neq\varnothing$，$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=A$

例如考虑集合 $A=\{a,b,c\}$的子集：

$$O=\{\{a,b\},\{b,c\}\},\quad P=\{\{a\},\{a,b\},\{a,c\}\},\quad Q=\{\{a\},\{b,c\}\},$$
$$R=\{\{a,b,c\}\},\qquad S=\{\{a\},\{b\},\{c\}\},\qquad T=\{\{a\},\{a,c\}\}$$

对于 A 来说，Q,R,S 都是集合 A 的划分，因为里面的子集没有共同元素，且涵盖了 A 的所有元素；O,P 都是 A 的覆盖，因为它有重复的部分。显然 T 由于缺少元素 b，因而并不是原集合的划分或覆盖。

通过定义可以知道，对于**划分来说必定是覆盖的，只是这个覆盖的重复的元素个数为零而已**。另外，我们把每一个单独元素组成的一个子集的划分称之为最大划分。例如，对于 A 来说 S 就是最大划分，另外的极端就是它自身的划分，如 R 就是 A 的最小划分。

由于集合的划分并没有指定哪个元素分派给哪个子集，因而一个集合的划分或者覆盖是不唯一的，正如一个班级划分为不同打扫卫生小组一样，很难确定到底今天谁被分配到一组。

集合的划分还常常被用到生物学中去查找关系，其中比较特别的就是集合的交叉划分。

定义 3-20(集合的交叉划分)　若$\{A_1,A_2,\cdots,A_s\}$与$\{B_1,B_2,\cdots,B_s\}$是集合 S 的不同划分，那么由其中所有满足 $A_i\cap B_j\neq\varnothing$组合成的集合，称为原集合两种划分的交叉划分。

例如集合 $A=\{a,b,c,d\}$，那么它的两个划分为

$$\{\{a\},\{b,c\},\{d\}\}和\{\{a,b\},\{c\},\{d\}\}$$

显然它们满足交集不为空的有

$$\{a\}\cap\{a,b\}=\{a\};\{b,c\}\cap\{a,b\}=\{b\};\{b,c\}\cap\{c\}=\{c\};\{d\}\cap\{d\}=\{d\}$$

最后得到交叉划分

$$\{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\}\}$$

从上面的例子可以看到，最终得到的结果其实也是原来集合的一种划分，因而可以加以推论得到定理。

定理 3-10（交叉划分的从属） 若 $\{A_1,A_2,\cdots,A_s\}$ 与 $\{B_1,B_2,\cdots,B_s\}$ 是集合 S 的不同划分，那么它们的交叉划分也是原集合的一种划分。

定义 3-21（细化划分） 若 $\{A_1,A_2,\cdots,A_s\}$ 与 $\{B_1,B_2,\cdots,B_s\}$ 是集合 S 的不同划分，且对每一个 A_i 均有一个 B_j 使得 $A_i\subseteq B_j$，那么称 $\{A_1,A_2,\cdots,A_s\}$ 是 $\{B_1,B_2,\cdots,B_s\}$ 的加细。

定理 3-11（交叉划分的加细性） 集合 S 的不同划分的交叉划分是原来各自划分的细化。

证明 设 $\{A_1,A_2,\cdots,A_s\}$ 与 $\{B_1,B_2,\cdots,B_s\}$ 是集合 S 的不同划分，那么交叉划分中的元素必然是 $A_i\cap B_j$，且有 $A_i\cap B_j\subseteq A_i$ 或 $A_i\cap B_j\subseteq B_i$，显然可以证明定理结论。

证毕。

3.4 集合的基数

我们知道自然数集是无限集，实数也是无限集，那么它们元素的个数是否相同？应如何比较？这节将介绍解决这类问题的方法。从字面上可以看出，有限集中包含的元素的个数是有限个，无限集中包含的元素的个数是无穷多个，现在我们用集合的基数的概念来考虑集合元素的个数问题。

定义 3-22 集合中元素的个数称为集合的**基数**。集合 A 的基数可用 $|A|$ 表示。

例如 $|\{a,b,c,d\}|=4$，空集的基数 $|\varnothing|=0$，如果集合 A 是由 n 个元素组成的有限集，那么 $P(A)$ 也应是有限集，其基数 $|P(A)|$ 为 2^n。例如，集合 $A=\{a,b,c,d\}$，则它的幂集的基数 $|P(A)|=2^4=16$。

现在用集合的基数将集合分类。

定义 3-23 如果存在 $n\in\mathbf{N}$，且集合基数 $|A|\leqslant n$，则集合 A 是**有限集合**，如果不存在这样的 n，则 A 为**无限集合**。

接下来，讨论无限集的基数。在研究无限集基数前，首先引入等势的概念。

定义 3-24 对于集合 A 与 B，如果存在一一对应的关系，则称集合 A 与 B 是**等势的**，记为 $A\sim B$。

显然集合的等势表示了集合个数的多少，即，如两个集合等势就是这两个集合的基数相同。对于有限集而言，两个集合等势就是这两集合的元素的个数（即基数）相同。

【例 3-7】 证明：自然数集 $\mathbf{N}$ 与其的一个子集 $S=\{2n \mid n\in\mathbf{N}\}$ 均为无限集，且 $N\sim S$。

证明 找到自然数集 $\mathbf{N}$ 与 $S=\{2n \mid n\in\mathbf{N}\}$ 之间的一一对应关系：

$$f:\ N \to S$$
$$n \mapsto 2n$$

由定义可知，自然数集 $\mathbf{N}$ 与 $S=\{2n \mid n\in\mathbf{N}\}$ 等势，即 $\mathbf{N}\sim S$。如果用集合的基数来表示两者的大小关系，即 $|\mathbf{N}|=|S|$。

证毕。

定义 3-25 如果一个集合的元素与自然数集 $\mathbf{N}$ 的元素之间存在一一对应关系，称该集合为**可数无限集**，简称**可数集**。

由上述例子可知，$S=\{2n \mid n\in\mathbf{N}\}$ 是可数集。类似地，所有 5 的倍数所构成的集合 $\{5,10,15,20,\cdots\}$，所有非负整数集合 $\{0,1,2,3,4,\cdots\}$，整数集都是可数集。

总之，如果一个集合能从一个元素开始，将集合中的所有元素按一定的顺序排成一列，那么这个集合就是可数集。因为，这实际上建立了一个从这集合到自然数集上的一一对应。

可数集之间有如下性质：

(1) 有限集与可数集的并仍是可数集。

(2) 两个可数集的并仍是可数集。

(3) 有限个可数集的并仍是可数集。

(4) 可数个可数集的并然仍是可数集。

定理 3-12 任一无限集必包含一可数集。

证明 如果一个集合 A 是无限集，我们依次从这集合中取出元素 a_i，由此可得一可数集 $\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots\}$，显然，这可数集是包含在集合 A 中。

证毕。

定理 3-13 若集合 A 是无限集，则它必包含与其等势的真子集。

证明 由定理知，若集合 A 是无限集，得到 A 的一个可数子集 $B=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$，我们作一集合 $D=A-\{a_1\}$，显然，$D\subset A$，从而找到 A 到 D 的一个一一对应 f：

设 $x\in A$，$y\in D$，f：$A \to D$

$$a_n \mapsto a_{n-1}$$
$$b \mapsto b,\ b\notin B$$

这样我们就得到了 A 与 D 等势，即 $A\sim D$。

证毕。

显然，有限集不能与自己的真子集等势，因此，这定理就是无限集的一个特征，是区别于有限集的一个重要标志。有了这个定理，我们可以重新定义无限集。

定义 3-23′ 若集合 A 存在与其等势的真子集，则集合 A 为无限集。

由定理 3-12 可得，可数集是无限集中基数最小的集合，即可数集是最小的无限集。若集合 A 是无限集，那么 $|A|\geqslant|N|$。我们称可数集的基数为 $\aleph_0$（念作 Aleph 零）。根据这个概念，我们马上可以得出，所有的可数集基数均为 $\aleph_0$。

下面要提的问题是：是否所有的无限集均一样大小，亦即是说，是否所有的无限集的基数都是$\aleph_0$？可数集是“最小”的无限集，故不可能有比基数为$\aleph_0$更小的无限集了。比基数为$\aleph_0$更大的无限集是否存在呢？这个问题的答案是肯定的，也就是说，存在一些不与自然数集等势的无限集，实数集就是这样一个例子。

定理 3-14 实数集 **R** 不是可数集。

（证明略）

定理 3-15 集合(0,1)不是可数集，且集合$(0,1)\sim\mathbf{R}$。

（证明略）

实数集不是可数集，实数集的基数要比自然数集的基数大。

定义 3-26 实数集是**不可数集**，所有和实数集等势的都是不可数集。不可数集的基数用$\aleph$（或用 c）来表示，称为连续统的势。

德国数学家康托尔(Cantor)认为，$\aleph_0$与$\aleph$之间没有其他基数存在，也就是说，$\aleph$是$\aleph_0$后第一个比$\aleph_0$大的基数，这就是有名的连续统假设。

在无限集中，除了$\aleph_0$与$\aleph$以外是否还有其他更大基数的集合存在呢？康托尔给出了证明。

定理 3-16 任何一个集合 A，它的幂集 $P(A)$的基数一定比 A 的基数大。

（证明略）

因此，对任一个无限集，总存在一个基数大于这个集合的集合。也就是说，无限集的“大小”是无限的。

3.5 习　　题

3-1 判断题。

1. $\varnothing\in\varnothing$。(　　)
2. $\varnothing\subseteq\varnothing$。(　　)
3. “信息技术学院中帅气的男生”不可构成一个集合。(　　)
4. “大数据”可构成一个集合。(　　)
5. “信息技术学院的大二男生”不可构成一个集合。(　　)
6. “南京中医药大学美丽的格桑花”不可构成一个集合。(　　)
7. “信息技术学院中选修离散数学的男生”不可构成一个集合。(　　)
8. 空集有子集。(　　)
9. 由 3 的整数倍构成的集合是可数的。(　　)
10. $(A\times B)\times C=A\times(B\times C)$。(　　)
11. 任何集合都有子集。(　　)
12. 设 A,B 为任意集合，可能存在 $A\subset B$ 且 $A\in B$。(　　)
13. 由 2 的整数倍构成的集合是不可数的。(　　)
14. $\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$。(　　)
15. 0 和 1 之间的实数是可数的。(　　)

16. 集合 A,B，肯定有 $(A\cup B)-A=B$。(　　)

17. $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\in P(P(\{\varnothing\}))$。(　　)

18. $0\notin\{\varnothing\}$。(　　)

19. A,B,C 为任意集合，若 $A\cup B=A\cup C$，则 $B=C$。(　　)

20. $(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$。(　　)

21. 设 $A=\{0,1\}$，$B=\{1,2\}$，则 $A^2\times B=\{<0,1,1>,<0,1,2>,<1,0,1>,<1,0,2>\}$。(　　)

3-2　单选题。

1. 设 $A=\varnothing$，$B=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$，则 $B-A$ 是(　　)。

A. $\{\{\varnothing\}\}$　　B. $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$　　C. $\{\varnothing\}$　　D. $\varnothing$

2. 下列是假命题的有(　　)。

A. $a\in\{a,\{a\}\}$　　B. $\{a\}\in\{a,\{a\}\}$　　C. $\{a\}\subseteq\{\{a\}\}$　　D. $\{a\}\subseteq\{a,\{a\}\}$

3. 下列结果正确的是(　　)。

A. $(A\cup B)-A=B$　　B. $(A\cap B)-A=\varnothing$

C. $(A-B)\cup B=A$　　D. $\varnothing\cup\{\varnothing\}=\varnothing$

4. 下列结论正确的是(　　)。

A. 若 $A\cup B=A\cup C$，则 $B=C$　　B. 若 $A\cup B\subseteq A\cap B$，则 $B=A$

C. 若 $A\cap B=A\cap C$，则 $B=C$　　D. 若 $A\subset B$ 且 $C\subset D$，则 $A\cap C\subset B\cap D$

5. 下列结论正确的是(　　)。

A. $\varnothing\cap\{\varnothing\}=\{\varnothing\}$　　B. $\varnothing\cup\{\varnothing\}=\varnothing$

C. $(A\cap B)-A=\varnothing$　　D. $A\oplus A=A$

6. 设 A,B,C 是集合，则下述论断正确的是(　　)。

A. 若 $A\subset B$，$B\in C$，则 $A\in C$　　B. 若 $A\subseteq B$，$B\in C$，则 $A\subseteq C$

C. 若 $A\in B$，$B\subseteq C$，则 $A\in C$　　D. 若 $A\in B$，$B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$

7. 幂集 $P(P(P(\varnothing)))$ 为(　　)。

A. $\{\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$　　B. $\{\varnothing,\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\{\varnothing\}\}$

C. $\{\varnothing,\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing\}\}$　　D. $\{\varnothing,\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$

8. 设 A、B、C、D 是任意的集合。以下说法正确的是(　　)。

A. $(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$

B. $(A\cup B)\times(C\cup D)=(A\times C)\cup(B\times D)$

C. $(A-B)\times(C-D)=(A\times C)-(B\times D)$

D. $(A\oplus B)\times(C\oplus D)=(A\times C)\oplus(B\times D)$

3-3　不定项选择。

1. 设 $A=\{\varnothing\}$，$B=P(P(A))$，下列(　　)表达式成立。

A. $\varnothing\subseteq B$　　B. $\{\varnothing\}\subseteq B$　　C. $\{\varnothing\}\in B$　　D. $\{\{\varnothing\}\}\subseteq B$

E. $\{\{\varnothing\}\}\in B$

2. 下列式子正确的是(　　)。

A. $(A-B)-C=A-(B\cup C)$

B. $\overline{A-B}=\overline{B-A}$

C. $(A\oplus B)\cap C=(A\cap C)\oplus(B\cap C)$

D. $A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$

E. $A\cup(B\oplus C)=(A\cup B)\oplus(A\cup C)$

3. 设 $A_1=\varnothing$,$A_2=\{\varnothing\}$,$A_3=P(\{\varnothing\})$,$A_4=P(\varnothing)$,以下命题为真的是(　　)。

A. $A_2\in A_4$　　B. $A_1\subseteq A_3$　　C. $A_4\subseteq A_2$　　D. $A_4\in A_3$

E. $A_2\in A_3$

4. A,B,C 是三个集合,则下列推理不正确有(　　)。

A. 若 $A\subseteq B$,$B\subseteq C$,则 $A\subseteq C$

B. 若 $A\subseteq B$,$B\subseteq C$,则 $A\in C$

C. 若 $A\subseteq B$,$B\in C$,则 $A\in C$

D. 若 $A\in B$,$B\subseteq C$,则 $A\subseteq C$

E. 若 $A\subseteq B$,$B\in C$ 则 $A\subseteq C$

5. 以下说法正确的有(　　)。

A. $(A-B)-C=A-(B\cup C)$

B. $A-(B\cup C)=(A-B)\cup C$

C. $A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$

D. $(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$

E. $(A\oplus B)\times C=(A\times C)\oplus(B\times C)$

6. 以下说法正确的有(　　)。

A. 若 $A\in B$ 且 $B\subseteq C$,则 $A\subseteq C$

B. 若 $A\subseteq B$ 且 $B\in C$,则 $A\subseteq C$

C. 若 $A\subseteq B$ 且 $B\in C$,则 $A\notin C$

D. $A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$

E. $(A-B)\times C=(A\times C)-(B\times C)$

3-4　解答题。

1. 在 30 个学生中有 18 个爱好音乐,12 个爱好美术,15 个爱好体育,10 个既爱好音乐又爱好体育,8 个既爱好美术又爱好体育,11 个既爱好音乐又爱好美术,但有 6 个学生这三种爱好都没有,试求这三种爱好都有的人数。

2. 某年级共有 200 名学生,喜欢打篮球的有 134 人,喜欢打排球的有 101 人,喜欢打乒乓球的有 90 人,篮球、乒乓球都不喜欢的 23 人,篮球、排球都喜欢的 54 人,喜欢排球但不喜欢乒乓球的有 48 人,三样都喜欢的有 12 人。

求:(1) 三样运动都不喜欢的有多少人?

(2) 只喜欢一项运动的有多少人?

3-5　设 A,B,C 是任意集合,利用集合恒等式,证明下列结论:

1. $A\cup B=A-B$ 当且仅当 $B=\varnothing$。

2. $A\cap B=A-B$ 当且仅当 $A=\varnothing$。

3. $A\cup B=A\cap B$ 当且仅当 $A=B$。

4. $A-B=B-A$ 当且仅当 $A=B$。

5. $P(A)\cap P(B)=P(A\cap B)$。

6. $P(A)\cup P(B)\subseteq P(A\cup B)$。

7. $(A\cap B)\cup C=A\cap(B\cup C)$ 当且仅当 $C\subseteq A$。

8. 若 $A\cup B=A\cup C$ 且 $A\cap B=A\cap C$，则 $B=C$。

3-6 设 A,B,C,D 为任意集合，判断下列结论是否成立？成立的给出证明，不成立的说明理由或者举出反例。

1. 如果 $A\times B=A\times C$，那么 $B=C$。

2. $A-(B\times C)=(A-B)\times(A-C)$。

3. 如果 $A=B$ 且 $C=D$，那么 $A\times C=B\times D$。

4. 存在集合 A，使得 $A\subseteq A\times A$。

5. $(A\cup B)\times(C\cup D)=(A\times C)\cup(B\times D)$。

6. $(A-B)\times(C-D)=(A\times C)-(B\times D)$。

7. 若 $A\cup B=A\cup C$，则 $B=C$。

8. 若 $A\cap B=A\cap C$，则 $B=C$。