

第3章

连续时间信号与系统频域分析



3.1 引言

第2章分析了连续时间信号与线性时不变系统,主要解决了两个问题,一是信号的分解,二是响应的合成。以冲激信号为基本信号,将信号分解为不同延时、不同强度的冲激信号的叠加;以冲激响应为基本响应,将系统响应表示为不同延时、不同强度的冲激响应的叠加(卷积积分)。

本章针对连续时间信号与线性时不变系统,同样也要解决两个问题,一是信号的分解,二是响应的合成。不过,这里是以简谐振荡信号(正余弦信号和虚指数信号)作为基本信号,将信号分解为不同频率和不同复振幅(包括振幅和初相位)的简谐振荡信号的叠加,以系统对简谐振荡信号的响应作为基本响应,将系统的响应表示为不同频率、不同复振幅的基本响应的叠加。需要指出,本章中的“频率”如不特别声明,都是指角频率,单位为 rad/s,并以 ω 表示。

在连续时间信号与系统的频域分析中,简谐振荡信号能够作为基本信号的原因在于,简谐振荡信号是线性时不变系统的本征信号。下面考察一个单位冲激响应为 $h(t)$ 的线性时不变系统对简谐振荡信号 $e^{j\omega t}$ ($-\infty < t < \infty$) 的响应。由式(2.1.23)可知,系统的输出为

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{j\omega t} * h(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-\tau)} h(\tau) d\tau \\ &= e^{j\omega t} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} h(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

其中, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} h(\tau) d\tau$ 只与频率 ω 有关,而与时间无关,通常把它记为 $H(j\omega)$,即

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} h(\tau) d\tau \quad (3.1.2)$$

后面将会看到, $H(j\omega)$ 就是单位冲激响应 $h(t)$ 的傅里叶变换,称为系统的频率响应。于是,式(3.1.1)成为

$$y(t) = e^{j\omega t} \cdot H(j\omega) \quad (3.1.3)$$

由式(3.1.3)可知,将简谐振荡信号 $e^{j\omega t}$ 作为线性时不变系统的输入激励,其输出响应是同样的简谐振荡信号,只是幅度乘以一个复常数 $H(j\omega)$,如图 3.1.1 所示,这正是所期望的。因为,如果一个线性系统的输入激励 $x(t)$ 可以表示为 $e^{j\omega t}$ ($-\infty < t < \infty$) 的加权和,即

$$x(t) = \sum_i X_i e^{j\omega_i t}, \quad -\infty < t < \infty$$

(3.1.4)

式中, X_i 为加权系数,那么就可以利用系统的线性特性,由式(3.1.3)很方便地求得系统的输出响应为

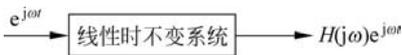


图 3.1.1 线性时不变系统对虚指数信号 $e^{j\omega t}$ 的响应

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \sum_i X_i e^{j\omega_i t} H(j\omega_i) \\
 &= \sum_i X_i H(j\omega_i) e^{j\omega_i t}, \quad -\infty < t < \infty
 \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

信号可以分解成一系列简谐振荡信号的叠加这一思想,最初是由法国数学家傅里叶(J. Fourier)提出的。1807年,傅里叶向巴黎科学研究院提出了一篇描述热传导的论文。他在论文中指出周期函数可以展开成正弦级数,从而奠定了傅里叶级数的理论基础。因此后来的有关的分析方法以他的名字命名为傅里叶分析。从20世纪初起,由于振荡器、谐振电路、滤波器等出现,各种频率的正弦信号的产生、传输、变换等工程技术问题得到解决,傅里叶分析的理论研究和实际应用有了较大发展,20世纪50年代,傅里叶分析方法已被广泛应用于电子学领域的各个方面。随着计算机技术的发展,1965年美国科学家库利(J. W. Cooley)、图基(J. W. Tukey)发明了快速傅里叶变换算法(Fast Fourier Transform, FFT),使傅里叶分析的研究和应用又出现了新的高潮。现在傅里叶分析方法不仅在电子学领域,而且在数学、力学、光学、量子物理等许多工程技术领域都得到了广泛应用。

本章中,应用的主要分析和运算工具是傅里叶级数和傅里叶变换。首先通过正交分解,将周期信号分解为频率成整数倍关系的正余弦信号(或虚指数信号)的线性组合——傅里叶级数。然后扩展傅里叶级数,引出主要适用于非周期信号的傅里叶变换。由于傅里叶级数和傅里叶变换的实质在于将信号分解成“不同频率”的简谐振荡信号的叠加,所以在用它们对信号与系统进行分析时,其着眼点几乎总是在“不同频率”上,因而这种分析称为“频域分析”。本章讲述的频域分析方法可以引出许多重要概念和方法,它们在通信、控制、信号处理等技术领域得到大量应用。

通过本章的学习,应牢固建立如下概念:信号等效于一个频谱密度函数,系统等效于一个频率响应,系统对信号起频谱变换作用。



教学视频

3.2 信号的正交分解和傅里叶展开

信号的正交分解犹如矢量的正交分解,是把信号分解成一系列正交分量之和。信号正交分解在信号系统理论中占有重要地位。

在矢量的正交分解中,先选一组正交基底矢量,再找出待分解矢量在各基底上的投影。由于基底正交,各投影分量将互不影响,使研究得以简化。进行信号的正交分解也是先选一组正交基底(信号),再找出待分解信号在各基底上的投影,从而将信号表示为各基底信号的加权线性组合。这样,在处理信号时,由于信号的各分量正交,互不影响,处理得以简化。

3.2.1 矢量的正交与正交分解

先复习矢量的正交和正交分解。

行矢量 \mathbf{x} 和 \mathbf{y} 正交的定义是它们的内积为零, 即

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}^T = 0$$

这里, 上标 T 表示矢量的转置运算。

以三维矢量为例, 设 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]$, $\mathbf{y} = [y_1, y_2, y_3]$, 则它们的内积为

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}^T = [x_1, x_2, x_3] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^3 x_i y_i$$

由两两正交的矢量组成的矢量集合, 叫作正交矢量集。比如在三维空间中以矢量 $[2, 0, 0]$ 、 $[0, 2, 0]$ 、 $[0, 0, 2]$ 组成的集合就是一个正交矢量集。一个 n 维矢量, 可用一个 n 维的正交矢量集中各矢量的线性组合来精确表示。如三维矢量 $\mathbf{x} = [3, 4, 5]$ 就可以写成 $[3, 4, 5] = \frac{3}{2}[2, 0, 0] + 2[0, 2, 0] + \frac{5}{2}[0, 0, 2]$ 。

3.2.2 信号的正交和正交分解

1. 正交信号集

信号正交的定义也是它们的内积为零。具体地说, 信号 $x(t)$ 与 $g(t)$ 在区间 (t_1, t_2) 正交是指

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)g^*(t)dt = 0 \quad (3.2.1)$$

如果 n 个信号 $\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_n(t)$ 构成一个信号集合, 这些信号在时间区间 (t_1, t_2) 满足以下条件:

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi_i(t)\phi_j^*(t)dt = 0, \quad i \neq j \quad (3.2.2a)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} |\phi_i(t)|^2 dt = K_i \quad (3.2.2b)$$

则此信号集称为正交信号集, 各 $\phi_i(t)$ 称为基底信号。如果 $K_i = 1, i = 1, 2, \dots, n$, 则此信号集就是归一化的正交信号集。

进一步, 如果在正交信号集 $\{\phi_i(t), i = 1, 2, \dots, n\}$ 之外, 不存在任何能量有限信号与各 $\phi_i(t)$ 正交, 则该正交信号集就是完备的正交信号集。

现已研究出了多种完备的正交信号集。例如, 在任意区间 $(t_0, t_0 + T)$ 上的正余弦信号集 $\left\{ \sin k\omega_0 t, 1, \cos k\omega_0 t, \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, k = 1, 2, \dots \right\}$ 和虚指数信号集 $\left\{ e^{jk\omega_0 t}, \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\}$ 都是完备的正交信号集。

其他的完备正交信号集还有勒让德多项式的集合、雅可比多项式的集合、切比雪夫多项式的集合、沃尔什函数的集合等。

2. 信号的正交分解

定义在时间区间上的信号 $x(t)$ 可以用正交信号集 $\{\phi_i(t), i=1, 2, \dots, n\}$ 中各基底信号 $\phi_i(t)$ 的线性组合来近似。设这种近似方法造成的误差信号为 $x_e(t)$, 则可有

$$x(t) = \sum_{i=1}^n C_i \phi_i + x_e(t) \quad (3.2.3)$$

只用 $\sum_{i=1}^n C_i \phi_i(t)$ 来近似 $x(t)$ 时, 造成的能量误差是

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} x_e^2(t) dt &= \int_{t_1}^{t_2} [x(t) - \sum_{i=1}^n C_i \phi_i(t)]^2 dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt + \sum_{i=1}^n C_i^2 \int_{t_1}^{t_2} \phi_i^2(t) dt - 2 \sum_{i=1}^n C_i \int_{t_1}^{t_2} x(t) \phi_i(t) dt \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

式(3.2.4)用 $t_2 - t_1$ 除, 即称为误差平均功率。

欲使误差能量或平均功率为最小, 必须选择系数 C_i 以使式(3.2.4)对 $C_i (i=1, 2, \dots, n)$ 的导数为零, 可求得

$$C_i = \frac{1}{K_i} \int_{t_1}^{t_2} x(t) \phi_i^*(t) dt, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (3.2.5)$$

将式(3.2.5)代入式(3.2.4)可得

$$\int_{t_1}^{t_2} x_e^2(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt - \sum_{i=1}^n C_i^2 K_i \quad (3.2.6)$$

式(3.2.6)右边第一项是信号 $x(t)$ 的能量, 第二项是近似信号 $\sum_{i=1}^n C_i \phi_i(t)$ 的能量, 它等于各正交分量的能量之和。由于 K_i 大于零, 故近似信号的能量将随着 n 的增大而增大, 式(3.2.6)右端随 n 增大而单调减小。如果 n 增大到 M 时, 误差信号的能量降到零, 则此时误差信号必然为零信号, 于是

$$x(t) = \sum_{i=1}^M C_i \phi_i(t) \quad (3.2.7)$$

式(3.2.7)是信号的精确的正交分解(正交展开)式, $C_i \phi_i(t)$ 就是信号 $x(t)$ 在基底 $\phi_i(t)$ 上的正交分量。

一般情况下, M 需要趋于无穷才能使信号作出精确的正交分解, 而有时, 即使 $M \rightarrow \infty$, 还要求正交信号集是完备的。如果所采用的正交信号集 $\{\phi_i(t), i=1, 2, \dots, n\}$ 是完备的, 则误差信号的能量为零。此时, 由式(3.2.4), 有

$$\int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt = \sum_{i=1}^n C_i^2 K_i \quad (3.2.8)$$

即信号的能量等于其各正交展开分量的能量之和, 这就是广义的帕塞瓦尔能量等式。

以上结论虽然是对实信号解出的, 但对复信号也是适用的。读者不难按复信号的定义



义类似得出。

3.2.3 傅里叶级数展开

前已述及,正余弦信号集和虚指数信号集都是完备的正交信号集。而且,在完备的正交信号集上可以作出信号的精确正交分解。下面介绍连续时间周期信号在这两个正交信号集上的正交分解,即傅里叶级数展开。将给出连续时间周期信号的两种形式的傅里叶级数:三角形式和指数形式的傅里叶级数。需要指出的是,在正余弦信号集和虚指数信号集上可以精确正交分解的信号 $x(t)$ 应满足下述狄利克雷(Dirichlet)条件:即在 (t_0, t_0+T) 区间有定义,并且

- (1) $x(t)$ 绝对可积,即 $\int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)| dt < \infty$;
- (2) $x(t)$ 的极大值和极小值的数目应有限;
- (3) $x(t)$ 如有间断点,间断点的数目应有限。

以下的分析假定信号满足上述条件,这是符合绝大多数实际情况的,并且只考虑周期信号,不考虑非周期信号。因为周期信号的周期特性决定了一个周期内的傅里叶级数可以代表整个信号,而非周期信号不具备这一特点。

1. 周期信号三角形式的傅里叶级数

周期为 T 的信号 $x(t)$,可以在任意 (t_0, t_0+T) 区间,用正余弦信号集 $\{\cos k\omega_0 t, \sin k\omega_0 t, \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, k=1, 2, \dots\}$ 精确分解为下面的三角形式的傅里叶级数:

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 + a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + \dots + b_1 \sin \omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t + \dots \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t), \quad t_0 < t < t_0 + T \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

式中, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ 。

式(3.2.9)中展开系数可由正余弦信号集的正交性得出。

由于

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \cos k\omega_0 t \sin m\omega_0 t dt = 0, \quad \text{对所有的 } m, k$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \cos k\omega_0 t \cos m\omega_0 t dt = \begin{cases} \frac{T}{2}, & m = k \\ 0, & m \neq k \end{cases}$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \sin k\omega_0 t \sin m\omega_0 t dt = \begin{cases} \frac{T}{2}, & m = k \\ 0, & m \neq k \end{cases}$$

根据式(3.2.5),可以得出

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt \\ a_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cos k\omega_0 t dt \\ b_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \sin k\omega_0 t dt \end{cases} \quad (3.2.10)$$

式中, a_0 、 a_k 、 b_k 分别代表了信号 $x(t)$ 的直流分量、余弦分量和正弦分量的振荡幅度。

在式(3.2.9)中,同频率的正余弦项可以合并,从而该式又可变形为

$$x(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(k\omega_0 t + \phi_k) \quad (3.2.11a)$$

或

$$x(t) = d_0 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k \sin(k\omega_0 t + \theta_k) \quad (3.2.11b)$$

按基本的三角关系可得出式(3.2.10)和式(3.2.11)中各参数间的关系如下:

$$\begin{cases} a_0 = c_0 = d_0 \\ c_k = d_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \\ a_k = c_k \cos \phi_k = d_k \sin \theta_k \\ b_k = -c_k \sin \phi_k = d_k \cos \theta_k \\ \tan \phi_k = \frac{-b_k}{a_k} \\ \tan \theta_k = \frac{a_k}{b_k} \end{cases} \quad (3.2.12)$$

由于周期信号的取值规律具有周期重复的特点,因而式(3.2.9)和式(3.2.11)的展开式可以表示整个周期信号。上述分析表明,任何周期信号只要满足狄利克雷条件,就可以分解成直流分量和许多简谐振荡分量的叠加,简谐振荡分量的最低(角)频率取决于信号的周期: $\omega_0 = 2\pi/T$ 。这个最低(角)频率叫作基频,相应的简谐振荡分量叫作基波。其他所有的简谐振荡的频率必然为基频的整数倍: $2\omega_0$ 、 $3\omega_0$ 、 \dots 分别称为二次谐波、三次谐波……。直流分量的大小及各次谐波分量的振荡幅度 a_k 、 b_k 、 c_k 、 d_k , 初始相位 ϕ_k 、 θ_k 的大小则由信号波形的具体形式决定[式(3.2.12)]。由于正切是周期函数,故由式(3.2.12)求得的 ϕ_k 和 θ_k 是多值的,通常约定只取其主值,即 $-\pi \leq \phi_k \leq \pi$, $-\pi \leq \theta_k \leq \pi$ 。同时要注意上述各展开式中 a_k 、 b_k 可正可负,但 c_k 、 d_k 是非负的。在式(3.2.12)中,各参数 a_k 、 b_k 、 c_k 、 d_k 以及 ϕ_k 、 θ_k 都是 k (谐波序号)的函数,也可以说是 $k\omega_0$ (谐波频率)的函数。如果以频率为横轴,以振幅或初始相位为纵轴,画出 c_k 、 d_k , 便可以直观地看出各频率分量的振荡幅度大小和初始相位情况,得到的图形称为信号的幅度频谱图和相位频谱图,合称为频谱图,其中每条线代表某一频率分量的振幅或初始相位,称为谱线。连接各谱线顶点的曲线(画成虚线)称为谱包络,它是各频率分量的振幅与初相位变化的轮



动图演示

廓。周期信号的谱线只能出现在 $0, \omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, \dots$ 等离散频率点上, 因而周期信号的频谱是离散谱。

例 3.2.1 求图 3.2.1 所示周期为 T 的矩形脉冲信号的频谱。

解: 该信号 $x(t)$ 的周期为 T , 基波角的宽为 τ , 幅度为 E , 频率为 $\omega_0 = 2\pi/T$, 它在一个周期 $(-T/2, T/2)$ 内的表达式为

$$x(t) = \begin{cases} E, & |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0, & \frac{\tau}{2} < |t| < \frac{T}{2} \end{cases}$$

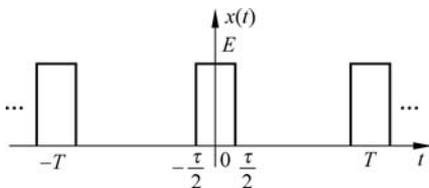


图 3.2.1 周期矩形脉冲信号

按式(3.2.9)将 $x(t)$ 展开, 由式(3.2.10)有

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E dt = \frac{E\tau}{T} \\ a_k &= \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} x(t) \cos k\omega_0 t dt = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E \cos k \frac{2\pi}{T} t dt \\ &= \frac{2E}{k\pi} \sin\left(\frac{k\pi\tau}{T}\right) = \frac{E\tau\omega_0}{\pi} \text{Sa}\left(\frac{k\omega_0\tau}{2}\right) = \frac{2E\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{k\omega_0\tau}{2}\right) \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} x(t) \sin k\omega_0 t dt = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E \sin k \frac{2\pi}{T} t dt = 0 \end{aligned}$$

上面推导中, 引入了抽样函数 $\text{Sa}(t)$, 这是一个很常用的函数。于是 $x(t)$ 的傅里叶级数为

$$x(t) = \frac{E\tau}{T} + \frac{2E\tau}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{k\omega_0\tau}{2}\right) \cos k\omega_0 t$$

进一步, 写成式(3.2.11a)形式, 即

$$x(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(k\omega_0 t + \phi_k)$$

$$c_0 = a_0 = \frac{E\tau}{T}$$

$$c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = |a_k|$$

$$\tan \phi_k = \frac{-b_k}{a_k} = 0$$

当 $a_k = \frac{2E\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{k\omega_0\tau}{2}\right) > 0$ 时, $\phi_k = 0$;

当 $a_k = \frac{2E\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{k\omega_0\tau}{2}\right) < 0$ 时, $\phi_k = \pi$ 。

所以 $x(t)$ 的频谱图如图 3.2.2 所示(假定 $T = 4\tau$)。

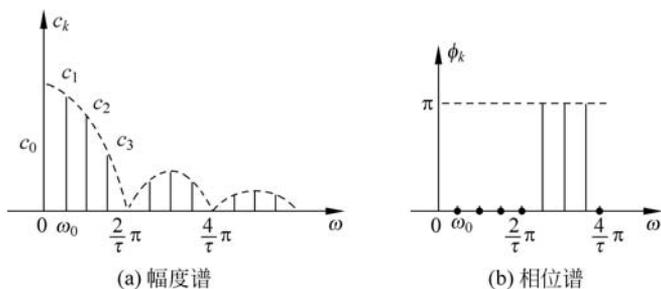


图 3.2.2 周期矩形脉冲信号的频谱图

2. 周期信号指数形式傅里叶级数

三角形式的傅里叶级数含义比较明确,但运算非常不便,因而常用指数形式的傅里叶级数。

周期为 T 的信号 $x(t)$,也可以在任意区间,在虚指数信号 $\{e^{jk\omega_0 t}, \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ 上精确分解为下面的指数形式的傅里叶级数:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t}, \quad t_0 < t < t_0 + T \quad (3.2.13)$$

式中, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$; 展开系数 X_k 可由虚指数信号集的正交性得出。由于

$$\int_{t_0}^{t_0+T} e^{jk\omega_0 t} \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt = \begin{cases} T, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$$

分别在式(3.2.13)两边同乘 $e^{-jk\omega_0 t}$ 并在 $(t_0, t_0 + T)$ 区间积分,即可得出

$$X_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (3.2.14)$$

X_k 代表信号 $x(t)$ 的 $\omega = k\omega_0$ 的频率分量 $e^{jk\omega_0 t}$ 的复振幅。一般而言, X_k 是复数,可以分成模和辐角两个实数参数来表示,即 $X_k = |X_k| e^{j\phi_k}$ 。

同样,由于信号的周期性,式(3.2.13)可以表示整个周期信号。

由于 $e^{jk\omega_0 t}$ 也可以用来表示角频率为 $k\omega_0$ 的简谐振荡信号。因此式(3.2.13)的含义也是将信号分解成直流分量(当 $n=0$ 时)和许多简谐振荡分量的叠加。简谐振荡分量的最低频率(基频)也是 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$,其余简谐振荡分量的频率也是基频的整数倍。复振幅 X_k 的模 $|X_k|$ 表示角频率为 $k\omega_0$ 的分量的振荡幅度(大小), ϕ_k 表示其初始相位。

与前文类似, $|X_k|$ 和 ϕ_k 是 $k\omega_0$ (谐波频率)的函数。以频率为横轴,以 $|X_k|$ 或 ϕ_k 为纵轴,可以画出周期信号 $x(t)$ 的幅值频谱图和相位频谱图。这里得到的频谱仍然是离散的频谱,即谱线只出现在 $0, \pm\omega_0, \pm 2\omega_0, \dots$ 等离散的频率点上。

需要指出的是,在指数形式的傅里叶级数中,出现了负频率项 $e^{jk\omega_0 t}, k = -1, -2, \dots$ 。



教学视频

这就产生了一个问题：实际的振荡只可能以正的频率进行，负频率是什么意思？这个问题可以通过了解指数形式和三角形式的傅里叶级数之间的关系来加以说明。

指数形式的傅里叶级数可作如下变形：

$$\begin{aligned} x(t) &= X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t} + \sum_{k=-1}^{-\infty} X_k e^{jk\omega_0 t} \\ &= X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} X_{-k} e^{-jk\omega_0 t} \\ &= X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [(X_k + X_{-k}) \cos k\omega_0 t + j(X_k - X_{-k}) \sin k\omega_0 t] \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

由式(3.2.14)及式(3.2.10),有

$$X_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt = a_0 \quad (3.2.16a)$$

$$\begin{aligned} X_k + X_{-k} &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt + \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{jk\omega_0 t} dt \\ &= \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \frac{e^{-jk\omega_0 t} + e^{jk\omega_0 t}}{2} dt \\ &= \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cos k\omega_0 t dt \\ &= a_k \end{aligned} \quad (3.2.16b)$$

$$\begin{aligned} j(X_k - X_{-k}) &= j \left[\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt - \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{jk\omega_0 t} dt \right] \\ &= j \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \frac{e^{-jk\omega_0 t} - e^{jk\omega_0 t}}{2} dt \\ &= \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \sin k\omega_0 t dt \\ &= b_k \end{aligned} \quad (3.2.16c)$$

于是式(3.2.13)可进一步写成

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t)$$

这与在正余弦信号集上展开的三角形式傅里叶级数完全一样。可见，同一个周期信号，既可以展开成三角形式的傅里叶级数，又可以展开成指数形式的傅里叶级数，两者形式虽不同，但实质是完全一致的。指数形式傅里叶级数中有负频率项，只是表达形式的问题，并不表示真正存在以负频率进行振荡的分量，负频率项与相应的正频率项合起来才代表一个振荡分量。根据指数形式傅里叶级数画频谱图时， $k\omega_0$ 频率分量的振幅一分为二，在 $-k\omega_0$ 和 $k\omega_0$ 的频率上各占一半 ($|X_k| = |X_{-k}| = c_k/2$)，单独考虑正频率项或者单独考虑负频率项都是不完全的。由式(3.2.16)容易得出

$$X_k = \frac{1}{2}(a_k - jb_k)$$

$$X_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + jb_k)$$

于是有

$$|X_k| = \frac{1}{2}\sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

而

$$\tan\phi_k = \frac{-b_k}{a_k}$$

这与式(3.2.12)中的 ϕ_k 是一致的。进一步,可以得到

$$\left\{ \begin{array}{l} X_0 = c_0 = d_0 = a_0 \\ X_k = |X_k| e^{j\phi_k} = \frac{1}{2}(a_k - jb_k) \\ X_{-k} = |X_{-k}| e^{j\phi_{-k}} = \frac{1}{2}(a_k + jb_k) \\ |X_k| = |X_{-k}| = \frac{1}{2}\sqrt{a_k^2 + b_k^2} \\ \tan\phi_k = \frac{-b_k}{a_k} \\ \tan\phi_{-k} = \frac{b_k}{a_k} \end{array} \right. \quad (3.2.17)$$

最后,注意到,对于实信号有

$$\left\{ \begin{array}{l} |X_k| = |X_{-k}| = \frac{1}{2}\sqrt{a_k^2 + b_k^2} \\ \phi_k = -\phi_{-k} = \arctan\left(\frac{-b_k}{a_k}\right) \end{array} \right. \quad (3.2.18)$$

这就是说,实信号复振幅的模是标号 k ,从而也是频率 $k\omega_0$ 的偶函数;而复振幅的辐角(初始相位)是标号 k ,从而也是频率 $k\omega_0$ 的奇函数。反映到频谱图上,前者的谱线关于纵轴对称,而后者的谱线则关于原点对称,频谱图为双边频谱图。

例 3.2.2 求图 3.2.1 所示周期矩形脉冲的频谱。

解: 由式(3.2.14)得

$$X_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} E e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{E\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{k\omega_0\tau}{2}\right)$$

从而

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t} = \frac{E\tau}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{k\omega_0\tau}{2}\right) e^{jk\omega_0 t} \quad (3.2.19)$$

其复振幅的模和辐角分别如图 3.2.3(a)和(b)所示。

注意,式(3.2.19)中负频率 $-k\omega_0$ 项与正频率 $k\omega_0$ 项合起来表示 k 次谐波分量。即

k 次谐波分量为

$$\frac{E\tau}{T} \text{Sa}\left(-\frac{k\omega_0\tau}{2}\right) e^{-jk\omega_0 t} + \frac{E\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{k\omega_0\tau}{2}\right) e^{jk\omega_0 t} = \frac{2E\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{k\omega_0\tau}{2}\right) \cos k\omega_0 t$$

需要指出,周期矩形脉冲的复振幅实际上是一个实数。类似这种情况,可以把幅度频谱和相位频谱画在一张图上,如图 3.2.3(c)所示。其中 X_k 为正表示相位为零, X_k 为负表示相位为 π (这里仍假定 $T=4\tau$)。

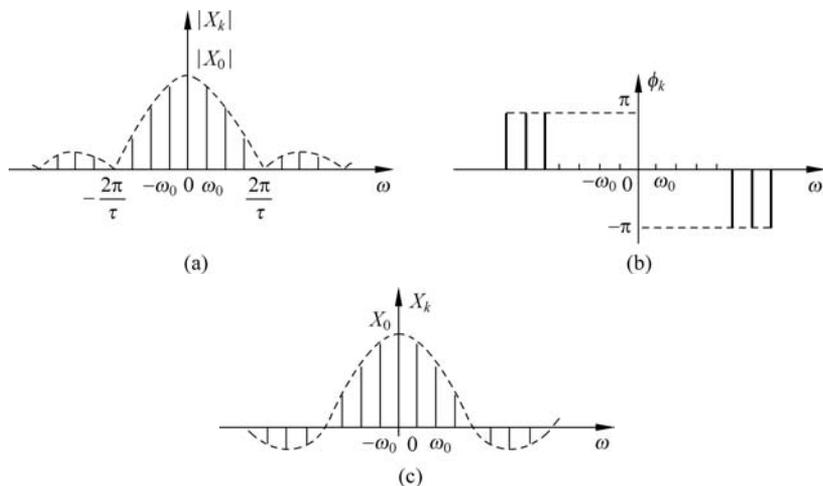


图 3.2.3 周期矩形脉冲信号的双边频谱

3.3 周期信号的频谱分析

在 3.2 节中,学习了周期信号两种形式不同但实质相同的傅里叶级数,即 $x(t) = c_0 +$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(k\omega_0 t + \phi_k) \text{ 和 } x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t}$$

,从这两种形式的傅里叶展开式不难看出,周期信号的频谱都是谐波离散的,它仅含有 $\omega = k\omega_0$ 的各频率分量,即含有基频的整数倍 $\omega = k\omega_0$ ($k=0,1,2,\dots$) 这些频率成分,频谱图中相邻谱线的间隔是基频 ω_0 ,信号周期越长,谱线间隔越小,频谱越稠密;反之,则越稀疏。这是周期信号频谱的最基本特点。

本节将从周期信号的傅里叶展开式出发,进一步分析周期信号的频谱特性。

3.3.1 波形对称性与谐波特性的关系

周期信号的波形与其谐波特性是对应的。将周期信号 $x(t)$ 展开成傅里叶级数时,如 $x(t)$ 为实信号,且其波形具有某种对称特性,则其傅里叶级数中某些谐波项将不出现,其谐波特性将变得简单。波形的对称性有两类,一类是整周期对称,如偶信号和奇信号;另



教学视频

一类是半周期对称,如奇谐信号和偶谐信号。前者的展开式中只含余弦项或正弦项,后者的展开式中只含有奇次谐波项或偶次谐波项。下面根据三角形式的傅里叶级数分别讨论上述情况。

1. 偶信号↔余弦级数

对偶信号 $x(t)$ (图 3.3.1)有

$$x(-t) = x(t)$$

于是在其展开系数的积分式中(积分区间为 $(-T/2, T/2)$), $x(t)\cos k\omega_0 t$ 是偶函数,而 $x(t)\sin k\omega_0 t$ 是奇函数。奇函数在对称区间积分为零,级数中的系数为

$$a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} x(t) \cos k\omega_0 t dt$$

$$b_k = 0$$

故信号的傅里叶级数不含正弦项,只含余弦项和直流项。

例如,图 3.3.1 所示信号经计算其傅里叶级数为

$$x(t) = \frac{E}{2} + \frac{4E}{\pi^2} \left(\cos\omega_0 t + \frac{1}{9} \cos 3\omega_0 t + \frac{1}{25} \cos 5\omega_0 t + \dots \right)$$

其中不含正弦项。

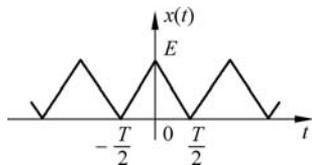


图 3.3.1 偶信号

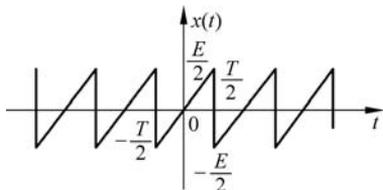


图 3.3.2 奇信号

2. 奇信号↔正弦级数

对奇信号(图 3.3.2)有

$$x(-t) = -x(t)$$

于是 $x(t)\cos k\omega_0 t$ 为奇函数, $x(t)\sin k\omega_0 t$ 为偶函数,从而有 $a_0 = 0, a_k = 0,$

$$b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} x(t) \sin k\omega_0 t dt$$

故奇信号的傅里叶级数中不含直流项和余弦项,只含正弦项。例如图 3.3.2 所示信号经计算其傅里叶级数为

$$x(t) = \frac{E}{\pi} \left(\sin\omega_0 t - \frac{1}{2} \sin 2\omega_0 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_0 t + \dots \right)$$

其中不含余弦项和直流项。

3. 半波像对称信号(奇谐信号)

如果信号波形沿时间轴平移半个周期,并上下翻转得出的波形与原波形重合(图 3.3.3),即 $x(t) = -x(t \pm T/2)$,则称该信号为半波像对称信号。其傅里叶展开系数为

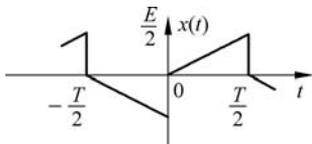


图 3.3.3 奇谐信号

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos k\omega_0 t dt \\
 &= \frac{2}{T} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^0 x(t) \cos k\omega_0 t dt + \int_0^{\frac{T}{2}} x(t) \cos k\omega_0 t dt \right] \\
 &= \frac{2}{T} \left[\int_0^{\frac{T}{2}} x\left(t - \frac{T}{2}\right) \cos k\omega_0 \left(t - \frac{T}{2}\right) dt + \int_0^{\frac{T}{2}} x(t) \cos k\omega_0 t dt \right]
 \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}
 x\left(t - \frac{T}{2}\right) &= -x(t) \\
 \cos k\omega_0 \left(t - \frac{T}{2}\right) &= \begin{cases} \cos k\omega_0 t, & k = 2, 4, 6, \dots \\ -\cos k\omega_0 t, & k = 1, 3, 5, \dots \end{cases}
 \end{aligned}$$

可得出

$$a_k = \begin{cases} 0, & k = 2, 4, 6, \dots \\ \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} x(t) \cos k\omega_0 t dt, & k = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

类似可得出

$$b_k = \begin{cases} 0, & k = 2, 4, 6, \dots \\ \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} x(t) \sin k\omega_0 t dt, & k = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

可见,在半波像对称信号的傅里叶级数中,只含有奇次谐波项($\omega = k\omega_0, k = 1, 3, 5, \dots$),不含偶次谐波项($\omega = k\omega_0, k = 2, 4, 6, \dots$),故半波像对称信号又称为奇谐信号。

另外还有所谓半波对称信号,就是其波形平移半个周期后所得出的波形与原波形重合的信号。这种信号的周期实际上是 $T/2$,即其基频实际上是 $2\omega_0$,以 T 为周期,即以 $\omega_0 = 2\pi/T$ 为基频进行谐波分析,当然就不会出现奇次谐波项(所有谐波频率都是 $2\omega_0$ 的整数倍,即 ω_0 的偶数倍)。这就是偶谐信号。

可见,当周期信号波形具有某种对称性时,其傅里叶级数中有些项就不出现。掌握傅里叶级数的这一特点,就可以迅速判断信号中包含哪些谐波成分,从而简化展开系数的计算。另外,有些信号经简单处理就具有对称性,这时可利用信号的潜在对称性以简化分析。如图 3.3.4 中的信号 $g(t)$,经平移 $T/2 - t_0$ 就变成图 3.3.1 中的偶信号 $x(t)$,从而可以利用对 $x(t)$ 的分析结果得出

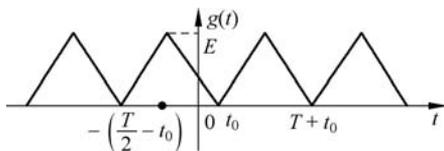


图 3.3.4 具有潜在对称性的信号

$$\begin{aligned}
 g(t) &= x\left(t + \frac{T}{2} - t_0\right) \\
 &= \frac{E}{2} + \frac{4E}{\pi^2} \left\{ \cos\left[\omega_0\left(t + \frac{T}{2} - t_0\right)\right] + \frac{1}{9} \cos\left[3\omega_0\left(t + \frac{T}{2} - t_0\right)\right] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{25} \cos\left[5\omega_0\left(t + \frac{T}{2} - t_0\right)\right] + \dots \right\} \\
 &= \frac{E}{2} - \frac{4E}{\pi^2} \left\{ \cos[\omega_0(t - t_0)] + \frac{1}{9} \cos[3\omega_0(t - t_0)] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{25} \cos[5\omega_0(t - t_0)] + \dots \right\}
 \end{aligned}$$

3.3.2 频谱结构与波形参数的关系

以图 3.2.1 所示周期矩形脉冲信号为例讨论这一问题。由例 3.2.2 可知,周期矩形脉冲信号的指数形式傅里叶级数为 $x(t) = \frac{E\tau}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{k\omega_0\tau}{2}\right) e^{jk\omega_0 t}$, 其频谱结构随波形参数的变化规律如下:

(1) 当信号幅度 E 、宽度 τ 保持不变,而周期 T 变化时,若 T 增大,则频率主瓣高度 $E\tau/T$ 减小,各条谱线高度也相应地减小;谱包络的第一个零点 $\pm 2\pi/\tau$ 不变,频率主瓣宽度不变;各谱线间隔 $\omega_0 = 2\pi/T$ 减小,谱线变密,因而频率主瓣内包含的谱线数增加。若 T 减小,则情况相反。图 3.3.5 是当 $E=1$, $\tau=0.1\text{s}$ 保持不变,而 T 分别为 $1/2\text{s}$, 1s , 2s 三种情况下的频谱图。

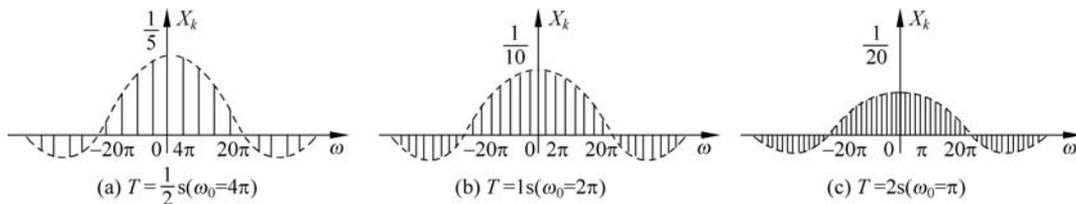


图 3.3.5 周期 T 对频谱结构的影响

(2) 当信号幅度 E 、重复周期 T 保持不变,而宽度 τ 变化时,若 τ 减小,则频率主瓣高度 $E\tau/T$ 减小,各条谱线高度也相应地减小。各谱线间隔 $\omega_0 = 2\pi/T$ 不变,频谱包络的第一个零点 $\pm 2\pi/\tau$ 增大,因而频率主瓣内包含的谱线数目增多。若 τ 增大,则情况相反。图 3.3.6 是当 $E=1$, $T=0.5\text{s}$ 保持不变,而 $\tau=1/2\text{s}$, $1/20\text{s}$ 和 $1/40\text{s}$ 三种情况下的频谱图。注意到,矩形脉冲信号的频率主瓣宽度与脉冲宽度成反比,这是一个十分重要的关系。当 τ 增大到 $\tau=T$ 时,有

$$X_k = \begin{cases} E, & k = 0 \\ E \text{Sa}(k\pi), & k \neq 0 \end{cases}$$

注意到 $\text{Sa}(k\pi) = 0, k \neq 0$, 因此只在零频 ($\omega = 0$) 处出现一条高度为 E 的谱线。事实上此时的周期矩形脉冲信号已转化为直流信号了, 其频谱自然只包含直流分量。

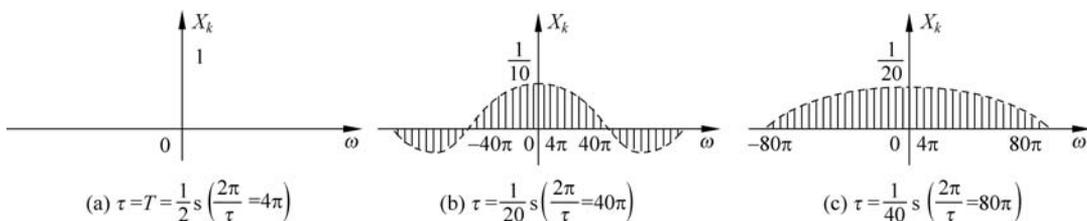


图 3.3.6 脉冲宽度对频谱结构的影响

3.3.3 功率谱和有效频带

周期信号的理论分析已表明, 绝大多数的非正弦周期信号具有无穷多次谐波。然而, 在对非正弦周期信号进行处理时, 通常总是让有限项谐波通过系统。因为让过多的谐波通过系统, 必将加重系统的负担, 使系统变得十分复杂。而周期信号的功率主要集中在低频段, 忽略高次谐波常可满足工程近似要求。当然, 具体的近似精度需做定量分析。

1. 功率谱

周期信号 $x(t)$ 是功率有限信号, 其平均功率 P 为

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) x^*(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t} \right]^* dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k^* \left[\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k^* \cdot X_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2 = |X_0|^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |X_k|^2 \\ &= c_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{c_k}{\sqrt{2}} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

式(3.3.1)称为功率有限信号的帕塞瓦尔等式, 它从功率的角度揭示了周期信号的时间特性和频率特性之间的关系, 即周期信号的平均功率等于直流分量及各次谐波平均功率之和。从正交信号集的观点, 该式表明一个周期信号的平均功率恒等于此信号在完备正交信号集中各分量的平均功率之和。式(3.3.1)中 c_0^2 是信号所含直流分量的功率, $\left(\frac{c_k}{\sqrt{2}}\right)^2$ 是第 k 次谐波分量的功率。 $c_0^2, \left(\frac{c_k}{\sqrt{2}}\right)^2 (k=1, 2, \dots)$ 与 $k\omega_0$ 的关系称为周期信号

的单边功率谱, $|X_k|^2$ 与 $k\omega_0$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 的关系则称为周期信号的双边功率谱。周期信号的功率谱表明了其平均功率在各次谐波频率上的分配情况, 显然也是离散的。

例 3.3.1 已知图 3.2.1 所示的周期矩形脉冲信号中, $E=1$, $T=1/4\text{s}$, $\tau=1/20\text{s}$, 求频带 $[0, 2\pi/\tau]$ 内各谐波功率之和占信号总平均功率的比例。

解: 该信号的平均功率为

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} |x(t)|^2 dt \\ &= 4 \int_{-\frac{1}{40}}^{\frac{1}{40}} 1 dt = 0.2 \end{aligned}$$

按例 3.2.1 得出的结果, 该信号的基频为 $2\pi/T=8\pi$, 频带 $[0, 2\pi/\tau]=[0, 40\pi]$ 内共有 5 条谱线, 各谐波功率之和为

$$\begin{aligned} P' &= |X_0|^2 + 2\{|X_1|^2 + |X_2|^2 + |X_3|^2 + |X_4|^2\} \\ &= \frac{1}{5^2} + \frac{2}{5^2} \left\{ \text{Sa}^2\left(\frac{\pi}{5}\right) + \text{Sa}^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \text{Sa}^2\left(\frac{3\pi}{5}\right) + \text{Sa}^2\left(\frac{4\pi}{5}\right) \right\} \\ &= \frac{1}{5^2} + \frac{2}{5^2} (0.8757 + 0.5728 + 0.2546 + 0.0547) \\ &= 0.1806 \\ \frac{P'}{P} &= \frac{0.1806}{0.2000} \approx 90\% \end{aligned}$$

2. 有效频带

前已提及, 周期信号的功率主要集中在低频段, 因此, 通常把信号中从零频率(直流)到所需考虑的最高频率的频率范围叫作信号所占有的有效频带, 记作 B_ω (rad/s) 或 B_f (Hz)。至于到底应该考虑到哪一次谐波, 工程上有时用从零频率开始到幅度谱下降为谱包络最大值的某个百分数(如 10%)作为标准, 有时用从零频率开始到某次谐波止的平均功率不小于周期信号整个平均功率的某个百分数(如 90%)作为标准。工程实际中, 这些百分数要视具体要求选定。

在例 3.3.1 中, 周期矩形脉冲信号的 $[0, 40\pi]$ 频带内的谐波功率之和占总平均功率的 90%, 因此, 如果在对周期矩形脉冲信号进行处理时, 允许有 10% 的功率损失, 则以 $[0, 40\pi]$ 作为该信号的有效频带是可以的。

3.3.4 线性时不变系统对周期信号的响应

周期信号可以分解成傅里叶级数, 这就给任意周期信号输入线性时不变系统之后的响应求解提供了又一种可行的办法。由于按式(3.1.3), 当给系统输入 $e^{jk\omega_0 t}$ 时, 系统的



教学视频

输出为 $H(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t}$, 故当系统输入一般的周期信号 $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t}$ 时, 线性时不变系统的输出可求得为

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \quad (3.3.2)$$

就是说, 系统的输出也可用傅里叶级数表示, 其中系统响应的 k 次谐波分量的复振幅简单地成为 $Y_k = X_k H(jk\omega_0)$, 系统可以看作改变输入信号谐波特性的一个滤波器。

例 3.3.2 一个线性时不变系统的单位冲激响应为 $h(t) = e^{-t}u(t)$, 求它对正弦信号 $x(t) = \sin\omega_0 t$ 的响应。

解: 此题当然可以直接按第 2 章所述的卷积积分法求解, 这里用频域解法。

按式(3.1.2), 有

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} \cdot e^{-\tau}u(\tau) d\tau \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(1+j\omega)\tau} d\tau = \frac{1}{1+j\omega} \end{aligned}$$

而

$$x(t) = \sin\omega_0 t = \frac{1}{2j}e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{2j}e^{-j\omega_0 t}$$

所以按式(3.3.2)可得系统响应为

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2j} \frac{1}{1+j\omega_0} e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{2j} \frac{1}{1-j\omega_0} e^{-j\omega_0 t} \\ &= \frac{-\omega_0}{1+\omega_0^2} \cos\omega_0 t + \frac{1}{1+\omega_0^2} \sin\omega_0 t \end{aligned}$$

例 3.3.3 求单位冲激响应为 $h(t) = e^{-t}u(t)$ 的线性时不变系统对图 3.2.1 所示周期矩形脉冲信号的响应。

解: 由例 3.3.2 可知

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \frac{1}{1+j\omega} \\ x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{E\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{k\omega_0\tau}{2}\right) \cdot e^{jk\omega_0 t} \end{aligned}$$

根据式(3.3.2)可得系统响应为

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{E\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{k\omega_0\tau}{2}\right) \cdot \frac{1}{1+jk\omega_0} \cdot e^{jk\omega_0 t}$$

3.4 非周期信号傅里叶变换

到目前为止, 本章只研究了周期信号, 应用的运算和分析工具是傅里叶级数展开。非周期信号是另一类重要信号, 但由于非周期信号的波形在有限长的时间段内不能重复出现, 不能像周期信号那样以一段时间(一个周期)内的傅里叶展开式代表整个信号, 从



教学视频

而需要采用不同的方法来分析非周期信号的频域特性,这就是傅里叶变换方法。

3.4.1 傅里叶变换的导出

在 3.3.2 节中,以图 3.2.1 所示的周期矩形脉冲信号为例,研究了周期信号频谱结构与波形参数的关系。当脉宽 τ 不变而周期 T 趋向无穷大时,周期矩形脉冲变成一个如图 3.4.1 所示的矩形脉冲信号,这是非周期信号。

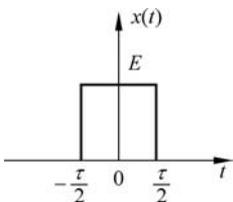


图 3.4.1 非周期矩形脉冲信号

非周期信号与周期信号两者的频谱特性之间有联系,但又有很大不同。下面考虑一个一般的非周期信号 $x(t)$,假定它是某个周期信号 $x_T(t)$ 当 $T \rightarrow \infty$ 时的一个特例,即

$$x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} x_T(t) \quad (3.4.1)$$

对 $x_T(t)$, 有

$$x_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t} \quad (3.4.2a)$$

$$X_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (3.4.2b)$$

式中, $\omega_0 = 2\pi/T$ 。当 T 变大时,基频 $\omega_0 = 2\pi/T$ 变小,相应的离散频谱变密。当 T 变得很大时, ω_0 变得很小,可用 $\Delta\omega$ 来表示,这时 $T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi/\Delta\omega$ 。由式(3.4.2b),有

$$TX_k = \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) e^{-jk\Delta\omega t} dt \quad (3.4.3)$$

显然, TX_k 是 $jk\Delta\omega$ 的函数,若令

$$TX_k = X(jk\Delta\omega) \quad (3.4.4)$$

则由式(3.4.4)和式(3.4.2a),有

$$\begin{aligned} x_T(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{X(jk\Delta\omega)}{T} e^{jk\Delta\omega t} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{X(jk\Delta\omega)}{2\pi} \Delta\omega \right] e^{jk\Delta\omega t} \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

当 $T \rightarrow \infty$ 时, $\Delta\omega \rightarrow 0$, 即有

$$\lim_{T \rightarrow \infty} x_T(t) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{X(jk\Delta\omega)}{2\pi} \Delta\omega \right] e^{jk\Delta\omega t} \quad (3.4.6)$$

当 $\Delta\omega \rightarrow 0$ 时,可用无穷小量 $d\omega$ 来表示 $\Delta\omega$,离散变量 $k\Delta\omega$ 变成连续变量 ω ,式(3.4.6)右端的离散无穷求和变成连续无穷积分,即有

$$\lim_{T \rightarrow \infty} x_T(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3.4.7)$$

根据式(3.4.1)有

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3.4.8)$$

进一步,根据式(3.4.3)和式(3.4.5),有

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} X(jk\Delta\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} TX_k \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} T \cdot \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T(t) e^{-jk\frac{2\pi}{T}t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

把式(3.4.9)和式(3.4.8)写在一起,有

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.4.10a)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3.4.10b)$$

式(3.4.10a)称为非周期信号 $x(t)$ 的傅里叶变换,式(3.4.10b)称为傅里叶反变换,两式简记为

$$X(j\omega) = \mathcal{F}[x(t)] \quad (3.4.11a)$$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(j\omega)] \quad (3.4.11b)$$

$x(t)$ 与 $X(j\omega)$ 一一对应,构成傅里叶变换对,简记为

$$x(t) \leftrightarrow X(j\omega) \quad (3.4.12)$$

3.4.2 傅里叶变换的物理意义

式(3.4.10b)表明,一个非周期信号 $x(t)$ 可以分解成无穷多个定义在 $-\infty < t < \infty$ 区间的虚指数信号 $e^{j\omega t}$ 的连续和,故式(3.4.10b)又称为非周期信号 $x(t)$ 的频域分解式。与傅里叶级数的意义不同的是,这里所分解的虚指数分量发生在一切频率上,不再具有周期信号傅里叶级数中各频率分量的频率间的倍数关系,并且各分量的振幅为无穷小量 $\frac{1}{2\pi} X(j\omega) d\omega$ 。但不难看出,非周期信号各频率分量的振幅与 $X(j\omega)$ 成正比,所以 $X(j\omega)$ 描述了各频率分量大小的相对比例关系,也就是描述了非周期信号 $x(t)$ 的频率特性。

根据式(3.4.4)可得

$$X(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} TX_k = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{2\pi}{\Delta\omega} X_k = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{X_k}{\Delta f}$$

显然, $X(j\omega)$ 表示单位频带的复振幅,所以 $X(j\omega)$ 称为“频谱密度函数”,简称“频谱”。频谱密度的概念与物理学中线密度的概念是很类似的。线密度是物体位置的函数,表征物体密度随位置的变化规律。对于一个具体的位置,线密度是无穷小量,但可由线密度求出物体某一段的平均密度。类似地,频谱密度是频率 ω 的函数,它表征信号所含各频率分量的大小随频率变化的规律。对一个具体的频率,它是无穷小量,然而正是这无穷多个振幅为无穷小的虚指数信号的连续和构成了非周期信号。



教学视频

下面,进一步研究傅里叶变换的物理意义。

由式(3.4.10b),有

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} [X(j\omega) e^{j\omega t} + X(-j\omega) e^{-j\omega t}] d\omega \end{aligned} \quad (3.4.13)$$

因为 $X(j\omega)$ 是 $j\omega$ 的函数,因而是复值函数,故可以表示为

$$X(j\omega) = \operatorname{Re}[X(j\omega)] + j\operatorname{Im}[X(j\omega)] = |X(j\omega)| e^{j\angle X(j\omega)} \quad (3.4.14)$$

在 3.5 节将会证明,对于实信号 $x(t)$,有

$$|X(j\omega)| = |X(-j\omega)|, \quad \angle X(j\omega) = -\angle X(-j\omega)$$

所以,式(3.4.13)变成

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} [|X(j\omega)| e^{j(\angle X(j\omega) + \omega t)} + |X(-j\omega)| e^{-j(\angle X(j\omega) + \omega t)}] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} |X(j\omega)| [e^{j(\angle X(j\omega) + \omega t)} + e^{-j(\angle X(j\omega) + \omega t)}] d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |X(j\omega)| \cos(\omega t + \angle X(j\omega)) d\omega \end{aligned} \quad (3.4.15)$$

式(3.4.15)表明,一个非周期实信号 $x(t)$,可以分解为定义在 $-\infty < t < \infty$ 范围的无穷多个正弦信号的连续和(积分),各频率分量连续地分布在 $0 \sim \infty$ 的一切频率上,振幅 $\frac{1}{\pi} |X(j\omega)| d\omega$ 是无穷小量,初始相位为 $\angle X(j\omega)$ 。这充分说明各频率分量振幅间的比例关系是由 $X(j\omega)$ 的模 $|X(j\omega)|$ 来描述的,初始相位关系是由 $X(j\omega)$ 的辐角 $\angle X(j\omega)$ 来描述的。因此,把 $|X(j\omega)|$ 和 $\angle X(j\omega)$ 随 ω 的变化规律分别称为信号的幅频特性和相频特性,把相应的频谱图分别称为幅度频谱图和相位频谱图。与前文类似,若 $X(j\omega)$ 是实偶函数,两个频谱图可以合画。同时,上述分析又一次说明,频域分析中引入负频率完全是为了数学运算的方便。

注意到,按式(3.4.10a)求信号的傅里叶变换需要作无穷积分,因而存在积分能否收敛的问题。与傅里叶级数情况一样,满足狄利克雷条件(参照 3.2 节,此处应取 $(-\infty, +\infty)$ 作为定义区间)是信号可以按式(3.4.10a)进行傅里叶变换的充分条件。需要指出的是,满足狄利克雷条件不是信号傅里叶变换的必要条件。在引入奇异信号理论后,一些不满足狄利克雷条件的信号也有了确定的傅里叶变换形式。因此,有时把直接按式(3.4.10a)得到的变换称为“经典傅里叶变换”。

例 3.4.1 求图 3.4.2(a)所示单边指数信号 $x(t) = e^{-at} u(t) (\alpha > 0)$ 的频谱。

解: 由式(3.4.10a),有

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} u(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt = \frac{1}{a+j\omega} \\ |X(j\omega)| &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}, \quad \angle X(j\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{a}\right) \end{aligned} \quad (3.4.16)$$

频谱图如图 3.4.2(b)、(c)所示。

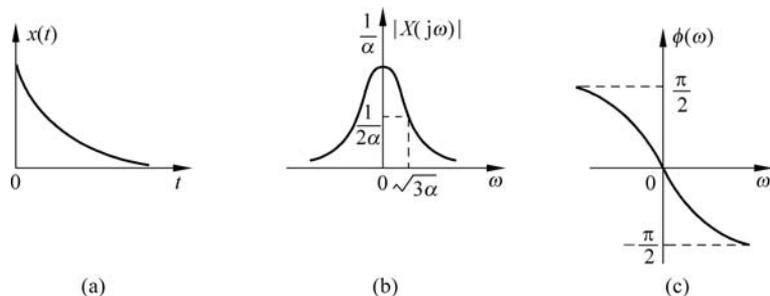


图 3.4.2 单边指数信号及其频谱

例 3.4.2 求图 3.4.3(a)所示矩形脉冲信号的频谱,并写出其频域分解式(傅里叶反变换)。

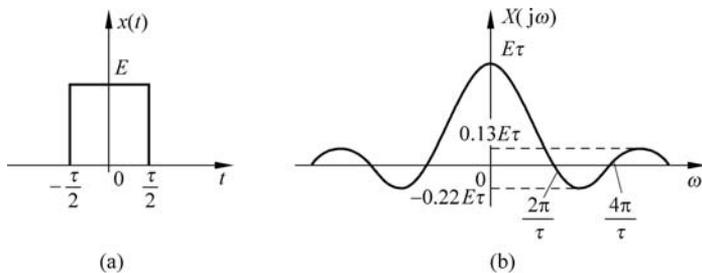


图 3.4.3 矩形脉冲信号及其频谱

解: 图 3.4.3 中的矩形脉冲信号可以表示为 $x(t) = EG_{\tau}(t)$, 由式(3.4.10a), 有

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} Ee^{-j\omega t} dt = E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

由于本例中 $X(j\omega)$ 是一个实函数, 故不必分别画幅度频谱图和相位频谱图, 直接画在一幅图上即可, 如图 3.4.3(b)所示。矩形脉冲频域分解式为

$$x(t) = EG_{\tau}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) e^{j\omega t} d\omega \quad (3.4.17)$$

对比图 3.4.3(b)和图 3.2.3(c)可以看出, 矩形脉冲信号的频谱密度函数与周期矩形脉冲信号的谱包络是相同的。此外, 由本例可知, 单位门信号 $G_{\tau}(t)$ 的傅里叶变换为 $\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$, 即

$$G_{\tau}(t) \leftrightarrow \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \quad (3.4.18)$$

例 3.4.3 求单位冲激信号 $\delta(t)$ 的频谱, 并写出它的频域分解形式。

解: 设单位冲激信号 $\delta(t)$ 的频谱为 $X(j\omega)$, 则

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$\text{即} \quad \delta(t) \leftrightarrow 1 \quad (3.4.19)$$

$\delta(t)$ 的频域分解式为

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega \quad (3.4.20)$$

$\delta(t)$ 及其频谱如图 3.4.4 所示。

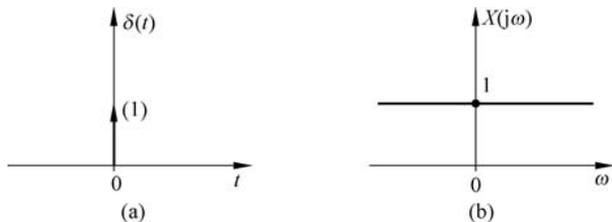


图 3.4.4 单位冲激信号及其频谱

从本例可知,单位冲激信号 $\delta(t)$ 只出现在 $t=0$ 时刻,但却包含了从 $-\infty$ 到 ∞ 所有频率成分,且各频率分量的(相对)大小是相同的,故 $\delta(t)$ 的频谱称为“白色谱”。

例 3.4.4 求单位阶跃信号 $u(t)$ 的频谱。

解: 单位阶跃信号 $u(t)$ 不满足绝对可积条件,不能直接通过式(3.4.10b)求其傅里叶变换。但是,由于

$$u(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} e^{-\alpha t} u(t), \quad \alpha > 0$$

设 $u(t)$ 的傅里叶变换为 $X(j\omega)$, 根据式(3.3.16), 有

$$X(j\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathcal{F}[e^{-\alpha t} u(t)] = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha + j\omega}$$

这表明, $X(j\omega)$ 在 $\omega=0$ 处表现为冲激。进一步, 有

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha + j\omega} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} - j \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} + \frac{1}{j\omega} \end{aligned}$$

可见, $X(j\omega)$ 的实部表现为在 $\omega=0$ 处的冲激, 这是因为

$$\operatorname{Re}[X(j\omega)] = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} = \begin{cases} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha}, & \omega = 0 \\ 0, & \omega \neq 0 \end{cases}$$

这个冲激的强度为

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2} d\frac{\omega}{\alpha} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \arctan\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) \Big|_{-\infty}^{\infty} \end{aligned}$$

$$= \pi$$

所以

$$u(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \quad (3.4.21)$$

单位阶跃信号及其频谱如图 3.4.5 所示。

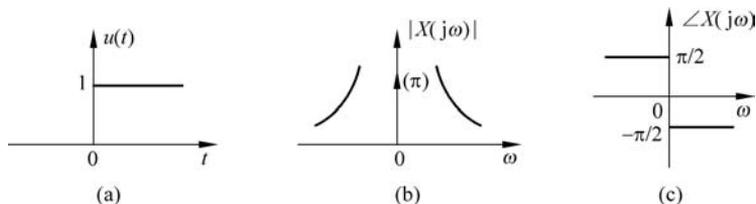


图 3.4.5 单位阶跃信号及其频谱

此例表明, 尽管 $u(t)$ 不满足绝对可积条件, 但通过取极限并引入奇异函数 $\delta(\omega)$, 仍可以找到它的傅里叶变换, 又一次可见奇异信号在信号分析理论中的重要作用。 $u(t)$ 的频谱在 $\omega=0$ 处有冲激, 是因为 $u(t)$ 含有明显的直流成分, 但它不是纯直流, 故还有其他高频分量。

3.5 连续时间傅里叶变换的性质

傅里叶变换作为一种数学运算, 有许多性质。这些性质不仅进一步说明了傅里叶变换定义式的一些特征, 而且进一步揭示了信号的时域和频域之间的内在联系。在很多情况下, 这些性质也可被用来求解复杂信号的频谱。

3.5.1 傅里叶变换的唯一性

由 $\mathcal{F}[x_1(t)] = \mathcal{F}[x_2(t)] = X(j\omega)$ 必然可以得出 $x_1(t) = x_2(t)$; 反之, 由 $\mathcal{F}^{-1}[X_1(j\omega)] = \mathcal{F}^{-1}[X_2(j\omega)] = x(t)$ 也必然可以得出 $X_1(j\omega) = X_2(j\omega)$, 即频谱与时间信号之间一一对应。

下面以前一种情况为例, 给出证明。假定 $\mathcal{F}[x_1(t)] = \mathcal{F}[x_2(t)] = X(j\omega)$, 则按傅里叶反变换公式有

$$x_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_2(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right] e^{j\omega t} d\omega$$

交换积分次序, 并按冲激信号的频域分解式(3.4.20)可得

$$x_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\tau) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-\tau)} d\omega \right] d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\tau) \delta(t-\tau) d\tau = x_2(t)$$

傅里叶变换的唯一性表明了信号及其频谱之间的唯一对应关系。这一性质为信号的变换、处理、鉴别和恢复等提供了理论依据。



教学视频

3.5.2 线性特性

傅里叶变换是一种线性运算。若

$$x_1(t) \leftrightarrow X_1(j\omega), \quad x_2(t) \leftrightarrow X_2(j\omega)$$

$$\text{则} \quad ax_1(t) + bx_2(t) \leftrightarrow aX_1(j\omega) + bX_2(j\omega) \quad (3.5.1)$$

其中, a 、 b 都是常数。

这个性质直接由傅里叶变换的定义式即可得出。

例 3.5.1 求 $x(t) = \delta(t+2) + 2\delta(t) + \delta(t-2)$ 的傅里叶变换。

$$\begin{aligned} \text{解:} \quad \mathcal{F}[x(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(t+2) + 2\delta(t) + \delta(t-2)] e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t+2) e^{-j\omega t} dt + 2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-2) e^{-j\omega t} dt \\ &= e^{j2\omega} + 2 + e^{-j2\omega} \\ &= 2 + 2\cos 2\omega \\ &= 4\cos^2 \omega \end{aligned}$$

3.5.3 奇偶特性

(1) 偶信号的频谱是偶函数, 奇信号的频谱是奇函数。

$$\text{证明: 由于 } X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

若 $x(-t) = x(t)$, 则

$$\begin{aligned} X(-j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega t} dt \stackrel{t=-\tau}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(-\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = X(j\omega) \end{aligned}$$

若 $x(-t) = -x(t)$, 则

$$\begin{aligned} X(-j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega t} dt \stackrel{t=-\tau}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(-\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = -X(j\omega) \end{aligned}$$

(2) 实信号的频谱是共轭对称函数, 即其实部是偶函数, 虚部是奇函数, 其幅度频谱是偶函数, 相位频谱是奇函数。

当 $x(t)$ 为实信号时, 其频谱为

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin \omega t dt \\ &= \text{Re}[X(j\omega)] + j \text{Im}[X(j\omega)] = |X(j\omega)| e^{j\angle X(j\omega)} \end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}[X(j\omega)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos\omega t \, dt \\ \operatorname{Im}[X(j\omega)] &= -\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin\omega t \, dt \\ |X(j\omega)| &= \sqrt{(\operatorname{Re}[X(j\omega)])^2 + (\operatorname{Im}[X(j\omega)])^2} \\ \angle X(j\omega) &= \arctan \frac{\operatorname{Im}[X(j\omega)]}{\operatorname{Re}[X(j\omega)]}\end{aligned}$$

显然, $\operatorname{Re}[X(j\omega)]$ 和 $|X(j\omega)|$ 是 ω 的偶函数, $\operatorname{Im}[X(j\omega)]$ 和 $\angle X(j\omega)$ 是 ω 的奇函数, 即

$$X(j\omega) = X^*(-j\omega)$$

3.5.4 共轭特性

若 $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$

则 $x^*(t) \leftrightarrow X^*(-j\omega)$ ($x^*(t)$ 表示 $x(t)$ 的共轭信号) (3.5.2)

证明:

$$\begin{aligned}x^*(t) &\leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) e^{-j\omega t} \, dt = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega t} \, dt \right]^* \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j(-\omega)t} \, dt \right]^* = X^*(-j\omega)\end{aligned}$$

对实信号 $x^*(t) = x(t)$, 根据傅里叶变换的唯一性, $X(j\omega) = X^*(-j\omega)$, 这已在前文提及。

3.5.5 对称特性

若 $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$

则 $X(j\omega) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$ (3.5.3)

表明, 若 $x(t)$ 的频谱为 $X(j\omega)$, 则时域信号 $X(j\omega)$ 的频谱为 $x(t)|_{t=\omega}$ 的翻转再乘以 2π 。利用对称特性可以避免复杂的积分运算, 而由现有的傅里叶变换关系简单地推导出很多信号的频谱。

证明:

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} \, d\omega \\ x(-t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{-j\omega t} \, d\omega\end{aligned}$$

上式中, 将积分变量 ω 记为 τ , 变量 t 用 ω 取代, 得

$$x(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\tau) e^{-j\omega\tau} \, d\tau$$

即

$$2\pi x(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X(jt) e^{-j\omega t} dt$$

这说明, $X(jt)$ 与 $2\pi x(-\omega)$ 构成一个傅里叶变换时, 式(3.5.3)得证。

例 3.5.2 求直流信号 $x(t)=1$ 的频谱。

解: 直流信号不满足绝对可积, 但可以利用已知的单位冲激信号频谱 $\mathcal{F}[\delta(t)]=1$ [式(3.4.19)], 再考虑对称特性, 有

$$\mathcal{F}[1] = 2\pi x(-\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

即 $1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$ (3.5.4)

如图 3.5.1 所示, 纯直流信号只含有零频率成分, 故频谱必然表现为 $\omega=0$ 处的冲激。

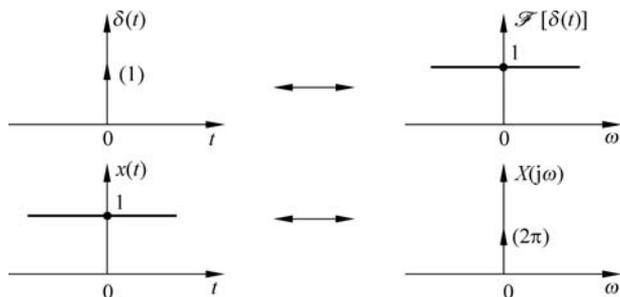


图 3.5.1 利用对称特性求直流信号的频谱

例 3.5.3 求 $\text{Sa}(\omega_c t)$ 的频谱。

解: 尽管 $\text{Sa}(\omega_c t)$ 满足绝对可积条件, 但直接用定义式计算其频谱需做复杂的积分。

可应用对称特性简化计算。由例 3.4.2 可知 $G_\tau(t) \leftrightarrow \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$, 从而有

$$\tau \text{Sa}\left(\frac{\tau t}{2}\right) \leftrightarrow 2\pi G_\tau(-\omega) = 2\pi G_\tau(\omega)$$

$$\text{Sa}\left(\frac{\tau}{2}t\right) \leftrightarrow \frac{2\pi}{\tau} G_\tau(\omega)$$

令 $\frac{\tau}{2} = \omega_c$, 则

$$\text{Sa}(\omega_c t) \leftrightarrow \frac{2\pi}{2\omega_c} G_{2\omega_c}(\omega) = \frac{\pi}{\omega_c} G_{2\omega_c}(\omega) \quad (3.5.5)$$

$\text{Sa}(\omega_c t)$ 的频谱如图 3.5.2 所示。

3.5.6 时频展缩特性

若

$$x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$$

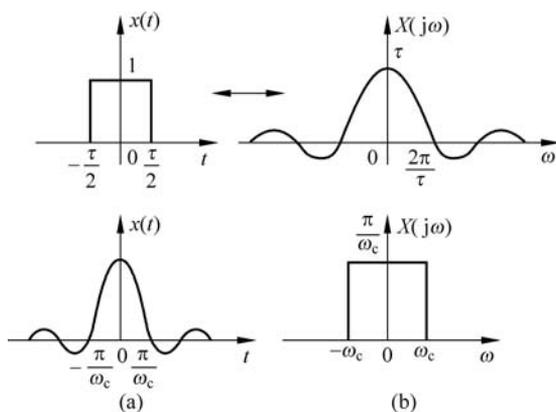
则

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(j\frac{\omega}{a}\right) \quad (3.5.6)$$

式中, a 为非零实常数。



教学视频

图 3.5.2 利用对称特性求 $\text{Sa}(\omega_c t)$ 的频谱

证明:

$$x(at) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-j\omega t} dt$$

令 $at = \tau$, 则

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-j\omega t} dt &= \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\frac{\omega}{a}\tau} \frac{1}{a} d\tau, & a > 0 \\ \int_{\infty}^{-\infty} x(\tau) e^{-j\frac{\omega}{a}\tau} \frac{1}{a} d\tau, & a < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\frac{\omega}{a}\tau} d\tau, & a > 0 \\ -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\frac{\omega}{a}\tau} d\tau, & a < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{a} X\left(j\frac{\omega}{a}\right), & a > 0 \\ -\frac{1}{a} X\left(j\frac{\omega}{a}\right), & a < 0 \end{cases} \\ &= \frac{1}{|a|} X\left(j\frac{\omega}{a}\right) \end{aligned}$$

即

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(j\frac{\omega}{a}\right)$$

特例, 当 $a = -1$ 时, 有

$$x(-t) \leftrightarrow X(-j\omega) \quad (3.5.7)$$

说明: 信号 $x(at)$ 表示了信号 $x(t)$ 波形在时域压缩为 $1/|a|$ ($|a| > 1$) 倍或扩展为 $1/|a|$ ($|a| < 1$) 倍, $X\left(j\frac{\omega}{a}\right)$ 则表示信号频谱 $X(j\omega)$ 在频率域扩展为 $|a|$ ($|a| > 1$) 倍或压缩为 $|a|$ ($|a| < 1$) 倍, 即信号在时域的持续时间被压缩(扩展), 对应频域的频率范围被扩展(压缩)。这里仍以矩形脉冲为例, 对此加以说明。

图 3.5.3 表示了矩形脉冲及其频谱的展缩情况。

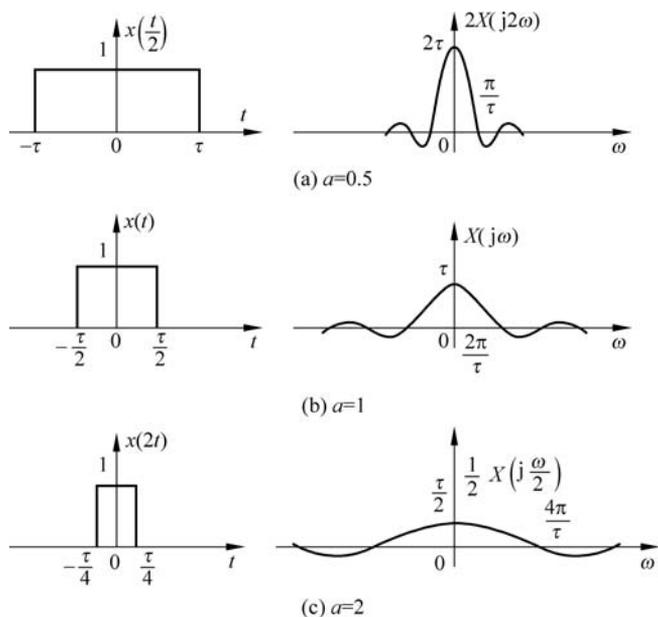


图 3.5.3 矩形脉冲的时频展缩

从图 3.5.3 可见, $x(t)$ 波形在时域扩展 2 倍成为 $x\left(\frac{t}{2}\right)$ 时, 脉冲宽度由 τ 增大为 2τ , 对应的频谱由 $X(j\omega)$ 变为 $2X(j2\omega)$, 表现为第一个零点由 $\omega = \frac{2\pi}{\tau}$ 变为 $\omega = \frac{\pi}{\tau}$, 频谱主瓣宽度变小。当 $x(t)$ 波形在时域压缩为 $\frac{1}{2}$ 成为 $x(2t)$ 时, 脉冲宽度由 τ 减小为 $\frac{\tau}{2}$, 对应的频谱由 $X(j\omega)$ 变为 $\frac{1}{2}X\left(j\frac{\omega}{2}\right)$, 表现为第一个零点由 $\omega = \frac{2\pi}{\tau}$ 变为 $\omega = \frac{4\pi}{\tau}$, 频谱主瓣宽度变大。因此, 如果以频谱主瓣作为矩形脉冲信号的有效频带, 则它与脉冲宽度成反比。这与 3.3.2 节对周期矩形脉冲信号的频谱分析结果是一致的。

如要压缩信号的持续时间, 就不得不以展宽信号有效频带为代价, 而如要压缩信号的有效频带, 则又不得不以增加信号的持续时间为代价。这一点在通信理论中, 表现为时长(通信速度)与带宽(信道容量)的矛盾。

下面运用傅里叶变换的时频展缩特性来求几个常用信号的频谱。

例 3.5.4 由例 3.3.1 知

$$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{a+j\omega}, \quad a > 0 \quad (3.5.8a)$$

由式(3.5.7), 有

$$e^{at}u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{a-j\omega}, \quad a > 0 \quad (3.5.8b)$$

由此可得偶对称双边指数信号的频谱

$$e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{a+j\omega} + \frac{1}{a-j\omega} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \quad (3.5.9)$$

以及奇对称双边指数信号的频谱

$$e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{a+j\omega} - \frac{1}{a-j\omega} = \frac{-2j\omega}{a^2 + \omega^2} \quad (3.5.10)$$

式(3.5.9)和式(3.5.10)中 $\alpha > 0$ 。

进一步,由于符号函数 $\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$ 可写成如下极限:

$$\text{sgn}(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} [e^{-\alpha t}u(t) - e^{\alpha t}u(-t)]$$

则由 $\text{sgn}(t)$ 表示的信号的频谱为

$$\text{sgn}(t) \leftrightarrow \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{-j2\omega}{a^2 + \omega^2} = \frac{2}{j\omega} \quad (3.5.11)$$

另外, $\text{sgn}(t) = 2u(t) - 1$, 而 $u(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$, 也可求得

$$\begin{aligned} \text{sgn}(t) &\leftrightarrow 2\mathcal{F}[u(t)] - \mathcal{F}[1] \\ &= 2\pi\delta(\omega) + \frac{2}{j\omega} - 2\pi\delta(\omega) \\ &= \frac{2}{j\omega} \end{aligned}$$

这与式(3.5.11)是一致的。

根据式(3.5.11)及对称特性,有

$$\frac{2}{jt} \leftrightarrow 2\pi\text{sgn}(-\omega)$$

$$\text{即} \quad \frac{1}{t} \leftrightarrow -j\pi\text{sgn}(\omega) = \begin{cases} j\pi, & \omega < 0 \\ -j\pi, & \omega > 0 \end{cases} \quad (3.5.12)$$

3.5.7 时移特性

若 $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$, 则

$$x(t + t_0) \leftrightarrow X(j\omega)e^{j\omega t_0} \quad (3.5.13)$$

式中, t_0 为任意实数。

证明:

$$\begin{aligned} x(t + t_0) &\leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(t + t_0)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\omega(\tau - t_0)} d\tau \quad (\text{令 } t + t_0 = \tau) \\ &= e^{j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau \end{aligned}$$

$$= e^{j\omega t_0} X(j\omega)$$

傅里叶变换的时移特性表明,信号波形在时域的平移,不改变其幅频特性,只改变了相频特性,即各频率产生了与其频率成正比的附加相移,这正是 3.9 节所要研究的无失真传输系统对信号的作用。

例 3.5.5 求 $\delta(t-t_0)$ (t_0 为任意实数)的频谱。

解: 由式(3.3.19)知 $\delta(t) \leftrightarrow 1$, 按时移特性有

$$\delta(t-t_0) \leftrightarrow 1 \cdot e^{-j\omega t_0} = e^{-j\omega t_0} \quad (3.5.14)$$

例 3.5.6 求图 3.5.4(a)所示三脉冲信号的频谱。

解: 该信号可表示为 $x(t) = EG_{\tau}(t+T) + EG_{\tau}(t) + EG_{\tau}(t-T)$

由式(3.4.18)

$$G_{\tau}(t) \leftrightarrow \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{故可得} \quad X(j\omega) &= E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) e^{j\omega T} + E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) + E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) e^{-j\omega T} \\ &= E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) (1 + e^{j\omega T} + e^{-j\omega T}) \\ &= E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) (1 + 2\cos\omega T) \end{aligned}$$

频谱如图 3.5.4(b)所示。

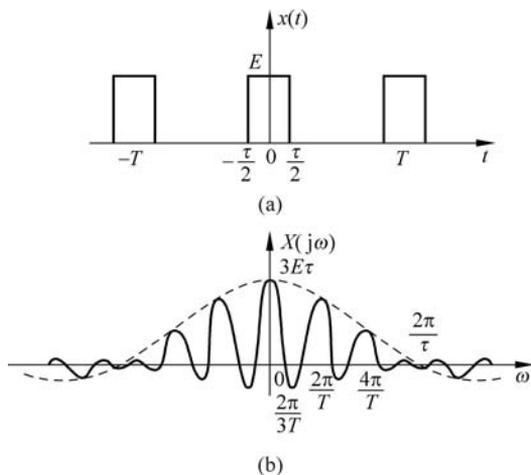


图 3.5.4 三脉冲信号及其频谱

需要指出的是,对于既时移又展缩的信号,可先后应用展缩和时移特性来求其频谱。此时有下面的公式:

若 $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$, 则

$$x(at+b) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(j\frac{\omega}{a}\right) e^{j\frac{b}{a}\omega}, \quad a \neq 0, a, b \text{ 均为实常数} \quad (3.5.15)$$



3.5.8 频移特性

若 $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$, 则

$$x(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow X[j(\omega - \omega_0)] \quad (3.5.16a)$$

式中, ω_0 为任意实数。此性质可由傅里叶变换定义式直接得到。这个性质表明, $x(t)$ 在时域中乘以 $e^{j\omega_0 t}$, 等效于 $X(j\omega)$ 在频域中移动了 ω_0 。具体地说, 如果信号的频谱原来是在 $\omega=0$ 附近(即信号为低频信号), 将信号乘以 $e^{j\omega_0 t}$, 就可使其频谱搬移到 $\omega=\omega_0$ 附近, 这一过程, 在通信中称为调制; 反之, 如果信号的频谱原来是在 $\omega=\omega_0$ 附近(即信号为高频信号), 则将信号乘以 $e^{-j\omega_0 t}$ 就可使其频谱搬移到 $\omega=0$ 附近, 这一过程, 在通信中称为解调; 如果信号的频谱原来是在 $\omega=\omega_1$ 附近, 将信号乘以 $e^{-j\omega_0 t}$ 就可使其频谱搬移到 $\omega=\omega_1 - \omega_0$ 附近, 这一过程称为变频。在频谱变换的实际应用中采用的是正弦或余弦信号。根据欧拉公式可得

$$\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}[e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}]$$

$$\sin\omega_0 t = \frac{1}{2j}[e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}]$$

由傅里叶变换的频移特性可得

$$x(t)\cos\omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2}\{X[j(\omega + \omega_0)] + X[j(\omega - \omega_0)]\} \quad (3.5.16b)$$

$$x(t)\sin\omega_0 t \leftrightarrow \frac{j}{2}\{X[j(\omega + \omega_0)] - X[j(\omega - \omega_0)]\} \quad (3.5.16c)$$

例 3.5.7 求 $e^{j\omega_0 t}$, $\cos\omega_0 t$ 及 $\sin\omega_0 t$ 的频谱(ω_0 为任意实数)。

解: 由式(3.5.4) $1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$

按频移特性, 有

$$e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \quad (3.5.17a)$$

再按欧拉公式及上式, 有

$$\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}[e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}] \leftrightarrow \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] \quad (3.5.17b)$$

$$\sin\omega_0 t = \frac{1}{2j}[e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}] \leftrightarrow j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)] \quad (3.5.17c)$$

由此看出, 具有单一频率的虚指数信号和正余弦信号, 其频谱密度仅仅在其频率处存在冲激。

例 3.5.8 求如图 3.5.5(a)所示矩形调幅信号的频谱。

解: 该矩形调幅波可记为

$$x(t) = EG_r(t)\cos\omega_0 t$$

由式(3.4.18) $G_{\tau}(t) \leftrightarrow \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$

再由式(3.5.16b)可得

$$X(j\omega) = \frac{E\tau}{2} \left\{ \text{Sa}\left(\frac{\omega + \omega_0}{2}\tau\right) + \text{Sa}\left(\frac{\omega - \omega_0}{2}\tau\right) \right\}$$

频谱如图 3.5.5(b)所示。

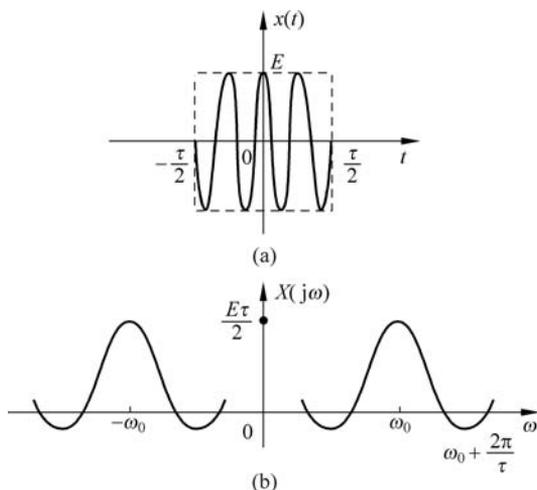


图 3.5.5 矩形调幅波及其频谱



教学视频

3.5.9 时域微分特性

若 $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$, 且 $\frac{dx(t)}{dt}$ 存在傅里叶变换, 则

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega X(j\omega) \quad (3.5.18a)$$

证明: 由傅里叶反变换公式有

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

两边对 t 微分, 得

$$\frac{d}{dt} x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \frac{d}{dt} (e^{j\omega t}) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} j\omega X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

则按照傅里叶变换定义式, 有

$$\frac{d}{dt} x(t) \leftrightarrow j\omega X(j\omega)$$

同样, 若 $\frac{d^n x(t)}{dt^n}$ 的傅里叶变换存在, 重复上述过程可得

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n X(j\omega) \quad (3.5.18b)$$

利用时域微分特性容易求出一些在通常意义下不好求得的变换关系。

例 3.5.9 求信号 $\delta'(t) = \frac{d}{dt}\delta(t)$ 及 $\delta^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n}\delta(t)$ 的频谱。

解：由式(3.3.19) $\delta(t) \leftrightarrow 1$, 并根据傅里叶变换时域微分特性可得

$$\delta'(t) \leftrightarrow j\omega \quad (3.5.19a)$$

以及

$$\delta^{(n)}(t) \leftrightarrow (j\omega)^n \quad (3.5.19b)$$

例 3.5.10 求信号 $x(t) = \frac{1}{t^2}$ 的频谱。

解：由式(3.5.12) $\frac{1}{t} \leftrightarrow -j\pi \operatorname{sgn}(\omega)$, 根据时域微分定理可得

$$-\frac{1}{t^2} \leftrightarrow -j\pi \operatorname{sgn}(\omega) j\omega = \pi\omega \operatorname{sgn}(\omega)$$

即

$$\frac{1}{t^2} \leftrightarrow -\pi\omega \operatorname{sgn}(\omega) = -\pi |\omega| \quad (3.5.20)$$

3.5.10 频域微分特性

若 $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$, 则

$$tx(t) \leftrightarrow j \frac{d}{d\omega} X(j\omega) \quad (3.5.21a)$$

$$t^n x(t) \leftrightarrow j^n \frac{d^n}{d\omega^n} X(j\omega) \quad (3.5.21b)$$

证明： $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$, 两边对 ω 微分, 即

$$\begin{aligned} \frac{dX(j\omega)}{d\omega} &= \frac{d}{d\omega} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{d}{d\omega} [e^{-j\omega t}] dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (-jt) x(t) e^{-j\omega t} dt \end{aligned}$$

按照傅里叶变换定义式, 有

$$-jtx(t) \leftrightarrow \frac{d}{d\omega} X(j\omega)$$

即

$$tx(t) \leftrightarrow j \frac{d}{d\omega} X(j\omega)$$

重复上述过程即可得出式(3.5.21b)。

利用频域微分特性也可以求得一些在通常意义下不便进行变换的信号的频谱。

例 3.5.11 求信号 $x(t) = t^n$ 的频谱。

解: 由式(3.5.4), 有

$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

由频域微分特性得到

$$t^n \leftrightarrow j^n \frac{d^n}{d\omega^n} [2\pi\delta(\omega)] = 2\pi j^n \frac{d^n}{d\omega^n} \delta(\omega) = 2\pi j^n \delta^{(n)}(\omega) \quad (3.5.22)$$

例 3.5.12 求信号 $x(t) = tu(t)$ 的频谱。

解: 由式(3.3.21) $u(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$

根据频域微分特性, 有

$$\begin{aligned} tu(t) &\leftrightarrow j \frac{d}{d\omega} \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] \\ &= j\pi\delta'(\omega) - \frac{1}{\omega^2} \end{aligned} \quad (3.5.23)$$

3.5.11 时域卷积定理

若 $x_1(t) \leftrightarrow X_1(j\omega)$, $x_2(t) \leftrightarrow X_2(j\omega)$, 则

$$x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(j\omega) \cdot X_2(j\omega) \quad (3.5.24)$$

证明: $x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t-\tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t-\tau) e^{-j\omega t} dt \right] d\tau$$

(令 $t-\tau = u$) $= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_2(u) e^{-j\omega u} e^{-j\omega\tau} du \right] d\tau$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} x_2(u) e^{-j\omega u} du$$

$$= X_1(j\omega) \cdot X_2(j\omega)$$

时域卷积定理说明, 两个时间信号的卷积运算得到的信号的频谱等于两个时间信号频谱的乘积, 即在时域的卷积运算等效于在频域的乘法运算。时域卷积定理为卷积的计算提供了一种简捷的方法, 因为

$$x_1(t) * x_2(t) = \mathcal{F}^{-1} \{ \mathcal{F} [x_1(t)] \cdot \mathcal{F} [x_2(t)] \}$$

例 3.5.13 如图 3.5.6 所示, 求 $x_1(t) * x_2(t)$ 的频谱。

解: $x_1(t) * x_2(t) = G_\tau(t) * G_\tau(t)$

根据时域卷积定理

$$\begin{aligned} G_\tau(t) * G_\tau(t) &= \tau\Lambda_{2\tau}(t) \leftrightarrow \left[\tau \text{Sa} \left(\frac{\omega\tau}{2} \right) \right] \cdot \left[\tau \text{Sa} \left(\frac{\omega\tau}{2} \right) \right] \\ &= \tau^2 \text{Sa}^2 \left(\frac{\omega\tau}{2} \right) \end{aligned} \quad (3.5.25)$$

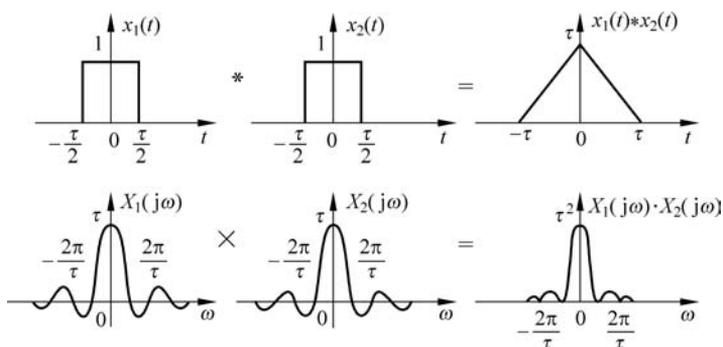


图 3.5.6 时域卷积等效于频域相乘

故有

$$\Lambda_{2\tau}(t) \leftrightarrow \tau \text{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \quad (3.5.26)$$

3.5.12 频域卷积定理

若 $x_1(t) \leftrightarrow X_1(j\omega)$, $x_2(t) \leftrightarrow X_2(j\omega)$, 则

$$x_1(t) \cdot x_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X_1(j\omega) * X_2(j\omega) \quad (3.5.27)$$

式中, $X_1(j\omega) * X_2(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(j\lambda) X_2(j\omega - j\lambda) d\lambda$ 。

证明:
$$\begin{aligned} x_1(t) \cdot x_2(t) &\leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) x_2(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(j\lambda) e^{j\lambda t} d\lambda \right] x_2(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(j\lambda) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t) e^{-j(\omega-\lambda)t} dt \right] d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(j\lambda) X_2(j\omega - j\lambda) d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} X_1(j\omega) * X_2(j\omega) \end{aligned}$$

这个定理说明,时域的乘法运算等效于频域的卷积运算。在求频谱时,如信号可分解成两信号的乘积,而其中之一频谱是冲激或冲激串时,使用频域卷积定理是方便的。

例 3.5.14 利用频域卷积定理求信号 $x(t) \cos\omega_0 t$ 的频谱,假定 $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$ 。

解: 已知

$$\cos\omega_0 t \leftrightarrow \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$$

根据频域卷积定理,有

$$x(t) \cos\omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$$

$$= \frac{1}{2} [X(j\omega + j\omega_0) + X(j\omega - j\omega_0)]$$

这与式(3.5.16b)是一致的。

3.5.13 时域积分定理

若 $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$, $X(0)$ 存在且有限, 则

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{X(j\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\delta(\omega) \quad (3.5.28)$$

式中, $X(0) = X(j\omega) \Big|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \Big|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt$ 。

证明:
$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = x(t) * u(t)$$

而
$$u(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

根据时域卷积定理, 有

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau &= x(t) * u(t) \leftrightarrow X(j\omega) \cdot \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] \\ &= \frac{X(j\omega)}{j\omega} + \pi X(j\omega)\delta(\omega) \\ &= \frac{X(j\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\delta(\omega) \end{aligned}$$

例 3.5.15 求图 3.5.7 所示信号 $x(t)$ 的频谱。

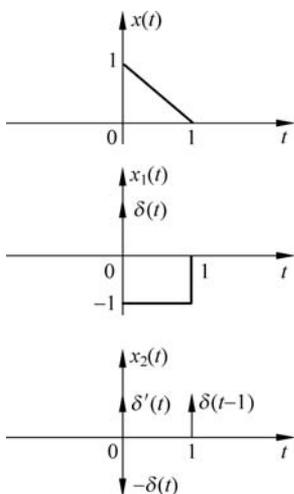


图 3.5.7 由时域积分定理求频谱 又

解: 本例当然可以应用傅里叶变换定义直接求解。这里给出先做微分, 再应用时域卷积定理的求法。

令 $x(t)$ 的一、二阶导数分别为 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$, 则

$$x_1(t) = \int_{-\infty}^t x_2(\tau) d\tau, \quad x(t) = \int_{-\infty}^t x_1(\tau) d\tau$$

由于 $x_2(t) = \delta'(t) - \delta(t) + \delta(t-1)$

其频谱为

$$X_2(j\omega) = j\omega - 1 + e^{-j\omega}$$

$$X_2(0) = 0$$

故 $x_1(t)$ 的频谱为

$$X_1(j\omega) = \frac{X_2(j\omega)}{j\omega} = \frac{j\omega - 1 + e^{-j\omega}}{j\omega}$$

$$X_1(0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{j\omega - 1 + e^{-j\omega}}{j\omega} = 0$$

从而

$$X(j\omega) = \frac{X_1(j\omega)}{j\omega} = \frac{1 - j\omega - e^{-j\omega}}{\omega^2}$$

3.5.14 信号能量与频谱的关系

绝对可积的非周期信号 $x(t)$ 的平均功率为零,其能量是有限的,其能量定义为 $E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$, 进一步,

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot x^*(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega) e^{-j\omega t} d\omega \right] dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega) \cdot X(j\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega \end{aligned} \quad (3.5.29)$$

式(3.5.29)称为能量有限信号的帕塞瓦尔等式。它表明,能量有限的非周期信号的总能量等于各频率分量能量之和,每个频率分量的能量为 $\frac{|X(j\omega)|^2}{2\pi} d\omega$ 。

式(3.5.29)中, $|X(j\omega)|^2$ 定义为信号的能量谱密度,简称能量谱,它表示单位频带所包含的信号能量,单位是焦耳/赫兹(J/Hz)。信号的能量与幅度谱 $|X(j\omega)|$ 平方成正比。

上面介绍的傅里叶变换的基本性质对于深入了解信号的时域描述与频域描述之间的关系,对于求信号的频谱和进行系统的频域分析都是非常重要的。其中卷积定理具有特别突出的地位,因为时移特性、频移特性、时域微积分特性、频域微分特性等都可以看作卷积定理的具体应用形式。还需指出,在使用卷积定理时,要避免出现 $\delta(\omega) * \delta(\omega)$ 以及 $\frac{1}{j\omega} \delta(\omega)$ 等不确定的乘积关系。例如求 $u(t) * u(t)$ 的频谱,直接应用卷积定理就会出现 $\delta(\omega) \cdot \delta(\omega)$ 情况,此时可先求出 $u(t) * u(t) = tu(t)$,再用频域微分特性求解。

3.6 周期信号傅里叶变换

前文通过傅里叶展开对周期信号进行了频谱分析,并主要针对非周期信号学习了傅里叶变换。由于周期信号不满足绝对可积条件,其频谱无法直接利用傅里叶变换定义式求得。但3.5节通过引入 δ 函数,已找到正余弦周期信号的傅里叶变换,下面将通过引入 δ 函数,对一般的周期信号进行傅里叶变换,从而可以对周期信号和非周期信号用相同的观点和方法进行分析运算,这给信号与系统分析带来很大方便。



教学视频



教学视频

假定一般的周期信号 $x_T(t)$ 的周期为 T , 由 3.2 节可知

$$x_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$$

其中, $X_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x_T(t) e^{-jk\frac{2\pi}{T}t} dt$

令 $x_T(t)$ 的傅里叶变换为 $X_T(j\omega)$, 则

$$\begin{aligned} X_T(j\omega) &= \mathcal{F} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t} \right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \mathcal{F} [e^{jk\frac{2\pi}{T}t}] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k 2\pi \delta \left(\omega - k \frac{2\pi}{T} \right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi X_k \delta \left(\omega - k \frac{2\pi}{T} \right) \end{aligned} \quad (3.6.1)$$

式(3.6.1)表明, 一般的周期信号的傅里叶变换也是一系列冲激函数的线性组合, 这些冲激发生在各次谐波频率上, 强度为相应谐波分量复振幅的 2π 倍。这与前文傅里叶展开的分析结果是一致的, 周期信号仍是离散频谱, 只是前文以复振幅 X_k 描述各次谐波 ($\omega = k \frac{2\pi}{T}$) 的实际大小, 这里用 $2\pi X_k \delta \left(\omega - k \frac{2\pi}{T} \right)$ 描述各次谐波的相对大小。

例 3.6.1 求图 3.6.1 所示周期冲激串 $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ (T 为周期) 的频谱。

解: 先求 $\delta_T(t)$ 指数形式的傅里叶级数展开式, 不失一般性, 设 $t_0 = -\frac{T}{2}$, 由式(3.2.14), 有

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta_T(t) e^{-jk\frac{2\pi}{T}t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-jk\frac{2\pi}{T}t} dt \\ &= \frac{1}{T} \end{aligned} \quad (3.6.2)$$

由式(3.6.1), 有

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\delta_T(t)] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \cdot \frac{1}{T} \delta \left(\omega - k \frac{2\pi}{T} \right) \\ &= \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta \left(\omega - k \frac{2\pi}{T} \right) \\ &= \omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0) \end{aligned}$$

记

$$\delta_{\omega_0}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$\text{则有} \quad \mathcal{F}[\delta_T(t)] = \omega_0 \delta_{\omega_0}(\omega), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (3.6.3)$$

可见周期冲激串的频谱仍为周期冲激串,强度为 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$,周期也为 $\frac{2\pi}{T}$,如图 3.6.1 所示。

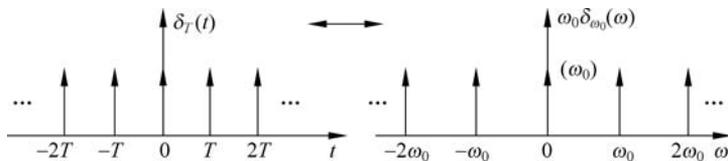


图 3.6.1 周期冲激串及其频谱

此外,一般的周期信号 $x_T(t)$ (T 为周期)还可以用 $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ 表示如下:

$$x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nT) = x(t) * \delta_T(t) \quad (3.6.4)$$

其中, $x(t)$ 一般取周期信号 $x_T(t)$ 在原点附近的一个周期(称为主周期)。按傅里叶变换时域卷积定理,并令 $\mathcal{F}[x(t)] = X(j\omega)$, 则

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x_T(t)] &= X(j\omega) \cdot \omega_0 \delta_{\omega_0}(\omega) \\ &= X(j\omega) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \omega_0 \delta(\omega - k\omega_0) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \omega_0 X(jk\omega_0) \delta(\omega - k\omega_0) \end{aligned} \quad (3.6.5)$$

式(3.6.5)也表明,一般周期信号的傅里叶变换(频谱)是发生在其各次谐波频率 ($\omega = k\omega_0$) 上的一串冲激,这与式(3.6.1)所表示的意义相同。式(3.6.5)还进一步表明在时域将 $x(t)$ 的波形进行以 T 为周期的延拓,等效于在频域对其频谱进行以 $\omega_0 = 2\pi/T$ 为周期的等距离抽样,即时域的周期性对应于频域的离散性。

进一步,根据傅里叶变换的唯一性,并比较式(3.6.1)和式(3.6.5),有

$$2\pi X_k = \omega_0 X(jk\omega_0)$$

$$\text{即} \quad X_k = \frac{1}{T} X(jk\omega_0) = \frac{1}{T} X(j\omega) \Big|_{\omega = k\omega_0}$$

再结合 $X(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} TX_k$ (见 3.4.1 节)可以看出,周期信号 $x_T(t)$ 的复振幅 X_k 与相应的主周期 $x(t)$ 的频谱 $X(j\omega)$ 之间可以互求,而且 $X(j\omega)$ 在形状上与 X_k 的频谱包络线相同。

由上述分析, $x_T(t)$ 的傅里叶级数展开式可写成

$$x_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

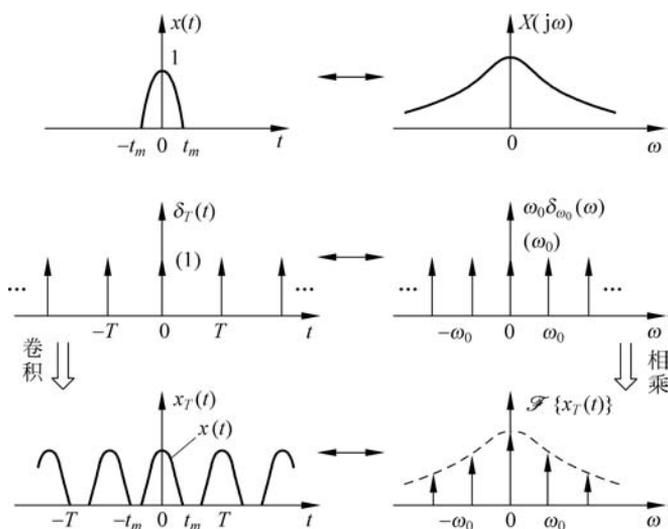


图 3.6.2 周期信号及其频谱

由式(3.6.4),有

$$x_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t - nT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

这就是泊松(Poisson)求和公式。

例 3.6.2 求图 3.6.3(a)所示周期矩形脉冲的频谱。

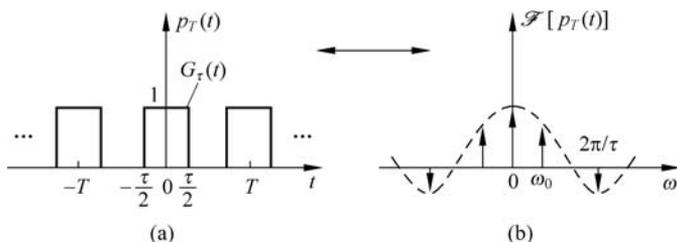
解: 图 3.6.3(a)中 $p_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_\tau(t - nT) = G_\tau(t) * \delta_T(t)$

由式(3.4.18) $G_\tau(t) \leftrightarrow \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$

根据式(3.6.5),有

$$\mathcal{F}[p_T(t)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tau\omega_0 \text{Sa}\left(\frac{k\omega_0\tau}{2}\right) \delta(\omega - k\omega_0)$$

频谱如图 3.6.3(b)所示。


 图 3.6.3 周期矩形脉冲及其频谱($T=2\tau$)



3.7 傅里叶反变换

3.8节将研究线性时不变系统的频域分析方法,先求出系统的频率响应 $H(j\omega)$ 和信号的频谱 $X(j\omega)$,再将二者相乘得到系统零状态响应 $y_{zs}(t)$ 的频谱 $Y_{zs}(j\omega) = H(j\omega) \cdot X(j\omega)$,最后由 $Y_{zs}(j\omega)$ 求出 $y_{zs}(t)$ 。另外,在许多信号分析和处理应用中,常常需要根据已知的信号频谱求出对应的时域信号。这些都涉及傅里叶反变换的求解问题,可以按照3.4节给出的信号的频域分解 $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$,通过积分运算求解傅里叶反变换,但有时此积分运算较复杂,因此本节将总结其他几种常见的傅里叶反变换求解方法。

3.7.1 利用傅里叶变换对称特性

按照式(3.5.3),若 $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$,则 $X(jt) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$ 。由此可见,在已知 $X(j\omega)$ 的前提下,可以先求出其时域形式 $(\omega \rightarrow t) X(jt)$ 的傅里叶变换 $\mathcal{F}[X(jt)]$,即 $2\pi x(-\omega)$,再求得 $x(t) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[X(jt)]_{\omega \rightarrow -t}$ 。

例 3.7.1 求 $X(j\omega) = G_{\omega_0}(\omega)$ 对应的时域信号 $x(t)$ 。

解: $X(j\omega)_{\omega \rightarrow t} = X(jt) = G_{\omega_0}(t)$

由式(3.3.18),有

$$\mathcal{F}[X(jt)] = \omega_0 \text{Sa}\left(\frac{\omega_0 \omega}{2}\right)$$

从而有

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[X(jt)]_{\omega \rightarrow -t} \\ &= \frac{\omega_0}{2\pi} \text{Sa}\left(\frac{\omega_0 \omega}{2}\right)_{\omega \rightarrow -t} \\ &= \frac{\omega_0}{2\pi} \text{Sa}\left(\frac{-\omega_0 t}{2}\right) \\ &= \frac{\omega_0}{2\pi} \text{Sa}\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right) \end{aligned}$$

例 3.7.2 求 $X(j\omega) = j\pi \text{sgn}(\omega)$ 对应的时域信号 $x(t)$ 。

解: $X(j\omega)_{\omega \rightarrow t} = X(jt) = j\pi \text{sgn}(t)$

由式(3.5.11),有

$$\mathcal{F}[X(jt)] = j\pi \mathcal{F}[\text{sgn}(t)] = \frac{2\pi}{\omega}$$

从而有

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[X(j\omega)]_{\omega \rightarrow -t} = -\frac{1}{t}$$



教学视频

3.7.2 部分分式展开

$X(j\omega)$ 一般是 $j\omega$ 的有理分式,可以将 $j\omega$ 看成一个变量,先做除法(如果分母阶数低于分子阶数),再将余式(有理真分式)进行部分分式展开,然后利用下述关系进行傅里叶反变换的求解。

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right] = u(t)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[1] = \delta(t)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[(j\omega)^n] = \delta^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n}\delta(t), \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{2}{j\omega}\right] = \text{sgn}(t)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{\alpha + j\omega}\right] = e^{-\alpha t}u(t), \quad \alpha > 0$$

两边对 α 求导,可得

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{(\alpha + j\omega)^n}\right] = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}u(t), \quad \alpha > 0, n = 2, 3, \dots$$

以及

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\omega_0}{(\alpha + j\omega)^2 + \omega_0^2}\right] = e^{-\alpha t}\sin\omega_0 t u(t), \quad \alpha > 0$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\alpha + j\omega}{(\alpha + j\omega)^2 + \omega_0^2}\right] = e^{-\alpha t}\cos\omega_0 t u(t), \quad \alpha > 0$$

上面这两个公式可用于避免傅里叶反变换结果中出现复杂的复数表示(见例 3.7.5)。

例 3.7.3 已知信号 $x(t)$ 的频谱为 $X(j\omega) = \frac{-\omega^2 + 4j\omega + 5}{-\omega^2 + 3j\omega + 2}$, 求 $x(t)$ 。

$$\begin{aligned} \text{解: } X(j\omega) &= 1 + \frac{j\omega + 3}{(j\omega)^2 + 3j\omega + 2} \\ &= 1 + \frac{j\omega + 3}{(j\omega + 1)(j\omega + 2)} \\ &= 1 + \frac{2}{j\omega + 1} + \frac{-1}{j\omega + 2} \end{aligned}$$

从而

$$x(t) = \delta(t) + 2e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)$$

例 3.7.4 已知信号 $x(t)$ 的频谱 $X(j\omega) = \frac{1}{(j\omega + 1)(j\omega + 2)^3}$, 求 $x(t)$ 。

$$\text{解: } X(j\omega) = \frac{a}{j\omega + 1} + \frac{b_0}{(j\omega + 2)^3} + \frac{b_1}{(j\omega + 2)^2} + \frac{b_2}{j\omega + 2}$$

$$\begin{aligned}
 \text{其中, } a &= [X(j\omega)(j\omega+1)]|_{j\omega=-1} = 1 \\
 b_0 &= [X(j\omega)(j\omega+2)^3]|_{j\omega=-2} = -1 \\
 b_1 &= \frac{d}{d(j\omega)} [F(j\omega)(j\omega+2)^3]|_{j\omega=-2} = \frac{-1}{(j\omega+1)^2}|_{j\omega=-2} = -1 \\
 b_2 &= \frac{1}{2!} \frac{d^2}{d(j\omega)^2} [F(j\omega)(j\omega+2)^3]|_{j\omega=-2} = \frac{1}{2} \frac{2}{(j\omega+1)^3}|_{j\omega=-2} = -1
 \end{aligned}$$

$$\text{即} \quad X(j\omega) = \frac{1}{j\omega+1} - \frac{1}{(j\omega+2)^3} - \frac{1}{(j\omega+2)^2} - \frac{1}{j\omega+2}$$

$$\text{从而} \quad x(t) = e^{-t}u(t) - \frac{1}{2}t^2e^{-2t}u(t) - te^{-2t}u(t) - e^{-2t}u(t)。$$

例 3.7.5 已知信号 $x(t)$ 的频谱 $X(j\omega) = \frac{j\omega+2}{(j\omega)^2+2j\omega+5}$, 求 $x(t)$ 。

$$\begin{aligned}
 \text{解: } X(j\omega) &= \frac{j\omega+1+1}{(j\omega+1)^2+2^2} \\
 &= \frac{j\omega+1}{(j\omega+1)^2+2^2} + \frac{1}{2} \frac{2}{(j\omega+1)^2+2^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{从而} \quad x(t) &= e^{-t} \cos 2tu(t) + \frac{1}{2} e^{-t} \sin 2tu(t) \\
 &= \left(\cos 2t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) e^{-t} u(t)
 \end{aligned}$$

3.7.3 利用傅里叶变换性质和常见信号的傅里叶变换对

本方法要求熟记常见的傅里叶变换对,并要求能熟练掌握傅里叶变换的性质,是上述方法的补充。

例 3.7.6 已知信号 $x(t)$ 的频谱为 $X(j\omega) = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \frac{1}{j(\omega - \omega_0)}$, ω_0 为一实常数,求 $x(t)$ 。

解: 本题信号的频谱 $X(j\omega)$ 可写成

$$\begin{aligned}
 X(j\omega) &= \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] * \delta(\omega - \omega_0) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] * [2\pi\delta(\omega - \omega_0)]
 \end{aligned}$$

应用傅里叶变换频域卷积定理,有

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \mathcal{F}^{-1} \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] \mathcal{F}^{-1} [2\pi\delta(\omega - \omega_0)] \\
 &= e^{j\omega_0 t} u(t)
 \end{aligned}$$

另外,直接利用变换对和傅里叶变换的频移性质也可求得 $x(t) = e^{j\omega_0 t} u(t)$ 。

例 3.7.7 已知 $y(t) * \frac{d}{dt}y(t) = (1-t)e^{-t}u(t)$, 求 $y(t)$ 。

解: 根据傅里叶变换的时域卷积定理和时域微分特性, 有

$$Y(j\omega) \cdot j\omega Y(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 1} - \frac{1}{(j\omega + 1)^2}$$

即
$$Y(j\omega) \cdot Y(j\omega) = \frac{1}{(j\omega + 1)^2}$$

$$Y(j\omega) = \pm \frac{1}{j\omega + 1}$$

从而
$$y(t) = \pm e^{-t}u(t)$$

3.8 系统的频域分析

3.1 节中已明确, 简谐振荡信号 $e^{j\omega t}$ ($-\infty < t < \infty$) 是线性时不变系统的本征信号, 简谐振荡信号激励线性时不变系统产生的输出响应也是同频率的简谐振荡信号, 只是复振幅成为 $H(j\omega)$ [见式 (3.1.3)]。另外, 通过前文已知, 通过傅里叶级数展开或傅里叶变换, 信号可以表示为一系列简谐振荡信号的线性组合。这样就可以在信号分解基础上合成每一个简谐振荡分量的响应, 得到线性时不变系统对信号的响应。

3.8.1 线性时不变系统零状态响应的频域表示

设输入信号为 $x(t)$, 其频谱为 $X(j\omega)$, 按式 (3.1.3), 有

$$e^{j\omega t} \rightarrow H(j\omega)e^{j\omega t}$$

按系统的齐次性, 有

$$\frac{1}{2\pi} X(j\omega) d\omega \cdot e^{j\omega t} \rightarrow H(j\omega) \frac{1}{2\pi} X(j\omega) d\omega e^{j\omega t}$$

再按系统的可加性, 得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} X(j\omega) d\omega e^{j\omega t} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) \frac{1}{2\pi} X(j\omega) d\omega e^{j\omega t}$$

上式左端正好是信号 $x(t)$ 的频域分解式 [见式 (3.3.10b)], 因此, 上式右端必然是由信号 $x(t)$ 引起的系统的零状态响应 $y_{zs}(t)$ 。也就是说, 系统对任意信号 $x(t)$ 的零状态响应 $y_{zs}(t)$ 可以写成如下的形式:

$$y_{zs}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \mathcal{F}^{-1} [H(j\omega) F(j\omega)] \quad (3.8.1)$$

这就是 $y_{zs}(t)$ 零状态响应的频域分解式。因此, 在信号 $x(t)$ 的激励下, 系统零状态响应的频谱为

$$Y_{zs}(j\omega) = \mathcal{F} [y_{zs}(t)] = H(j\omega) X(j\omega) \quad (3.8.2)$$

式 (3.8.2) 表明, 线性时不变系统对输入信号的作用体现为将输入频谱乘以 $H(j\omega)$



教学视频

思维导图

转化为输出频谱, $H(j\omega)$ 是系统单位冲激响应 $h(t)$ 的傅里叶变换[见式(3.1.2)], 称为系统的频率响应, 简称频响。

注意: 本书后文中如不特殊指明, 系统均指线性时不变系统。

例 3.8.1 系统的频率响应 $H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}$, 求它对单位阶跃信号 $u(t)$ 的响应。

解: 由时域分析可知 $u(t) \rightarrow y_{zs}(t) = h(t) * u(t)$

$$u(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

故

$$\begin{aligned} Y_{zs}(j\omega) &= \frac{1}{j\omega + 1} \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] \\ &= \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \cdot \frac{1}{j\omega + 1} \\ &= \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} - \frac{1}{j\omega + 1} \end{aligned}$$

从而得

$$\begin{aligned} y_{zs}(t) &= \mathcal{F}^{-1} [Y_{zs}(j\omega)] \\ &= u(t) - e^{-t}u(t) = (1 - e^{-t})u(t) \end{aligned}$$

当然, 式(3.8.2)的结果也可以由系统零状态响应的卷积积分关系 $y_{zs}(t) = h(t) * x(t)$ 直接计算得到。因此, 同一个系统既可以在时域方式表示, 也可以在频域方式表示, 如图 3.8.1 所示。

式(3.1.2)是系统频率响应 $H(j\omega)$ 的一种获得方法, 即由系统的单位冲激响应直接作傅里叶变换。式(3.1.3)指明了另一种求得 $H(j\omega)$ 的方法, 即点测法。在系统的输入端分别输入各种频率的正弦信号, 测出系统的正弦响应输出, 求出输出复振幅与输入复振幅之比。而式(3.8.2)则提供了求 $H(j\omega)$ 的第三种方法, 即可以给系统输入任意一个信号, 求出系统响应的频谱与输入信号频谱之比, 即

$$H(j\omega) = \frac{Y_{zs}(j\omega)}{X(j\omega)} \quad (3.8.3)$$

因为 $H(j\omega) = \mathcal{F}[h(t)]$, 所以 $H(j\omega)$ 具有傅里叶变换的所有性质, 而且一般可表示为

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \operatorname{Re}[H(j\omega)] + j\operatorname{Im}[H(j\omega)] \\ &= |H(j\omega)| e^{j\angle H(j\omega)} \end{aligned}$$

这样, 由式(3.1.3), 系统对 $e^{j\omega t}$ ($-\infty < t < \infty$) 的响应可写为

$$|H(j\omega)| e^{j\angle H(j\omega)} e^{j\omega t} = |H(j\omega)| e^{j(\omega t + \angle H(j\omega))}, \quad -\infty < t < \infty$$

可见, $H(j\omega)$ 的模 $|H(j\omega)|$ (常记为 $H(\omega)$) 表征了系统对各频率分量幅度的加权能力, 称为系统的幅频特性。而 $H(j\omega)$ 的辐角 $\angle H(j\omega)$ 表征了各频率分量通过系统后产生的附加相移, 称为系统的相频特性。

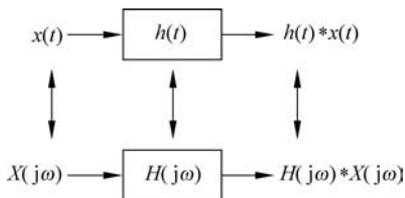


图 3.8.1 系统的时域表示与频域表示的变换对关系

3.8.2 微分方程系统的频域表示

前文曾指出,线性时不变系统可以由常系数微分方程表示为

$$(p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1p + a_0)y(t) = (b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \cdots + b_1p + b_0)x(t), n \geq m$$

假定系统在零状态条件下(初始状态全部为零), $\mathcal{F}[x(t)] = X(j\omega)$, $\mathcal{F}[y_{zs}(t)] = Y_{zs}(j\omega)$,对上式两端分别进行傅里叶变换,按傅里叶变换的时域微分特性,有

$$\begin{aligned} & [(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \cdots + a_1(j\omega) + a_0] Y_{zs}(j\omega) \\ &= [b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \cdots + b_1(j\omega) + b_0] X(j\omega) \end{aligned}$$

按式(3.8.3),有

$$H(j\omega) = \frac{Y_{zs}(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} \quad (3.8.4)$$

其中, $N(j\omega)$ 、 $D(j\omega)$ 分别为

$$N(j\omega) = b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \cdots + b_1(j\omega) + b_0$$

$$D(j\omega) = (j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \cdots + a_1(j\omega) + a_0$$

例 3.8.2 已知描述一线性时不变系统的微分方程为

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = x(t)$$

求该系统对信号 $x(t) = e^{-3t}u(t)$ 的响应。

解: 按照式(3.8.4),系统函数为

$$H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2 + 3j\omega + 2}$$

而 $x(t) = e^{-3t}u(t)$ 的频谱 $X(j\omega)$ 为

$$X(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 3}$$

故系统对 $x(t) = e^{-3t}u(t)$ 响应的频谱 $Y_{zs}(j\omega)$ 为

$$\begin{aligned} Y_{zs}(j\omega) &= H(j\omega)X(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2 + 3j\omega + 2} \cdot \frac{1}{j\omega + 3} \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{j\omega + 1} + \frac{-1}{j\omega + 2} + \frac{\frac{1}{2}}{j\omega + 3} \end{aligned}$$

从而系统对 $x(t) = e^{-3t}u(t)$ 的响应为

$$\begin{aligned} y_{zs}(t) &= \mathcal{F}^{-1}[Y_{zs}(j\omega)] \\ &= \frac{1}{2}e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-3t}u(t) \end{aligned}$$

3.8.3 电路系统的频域分析

考虑由基本的电路元件(电阻、电感、电容)构成的 RLC 电路。先研究这三种元件上

的电压与电流的频谱关系。

如图 3.8.2 所示,对于电阻 R 有

$$u_R(t) = Ri_R(t)$$

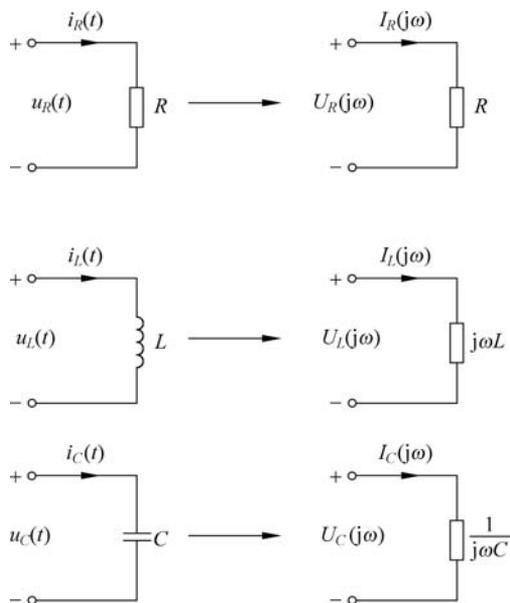


图 3.8.2 电阻、电感、电容及其复阻抗

两边取傅里叶变换得

$$U_R(j\omega) = RI_R(j\omega)$$

如以电压为输出,电流为输入,得到电阻复阻抗为

$$\frac{U_R(j\omega)}{I_R(j\omega)} = R \quad (3.8.5)$$

对于电感 L ,有

$$u_L(t) = L \frac{d}{dt} i_L(t)$$

两边取傅里叶变换得

$$U_L(j\omega) = L \cdot j\omega I_L(j\omega)$$

同样得到电感的复阻抗(感抗)为

$$\frac{U_L(j\omega)}{I_L(j\omega)} = j\omega L \quad (3.8.6)$$

对于电容 C ,有

$$i_C(t) = C \frac{d}{dt} u_C(t)$$

两边取傅里叶变换,有

$$I_C(j\omega) = C \cdot j\omega U_C(j\omega)$$

同样得到电容的复阻抗(容抗)为

$$\frac{U_C(j\omega)}{I_C(j\omega)} = \frac{1}{j\omega C} \quad (3.8.7)$$

利用 RLC 电路中电压、电流的频谱及其复阻抗的代数运算关系代替电压、电流本身与其元件值的微积分运算关系,即可进行电路系统的频域分析。

例 3.8.3 求图 3.8.3(a) 所示 RC 电路对单位阶跃电压信号 $u(t)$ 的零状态响应。

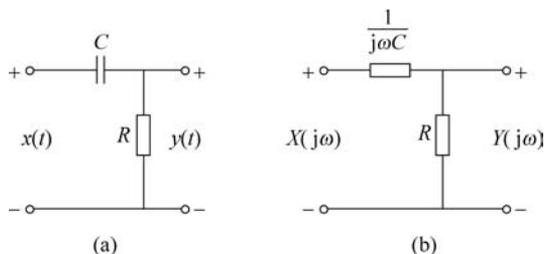


图 3.8.3 RC 电路及其频域等效电路

解: 此系统的频域等效电路如图 3.8.3(b) 所示,其中 $X(j\omega)$ 是输入电压信号的频谱, $Y(j\omega)$ 是输出电压信号的频谱, $\frac{1}{j\omega C}$ 是电容 C 的复阻抗。

由于

$$X(j\omega) = \mathcal{F}[u(t)] = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

$$\text{故由分压关系可得 } Y(j\omega) = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} \cdot X(j\omega)$$

$$= \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} \cdot \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right]$$

$$= \frac{RC}{1 + j\omega RC}$$

从而得系统的零状态单位阶跃响应为

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{RC}{1 + j\omega RC} \right] = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{1}{\frac{1}{RC} + j\omega} \right] \\ &= e^{-\frac{1}{RC}t} u(t) \end{aligned}$$

3.9 无失真传输与滤波

从式(3.8.1)和式(3.8.2)可以看出,线性时不变系统通过乘以系统频率响应 $H(j\omega)$,将输入信号频谱转化为输出信号频谱,即系统起到频谱变换器作用。在一些应用场合中,希望信号通过线性系统后不产生任何失真,即系统对信号无失真传输,如通信



系统中对通信信号的放大和衰减；而在许多情况下，希望信号通过系统后产生“预定”的失真，如脉冲电路中的整形电路。本节将从频域角度讨论系统的这两种作用。

3.9.1 信号的无失真传输

从时域上说，信号的无失真传输是指通过系统后输出信号波形与输入信号波形相同，只允许改变其幅度及增加一定的延迟时间。相应的系统称为无失真传输系统。

无失真传输系统的输出信号 $y_{zs}(t)$ 与输入信号 $x(t)$ 的关系为

$$y_{zs}(t) = kx(t - t_d) \quad (3.9.1)$$

即输出信号的幅度是输入信号幅度的 k 倍 (k 为实常数, $k \neq 0$)，输出信号比输入信号延迟了 t_d 秒 ($t_d \geq 0$)。设输出信号 $y_{zs}(t)$ 的频谱为 $Y_{zs}(j\omega)$ ，输入信号的频谱为 $X(j\omega)$ ，则有

$$Y_{zs}(j\omega) = k e^{-j\omega t_d} X(j\omega)$$

因此无失真传输系统的系统函数 $H(j\omega)$ 为

$$H(j\omega) = \frac{Y_{zs}(j\omega)}{X(j\omega)} = k e^{-j\omega t_d} \quad (3.9.2a)$$

$$\text{幅频特性} \quad |H(j\omega)| = k, \quad k \text{ 为非零实常数} \quad (3.9.2b)$$

$$\text{相频特性} \quad \angle H(j\omega) = -\omega t_d, \quad t_d > 0 \quad (3.9.2c)$$

式(3.9.2)表明，无失真传输系统应满足两个条件：①系统的幅频特性在整个频率范围 ($-\infty < \omega < \infty$) 内为非零实常数，从而保证输入信号所有频率分量通过系统后保持原有的幅度比例关系；②系统的相频特性在整个频率范围内是过坐标原点的一条斜率为负的直线，即输入信号各频率分量通过系统后的附加相移与频率成正比，以保证所有频率分量通过系统后都有相同延时，保持相对位置不变，从而不产生相位失真，如图 3.9.1 所示。

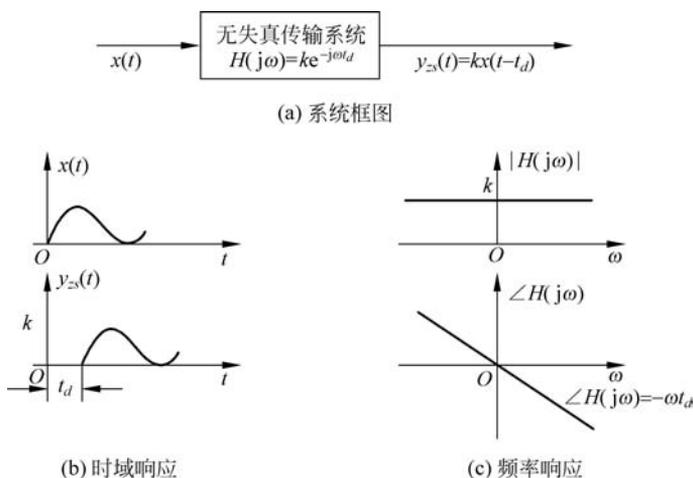


图 3.9.1 无失真传输系统

例 3.9.1 证明图 3.9.2 所示的示波器输入衰减器是无失真传输系统,其中 $R_1 C_1 = R_2 C_2$ 。

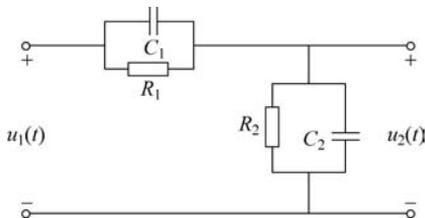


图 3.9.2 示波器输入衰减器

证明: 此衰减器的系统函数 $H(j\omega)$ 为

$$\begin{aligned}
 H(j\omega) &= \frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)} \\
 &= \frac{\frac{R_2}{j\omega C_2}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}} \\
 &= \frac{\frac{R_1}{j\omega C_1}}{\frac{R_1}{j\omega C_1} + \frac{R_2}{j\omega C_2}} \\
 &= \frac{\frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C_2}}{\frac{R_1}{1 + j\omega R_1 C_1} + \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C_2}} = \frac{R_2}{R_2 + R_1} \quad (\text{利用 } R_1 C_1 = R_2 C_2)
 \end{aligned}$$

可见 $|H(j\omega)| = \frac{R_2}{R_2 + R_1}$ 是常数, $\angle H(j\omega) = 0$ 满足无失真传输条件, 从而该衰减器是无失真传输系统。

需要指出, 满足式(3.9.2)的无失真传输系统不仅无法实现, 而且也是不必要的。一方面, 实际系统不可能在整个频率范围内保持恒定不变的幅频特性和与频率成正比的相频特性。例如例 3.9.1 中的衰减器, 当输入信号含有足够高的频率成分时, 由于电阻的引线电感和网络分布电容的存在, 该衰减器也会产生频率选择作用。所以常用的线性时不变系统只能在一个有限的频率范围内近似为无失真传输系统。另一方面, 常用的信号的频率范围有限或存在有效频带, 集中了信号绝大部分的平均功率或能量。因此, 工程上的无失真传输系统指的是在所传输的信号频率范围或有效频带内满足式(3.9.2b)和式(3.9.2c)的系统。



3.9.2 信号的滤波

前已提及,在许多情况下,希望信号通过系统后产生“预定”的失真,或者想改变一个信号所含频率分量的相对大小,或者全部滤除某些频率分量,这样的过程称为信号的滤波。对于线性时不变系统来说,由于输出的频谱就是输入的频谱乘以系统的频率响应,因此,对于这类系统,适当选择系统的频率响应就可以很方便地完成滤波功能,此时,系统可看作具有频率选择特性的滤波器,这也是线性时不变系统一种很重要的应用。

系统作为滤波器得到了广泛应用,在通信、图像处理、信号获取等工程应用中,滤波器几乎是不可缺少的基本单元。按照系统频率响应 $H(j\omega)$ 可以选择不同频率的特性,系统实现的滤波器分为低通滤波器、高通滤波器、带通滤波器和带阻滤波器等。下面先从理想滤波器入手,并以低通滤波器为主,深入讨论线性时不变系统对信号的滤波作用。

1. 低通滤波器

1) 理想低通滤波器

顾名思义,低通滤波器是只允许信号的低频分量通过而衰减和抑制高频分量的系统。一个理想的低通滤波器具有这样的特性,即它对某一频率范围内的虚指数信号给予完全的通过,而在这以外的予以彻底的抑制。因此,在 $(-\omega_c, \omega_c)$ 范围内通过虚指数信号 $e^{j\omega t}$,而在此之外,即 $|\omega| > \omega_c$,给予完全抑制的理想低通滤波器的频率响应为

$$H(j\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_d}, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases} = G_{2\omega_c}(\omega) e^{-j\omega t_d} \quad (3.9.3)$$

式中, t_d 为大于零的实数。

其幅频特性和相频特性如图 3.9.3 所示。

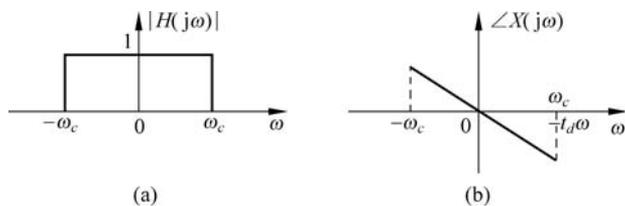


图 3.9.3 理想低通滤波器的幅频、相频特性

理想低通滤波器能够无失真地传输 $[-\omega_c, \omega_c]$ 范围内的频率,故此频率范围称为理想低通滤波器的通频带,此范围之外的频率分量不能出现在输出中(被抑制),故 $|\omega| > \omega_c$ 的频率范围称为阻带。频率 ω_c 称为截止频率。

由式(3.9.3)可以得出,理想低通滤波器的单位冲激响应 $h(t)$ 为

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathcal{F}^{-1} [G_{2\omega_c}(\omega) e^{-j\omega t_d}] \\ &= \mathcal{F}^{-1} [G_{2\omega_c}(\omega)] * \delta(t - t_d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[G_{2\omega_c}(t)]_{\omega \rightarrow -t} * \delta(t - t_d) \\
&= \frac{1}{2\pi} 2\omega_c \text{Sa}(\omega_c \omega)_{\omega \rightarrow -t} * \delta(t - t_d) \\
&= \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}(\omega_c t) * \delta(t - t_d) \\
&= \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}[\omega_c(t - t_d)] \tag{3.9.4}
\end{aligned}$$

其波形如图 3.9.4 所示。

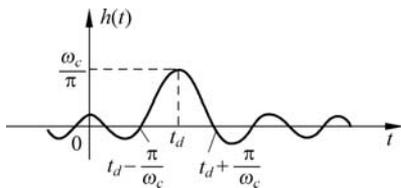


图 3.9.4 理想低通滤波器的冲激响应

由图 3.9.4 可见, $h(t)$ 在 $t = t_d$ 前后出现延伸到 $\pm\infty$ 的振荡, 即单位冲激信号通过理想低通滤波器后产生了明显失真。这是由于理想低通滤波器对 $\delta(t)$ 产生了频率截断效应, 抑制了 $\delta(t)$ 中高于 ω_c 的频率分量。当 $\omega_c \rightarrow \infty$ 时, 理想低通滤波器将成为无失真传输系统, 会有 $h(t) = \delta(t - t_d)$, 由此也可以得到下式:

$$\lim_{\omega_c \rightarrow \infty} \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}[\omega_c(t - t_d)] = \delta(t - t_d) \tag{3.9.5}$$

单位冲激信号 $\delta(t)$ 是在 $t = 0$ 时刻加入滤波器的, 而输出在 $t = 0$ 时刻之前 ($t < 0$) 就有了(见图 3.9.4), 这是违背先因后果的因果律的, 显然理想低通滤波器在现实中是不存在的, 或者说是不可实现的。不过理想滤波器是一种有用的抽象, 它虽不可实现, 却对理论研究十分有用。

佩利(Paley)和维纳(Wiener)曾证明了一个关于连续时间系统物理可实现的准则(佩利-维纳准则), 即系统的幅频特性 $|H(j\omega)|$ 必须同时满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln |H(j\omega)||}{1 + \omega^2} d\omega < \infty \tag{3.9.6a}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega < \infty \tag{3.9.6b}$$

按此准则, 只要系统的幅频特性在某一宽度不为零的频带内恒为零, 相应的系统就是不可实现的。由此可见, 上述的理想低通以及后面将要提到的理想高通、理想带通等滤波器都是物理上不可实现的。此外, 具有高斯型 ($e^{-\omega^2}$) 系统函数的系统, 虽然其幅频特性处处不为零, 但由于

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln e^{-\omega^2}|}{1 + \omega^2} d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2}{1 + \omega^2} d\omega \\
&= \lim_{B \rightarrow \infty} \int_{-B}^B \left(1 - \frac{1}{1 + \omega^2}\right) d\omega \\
&= \lim_{B \rightarrow \infty} \int_{-B}^B (\omega - \arctan \omega) \Big|_{-B}^B = \infty
\end{aligned}$$

从而不满足式(3.9.6a),故该系统也是物理不可实现的。

还要指出,佩利—维纳准则只对系统的幅频特性提出要求,对相位特性没有给出约束,因而该准则只是系统物理可实现的必要条件,而不是充分条件。

2) 吉布斯(Gibbs)现象

进一步讨论理想低通滤波器的频率截断效应对信号波形的影响。先看图 3.9.3 所示理想低通滤波器的单位阶跃响应。记单位阶跃信号 $u(t)$ 的频谱为 $E(j\omega)$,则

$$E(j\omega) = \mathcal{F}[u(t)] = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

因此单位阶跃响应 $s(t)$ 的频谱

$$\begin{aligned} S(j\omega) &= H(j\omega)E(j\omega) \\ &= G_{2\omega_c}(\omega)e^{-j\omega t_d} \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} s(t) &= \mathcal{F}^{-1}[S(j\omega)] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] e^{j\omega t} e^{-j\omega t_d} d\omega \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{e^{j\omega(t-t_d)}}{j\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{\cos[\omega(t-t_d)]}{j\omega} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{\sin[\omega(t-t_d)]}{\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_c} \frac{\sin[\omega(t-t_d)]}{\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_c(t-t_d)} \frac{\sin x}{x} dx \end{aligned} \quad (3.9.7)$$

函数 $\frac{\sin x}{x}$ 的积分称为正弦积分,通常记为

$$\text{si}(y) = \int_0^y \frac{\sin x}{x} dx \quad (3.9.8)$$

其积分值在数学手册中有标准表格可查。这样理想低通滤波器的单位阶跃响应最终可写成

$$s(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{si}[\omega_c(t-t_d)] \quad (3.9.9)$$

其波形如图 3.9.5 所示。

从图中可以看出 $s(t)$ 具有如下特点:

(1) 相对输入的单位阶跃信号已有明显失真,体现在上升沿不再陡峭,在上升之前就预先有起自 $t = -\infty$ 的振荡,这又一次证明了理想低通滤波器的不可实现性。上升之后又有延续至 $t = \infty$ 的振荡。这种振荡现象,称为吉布斯现象,振荡波形称为吉布斯波纹。

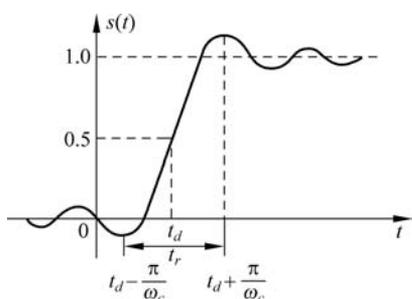


图 3.9.5 理想低通滤波器的单位阶跃响应

吉布斯现象是由于 ω_c 有限带来的频率截断效应引起的,若 $\omega_c \rightarrow \infty$,理想低通滤波器将成为一无失真传输系统,吉布斯现象将不会存在。

(2) 吉布斯波纹的振荡频率等于理想低通滤波器的截止频率,即振荡周期为 $2\pi/\omega_c$ 。

(3) 在上升沿之前有一个幅度最大的负向振峰(预冲),其幅度约为稳态值的 9%;在上升之后又有一个幅度最大的正向振峰(过冲),比稳态值高出也是约 9%。而且无论 ω_c 多大,只要 $\omega_c < \infty$,过冲和预冲的幅度总是这么大,只有当 $\omega_c = \infty$ 时,它们的幅度才为零。

(4) 若定义 $s(t)$ 的上升沿为从预冲的最大值到过冲的最大值所需时间,并记作 t_r ,则由图 3.9.5 可见

$$t_r = \frac{2\pi}{\omega_c}$$

容易看出 t_r 与 ω_c 成反比,即 ω_c 越小, t_r 越大,上升越慢; ω_c 越大, t_r 越小,上升越快。

下面讨论理想低通滤波器对图 3.9.6(a) 所示矩形脉冲的响应。由于矩形脉冲可视为两个单位阶跃信号之差,故理想低通滤波器对矩形脉冲的响应也可视为两个单位阶跃响应之差,如图 3.9.6(b) 所示。

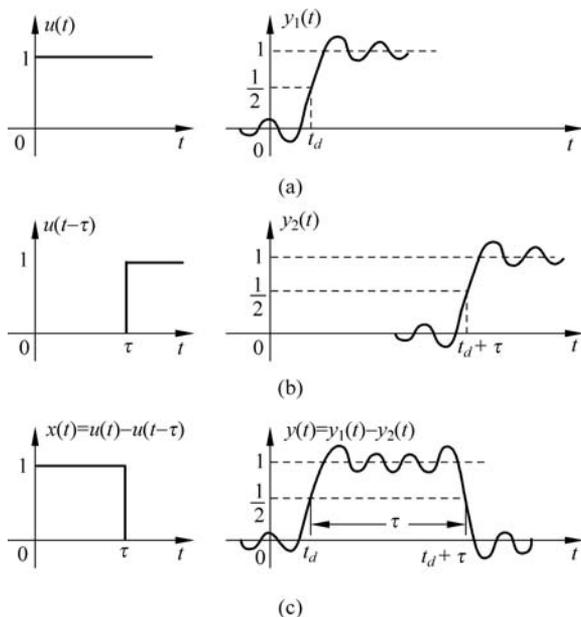


图 3.9.6 理想低通滤波器的矩形脉冲响应

由图 3.9.6 可见,在矩形脉冲响应中,吉布斯现象仍然存在,而且输出脉冲的形状主要取决于理想低通滤波器的截止频率 ω_c 。由上面对上升时 t_r 的分析可知, ω_c 越大,输出脉冲前后沿的陡度越大,输出脉冲形状越接近矩形,其中包含的吉布斯波纹的周期数也越多; ω_c 越小,输出脉冲前后沿陡度越小,输出脉冲形状越接近抽样函数,波形失真越大。

进一步,如果输入理想低通滤波器的不是单个矩形脉冲而是周期矩形脉冲信号,则其输出信号也是带有吉布斯波纹的周期矩形脉冲信号。对此以图 3.9.7(a) 所示的周期对称方波信号(脉宽 τ 是周期 T 的 $1/2$) 为例加以说明。

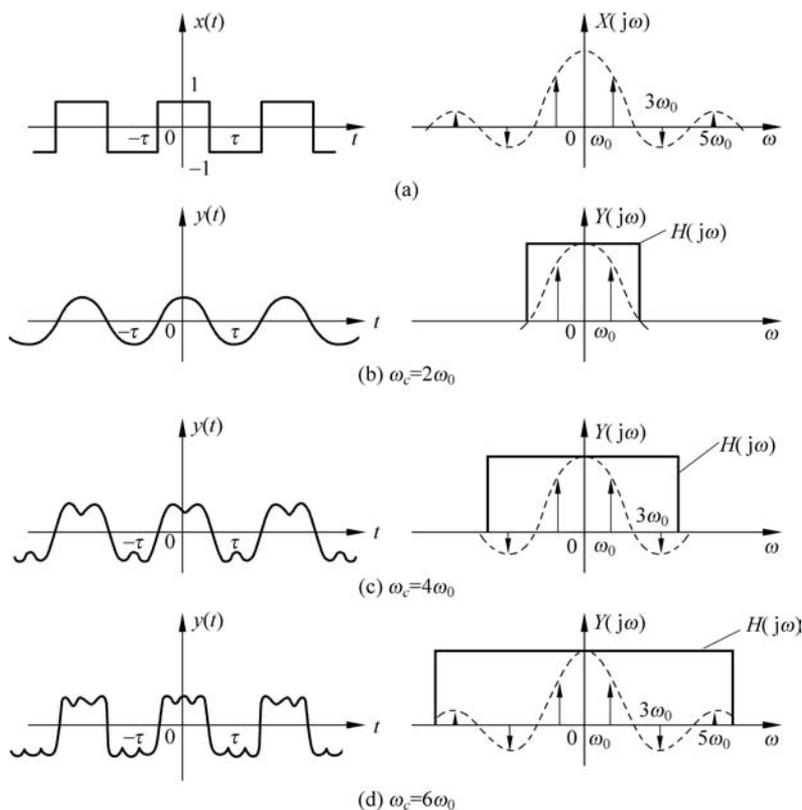


图 3.9.7 周期对称方波信号通过理想低通滤波器

图 3.9.7 所示的周期对称方波信号 $x(t)$ 可以表示为

$$x(t) = 2G_{\tau}(t) * \delta_{2\tau}(t) - 1 \quad (3.9.10)$$

记 $\frac{\pi}{\tau} = \omega_0$, 则 $x(t)$ 的频谱 $X(j\omega)$ 为

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= 2\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \cdot \omega_0 \delta_{\omega_0}(\omega) - 2\pi\delta(\omega) \\ &= \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} 2\pi \text{Sa}\left(\frac{k\pi}{2}\right) \delta(\omega - k\omega_0) \end{aligned} \quad (3.9.11)$$

由于 k 为偶数时, $\text{Sa}\left(\frac{k\pi}{2}\right) = 0$, 故 $X(j\omega)$ 中只含有奇次谐波分量 ($\pm\omega_0, \pm 3\omega_0, \dots$), 如图 3.9.7(a) 所示。再设理想低通滤波器系统函数 $H(j\omega)$ 为

$$H(j\omega) = G_{2\omega_c}(\omega)$$

则 $\omega_c = 2\omega_0, 4\omega_0, 6\omega_0$ 时输出信号 $y(t)$ 的波形分别如图 3.9.7(b)、(c)、(d) 所示。这实际上相当于将周期对称方波信号进行傅里叶级数展开而分别只取其基波、三次谐波与五次谐波。可以看出, 由于理想低通滤波器的频率截断效应(或由于只取傅里叶级数的有限项进行近似), 在输出信号(或近似表示的信号)中出现了吉布斯现象。当滤波器截止频率 $\omega_c \gg \omega_0$ 时, 输出信号较为接近周期对称方波信号, 只是在每个脉冲前后都有预冲和过冲, 其他处也有吉布斯波纹。当 ω_c 减小时, 由于吉布斯波纹周期变长, 输出脉冲前后沿陡度都降低, 但依然有预冲和过冲。当 ω_c 接近 ω_0 (滤波器通带刚大于基频) 时, 输出信号退化为频率等于基频 (ω_0) 的正弦波。

总之, 低通滤波器对信号的作用是对信号频谱进行频域加窗(理想低通滤波器对应于矩形窗), 频窗有限引起时域的吉布斯波纹。用其他的频窗, 比如三角形窗, 有可能引起的吉布斯波纹较小。另外, 由于傅里叶变换的对称特性, 当对信号进行时域截断(时域加窗)时, 其频谱也会相应地出现吉布斯波纹, 选择合适的时窗函数可抑制频谱中的吉布斯波纹。这些基本原理将在数字信号处理中得到运用。

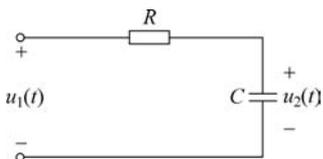


图 3.9.8 RC 低通滤波器

3) 实际的低通滤波器

如前所述, 尽管理想低通滤波器具有理想的频率选择性能, 但却无法实现, 因此, 在实际应用中, 只能用一些可实现的系统来近似它。图 3.9.8 所示的 RC 电路是一种实际的低通滤波器。

图 3.9.8 所示 RC 电路的频率响应 $H(j\omega)$ 为

$$H(j\omega) = \frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)} = \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

令 $\omega_c = \frac{1}{RC}$, 则其幅频、相频特性分别为

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} \quad (3.9.12a)$$

$$\angle H(j\omega) = -\arctan \frac{\omega}{\omega_c} \quad (3.9.12b)$$

幅频、相频特性如图 3.9.9 所示。

从图 3.9.9 可以看出, RC 低通滤波器并不是理想低通滤波器。在 $|\omega|$ 很小的范围内, $|H(j\omega)|$ 近似为常数, $\angle H(j\omega)$ 也近似为过坐标原点的斜率为负的直线, 即近似为理

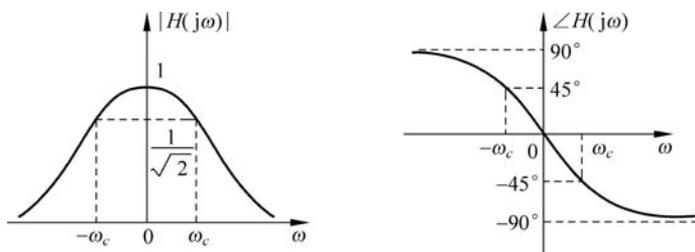


图 3.9.9 RC 低通滤波器的幅频、相频特性

想低通。当 $\omega = \omega_c$ 时, $|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{2}$; 当 $|\omega| > \omega_c$ 时, 输入信号受到越来越大的衰减, 幅频特性逐渐下降, 相频特性也趋于饱和, 与过原点的直线差别越来越大。通常把 $|H(j\omega)|^2 \geq \frac{1}{2}$ 的频率范围称为低通滤波器的通频带, 把 ω_c 称为低通滤波器的截止(角)频率。

对于实际的低通滤波器还可以作如下近似分析。

(1) 当 $\omega \ll \omega_c$ 时, $|H(j\omega)| \approx 1, \angle H(j\omega) \approx -\frac{\omega}{\omega_c}$, 如果此时信号的频谱全部处于滤波器的通频带以内, 或信号位于滤波器通频带以外的高频分量可以忽略不计, 滤波器输出信号 $y_{zs}(t)$ 的频谱

$$Y_{zs}(j\omega) \approx e^{-j\frac{\omega}{\omega_c}} X(j\omega)$$

从而

$$y_{zs}(t) \approx x\left(t - \frac{1}{\omega_c}\right)$$

故这种情况下, 低通滤波器可近似看作一个无失真传输系统。

(2) 当 $\omega \gg \omega_c$ 时, $H(j\omega) = \frac{\omega_c}{j\omega}$, 如果此时信号的频谱又全部落在系统的通频带以外或信号的直流分量和低频分量可以略去不计, 则按傅里叶变换时域积分定理可得

$$\begin{aligned} y_{zs}(t) &= \mathcal{F}^{-1}[H(j\omega)X(j\omega)] \\ &\approx \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\omega_c}{j\omega}X(j\omega)\right] \\ &\approx \mathcal{F}^{-1}\left\{\omega_c \left[\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right] X(j\omega)\right\} \end{aligned}$$

即

$$y_{zs}(t) \approx \omega_c \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

在这种情况下, 低通滤波器近似为一个积分器。

上述 RC 低通滤波器是一类更一般的物理可实现的低通滤波器——巴特沃斯滤波器(即最平坦型滤波器)当 $n=1$ 时的一个特例。 n 阶巴特沃斯滤波器有如下的幅频特性:

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^{2n}}} \quad (3.9.13)$$

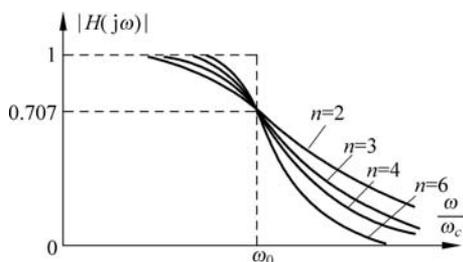


图 3.9.10 巴特沃斯滤波器的幅频特性

这类滤波器的截止频率都为 ω_c ($|H(j\omega_c)|^2 = \frac{1}{2}$), 随着阶数 n 增高, 其带内特性越平坦, 带外衰减越大, 通带边缘越陡峭, 从而越接近理想低通特性, 如图 3.9.10 所示。

另一类物理可实现低通滤波器是在通带内有等起伏波纹的幅频特性的切比雪夫滤波器, 其幅频特性为

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2 T_n^2\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)}} \quad (3.9.14)$$

式中, ϵ 为决定通带起伏大小的系数; T_n 为第一类切比雪夫多项式, 其定义是

$$T_n(x) = \begin{cases} \cos(n \arccos x), & |x| \leq 1 \\ \operatorname{ch}(n \operatorname{arch} x), & |x| > 1 \end{cases} \quad (3.9.15)$$

切比雪夫滤波器的通带为 $|\omega| < \omega_c$, 阻带为 $|\omega| > \omega_c$ 。它具有比巴特沃斯滤波器更陡峭的通带边缘。在 $\omega = \omega_c$ 处, $|H(j\omega)|^2 = 1/\sqrt{1+\epsilon^2}$ 而不一定为 $1/2$ 。 ϵ 越大, ω_c 处的衰减越大, 通带边缘越陡峭。

例 3.9.2 求图 3.9.8 所示 RC 电路对单位门信号 $G_\tau(t) = u(t+\tau) - u(t-\tau)$ 的响应。

解: 根据上面的分析

$$H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega RC}$$

而且

$$G_\tau(t) = u(t+\tau) - u(t-\tau)$$

先求 RC 电路对单位阶跃信号 $u(t)$ 的响应 $s(t)$:

$$\begin{aligned} s(t) &= \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{1+j\omega RC} \cdot \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] \right\} \\ &= \mathcal{F}^{-1} \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} - \frac{1}{j\omega + \frac{1}{RC}} \right] \\ &= u(t) - e^{-\frac{t}{RC}} u(t) \\ &= (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) u(t) \end{aligned}$$

因此, RC 电路对 $G_\tau(t)$ 的响应 $y(t)$ 为

$$\begin{aligned} y(t) &= s\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - s\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \\ &= (1 - e^{-\frac{t+\frac{\tau}{2}}{RC}}) u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - (1 - e^{-\frac{t-\frac{\tau}{2}}{RC}}) u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \end{aligned}$$

单位门信号通过 RC 低通滤波器如图 3.9.11 所示。

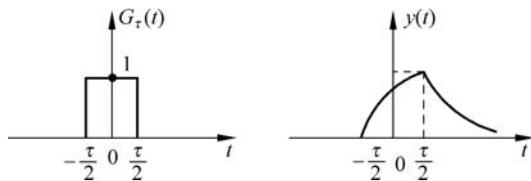


图 3.9.11 单位门信号通过 RC 低通滤波器

由图可见 $G_\tau(t)$ 中的高频分量受到衰减, 输出信号波形的变化比较平缓, 这正体现了 RC 电路的低通作用。

2. 高通滤波器

与低通滤波器相反, 高通滤波器允许信号的高频分量通过, 衰减和抑制低频分量。理想高通滤波器的频率响应为

$$H(j\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_d}, & |\omega| \geq \omega_c = [1 - G_{2\omega_c}(\omega)]e^{-j\omega t_d} \\ 0, & |\omega| < \omega_c \end{cases} \quad (3.9.16)$$

式中, $t_d \geq 0$ 。

如图 3.9.12 所示, $|\omega| \geq \omega_c$ 是理想高通滤波器的通(频)带, $|\omega| < \omega_c$ 是其阻带, ω_c 是其截止频率。

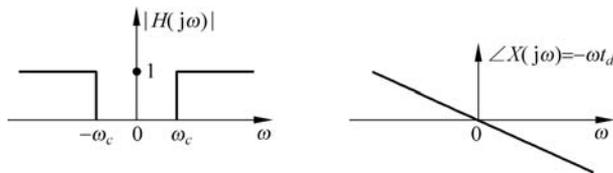


图 3.9.12 理想高通滤波器幅频、相频特性

图 3.9.13 所示的 RC 电路是实际采用的高通滤波器的一个实例, 其系统函数 $H(j\omega)$ 为

$$H(j\omega) = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} \quad (3.9.17a)$$

$$|H(j\omega)| = \frac{|\omega RC|}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad (3.9.17b)$$

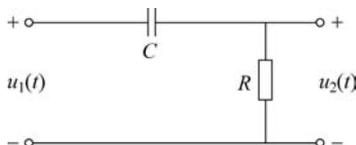


图 3.9.13 RC 高通滤波器

令 $\omega_c = \frac{1}{RC}$, 则

$$|H(j\omega)| = \frac{\left| \frac{\omega}{\omega_c} \right|}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2}}$$

$$\angle H(j\omega) = \arctan\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)$$

幅频、相频特性如图 3.9.14 所示。

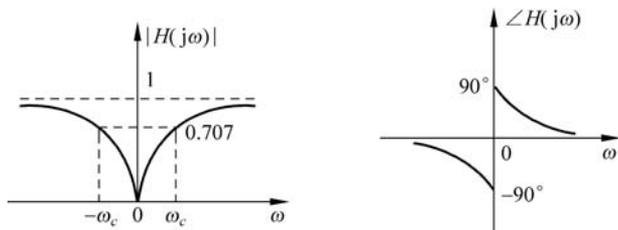


图 3.9.14 RC 高通滤波器的幅频、相频特性

例 3.9.3 求图 3.9.13 所示 RC 电路对单位阶跃信号 $G_\tau(t)$ 的响应。

解: 根据上面的分析,

$$H(j\omega) = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$

而且

$$G_\tau(t) = u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$$

先求 RC 电路对单位阶跃信号 $u(t)$ 的响应 $s(t)$:

$$s(t) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} \cdot \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] \right\}$$

$$= \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{RC}{1 + j\omega RC} \right]$$

则 RC 电路对 $G_\tau(t)$ 的响应 $y(t)$ 为

$$y(t) = s\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - s\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$$

$$= e^{-\frac{t+\frac{\tau}{2}}{RC}} u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - e^{-\frac{t-\frac{\tau}{2}}{RC}} u\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$$

单位阶跃信号通过 RC 高通滤波器如图 3.9.15 所示。

由图可见, $G_\tau(t)$ 中的慢变化分量受到衰减, 这正体现了 RC 电路的高通作用。

3. 带通滤波器

带通滤波器的通频带是一个带状区域, 只允许位于该区域内的频率成分通过, 其他

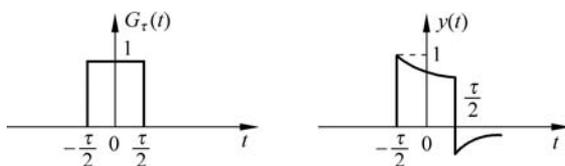


图 3.9.15 单位门信号通过 RC 高通滤波器

频率成分受到衰减和抑制。理想的带通滤波器频率响应可表示为

$$H(j\omega) = H_l(j\omega) * [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$$

其中, $H_l(j\omega)$ 是一截止频率为 ω_c ($\omega_c < \omega_0$) 的理想低通滤波器的频率响应。

记 $H_l(j\omega) = G_{2\omega_c}(\omega) \cdot e^{-j\omega t_d}$, $t_d > 0$, 则有

$$H(j\omega) = G_{2\omega_c}(\omega + \omega_0) \cdot e^{-j(\omega + \omega_0)t_d} + G_{2\omega_c}(\omega - \omega_0) \cdot e^{-j(\omega - \omega_0)t_d} \quad (3.9.18)$$

幅频、相频特性如图 3.9.16 所示。

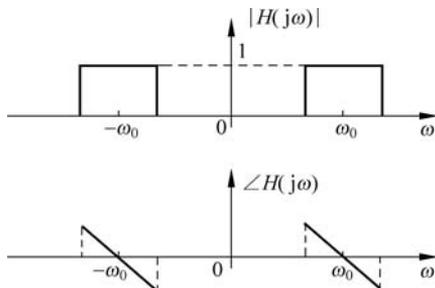


图 3.9.16 理想带通滤波器的幅频、相频特性

图 3.9.16 中, $\omega = \omega_0$ 称为带通滤波器的中心频率, 以 $\pm\omega_0$ 为中心的宽度为 $2\omega_c$ 的带状区域称为通频带。

理想带通滤波器的单位冲激响应 $h(t)$ 为

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathcal{F}^{-1}[H(j\omega)] \\ &= 2\pi \mathcal{F}^{-1}[H_l(j\omega)] \cdot \mathcal{F}^{-1}[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \\ &= 2\pi \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}[\omega_c(t - t_d)] \cdot \frac{1}{\pi} \cos\omega_0 t \\ &= \frac{2\omega_c}{\pi} \text{Sa}[\omega_c(t - t_d)] \cdot \cos\omega_0 t \end{aligned} \quad (3.9.19)$$

可见, 这是一个以等效低通滤波器的单位冲激响应为包络的正弦载波幅度调制信号。

图 3.9.17 所示的 RLC 电路是实际采用的带通滤波器的一个实例。

不难得出, 图示 RLC 电路的频率响应 $H(j\omega)$ 为

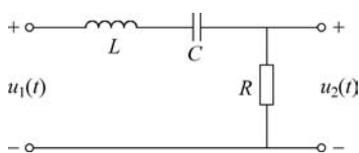


图 3.9.17 RLC 带通滤波器

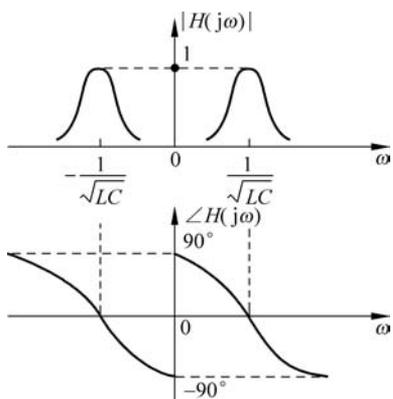


图 3.9.18 RLC 带通滤波器的幅频、相频特性

$$H(j\omega) = \frac{j\omega RC}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{|\omega RC|}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

$$\angle H(j\omega) = \arctan \frac{1 - \omega^2 LC}{\omega RC}$$

记 $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, ω_0 是 RLC 带通滤波器的中心频率,也称为谐振频率。

RLC 带通滤波器的幅频、相频特性如图 3.9.18 所示。



教学视频

3.10 时域抽样

时域抽样定理表明,在一定条件下,一个连续时间信号完全可以用该信号在等时间间隔点的瞬时值(样本值)来表示(获得样本值的过程称为抽样),并且可以用这些样本值把该信号完全恢复出来。例如,电影就是由一组按时间顺序排列的单个画面所组成,其中每一画面都代表着连续变化景象的一个瞬时画面(样本),当以足够快的速度来看这些样本时,会感觉到是原来连续活动景象的再现。

时域抽样定理的重要性还在于它在连续时间信号和离散时间信号之间所起的桥梁作用。正如将要讨论的,在一定条件下,用一串信号的瞬时样本值来完全表示一个连续时间信号的能力提供了用一个离散时间信号来表示一个连续时间信号的机理,在数字信号处理技术和计算机广泛应用的今天,连续时间信号的离散处理显得日益重要。本节主要讨论等间隔时域抽样过程的实现,引出时域抽样定理,并介绍抽样恢复和频域抽样定理。

3.10.1 冲激串抽样

冲激串抽样过程如图 3.10.1 所示。

图 3.10.1 中, $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$, T_s 称

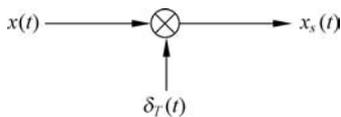


图 3.10.1 冲激串抽样过程

为抽样周期,也称抽样间隔,对应的 $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$ 称为抽样频率。在时域中应有

$$x_s(t) = x(t) \cdot \delta_T(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s)$$

(3.10.1)

可见 $x_s(t)$ 本身就是一个冲激串,其冲激强度等于 $x(t)$ 以 T_s 为间隔的各时刻的样

本 $x(nT_s)$ 。

按照傅里叶变换的频域卷积定理[式(3.5.27)],则 $x_s(t)$ 的频谱为

$$\begin{aligned} X_s(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[x(t)] * \mathcal{F}[\delta_T(t)] \\ &= \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * \omega_s \delta_{\omega_s}(\omega) \\ &= \frac{\omega_s}{2\pi} X(j\omega) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s) \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j\omega - jk\omega_s) \end{aligned} \quad (3.10.2)$$

式(3.10.2)说明, $X_s(j\omega)$ 是频率的周期函数(周期为 $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$), 它由一组移位的 $X(j\omega)$ 组成, 在幅度上标以 $\frac{1}{T_s}$ 的变化, 如图 3.10.2 所示(画图时假定 $x(t)$ 是频带有限信号, 其最高频率成分为 ω_m ; $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} \geq 2\omega_m$)。

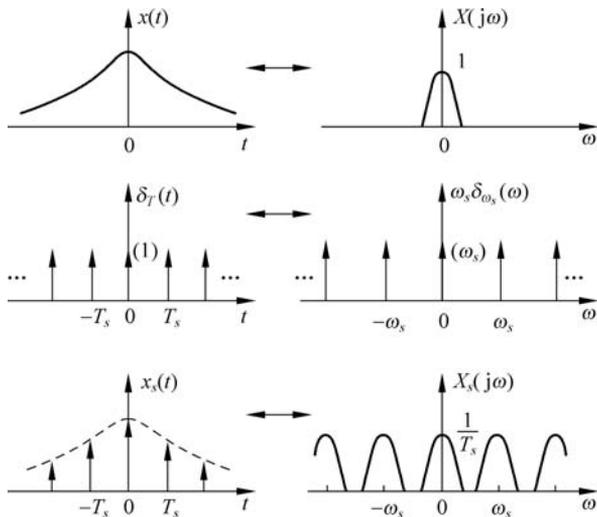


图 3.10.2 冲激串抽样 ($\omega_s \geq 2\omega_m$)

3.10.2 脉冲串抽样

3.10.1 节讨论的冲激串抽样只是一种理想情况, 因为产生和传输很接近冲激信号的宽度窄而幅度大的脉冲非常困难, 几乎不可实现。而以脉冲串进行抽样往往更方便些。脉冲串抽样过程如图 3.10.3 所示。



教学视频

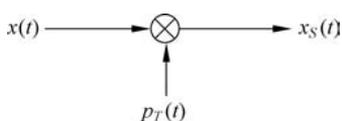


图 3.10.3 脉冲串抽样过程

图中 $p_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_\tau(t - nT_s)$ 是时间间隔为 T_s 的一系列单位门信号(脉冲串), T_s 仍称为抽样周期($T_s > \tau$), 相应的 $\omega_s = 2\pi/T_s$ 仍称为抽样频率。则在时域应有

$$x_s(t) = x(t) \cdot p_T(t) \quad (3.10.3)$$

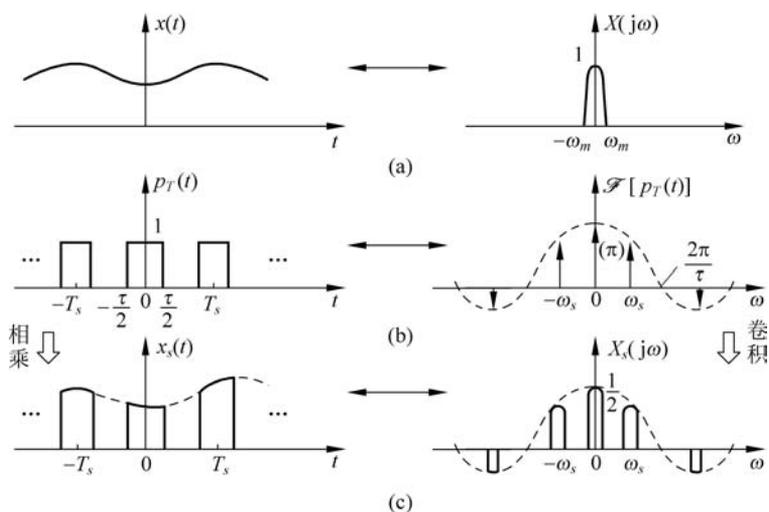
记被抽样信号 $x(t)$ 的频谱为 $X(j\omega)$, 由例 3.6.2 可知

$$\mathcal{F}[p_T(t)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \omega_s \tau \text{Sa}\left(\frac{k\omega_s \tau}{2}\right) \delta(\omega - k\omega_s)$$

则 $x_s(t)$ 的频谱为

$$\begin{aligned} X_s(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[x(t)] * \mathcal{F}[p_T(t)] \\ &= \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \omega_s \tau \text{Sa}\left(\frac{k\omega_s \tau}{2}\right) \delta(\omega - k\omega_s) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\tau}{T_s} \text{Sa}\left(\frac{k\omega_s \tau}{2}\right) X(j\omega - jk\omega_s) \end{aligned} \quad (3.10.4)$$

式(3.10.4)说明, 脉冲串抽样后得到的 $X_s(j\omega)$ 是 $X(j\omega)$ 幅度加权后的周期延拓, 延拓周期仍为 $\omega_s = 2\pi/T_s$, 幅度加权值为 $\frac{\tau}{T_s} \text{Sa}\left(\frac{k\omega_s \tau}{2}\right)$, 见图 3.10.4(图中假定 $x(t)$ 的最高频率成分为 ω_m ; $p_T(t)$ 的周期 T_s 等于脉宽 τ 的 2 倍, $\omega_s = 2\pi/T_s \geq 2\omega_m$)。


 图 3.10.4 脉冲串抽样($\omega_s \geq 2\omega_m$)

综上所述, 时域抽样在时域使信号离散化, 同时, 在频域使原信号频谱进行加权的周期延拓, 即时域抽样对应着频域的周期重复。



3.10.3 时域抽样定理

在前文对抽样实现过程的讨论中,并未明确指出抽样是否必须满足特定条件。事实上,在很多抽样的应用中,抽样的目的不仅仅是为了得到原信号的一系列样本值,更常见的是为了在进行某些处理(存储、传输、变换等)后,通过信号的离散样本值恢复原信号,例如数字声音采集系统的声音回放、电影画面的播放、脉冲调幅通信系统中的信号再现等。这种恢复对抽样过程是有要求的,即抽样必须满足一定的条件。

下面进一步研究冲激串抽样。由式(3.10.2)和图3.10.2可以看出:

(1) 当 $\omega_s \geq 2\omega_m$ 时,抽样后的信号频谱 $X_s(j\omega)$ 在 $(-\omega_m, \omega_m)$ 频率区间等于原信号频谱 $X(j\omega)$ 的 $1/T_s$ 倍,即原信号频谱“不失真”地出现在抽样后的信号频谱中。这样,在需要通过 $x_s(t)$ 恢复 $x(t)$ 时,可按下述过程进行:将 $x_s(t)$ 通过一个频率响应为 $H(j\omega) = \begin{cases} T_s, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$ 的低通滤波器(需要指出, ω_c 必须满足 $\omega_m < \omega_c \leq \omega_s - \omega_m$),滤波器的输出频谱为

$$X_s(j\omega) \cdot H(j\omega) = X(j\omega)$$

根据傅里叶变换的唯一性,频谱与时域信号唯一对应,从而恢复出 $x(t)$,这一过程如图3.10.5所示。

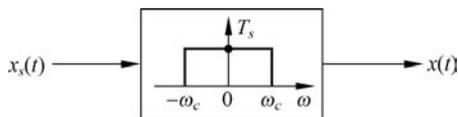


图3.10.5 抽样恢复($\omega_m < \omega_c \leq \omega_s - \omega_m$)

进一步,这里用于抽样恢复的低通滤波器的单位冲激响应 $h(t)$ 为

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}[T_s G_{2\omega_c}(\omega)] = \frac{T_s \omega_c}{\pi} \text{Sa}(\omega_c t)$$

其输出响应为

$$\begin{aligned} x_s(t) * h(t) &= \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s) \right] * \frac{T_s \omega_c}{\pi} \text{Sa}(\omega_c t) \\ &= \frac{T_s \omega_c}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \text{Sa}[\omega_c(t - nT_s)] \end{aligned}$$

接上述,即有

$$x(t) = \frac{T_s \omega_c}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \text{Sa}[\omega_c(t - nT_s)] \quad (3.10.5)$$

这就是由 $x(t)$ 的离散值 $x(nT_s)$ 恢复出的 $x(t)$ 公式,称为时域抽样的“内插公式”,其中 $\text{Sa}[\omega_c(t - nT_s)]$ 称为“内插函数”。在 $\omega_s = 2\omega_m, \omega_c = \omega_m$ 的临界情况下,式(3.10.5)具有如下形式:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \text{Sa}\left[\frac{\pi}{T_s}(t - nT_s)\right]$$

此时的信号恢复过程如图 3.10.6 所示。

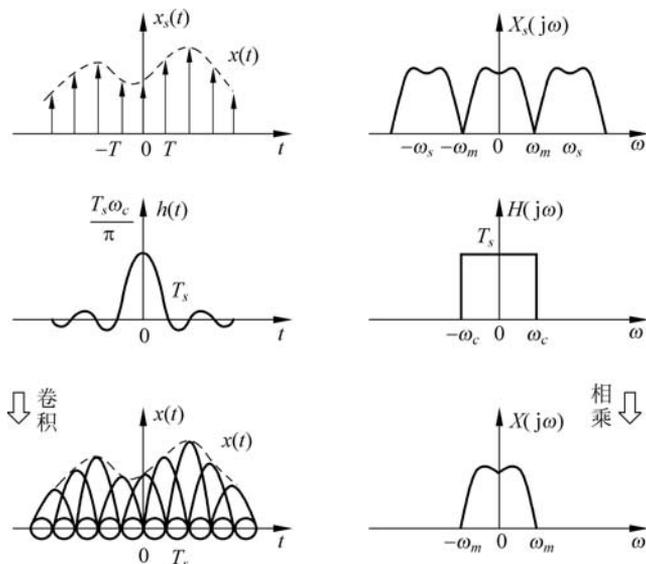


图 3.10.6 由抽样信号恢复连续信号的时域及频域解释

(2) 当 $\omega_s < 2\omega_m$ 时,情况如图 3.10.7(c)所示。在频率区间 $(-\omega_m, \omega_m)$ 内, $X_s(j\omega) \neq \frac{1}{T_s}X(j\omega)$ 。这是由于此时发生了频谱混叠,即 $X(j\omega)$ 与 $X(j\omega \pm j\omega_s)$ 有着公共的不为零的区域,这一区域的 $X_s(j\omega)$ 由 $X(j\omega)$ 与 $X(j\omega \pm j\omega_s)$ 共同构成。原信号频谱不在抽样后信号频谱中重复出现,从而不能简单地采用低通滤波的方法精确地从 $X_s(j\omega)$ 中得到 $X(j\omega)$,即不能从 $x_s(t)$ 中恢复 $x(t)$ 。此时的抽样称为欠抽样。



动图演示

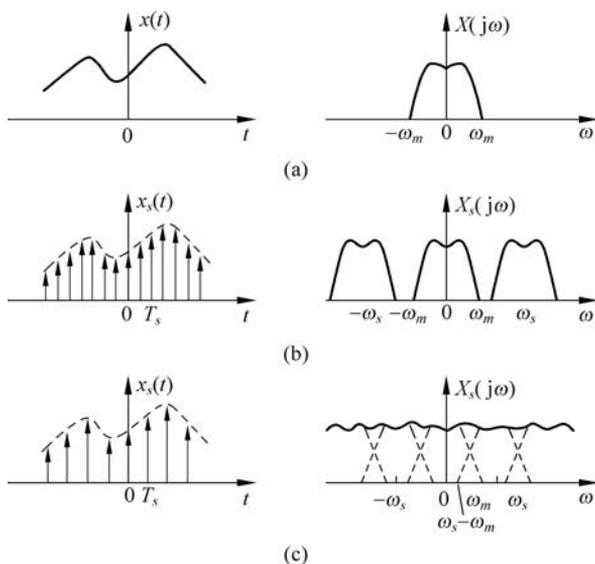


图 3.10.7 抽样与频谱混叠

通过类似的分析可以知道,在脉冲串抽样中,当 $\omega_s \geq 2\omega_m$ 时,可以采用低通滤波的方法从 $x_s(t)$ 恢复 $x(t)$; 当 $\omega_s < 2\omega_m$ 时,仍存在频谱混叠现象,无法恢复出原信号。

上述结果可综合成如下的时域抽样定理:

若 $x(t)$ 是频带有限的信号,其频谱只占据 $(-\omega_m, \omega_m)$ 的范围,则当抽样周期 $T_s \leq \pi/\omega_m$ (或抽样频率 $\omega_s = 2\pi/T_s \geq 2\omega_m$) 时,就可以从抽样后的信号 $x_s(t)$ 将 $x(t)$ 完全恢复出来。这种恢复,在数学上可表示为

$$x(t) = \frac{T_s \omega_c}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \text{Sa}[\omega_c(t - nT_s)]$$

式中, $\omega_m \leq \omega_c \leq \omega_s - \omega_m$ 。

通常把最低允许抽样频率 $\omega_s = 2\omega_m$ 称为奈奎斯特(Nyquist)频率,把最大允许抽样间隔 $T_s = \pi/\omega_m$ 称为奈奎斯特间隔。

例 3.10.1 在脉冲串抽样中,当抽样频率 $\omega_s \geq 2\omega_m$ 时,如何从抽样后信号 $x_s(t)$ 恢复 $x(t)$?

解: 由式(3.10.4)可知

抽样后频谱

$$X_s(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\tau}{T_s} \text{Sa}\left(\frac{k\omega_s \tau}{2}\right) X(j\omega - jk\omega_s)$$

当 $\omega_s \geq 2\omega_m$ 时,在 $(-\omega_m, \omega_m)$ 区间

$X_s(j\omega) = \frac{\tau}{T_s} X(j\omega)$, 故可以将 $x_s(t)$ 通过一低通滤波器,其频率响应为

$$H(j\omega) = \frac{T_s}{\tau} G_{2\omega_c}(\omega), \omega_m \leq \omega_c \leq \omega_s - \omega_m$$

恢复 $x(t)$, 如图 3.10.8 所示。

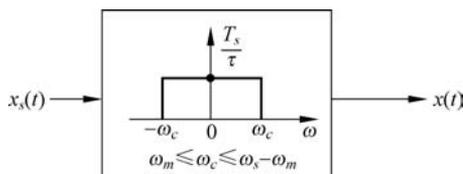


图 3.10.8 脉冲串抽样恢复

例 3.10.2 一个抽样传输系统如图 3.10.9 所示,设输入 $x(t) = \frac{\sin 100\pi t}{t}$, 抽样周期

$T = 0.009\text{s}$, $H(j\omega) = G_{100\pi}(\omega)$, 求输出 $y(t)$ 。

解: $x(t) = \frac{\sin 100\pi t}{t} = 100\pi \cdot \frac{\sin 100\pi t}{100\pi t} = 100\pi \text{Sa}(100\pi t)$

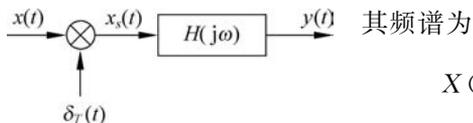


图 3.10.9 抽样传输系统

其频谱为

$$X(j\omega) = 100\pi \cdot \frac{\pi}{100\pi} G_{200\pi}(\omega) = \pi G_{200\pi}(\omega)$$

根据式(3.10.2),得到 $x_s(t)$ 的频谱为

$$X_s(j\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(j\omega - jk\frac{2\pi}{T_s}\right)$$

$$= \frac{\pi}{0.009} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(j\omega - jk \frac{2\pi}{0.009}\right)$$

于是输出 $y(t)$ 的频谱 $Y(j\omega)$ 为

$$Y(j\omega) = X_s(j\omega)H(j\omega) = \frac{\pi}{0.009}G_{100\pi}(\omega)$$

从而

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\pi}{0.009}G_{100\pi}(\omega)\right] \\ &= \frac{\pi}{0.009} \cdot \frac{50\pi}{\pi} \text{Sa}(50\pi t) = \frac{50000\pi}{9} \text{Sa}(50\pi t) \end{aligned}$$

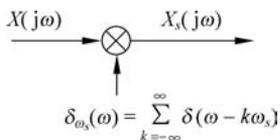


图 3.10.10 频域抽样过程

3.10.4 频域抽样定理

3.10.2 节讨论了信号的时域抽样及恢复问题。根据时域与频域的对称性,也可以对频域信号(频谱)进行抽样,如图 3.10.10 所示。

由

$$X_s(j\omega) = X(j\omega) \cdot \delta_{\omega_s}(\omega) = X(j\omega) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s)$$

得到

$$\begin{aligned} x_s(t) &= \mathcal{F}^{-1}[X_s(j\omega)] = x(t) * \mathcal{F}^{-1}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s)\right] \\ &= x(t) * \frac{1}{\omega_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - n \frac{2\pi}{\omega_s}\right) \\ &= \frac{1}{\omega_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(t - n \frac{2\pi}{\omega_s}\right) \end{aligned} \quad (3.10.6)$$

由上式可见,频域的抽样将导致时域信号的周期重复,重复周期为 $2\pi/\omega_s$,即频域抽样对应时域周期性,这与前文对周期信号的频谱分析结果是一致的。

进一步,假定 $x(t)$ 是时间有限信号,它集中在 $(-t_m, t_m)$ 时间范围内,则在频域中以不大于 π/t_m 的频率间隔 ω_s 对 $x(t)$ 的频谱 $X(j\omega)$ 进行抽样,可以使信号在时域无混叠地周期重复,得到周期信号 $x_s(t)$ 。此时用一个宽度为 $2t_m$ 的门信号 $\omega_s G_{2t_m}(t)$ 与 $x_s(t)$ 相乘,就可以无失真地恢复 $x(t)$,同时有

$$X(j\omega) = \frac{\omega_s t_m}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_s) \text{Sa}[t_m(\omega - k\omega_s)] \quad (3.10.7)$$

这就是频域抽样定理。式(3.10.6)称为频域抽样的“内插公式”,表明一个时间受限信号的频谱可由它的频域抽样值唯一决定。

抽样定理揭示了信号时域与频域的一种对应关系,即时域抽样对应频域的周期性,频域抽样对应时域的周期性。抽样定理是对信号进行离散时域或离散频域传输与处理的理论基础,在数字信号处理、通信等领域有重要应用。



动画演示

3.11 案例：频谱分析在雷达测速中的应用

1.6节分析了运动目标的多普勒调制效应。雷达正是通过测量目标的多普勒频移来解算目标的速度。对回波信号进行傅里叶变换和频谱分析,是雷达检测运动目标的基本信号处理方法。本节通过连续波雷达和脉冲多普勒雷达测速的案例,说明频谱分析在实际信号处理问题中的重要作用。

3.11.1 单频连续波雷达的运动目标回波及其频谱

根据1.6.3节中的推导,可以写出运动目标的单频连续波雷达回波模型:

$$r(t) = AG_T(t - t_0) \cdot \cos((\omega_0 + \omega_d)t - \omega_0 t_0)$$

其中, $\omega_d = \frac{2v}{c}\omega_0$ 是目标运动造成的多普勒频移,一般情况下 $\omega_d \ll \omega_0$ 。由于雷达回波的载频 ω_0 很高而且是精确已知的,接收机通过图3.11.1所示的解调处理获得基带信号。

经过解调处理后的基带信号表达式为

$$y(t) = AG_T(t - t_0) \cdot \cos(\omega_d t + \phi_0) \quad (3.11.1)$$

其中, $\phi_0 = -\omega_0 t_0$ 是回波延迟引起的相位,它不影响对目标速度的测量。式(3.11.1)



图3.11.1 雷达回波的解调处理框图

给出的是单频连续波雷达的运动目标基带回波模型。之所以称为单频连续波雷达,是因为:①雷达发射的是一个频率为 ω_0 的信号,没有进行其他波形调制;②雷达信号的持续时间 T 比较长,通过对回波信号的频谱分析可以达到高的测速精度。

对式(3.11.1)进行傅里叶变换 $y(t) \leftrightarrow Y(j\omega)$,可以得到其频谱。根据傅里叶变换的性质知道

$$G_T(t - t_0) \leftrightarrow T \text{Sa}\left(\frac{T}{2}\omega\right) e^{-j\omega t_0}$$

$$\cos(\omega_d t + \phi_0) \leftrightarrow \pi\delta(\omega - \omega_d) e^{j\phi_0} + \pi\delta(\omega + \omega_d) e^{-j\phi_0}$$

因此

$$Y(j\omega) = \frac{1}{2}AT \text{Sa}\left(\frac{T}{2}(\omega - \omega_d)\right) e^{-j(\omega - \omega_d)t_0} e^{j\phi_0} + \frac{1}{2}AT \text{Sa}\left(\frac{T}{2}(\omega + \omega_d)\right) e^{-j(\omega + \omega_d)t_0} e^{-j\phi_0}$$

图3.11.2给出了一个运动目标的回波及其幅度谱。设雷达工作在X波段, $\omega_0 = 2\pi \times 10^{10}$ rad/s,目标径向速度 $v = 300$ m/s,脉冲持续时间 $T = 1$ ms,为方便绘图取 $t_0 = 0$ 。其中图(a)和(c)为时域回波,图(b)和(d)分别为对应的幅度谱,图(a)和(b)为无噪声情况下的结果,图(c)和(d)为回波中含有噪声的结果。从频谱图峰值的位置可以估计目标的多普勒频率,从而求得目标的径向速度。在回波中含有噪声的情况下,时域回波受噪

声的影响很明显；而频谱图中，由于信号能量都集中在多普勒频率处，噪声能量分布在整个频率轴上，因此谱峰受噪声的影响较小，在有噪声的情况下仍然能够得到较精确的速度估计结果。

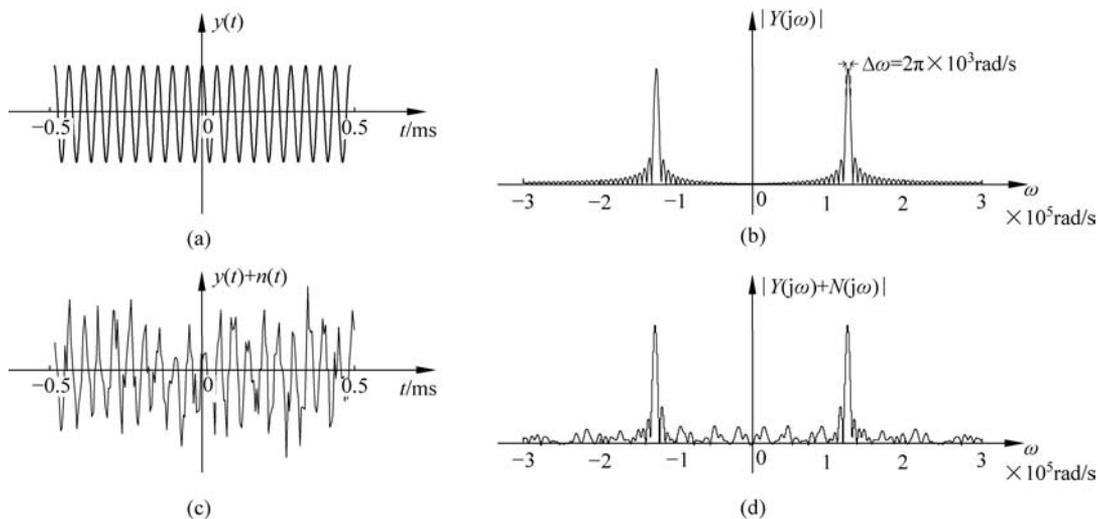


图 3.11.2 运动目标的基带回波时域波形及其频谱

矩形脉冲信号的带宽与其时域长度成反比，即 $\Delta\omega = 2\pi/T$ 。在上面的例子中，谱峰宽度约为 $2\pi \times 10^3 \text{ rad/s}$ 。发射脉冲时长有限造成谱峰展宽带来两个影响：①谱峰展宽后难以精确确定谱峰中心的位置，尤其是噪声情况下，谱峰展宽越严重，多普勒频率的估计精度就越低，因此多普勒频率估计精度与脉冲持续时间成反比；②当场景中有多个目标时，根据线性系统的理论知道，总的频谱是多个目标频谱的叠加，如果两个目标的径向速度很接近，它们的谱峰会融合成一个峰，此时雷达难以分辨出这两个目标，最小可分辨的速度间隔 Δv 应该满足

$$\frac{2\Delta v}{c}\omega_0 \geq \Delta\omega$$

由此得到连续波雷达速度分辨能力与发射信号持续时间的关系：

$$\Delta v \geq \frac{\lambda}{2T} \quad (3.11.2)$$

其中 $\lambda = \frac{c}{f_0}$ 为雷达波长。式(3.11.2)也可以直观地理解为，当两个目标的径向速度差异使得它们在雷达观测时间内的移动距离差别大于半个波长时，这两个目标才能通过频谱分析分辨出来。

图 3.11.3 给出了场景中有 4 个目标时的幅度频谱，4 个目标的速度分别为 150m/s, 168m/s, 300m/s, 310m/s, 其余参数与图 3.11.2 相同，为绘图清晰仅绘出正频率部分。根据式(3.11.2)，该雷达的速度分辨力为 15m/s。从图中也可以看出，速度差异大于分辨力

的两个目标形成了两个独立的谱峰,而速度差异小于分辨力的两个目标谱峰融合了。

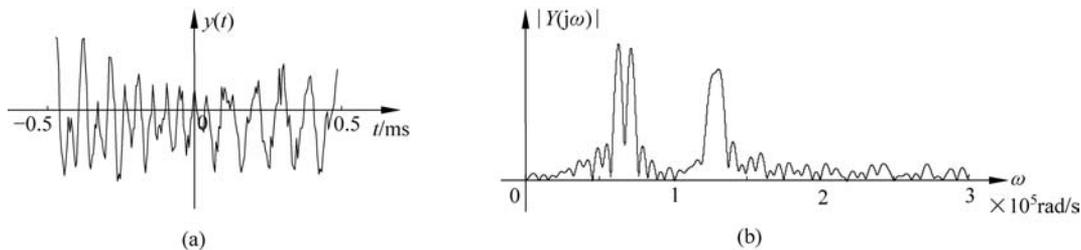


图 3.11.3 4 个运动目标的时域回波和频谱

3.11.2 脉冲多普勒雷达的运动目标回波及其频谱

为了达到高的速度测量精度和速度分辨力,单频连续波雷达的发射信号持续时间很长,例如在 3.11.1 节举例中 $T=1\text{ms}$ 。1ms 时间内电磁波的传播距离是 300km,离雷达 150km 以内的目标的回波会在发射信号没有结束之前就返回雷达。为了在接收回波时不受发射信号的干扰,大部分雷达采用发射信号结束之后接收机才开机的脉冲工作模式,每个脉冲的持续时间受到需要探测的目标距离的制约,不能过长。为了达到高的速度测量和分辨能力,不能只对一个脉冲进行频谱分析,而是需要对脉冲串信号的回波进行频谱分析。通过脉冲串进行速度测量的雷达称为脉冲多普勒雷达。

当雷达发射脉冲串时,目标的回波可以视为采用脉冲串 $p_{T_s}(t)$ 对式(3.11.1)进行了抽样

$$y_s(t) = A p_{T_s}(t - t_0) \cdot \cos(\omega_d t + \phi_0) \quad (3.11.3)$$

其中 $p_{T_s}(t)$ 为持续时间为 T 、脉冲重复周期为 T_s 的脉冲串,脉冲串中每个脉冲的宽度记为 τ 。图 3.11.4 给出了一个脉冲串的波形图和幅度谱。绘图参数 $T=1\text{ms}$, $T_s=50\mu\text{s}$, $\tau=10\mu\text{s}$ 。

这个脉冲串可以视为一个无限时长的周期脉冲串与宽度为 T 的门信号相乘,因此其幅度谱可以视为周期脉冲串的频谱与门信号频谱卷积。由于这个原因,图 3.11.4 的谱峰宽度与图 3.11.2 中的谱峰宽度是相同的。因此,脉冲多普勒雷达的速度测量精度和速度分辨能力由其脉冲串的总持续时长决定。

由于脉冲串对目标回波进行了抽样,抽样间隔等于脉冲串的脉冲重复周期 T_s 。时域抽样将造成频谱的周期延拓,延拓周期 $\omega_s = 2\pi/T_s$,图 3.11.4(c) 中标出了延拓后周期频谱的主值区间。根据抽样定理可知,只有当目标的多普勒频率小于抽样频率的 1/2 时,回波抽样才不会导致频谱混叠。此时

$$\frac{2v}{c}\omega_0 \leq \frac{\omega_s}{2}$$

化简后得到

$$v \leq \frac{\lambda}{4T_s} \quad (3.11.4)$$

式(3.11.4)可以直观地理解为,当目标在一个脉冲重复周期内的运动距离小于 $1/4$ 波长时,它的速度才能被脉冲多普勒雷达无模糊地测量出来。

根据式(3.11.4)可以计算得到,对于图 3.11.4 中的波形,假设雷达工作在 X 波段, $\lambda=3\text{cm}$,它的最大无模糊测量速度为 150m/s 。

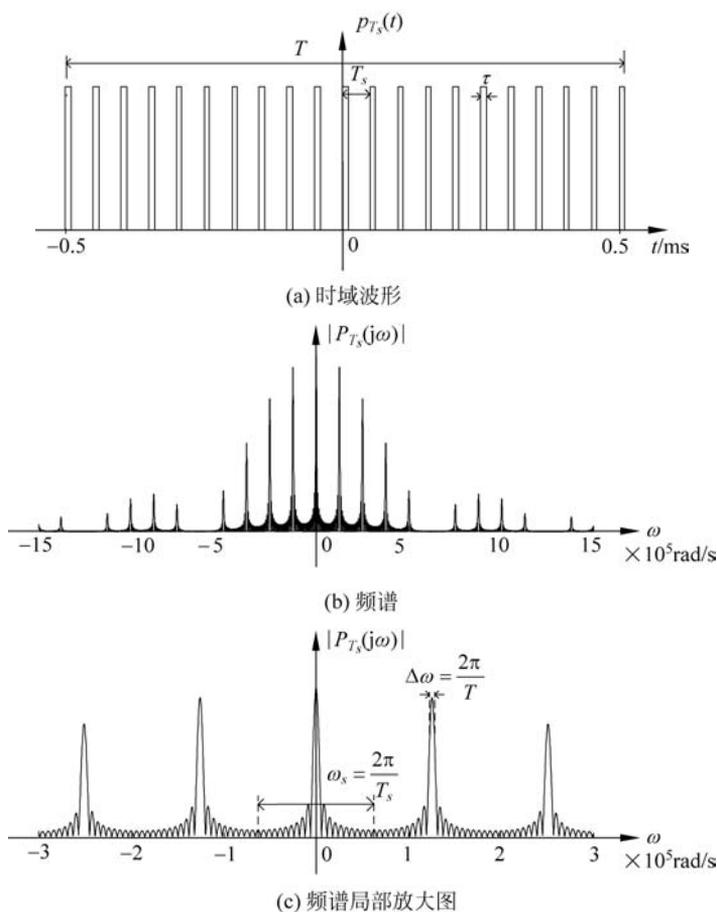


图 3.11.4 有限时长的周期脉冲串的时域波形和频谱

图 3.11.5 给出了两个强度不同的运动目标回波及其频谱。两个目标中,回波较强的一个速度为 180m/s ,回波较弱的速度为 70m/s ,雷达参数与图 3.11.4 相同。为了对比,图 3.11.5(a)中同时给出了连续波雷达的回波(虚线)和脉冲多普勒雷达的回波(实线)。图 3.11.5(b)给出了连续波雷达回波的频谱,根据两个目标的谱峰位置可以解算它们的速度。图 3.11.5(c)给出了脉冲多普勒雷达回波的频谱,并标出了频谱延拓的主值区间。根据主值区间内两个峰值所在的多普勒频率解算的速度分别为 120m/s 和 70m/s ,此时弱目标的速度被正确地测量,而强目标的测速结果由于抽样频率不够高,发生了测速模糊。

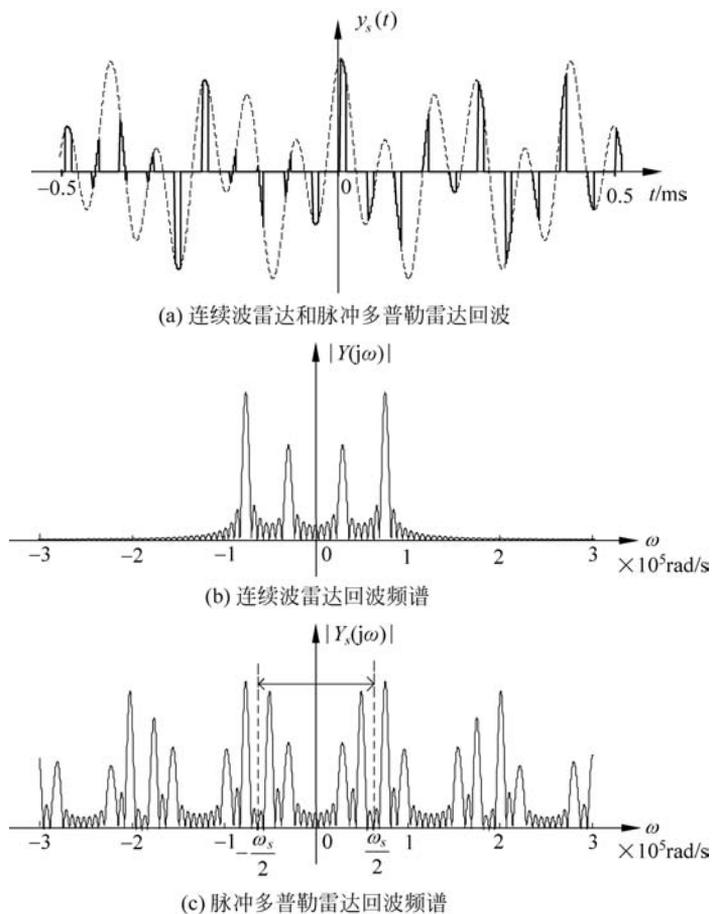


图 3.11.5 两个运动目标的雷达回波及其频谱

3.12 连续时间信号与系统频域分析计算机仿真

3.12.1 连续时间周期信号的频域分析

例 3.12.1 已知某周期矩形脉冲信号的周期为 4, 其指数形式傅里叶系数为 $0.5\text{Sa}(0.5k\pi)$, 画出其前 N 次谐波合成的信号近似波形。

```
T=4; N=5; % 前 N 次谐波合成波形, N 分别取 5、9、30、100
t = -T/2:0.001:T/2; w0 = 2 * pi/T; x = zeros(size(t));
for i = -N:N
    x = x + sinc(i/2)/2 * exp(j * i * w0 * t);
end
plot(t,x); xlabel('t'); title('前 5 次谐波合成波形')
```

分别取 N 为 5、9、30、100, 合成结果如图 3.12.1 所示。

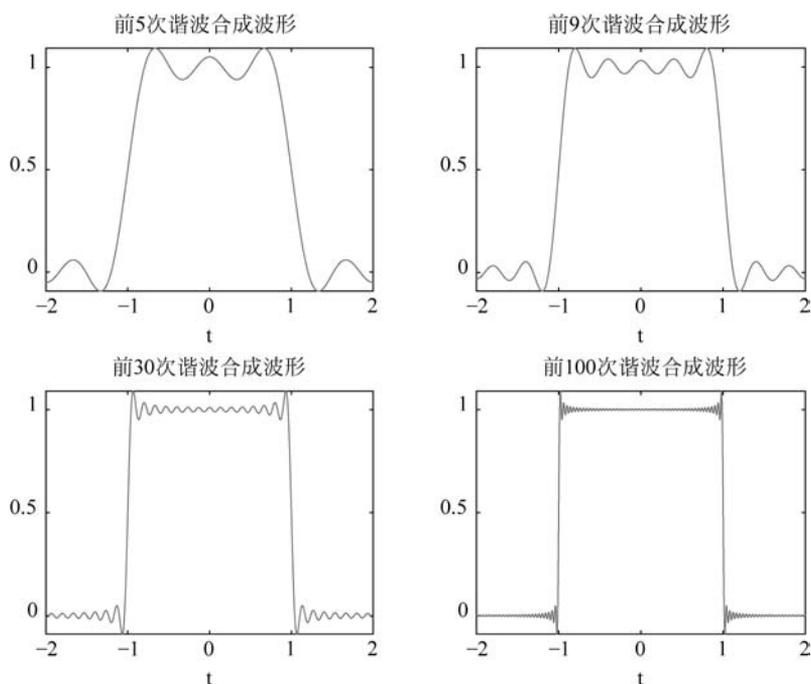


图 3.12.1 例 3.12.1 合成的波形

3.12.2 连续时间非周期信号的频域分析

例 3.12.2 计算 $e^{-|t|}u(t)$ 的傅里叶变换和 $2/j\omega$ 的傅里叶反变换。

可利用 `fourier` 和 `ifourier` 函数实现符号表达式的傅里叶变换和傅里叶反变换。

```
syms t w
xjw = fourier(exp(-abs(t)))
xt = simplify(ifourier(2/j/w,w,t))
```

傅里叶变换、反变换结果分别为

```
xjw = 2/(w^2 + 1); xt = sign(t)
```

MATLAB 中, `sign(t)` 即为符号函数 `sgn(t)`。

3.12.3 连续时间系统的频域分析

例 3.12.3 某系统微分方程为 $y'(t) + y(t) = y'(t) - y(t)$, 判断该系统是否是无失真传输系统。

利用信号处理工具箱中的 `freqs` 函数可直接计算连续时间系统的频率响应。

```
a = [1 1]; b = [1, -1]; freqs(b,a); grid off
```

系统频率响应如图 3.12.2 所示。由于相位谱不是直线, 故系统不是无失真传输系统。

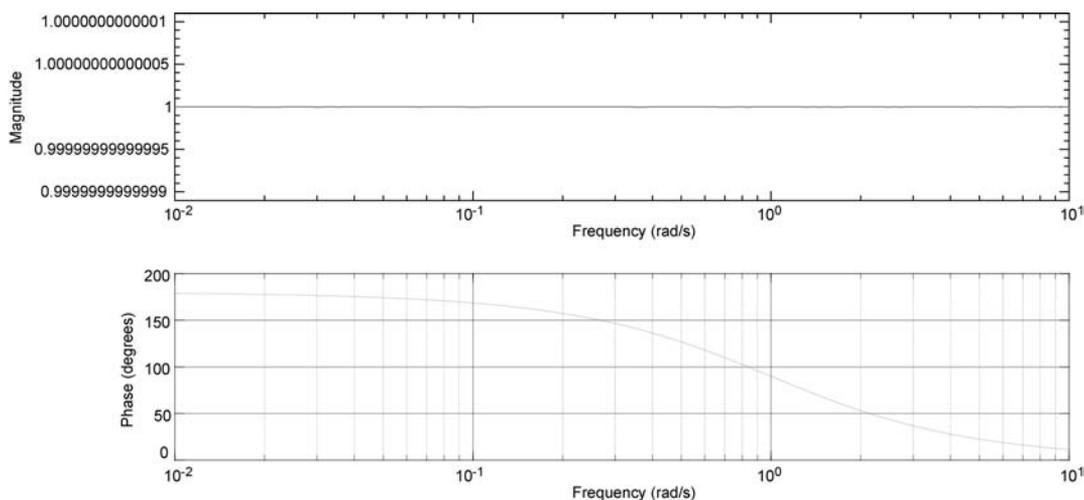


图 3.12.2 例 3.12.3 系统频率响应

例 3.12.4 某系统微分方程为 $y''(t) + y'(t) + y(t) = y'(t)$, 判断该系统近似是低通、高通还是带通。

```
a = [1 1 1]; b = [1 0]; freqs(b,a); grid off
```

系统频率响应如图 3.12.3 所示, 根据幅度谱得出该系统为带通系统, 中心频率在 1 附近。

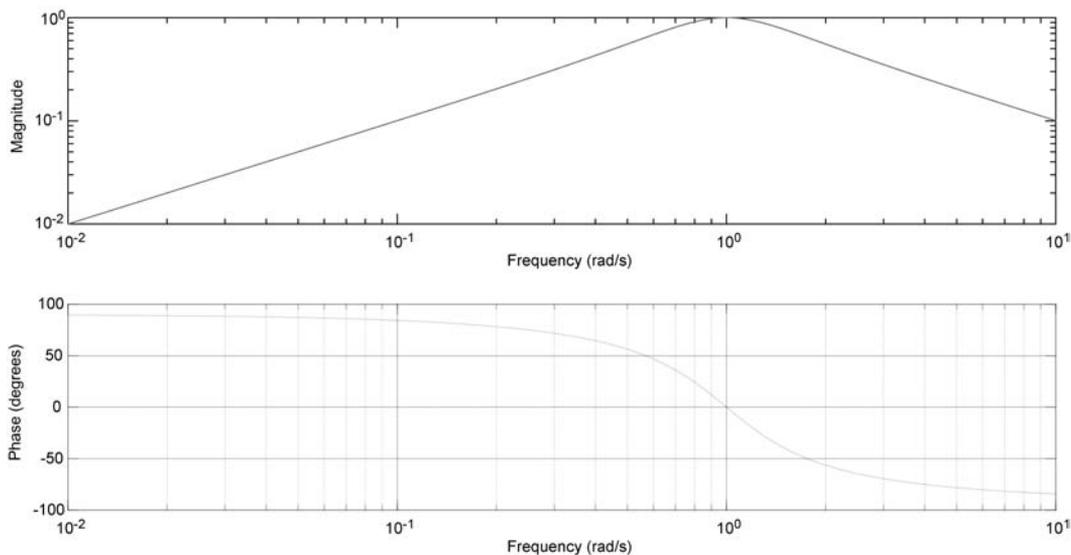


图 3.12.3 例 3.12.4 系统频率响应

例 3.12.5 设某理想抽样过程中, $\text{sinc}^2(t)$ 为被抽信号, 抽样间隔为 0.08s, 试利用滤波器对抽样信号进行恢复。

```
dt = 0.01; t = -10:dt:10; xt = sinc(t).^2; % 被抽样信号
T = 0.08; ts = -10:T:10; xst = sinc(ts).^2; % 抽样信号
```

```

wc = 2 * pi/T/5; % 截止频率设为 ws/5
wn = wc/(2 * pi/T/2); % 关于 ws/2 归一化截止频率
[b,a] = butter(40,wn); % 巴特沃斯数字滤波器阶数选用 40 阶
figure;freqz(b,a);grid off; % 滤波器频响
yt = filter(b,a,xst);
figure;
subplot(1,3,1); plot(t,xt);xlabel('t');title('x(t)', 'fontsize',12)
subplot(1,3,2); stem(ts,xst);xlabel('t');title('xs(t)', 'fontsize',12)
subplot(1,3,3);plot(ts,yt);xlabel('t');title('低通滤波器恢复信号');ylim([0,1])
    
```

滤波器频率响应和时域波形如图 3.12.4 和图 3.12.5 所示。

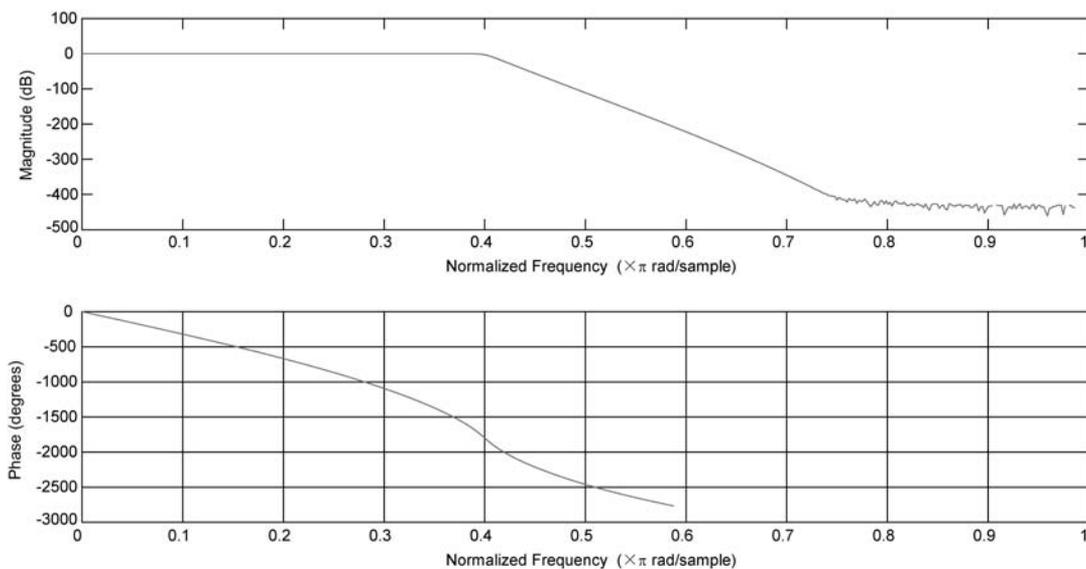


图 3.12.4 例 3.12.4 滤波器频率响应

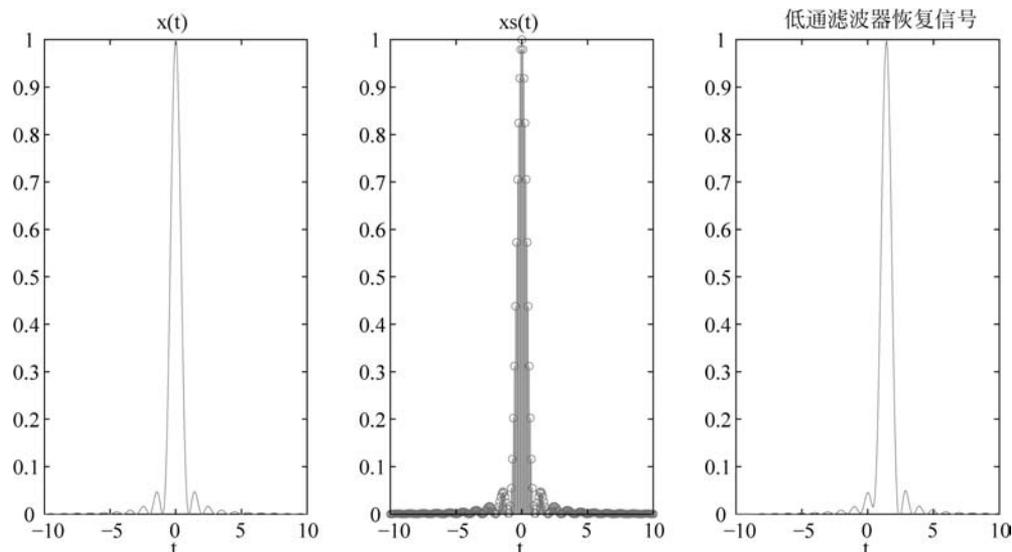


图 3.12.5 例 3.12.5 信号的时域波形

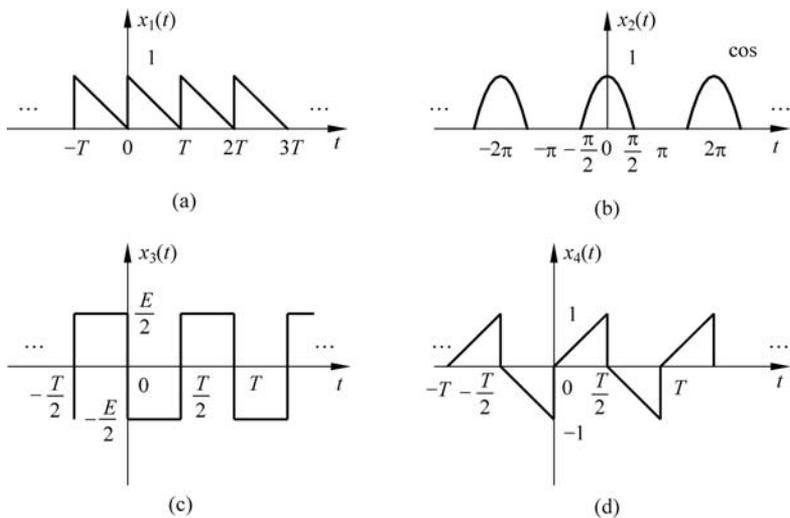
习 题

思考题

- 3.1 你了解哪些完备的正交信号集？为什么要在完备正交信号集上对信号进行展开？
- 3.2 连续时间周期信号频谱的物理含义是什么？怎样对连续时间周期信号进行频谱分析？
- 3.3 非周期信号的频谱密度是如何定义的？为什么引入这个物理量？
- 3.4 假设 $x(t)$ 的傅里叶变换 $X(j\omega)$ 为已知，则信号在 $\omega=1$ 处的复振幅是多少？
- 3.5 某连续时间周期信号的指数形式傅里叶级数记作 X_k ，其主周期信号的傅里叶变换记作 $X(j\omega)$ ，二者有什么关系？
- 3.6 不满足狄里赫利条件的信号，其傅里叶变换一定不存在吗？
- 3.7 周期信号的傅里叶变换与傅里叶级数相比有何区别和联系，为什么？
- 3.8 线性时不变系统的频域分析有何特点？
- 3.9 在对连续时间进行抽样的过程中，如果抽样脉冲为脉冲串，时域抽样定理是否仍成立？为什么？

基本题

- 3.1 证明 $\{e^{jk\omega_0 t}, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, $\omega_0 = 2\pi/T$, 在区间 $[t_0, t_0 + T]$ 是正交信号集。
- 3.2 对题图 3.1 所示周期信号，(1) 写出三角形式和指数形式的傅里叶级数；(2) 计算直流分量；(3) 画出频谱图。



题图 3.1

3.3 一个周期信号 $x(t)$ 的傅里叶级数表示为 $x(t) = 3\cos t + \sin\left(5t - \frac{\pi}{6}\right) - 2\cos\left(8t - \frac{\pi}{3}\right)$ 。

- (1) 画出三角形式的傅里叶级数的幅度和相位谱;
- (2) 凭直接观察(1)部分的频谱,画出指数形式的傅里叶级数的频谱;
- (3) 凭直接观察(2)部分的频谱,写出 $x(t)$ 的指数形式的傅里叶级数。

3.4 某实连续时间周期信号 $x(t)$,其周期为 4,其非零傅里叶级数系数是

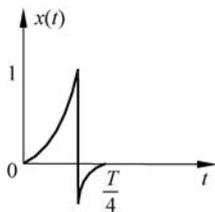
$$X_{-3} = 2e^{j\pi/2}, \quad X_{-1} = 3e^{j3}, \quad X_0 = 2, \quad X_1 = 3e^{-j3}, \quad X_3 = 2e^{-j\pi/2}$$

试写出其三角形式的傅里叶级数。

3.5 已知周期信号 $x_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(k\pi/4)}{k} e^{jk\pi t}$, 求该信号的直流分量和频率为 5Hz 的谐波分量的幅度。

3.6 不做任何积分运算求 $x(t) = \sin 5t \sin 3t$ 的指数形式的傅里叶级数。

3.7 已知周期信号 $x(t)$ 一个周期 ($0 < t < T$) 前 $1/4$ 波形如题图 3.2 所示,就下列情况分别画出一个周期内的整个波形。



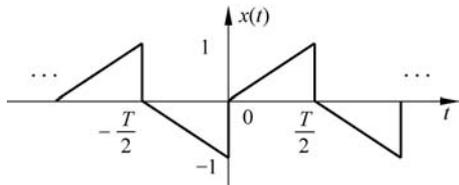
题图 3.2

- (1) $x(t)$ 是偶信号,不含奇次谐波;
- (2) $x(t)$ 是偶信号,只含奇次谐波;
- (3) $x(t)$ 是偶信号,含偶次奇次谐波;
- (4) $x(t)$ 是奇信号,只含偶次谐波;
- (5) $x(t)$ 是奇信号,只含奇次谐波;
- (6) $x(t)$ 是奇信号,含偶次奇次谐波。

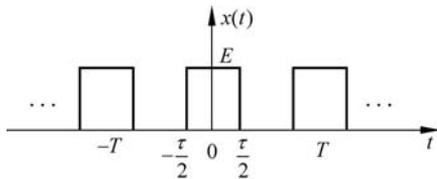
3.8 题图 3.3 所示周期信号的周期为 $10\mu\text{s}$ 。其是否包含以下频率分量的正弦信号: 50kHz、100kHz、150kHz、200kHz、300kHz?

3.9 若周期矩形脉冲信号 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 波形如题图 3.4 所示, $x_1(t)$ 的参数取值为 $\tau = 0.5\mu\text{s}, T = 1\mu\text{s}, E = 1\text{V}$; $x_2(t)$ 的参数取值为 $\tau = 1.5\mu\text{s}, T = 3\mu\text{s}, E = 3\text{V}$ 。分别求:

- (1) $x_1(t)$ 的谱线间隔和主瓣宽度,频率单位以 kHz 表示;
- (2) $x_2(t)$ 的谱线间隔和主瓣宽度;
- (3) $x_1(t)$ 与 $x_2(t)$ 的基波幅度之比;
- (4) $x_1(t)$ 基波幅度与 $x_2(t)$ 三次谐波幅度之比。



题图 3.3



题图 3.4

3.10 求下列信号的频谱:

(1) $G_2(t)$; (2) $G_2(t) * \delta(t-t_0)$; (3) $G_2(t) * [\delta(t-t_0) + \delta(t+t_0)]$ 。

3.11 试判断下列信号频谱的奇偶性:

(1) $x(t) = -\text{sgn}(t) \cdot G_\tau(t)$; (2) $x(t) = \cos\omega_0 t \cdot G_\tau(t)$; (3) $x(t) = \frac{1}{jt}$;

(4) $x(t) = (t+1)^2$; (5) $x(t) = \text{sgn}(t)$; (6) $x(t) = |t|$ 。

3.12 求信号 $x(t) = 2e^{-2t}u(t-1)$ 的频谱。

3.13 利用傅里叶变换的唯一性,证明下列信号的极限为单位冲激信号:

$$(1) x(t, a) = \begin{cases} \frac{1}{a}, & |t| \leq \frac{a}{2} \\ 0, & |t| > \frac{a}{2}, a > 0, \text{当 } a \rightarrow \infty \text{ 时;} \end{cases}$$

$$(2) x(t, a) = \frac{a}{2} [e^{at}u(-t) + e^{-at}u(t)], a > 0, \text{当 } a \rightarrow \infty \text{ 时。}$$

3.14 用 $X(j\omega) = \mathcal{F}[x(t)]$ 表示下列信号的频谱:

(1) $x^2(t) + x(2t)$; (2) $[1 + mx(t)]\cos\omega_0 t$; (3) $(t+2)x(t)$;

(4) $x(3t-6)$; (5) $\int_{-\infty}^t \tau x(\tau) d\tau$; (6) $x'(t) + x^*(t)$;

(7) $x(t) * x(t-1)$; (8) $(1-t)x(1-t)$ 。

3.15 已知 $x(t) = \begin{cases} e^{-(t-1)}, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 求下列各信号频谱的具体表达式:

(1) $x_1(t) = x(t)$; (2) $x_2(t) = x(t) + x(-t)$; (3) $x_3(t) = x(t) - x(-t)$;

(4) $x_4(t) = x(t) + x(t-1)$; (5) $x_5(t) = tx(t)$ 。

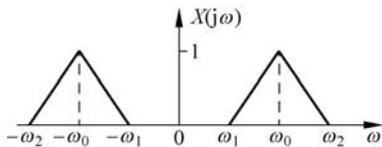
3.16 用傅里叶变换的性质求下列信号的频谱:

(1) $\frac{\sin 2\pi(t-2)}{\pi(t-2)}$; (2) $\frac{2a}{a^2+t^2}, a > 0$; (3) $\left(\frac{\sin 2\pi t}{2\pi t}\right)^2$; (4) $\frac{1}{a+jt}$;

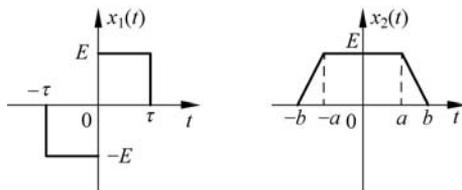
(5) $e^{-t} \cos(3t)u(t)$; (6) $e^{-2|t|} \cos(t)u(t)$; (7) $e^{-t} \sin(3t)u(t)$ 。

3.17 已知 $x(t)$ 的频谱如题图 3.5 所示,求 $x(t)\cos\omega_0 t$ 的频谱并画出频谱图。

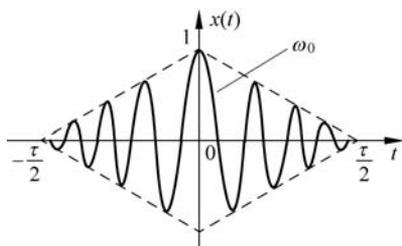
3.18 求题图 3.6 所示信号的傅里叶变换。



题图 3.5



题图 3.6



题图 3.7

3.19 求题图 3.7 所示调幅信号的频谱。

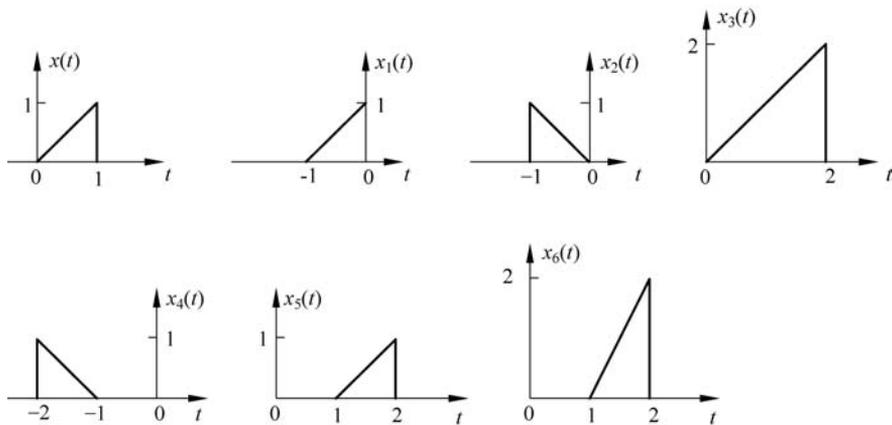
3.20 先求出题图 3.8 所示信号 $x(t)$ 的频谱 $X(j\omega)$ 的具体表达式, 再利用傅里叶变换的性质将其余信号的频谱表示成 $X(j\omega)$ 的形式。

3.21 记 $x(t) = \Lambda_2(t-1)$ 的傅里叶变换为 $X(j\omega)$ 。不求 $X(j\omega)$ 而完成下列运算:

(1) $X(0)$; (2) $\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) d\omega$;

(3) $\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$;

(4) $\int_{-\infty}^{\infty} \omega X(j\omega) d\omega$ 。



题图 3.8

3.22 求下列频谱的傅里叶反变换。

(1) $X(j\omega) = \frac{j\omega + 3}{-\omega^2 + 3j\omega + 2} + 2\pi\delta(\omega)$; (2) $X(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + \text{Sa}(\omega\tau)$;

(3) $X(j\omega) = \frac{1}{j(\omega-3)+2} + \frac{1}{j(\omega+3)+2}$; (4) $X(j\omega) = \frac{2}{\omega^2}$;

(5) $X(j\omega) = \frac{2}{\omega^3}$; (6) $X(j\omega) = \left(\frac{\sin\omega}{\omega} e^{-j\omega}\right)^2$ 。

3.23 求 $X(j\omega)$ 的傅里叶反变换, 其中 $|X(j\omega)| = u(\omega-1) - u(\omega+1)$, $\angle X(j\omega) = -2\omega - \pi$ 。

3.24 计算 $\frac{\sin(2\pi t)}{2\pi t} * \frac{\sin(8\pi t)}{8\pi t}$ 。

3.25 已知 $y(t) = x(t) * h(t)$, $g(t) = x(2t) * h(2t)$ 。试写出 $g(t)$ 和 $y(t)$ 的关系。

3.26 已知线性时不变系统的频率响应 $H(j\omega)$ 及输入信号 $x(t)$ 如下, 求输出 $y(t)$ 。

$$(1) H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}$$

$$(a) x(t) = tu(t); \quad (b) x(t) = t[u(t) - u(t-1)];$$

$$(c) x(t) = e^{-3t}u(t); \quad (d) x(t) = \sin 3t + \sin t。$$

$$(2) H(j\omega) = \frac{j\omega}{-\omega^2 + 5j\omega + 6}, x(t) = e^{-t}u(t);$$

$$(3) H(j\omega) = \frac{-\omega^2 + j4\omega + 5}{-\omega^2 + j3\omega + 2}, x(t) = e^{-3t}u(t);$$

$$(4) H(j\omega) = \frac{j\omega + 3}{-\omega^2 + j3\omega + 2}, x(t) = u(t) - u(t-1)。$$

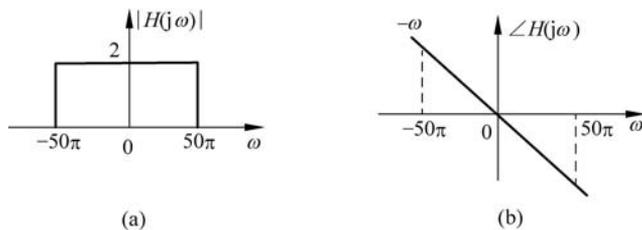
3.27 已知某线性时不变系统的频率响应为 $H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega}$, 当周期信号 $x(t) =$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{-2E}{(2k+1)\pi} \sin[(2k+1)\omega_0 t]$$
 通过该系统时, 求输出 $y(t)$ 。

3.28 当信号 $x(t) = 2 + 3\cos t + \sin\left(5t - \frac{\pi}{6}\right) - 2\cos\left(8t - \frac{\pi}{3}\right)$ 通过微分方程 $y'(t) + y(t) = x(t)$ 所描述的系统时, 求输出 $y(t)$ 。

3.29 某线性时不变系统的频率响应 $H(j\omega) = \frac{1-j\omega}{1+j\omega}$, (1) 试证明 $|H(j\omega)| = K$, 并求出常数 K 的值; (2) 判断该系统是否是无失真传输系统, 并说明原因。

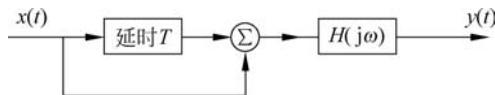
3.30 系统的幅频特性和相频特性如题图 3.9 所示, 该系统能对哪些信号实现无失真传输?



题图 3.9

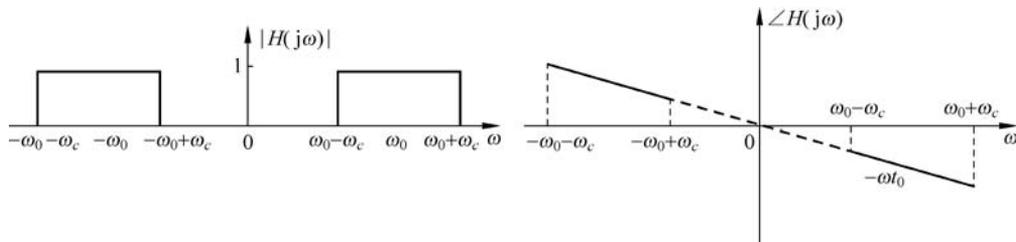
3.31 题图 3.10 所示框图中, $H(j\omega)$ 表示理想低通滤波器, $H(j\omega) = G_{2\omega_c}(\omega)e^{-j\omega t_d}$ 。

在 $\omega_c \geq \frac{1}{2}$ 和 $\omega_c < \frac{1}{2}$ 两种情况下, 求输入为 $x(t) = \frac{2 \sin \frac{t}{2}}{t}$ 时的输出 $y(t)$ 。



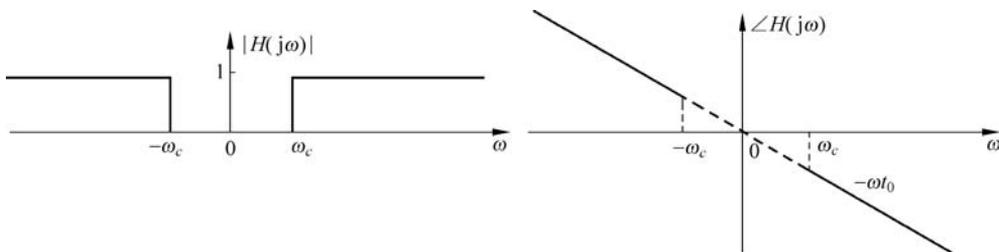
题图 3.10

3.32 信号 $x(t) = \frac{\sin(\omega_c t)}{\omega_c t} \cos(\omega_0 t)$ ($\omega_0 \gg \omega_c$), 通过题图 3.11 所示的理想带通滤波器, 求输出 $y(t)$ 。



题图 3.11

3.33 求题图 3.12 所示理想高通滤波器的单位冲激响应和单位阶跃响应。



题图 3.12

3.34 确定对下面各信号的最低允许抽样频率和最大允许抽样间隔:

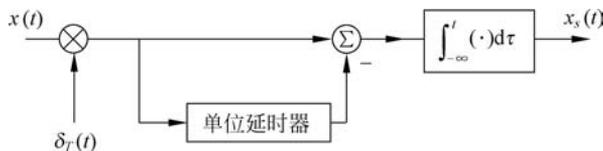
- (1) $\text{Sa}(100t)$; (2) $\text{Sa}^2(100t)$; (3) $\text{Sa}(100t) + \text{Sa}(50t)$;
- (4) $\text{Sa}(100t) + \text{Sa}^2(60t)$ 。

3.35 连续时间信号 $x(t)$ 时长 1min, 其最高频率为 15kHz。对该信号进行抽样, 至少要多少个样本点才能恢复出原信号?

3.36 已知信号 $x_1(t)$ 的最高角频率为 ω_1 , $x_2(t)$ 的最高角频率为 ω_2 , 若对信号 $x(t) = x_1(3t) * x_2(t)$ 进行抽样并保留 $x(t)$ 的所有信息, 抽样间隔应满足什么条件?

3.37 对某连续时间信号 $x(t)$ 进行理想抽样后, 可以通过截止频率 $\omega_c = 1000\pi$ 的理想低通滤波器恢复。抽样间隔有可能为下列哪些值? (1) $0.5 \times 10^{-3} \text{ s}$; (2) $2 \times 10^{-3} \text{ s}$; (3) 10^{-4} s 。

3.38 如题图 3.13 所示系统, 已知 $x(t)$ 是频带受限于 $(-\omega_m, \omega_m)$ 的连续信号。



题图 3.13

- (1) 求 $x_s(t)$ 的傅里叶变换；
 (2) 为从 $x_s(t)$ 中恢复信号 $x(t)$ ，试确定 ω_m 与 T 的关系；
 (3) 确定 $x_s(t)$ 应通过怎样的滤波器才能恢复出 $x(t)$ 。

提高题

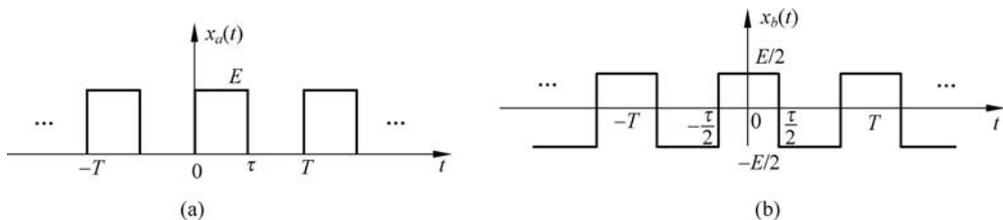
3.1 一个全波整流器(不包括滤波)的输入-输出关系可以描述为 $y(t) = |x(t)|$ ，若 $x(t) = \cos t$ ，

- (1) 求输入和输出信号的直流分量的幅度；
 (2) 求输出信号的傅里叶级数的系数。

3.2 已知周期信号 $x(t)$ 的傅里叶级数为 $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t}$ ， $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ 。试求下列周期信号的傅里叶系数(用 X_k 表示)：

- (1) $x(t-2)$ ； (2) $x'(t)$ ； (3) $x(t)e^{j2\omega_0 t}$ ； (4) $x(-t)$ ； (5) $x^*(t)$ ；
 (6) $\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$ (假定 $X_0 = 0$)； (7) $x(2t)$ 。

3.3 记图 3.2.1 所示周期信号的傅里叶系数为 X_k ，试分别计算题图 3.14 所示周期信号的傅里叶系数(用 X_k 表示)。

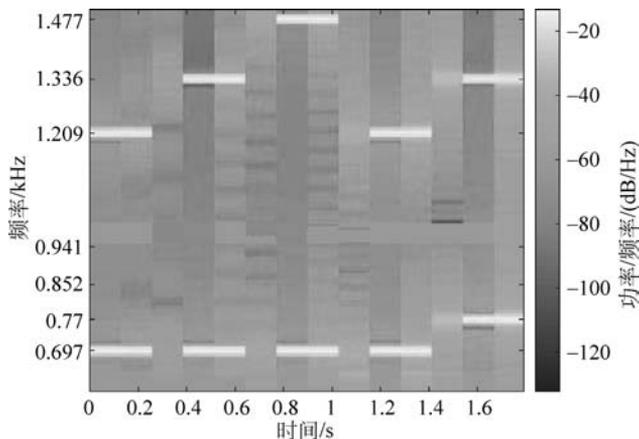


题图 3.14

3.4 电话机在按键时会产生双音多频信号，各按键对应的两个频率值如题表 3.1 所示。对某次拨号过程产生的语音信号做频谱分析，得到信号的时频图如题图 3.15 所示，其中每次按键时长为 0.25s，间隔 0.125s。请写出拨号号码。

题表 3.1

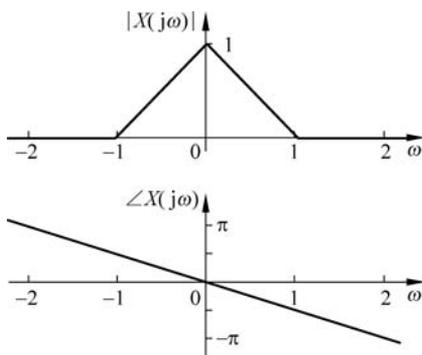
频率/Hz	1209	1336	1477
697	1	2	3
770	4	5	6
852	7	8	9
941	*	0	#



题图 3.15

3.5 计算下列信号的傅里叶变换:

(1) $e^{-|t-3|}$; (2) $\frac{\sin t \sin(2t)}{t^2}$; (3) $\int_{-\infty}^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau$; (4) $e^{-t-3} u\left(\frac{t+5}{3}\right)$.



题图 3.16

3.6 分别利用帕塞瓦尔能量等式和傅里叶

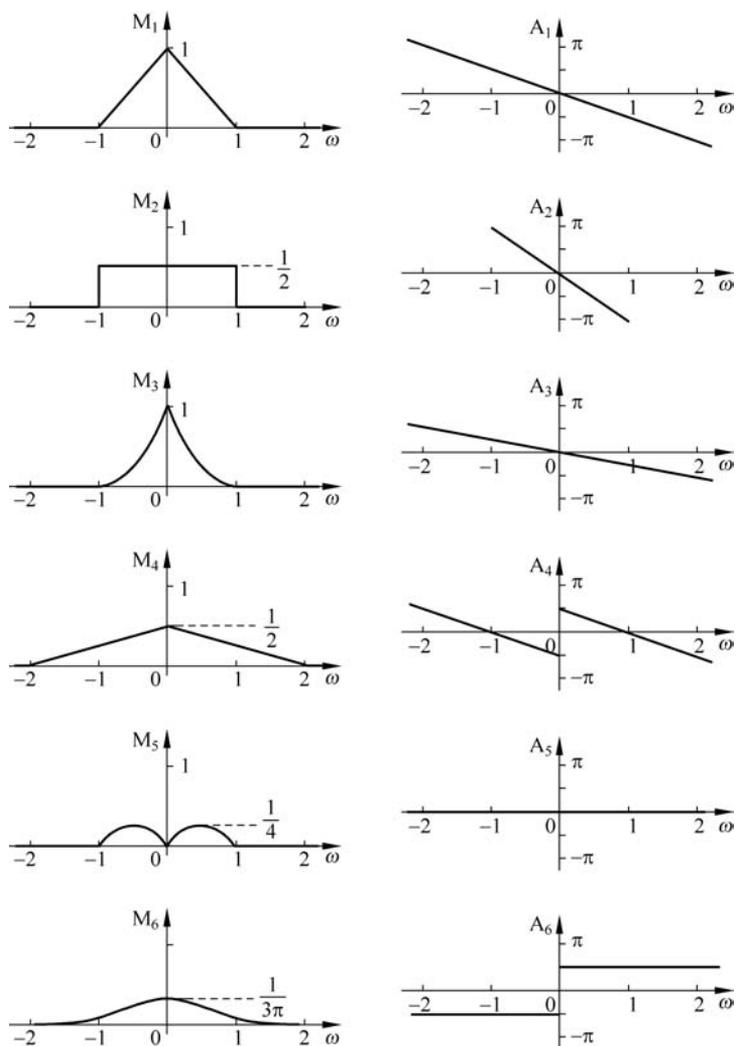
变换定义计算 $\int_{-\infty}^{\infty} \text{Sa}^2(t) dt$ 。

3.7 记某段语音信号的波形为 $x(t)$, 则波形为 $x(2t)$ 的语音信号听起来有何特点? 请分析原因。

3.8 某信号 $x(t)$ 的频谱图如题图 3.16 所示。题表 3.2 中 5 个信号可能的幅度谱、相位谱分别对应题图 3.17 的 $M_1 \sim M_6$ 、 $A_1 \sim A_6$ (不一定是一一映射)。请将信号幅度谱、相位谱的编号填入题表 3.2。

题表 3.2

信 号	幅 度 谱	相 位 谱
$x'(t)$		
$x(t) * x(t)$		
$x(t-0.5\pi)$		
$x(2t)$		
$x^2(t)$		



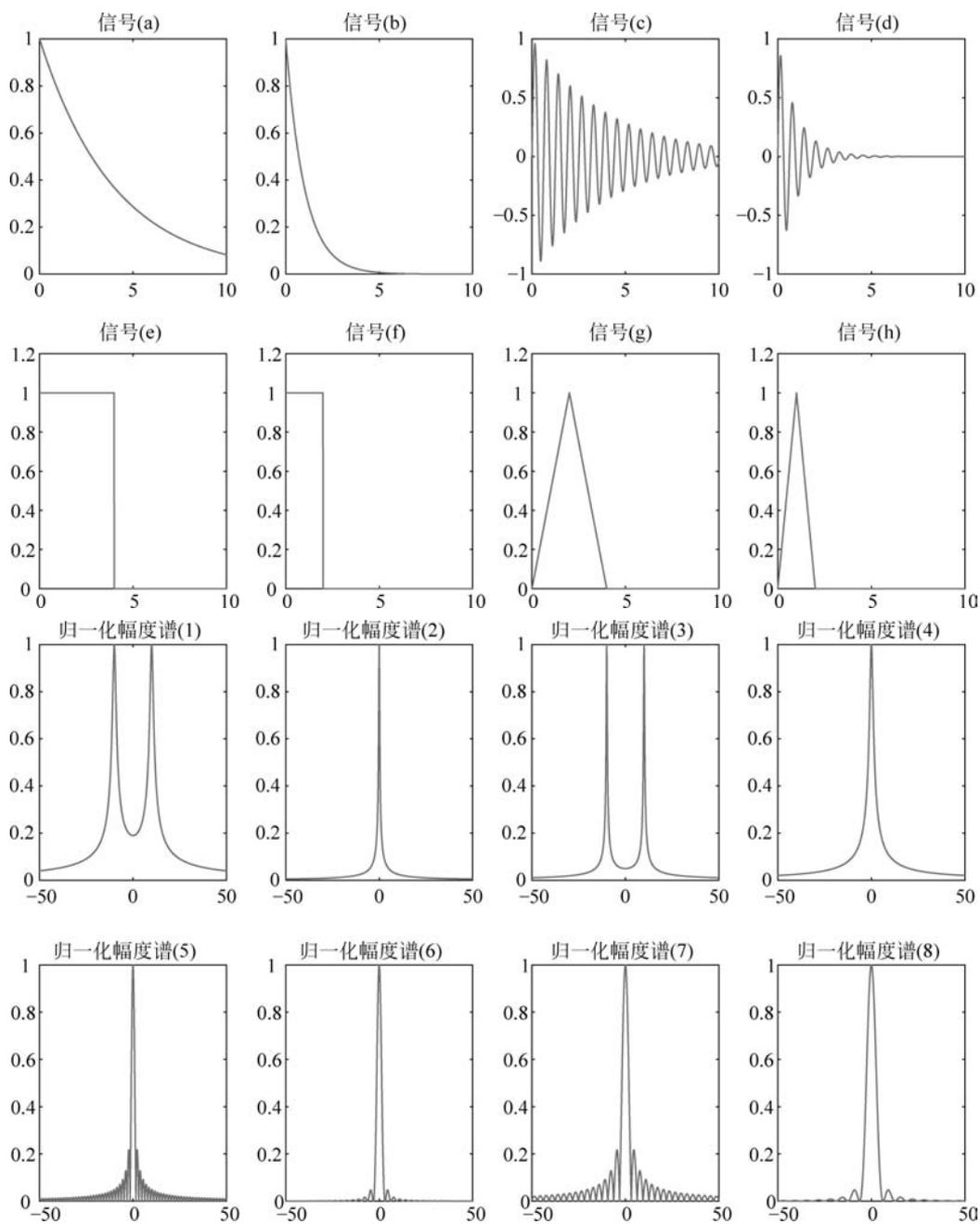
题图 3.17

3.9 某信号(a)~(h)的波形如题图 3.18 所示,归一化幅度谱(1)~(8)分别对应(a)~(h)8个信号的其中一个。试确定不同信号对应的幅度谱编号。

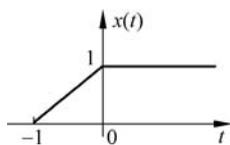
3.10 利用傅里叶变换微积分性质计算题图 3.19 所示信号的频谱。

3.11 设 $x(t)$ 的傅里叶变换为 $2\pi\delta(\omega - \pi) + 2\pi\delta(\omega - 10)$, $h(t) = \text{Sa}(2\pi t)$ 。请回答:

- (1) $x(t)$ 是否是周期信号;
- (2) $x(t) * h(t)$ 是否是周期信号;
- (3) 两个非周期信号的卷积一定是非周期信号吗?



题图 3.18



题图 3.19

3.12 求下列频谱对应的信号 $x(t)$:

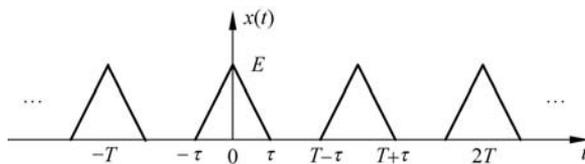
(1) $\operatorname{Re} \left[\frac{e^{-j5\omega}}{j\omega+1} \right]$; (2) $\operatorname{Im} \left[\frac{e^{-j5\omega}}{j\omega+1} \right]$;

(3) $G_2(\omega-7)+G_2(\omega+7)$.

3.13 某信号 $x(t)$ 的傅里叶变换为 $X(j\omega)$, 若信号满足以下条件: (1) $x(t)$ 为非负实信号; (2) $\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = 24\pi$; (3) $\mathcal{F}^{-1}\{(1+j\omega)X(j\omega)\} = Ae^{-2t}u(t)$. 求 $x(t)$ 的解析表达式.

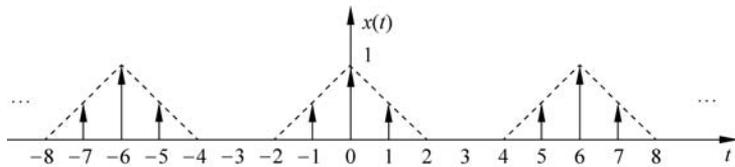
3.14 证明: $\mathcal{F} \left[G_\tau(t) * \sum_{n=-N}^N \delta(t-nT) \right] = \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)\omega T}{\sin \frac{\omega T}{2}} \cdot \tau \operatorname{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$, $\tau < T$.

3.15 对于题图 3.20 所示的周期三角波, 试用多种方法求其傅里叶变换.



题图 3.20

3.16 求题图 3.21 所示周期信号的傅里叶变换.



题图 3.21

3.17 计算 $X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{Sa}(3k)\delta(\omega-3k)$ 的傅里叶反变换.

3.18 某线性时不变系统的单位冲激响应 $h(t) = \frac{\sin[7(t-2)]}{t-2}$, 求下列信号通过该系统后的输出 $y(t)$:

(1) $\sin(8t)$; (2) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k \sin(5kt)$; (3) $\frac{\sin[7(t+2)]}{t+2}$; (4) $\frac{\sin^2(3t)}{t^2}$.

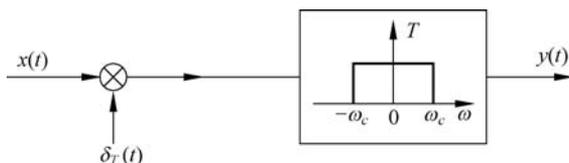
3.19 某理想带通滤波器的频率响应 $H(j\omega) = \begin{cases} 1, & \omega_c \leq \omega \leq 5\omega_c \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$.

(1) 若该滤波器的单位冲激响应为 $h(t)$, 确定函数 $g(t)$, 使得 $h(t) = \frac{\sin 2\omega_c t}{t} g(t)$;

(2) 当 ω_c 增加时, 该滤波器的单位冲激响应会更加向原点集中吗?

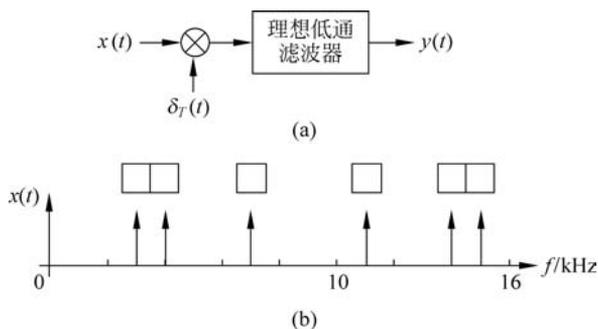
3.20 设 $x_r(t)$ 是一个频带有限的实信号, 带宽为 $\omega_1 < \omega < \omega_2$, 现将 $x_r(t)$ 通过一个系统, 该系统的频率响应为 $H(j\omega) = \begin{cases} -j, & \omega > 0 \\ 0, & \omega = 0 \\ j, & \omega < 0 \end{cases}$, 输出设为 $x_i(t)$ 。现构成一个复信号 $x(t) = x_r(t) + jx_i(t)$ 。欲对 $x(t)$ 抽样, 抽样间隔应如何选取才能保证不产生频谱混叠?

3.21 系统如题图 3.22 所示。证明: 若 $\omega_c = \frac{\pi}{T}$, 则对任意 T , 总有 $y(kT) = x(kT), k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 。



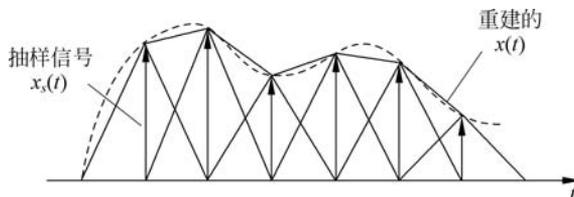
题图 3.22

3.22 某周期信号 $x(t)$ 的基频为 11kHz, 其包含 1~7 次谐波分量。该信号通过题图 3.23(a) 所示系统, 其中周期冲激串的周期为 25×10^{-6} s, 理想低通滤波器的截止频率为 16kHz。题图 3.23(b) 画出了输出信号的傅里叶变换, 分别写出空格中对应的 $x(t)$ 的谐波次数。



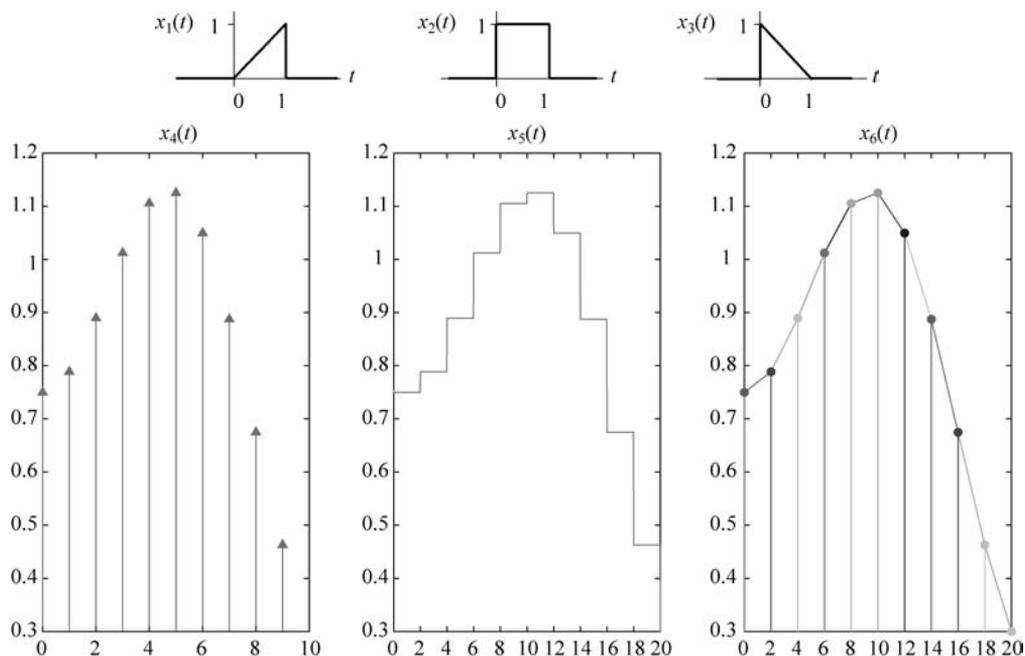
题图 3.23

3.23 抽样信号经线性插值进行恢复的示意图如题图 3.24 所示, 其中抽样间隔为 T 。该过程可看作抽样信号经过一个低通滤波器, 试写出该滤波器的单位冲激响应和频率响应。



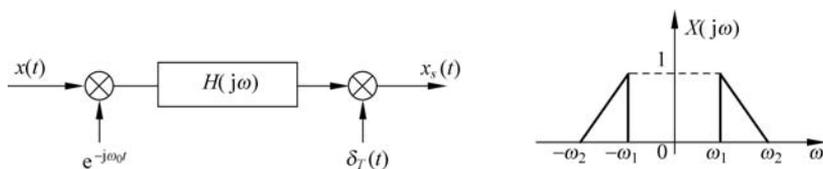
题图 3.24

3.24 $x_1(t) \sim x_6(t)$ 的波形图分别如题图 3.25 所示, 其中 $x_5(t)$ 、 $x_6(t)$ 分别是 $x_4(t)$ 的零阶保持插值和线性插值。分别写出 $x_5(t)$ 、 $x_6(t)$ 关于 $x_4(t)$ 的表达式(可借助 $x_1(t) \sim x_3(t)$)。



题图 3.25

3.25 题图 3.26 所示系统中, $x(t)$ 是频带有限实信号, $\omega_0 = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$, $H(j\omega) = G_{2\omega_c}(\omega)$, $\omega_c = \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)$ 。



题图 3.26

- (1) 画出 $x_s(t)$ 的频谱图;
- (2) 为了从 $x_s(t)$ 中恢复 $x(t)$, 确定最大允许抽样间隔 T ;
- (3) 设计一个从 $x_s(t)$ 中恢复 $x(t)$ 的系统。

3.26 某连续时间信号 $x(t)$ 的傅里叶变换 $X(j\omega) = G_{\frac{\pi}{6}}(\omega)$, 对其进行抽样得到 $y(n) = x(3n)$ 。(1) 若 $w_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)\delta(t - 3n)$, 画出其频谱图; (2) 若 $w_2(t) =$

$\frac{1}{3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n) [\delta(t-3n-1) + \delta(t-3n) + \delta(t-3n+1)]$, 画出其频谱图, 并标出频谱在 $\omega=0$ 处的取值。

计算机作业

3.1 利用基本题 3.2(c) 的结果, 画出 $E=2, T$ 分别为 4、8、16 时的频谱图(取前 10 项), 并分析周期对频谱的影响。

3.2 在对称区间内分别画出 $\text{sgn}(t), G_4(t), e^{-t}u(t), e^{-t+j3t}u(t)$ 的频谱图, 并观察其幅度谱和相位谱、频谱实部和虚部的特点。

3.3 画出 $e^{-t} \cos(3t)u(t)$ 的频谱图, 比较其与计算机作业 3.2 画出的 $e^{-t}u(t), e^{-t+j3t}u(t)$ 的频谱图的区别, 验证傅里叶变换的频移性质。

3.4 画出 $G_4(t), G_4(t-2), G_4(t-3)$ 的频谱图, 加深对傅里叶变换时移性质的理解。

3.5 计算 $x(t) = e^{-t}u(t)$ 通过频率响应 $H(j\omega) = \frac{j\omega}{-\omega^2 + 5j\omega + 6}$ 的线性时不变系统后的输出。

3.6 对于每个给定的信号和抽样速率, 画出原信号在 $-1 < t < 1$ 的图形, 以及抽样值之间使用零阶保持内插和一阶保持内插后的图形。(画零阶保持内插图形, 本题可使用 stairs 函数。)

$$(1) f_s = 8, x(t) = \sin(2\pi t); \quad (2) f_s = 32, x(t) = \sin(2\pi t);$$

$$(3) f_s = 8, x(t) = G_1(t); \quad (4) f_s = 8, x(t) = \Delta_1(t)。$$

3.7 分别用 44.1kHz、11kHz、5.5kHz、8kHz 采集一段语音信号, 再利用计算机播放出来, 试讨论抽样频率对恢复信号的影响, 并确定合适的抽样频率范围。