第3章

随机过程的线性变换

在电子技术中,通常需要将信号经过一系列的变换,才能提取到有用的信息。变换可以看作为信号通过系统,所以随机过程的变换就是分析随机过程通过系统后的响应。系统一般分为线性系统和非线性系统两大类,因此随机过程的变换也分为线性变换和非线性变换两大类。本章介绍随机过程的线性变换,随机过程的非线性变换将在第4章介绍。

3.1 变换的基本概念和基本定理

3.1.1 变换的基本概念

1. 变换的定义

首先回顾普通函数变换的概念。

给定一个函数 $x(t)$,按照某种法则 T,指定一个新的函数 $y(t)$,那么,就说 $y(t)$是$x(t)$经过变换 T 后的结果。记为

$$y(t)=T[x(t)] \tag{3.1.1}$$

T 称为从 $x(t)$到 $y(t)$的变换。类似地,随机过程的变换也可以这样来定义。

定义 给定一个随机过程 $X(t)$,按照某种法则 T,对它的每一个样本函数 $x(t)$,都指定一个对应函数 $y(t)$,于是就得到了一个新的随机过程 $Y(t)$,记为

$$Y(t)=T[X(t)] \tag{3.1.2}$$

T 就叫作从随机过程 $X(t)$到 $Y(t)$的变换,$Y(t)$是随机过程 $X(t)$经过变换后的结果。

需要说明的是式(3.1.2)的变换关系,如果要用普通函数的变换关系来理解的话是一簇变换关系,也就是说,对 $X(t)$和 $Y(t)$的每一个样本函数都有一个变换等式。

随机过程的变换也可以用系统的观点来加以解释。如图3.1所示,假定系统是按照法则 T 来定义的,那么 $Y(t)$就可以看作随机过程 $X(t)$通过系统后的响应。

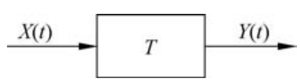


图3.1 随机过程的变换示意图

变换有确定性变换和随机性变换两种。对于某个试验结果 e_i,对应一个特定的时间函数 $x(t,e_i)$,用这个信号作为系统的输入,可以得到一个特定的输出函数 $y(t,e_i)$,这个函数是 $Y(t)$对应于 e_i 的一个样本。于是,系统对随机输入的响应与确定性信号的响应是相同的,所谓随机性主要表现在输入上,而不是变换本身。按这种方式解释的变换称为确定性变换。即如果 e_1 和 e_2 是两个实验结果,且 $x(t,e_1)=x(t,e_2)$,则 $y(t,e_1)=y(t,e_2)$,则称 T 是确定性变换,否则称为随机性变换。本章只介绍确定性变换。

2. 线性变换

定义 设有任意两个随机变量 A_1 和 A_2 及任意两个随机过程 $X_1(t)$和 $X_2(t)$,如果满足

$$L[A_1X_1(t)+A_2X_2(t)]=A_1L[X_1(t)]+A_2L[X_2(t)] \tag{3.1.3}$$

则称 L 是线性变换。

对于线性变换 L，$Y(t)=L[X(t)]$，如果

$$Y(t+\varepsilon)=L[X(t+\varepsilon)] \tag{3.1.4}$$

其中 ε 为任意常数，即输入的时延对输出也只产生一个相应的时延，则称 L 是线性时不变的。

3.1.2 线性变换的基本定理

下面针对线性变换给出两个基本定理，这两个定理描述了随机过程经过线性变换后数字特征的变化。

定理 1 设 $Y(t)=L[X(t)]$，其中 L 是线性变换，则

$$E[Y(t)]=L\{E[X(t)]\} \tag{3.1.5}$$

即随机过程经过线性变换后，其输出的数学期望等于输入的数学期望通过线性变换后的结果。

由于

$$E[Y(t)]=E\{L[X(t)]\}=L\{E[X(t)]\} \tag{3.1.6}$$

可见，如果把 L 和 E 看作为算子，那么 L 和 E 这两个算子是可以交换次序的。

定理 1 可以用大数定理加以证明。设第 i 次试验时，得到样本函数 $x_i(t)$，将其加到系统的输入端，而在输出端得到一个样本函数 $y_i(t)$：

$$y_i(t)=L[x_i(t)] \tag{3.1.7}$$

在 n 次重复试验后，可以得到 n 个样本函数 $y_1(t),y_2(t),\cdots,y_n(t)$，那么 $Y(t)$的样本均值为

$$\begin{aligned}\overline{Y(t)}&=\frac{1}{n}[y_1(t)+y_2(t)+\cdots+y_n(t)]\\&=\frac{1}{n}\{L[x_1(t)]+L[x_2(t)]+\cdots+L[x_n(t)]\}\\&=L\left\{\frac{1}{n}[x_1(t)+x_2(t)+\cdots+x_n(t)]\right\}\\&=L\{\overline{X(t)}\}\end{aligned} \tag{3.1.8}$$

当 $X(t)$与 $Y(t)$的方差有限时，根据大数定理，当 $n\to\infty$时，有

$$\overline{X(t)}\to E[X(t)],\quad \overline{Y(t)}\to E[Y(t)]$$

所以

$$E[Y(t)]=L\{E[X(t)]\}$$

定理 2 设 $Y(t)=L[X(t)]$，其中 L 是线性变换，则

$$R_{XY}(t_1,t_2)=L_{t_2}[R_X(t_1,t_2)] \tag{3.1.9}$$

$$R_Y(t_1,t_2)=L_{t_1}[R_{XY}(t_1,t_2)]=L_{t_1}\cdot L_{t_2}[R_X(t_1,t_2)] \tag{3.1.10}$$

其中 L_{t_1} 表示对 t_1 做 L 变换,L_{t_2} 表示对 t_2 做 L 变换。

证明 因为

$$X(t_1)Y(t)=X(t_1)L[X(t)]=L[X(t_1)X(t)]$$

$$E[X(t_1)Y(t)]=E\{L[X(t_1)X(t)]\}=L\{E[X(t_1)X(t)]\}$$

令 $t=t_2$,可得

$$R_{XY}(t_1,t_2)=L_{t_2}[R_X(t_1,t_2)]$$

同理可证

$$R_Y(t_1,t_2)=L_{t_1}[R_{XY}(t_1,t_2)]$$

联合上面两式,得

$$R_Y(t_1,t_2)=L_{t_1}\cdot L_{t_2}[R_X(t_1,t_2)]$$

以上两个定理是线性变换的两个基本定理,它给出了随机过程经过线性变换后,输出的均值和相关函数的计算方法。

从两个定理可知,对于线性变换,输出的均值和相关函数可以分别由输入的均值和相关函数确定。推广而言,对于线性变换,输出的 k 阶矩可以由输入的相应阶矩来确定。如

$$E[Y(t_1)Y(t_2)Y(t_3)]=L_{t_1}\cdot L_{t_2}\cdot L_{t_3}\{E[X(t_1)X(t_2)X(t_3)]\} \tag{3.1.11}$$

假定系统是线性时不变的,由线性时不变的基本特性和两个基本定理可以看出,如果 $X(t)$是严平稳的,则 $Y(t)$也是严平稳的。如果 $X(t)$是广义平稳的,则 $Y(t)$也是广义平稳的。

例 3.1 随机过程导数的统计特性。设 $\dot{X}(t)=\mathrm{d}X(t)/\mathrm{d}t$,$L=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$,很容易证明,导数是一种线性变换,$\dot{X}(t)$可以看作 $X(t)$经过微分变换后的输出,如图 3.2 所示。

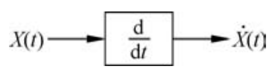


图 3.2 随机过程的导数变换示意图

根据线性变换的基本定理 1,导数过程 $\dot{X}(t)$的均值为

$$E[\dot{X}(t)]=E\{L[X(t)]\}=L\{E[X(t)]\} \tag{3.1.12}$$

即

$$m_{\dot{X}}(t)=\frac{\mathrm{d}m_X(t)}{\mathrm{d}t} \tag{3.1.13}$$

根据线性变换的定理 2,$X(t)$和 $\dot{X}(t)$的互相关函数为

$$R_{X\dot{X}}(t_1,t_2)=L_{t_2}[R_X(t_1,t_2)]=\frac{\partial R_X(t_1,t_2)}{\partial t_2} \tag{3.1.14}$$

自相关函数为

$$R_{\dot{X}}(t_1,t_2)=L_{t_1}[R_{X\dot{X}}(t_1,t_2)]=\frac{\partial R_{X\dot{X}}(t_1,t_2)}{\partial t_1}=\frac{\partial^2 R_X(t_1,t_2)}{\partial t_1\partial t_2} \tag{3.1.15}$$

如果 $X(t)$为平稳随机过程，则

$$m_{\dot{X}}(t)=0 \tag{3.1.16}$$

$$R_{X\dot{X}}(\tau)=-\frac{\mathrm{d}R_X(\tau)}{\mathrm{d}\tau},\quad R_{\dot{X}}(\tau)=\frac{\mathrm{d}R_{X\dot{X}}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}=-\frac{\mathrm{d}^2R_X(\tau)}{\mathrm{d}\tau^2} \tag{3.1.17}$$

$$G_{X\dot{X}}(\omega)=-\mathrm{j}\omega G_X(\omega)\quad G_{\dot{X}}(\omega)=\mathrm{j}\omega G_{X\dot{X}}(\omega)=\omega^2G_X(\omega) \tag{3.1.18}$$

导数过程的相关函数可用图 3.3 来表示。

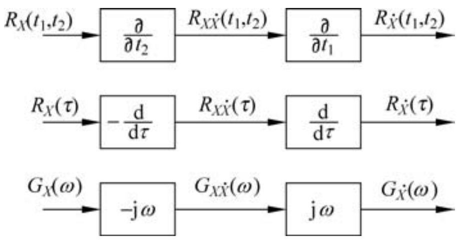


图 3.3　随机过程及其导数相关函数示意图

另外，$R_{X\dot{X}}(-\tau)=R_{\dot{X}X}(\tau)=\dfrac{\mathrm{d}R_X(\tau)}{\mathrm{d}\tau}$，综合式(3.1.17)，可得 $R_{X\dot{X}}(-\tau)=-R_{X\dot{X}}(\tau)$，$R_{X\dot{X}}(\tau)$是奇函数，$R_{X\dot{X}}(0)=0$。因此，平稳随机过程 $X(t)$与它的导数 $\dot{X}(t)$在同一时刻是正交的和不相关的，如果 $X(t)$服从正态分布，则它们还是相互独立的。

3.2　随机过程通过线性系统分析

随机过程通过线性系统分析的中心问题是：给定系统的输入函数和线性系统的特性，求输出函数，由于输入是随机过程，所以输出也是随机过程；对于随机过程，一般很难给出确切的函数形式，因此，通常只分析随机过程通过线性系统后输出的概率分布特性和某些数字特征。线性系统既可以用冲激响应描述，也可以用系统传递函数描述，因此，随机过程通过线性系统的常用分析方法也有两种：冲激响应法和频谱法。

3.2.1　冲激响应法

设有如图 3.4 所示的线性系统，其中 $h(t)$为系统的冲激响应。

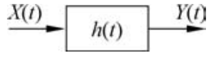


图 3.4　线性系统示意图

根据线性系统的理论，输出 $Y(t)$为

$$Y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}X(t-\tau)h(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}X(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau=h(t)*X(t) \tag{3.2.1}$$

如果用 $L=h(t)*$ 表示与冲激响应的卷积,即 $Y(t)=L[X(t)]$,很容易证明,L 是一种线性变换,由定理1,输出的均值为

$$m_Y(t)=L[m_X(t)]=h(t)*m_X(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}m_X(t-\tau)h(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3.2.2}$$

如果 $X(t)$ 为平稳随机过程,则

$$m_Y=\int_{-\infty}^{+\infty}m_X h(\tau)\mathrm{d}\tau=m_X\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)\mathrm{d}\tau=m_X H(0) \tag{3.2.3}$$

其中 $H(0)$ 为系统的传递函数在 $\omega=0$ 时的值。

由定理2,输入和输出的互相关函数为

$$\begin{aligned}R_{XY}(t_1,t_2)&=L_{t_2}[R_X(t_1,t_2)]=h(t_2)*R_X(t_1,t_2)\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(t_1,t_2-u)h(u)\mathrm{d}u\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

输出的自相关函数为

$$\begin{aligned}R_Y(t_1,t_2)&=L_{t_1}[R_{XY}(t_1,t_2)]=h(t_1)*R_{XY}(t_1,t_2)\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{XY}(t_1-u,t_2)h(u)\mathrm{d}u\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

综合式(3.2.4)与式(3.2.5),得

$$R_Y(t_1,t_2)=h(t_1)*R_{XY}(t_1,t_2)=h(t_1)*h(t_2)*R_X(t_1,t_2) \tag{3.2.6}$$

同理可证

$$R_{YX}(t_1,t_2)=h(t_1)*R_X(t_1,t_2) \tag{3.2.7}$$

$$R_Y(t_1,t_2)=h(t_2)*R_{YX}(t_1,t_2) \tag{3.2.8}$$

输入输出相关函数的关系如图3.5所示。

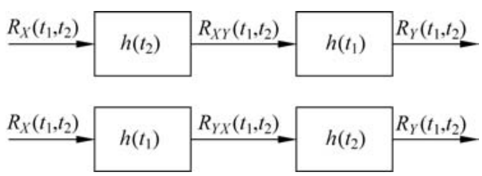


图3.5 随机过程通过线性系统输入输出相关函数之间的关系

如果 $X(t)$ 是平稳随机过程,则

$$\begin{aligned}R_{XY}(t_1,t_2)&=\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(t_1,t_2-u)h(u)\mathrm{d}u=\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(t_1-t_2+u)h(u)\mathrm{d}u\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau+u)h(u)\mathrm{d}u\end{aligned}$$

其中,$\tau=t_1-t_2$,即

$$R_{XY}(\tau)=h(-\tau)*R_X(\tau) \tag{3.2.9}$$

同理

$$R_Y(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{XY}(t_1-u,t_2)h(u)\mathrm{d}u=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{XY}(t_1-t_2-u)h(u)\mathrm{d}u$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} R_{XY}(\tau-u)h(u)\mathrm{d}u$$

即

$$R_Y(\tau)=h(\tau)*R_{XY}(\tau) \tag{3.2.10}$$

所以

$$R_Y(\tau)=h(-\tau)*h(\tau)*R_X(\tau) \tag{3.2.11}$$

类似地，

$$R_{YX}(\tau)=h(\tau)*R_X(\tau) \tag{3.2.12}$$

$$R_Y(\tau)=h(-\tau)*R_{YX}(\tau) \tag{3.2.13}$$

平稳随机过程通过线性系统输入输出相关函数之间的关系如图3.6所示。

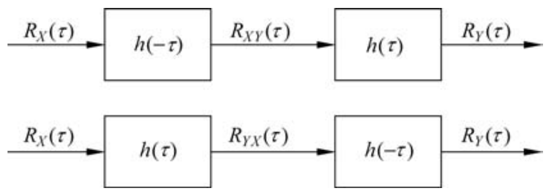


图3.6　平稳随机过程通过线性系统输入输出相关函数之间的关系

例3.2　设有微分方程描述的线性系统：

$$\frac{\mathrm{d}Y(t)}{\mathrm{d}t}+\alpha Y(t)=X(t)$$

其中α为常数，系统的起始状态为$Y(0)=0$，输入$X(t)$为平稳随机过程，且$E[X(t)]=\lambda$，$R_X(\tau)=\lambda^2+\lambda\delta(\tau)$，求输出$Y(t)$的统计特性。

解　首先确定系统的冲激响应，令输入为$\delta(t)$，则冲激响应为

$$\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}+\alpha h(t)=\delta(t)$$

由此可解得

$$h(t)=\mathrm{e}^{-\alpha t}U(t)$$

由于系统是因果系统，系统的响应只有在$t\geqslant 0$时才存在，因此，其输入也只有在$t\geqslant 0$时才对系统起作用，即实际加到系统的输入为$X(t)U(t)$，那么，输出$Y(t)$的均值为

$$m_Y(t)=h(t)*[m_X(t)U(t)]=\int_0^t \lambda\mathrm{e}^{-\alpha\tau}\mathrm{d}\tau=\frac{\lambda}{\alpha}(1-\mathrm{e}^{-\alpha t})\quad (t\geqslant 0)$$

由式(3.2.4)，输入与输出的互相关函数为

$$R_{XY}(t_1,t_2)=\int_0^{t_2} R_X(t_1,t_2-u)h(u)\mathrm{d}u=\int_0^{t_2}[\lambda^2+\lambda\delta(t_1-t_2+u)]\mathrm{e}^{-\alpha u}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{\lambda^2}{\alpha}(1-\mathrm{e}^{-\alpha t_2})+\lambda\mathrm{e}^{-\alpha(t_2-t_1)}U(t_2-t_1)\quad (t_2>t_1)$$

由式(3.2.5)，输出的自相关函数为

$$R_Y(t_1,t_2)=\int_0^{t_1} R_{XY}(t_1-u,t_2)h(u)\mathrm{d}u$$

$$=\int_0^{t_1}\left[\frac{\lambda^2}{\alpha}(1-e^{-\alpha t_2})+\lambda e^{-\alpha(t_2-t_1+u)}U(t_2-t_1+u)\right]e^{-\alpha u}du$$

$$=\frac{\lambda^2}{\alpha^2}(1-e^{-\alpha t_2})(1-e^{-\alpha t_1})+\frac{\lambda}{2\alpha}e^{-\alpha(t_2-t_1)}(1-e^{-2\alpha t_1})\quad(t_2>t_1)$$

由于自相关函数满足$R_X(t_1,t_2)=R_X(t_2,t_1)$,所以,只需将上式$t_1$和$t_2$的位置互换,就可以得到$t_1>t_2$情况的$R_Y(t_1,t_2)$,即

$$R_Y(t_1,t_2)=\frac{\lambda^2}{\alpha^2}(1-e^{-\alpha t_1})(1-e^{-\alpha t_2})+\frac{\lambda}{2\alpha}e^{-\alpha(t_1-t_2)}(1-e^{-2\alpha t_2})\quad(t_1>t_2)$$

可见,输出过程是非平稳的随机过程,当$t_1\to\infty,t_2\to\infty$时,输出$Y(t)$进入稳态,这时

$$m_Y=\frac{\lambda}{\alpha}$$

$$R_Y(t_1,t_2)=\frac{\lambda^2}{\alpha^2}+\frac{\lambda}{2\alpha}e^{-\alpha|\tau|},\quad\tau=t_1-t_2$$

所以,稳态情况下,输出是平稳随机过程。

例3.3 设有图3.7所示的RC电路。假定输入为零均值的平稳随机过程,且相关函数为$R_X(\tau)=e^{-\beta|\tau|}$,求稳态时输出$Y(t)$的自相关函数。

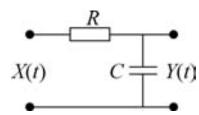


图3.7 RC电路

解 RC电路的冲激响应为

$$h(t)=\alpha e^{-\alpha t}U(t)\quad\left(\alpha=\frac{1}{RC}\right)$$

输入与输出的自相关函数为

$$R_{XY}(\tau)=h(-\tau)*R_X(\tau)=\int_0^{+\infty}R_X(\tau+u)h(u)du=\int_0^{+\infty}e^{-\beta|\tau+u|}\alpha e^{-\alpha u}du$$

当$\tau\geqslant0$时,$R_{XY}(\tau)=\int_0^{+\infty}e^{-\beta(\tau+u)}\alpha e^{-\alpha u}du=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}e^{-\beta\tau}$

当$\tau<0$时,$R_{XY}(\tau)=\int_0^{-\tau}e^{\beta(\tau+u)}\alpha e^{-\alpha u}du+\int_{-\tau}^{+\infty}e^{-\beta(\tau+u)}\alpha e^{-\alpha u}du$

$$=\frac{\alpha}{\alpha-\beta}e^{\beta\tau}-\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}e^{\alpha\tau}$$

当$\tau<0$时,$R_Y(\tau)=R_{XY}(\tau)*h(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau-u)R_{XY}(u)du$

$$=\int_{-\infty}^{\tau}\left(\frac{\alpha}{\alpha-\beta}e^{\beta u}-\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}e^{\alpha u}\right)\alpha e^{-\alpha(\tau-u)}du$$

$$=\frac{\alpha}{\alpha^2-\beta^2}(\alpha e^{\beta\tau}-\beta e^{\alpha\tau})$$

由于$R_Y(\tau)$是偶函数,所以

$$R_Y(\tau)=\frac{\alpha}{\alpha^2-\beta^2}(\alpha e^{-\beta|\tau|}-\beta e^{-\alpha|\tau|})$$

3.2.2 频谱法

所谓频谱法，就是利用系统的传递函数来分析输出的统计特性。对于平稳随机过程，对式(3.2.9)和式(3.2.10)两边同时做傅里叶变换，可得

$$G_{XY}(\omega)=H^{*}(\omega)G_X(\omega) \tag{3.2.14}$$

$$G_Y(\omega)=H(\omega)G_{XY}(\omega) \tag{3.2.15}$$

$$G_Y(\omega)=H^{*}(\omega)H(\omega)G_X(\omega)=|H(\omega)|^2G_X(\omega) \tag{3.2.16}$$

同理

$$G_{YX}(\omega)=H(\omega)G_X(\omega) \tag{3.2.17}$$

$$G_Y(\omega)=H^{*}(\omega)G_{YX}(\omega) \tag{3.2.18}$$

例 3.4 如例3.2所述，运用频谱法求输出的功率谱和自相关函数。

解 由于系统是物理可实现的，系统的起始状态为零，意味着输入 $X(t)$ 是从 $t=0$ 才起作用，故输出有一段瞬态过程，输出信号是非平稳的，这时不能应用频谱法进行分析。只有当 $t_1\to\infty, t_2\to\infty$ 时，输出 $Y(t)$ 进入稳态，输出信号为平稳信号，这时才能采用频谱法，即频谱法只适合稳态分析。

对例3.2所求的冲激响应做傅里叶变换，可得系统的传递函数为

$$H(\omega)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\alpha+\mathrm{j}\omega}$$

输入的功率谱密度为

$$G_X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau=2\pi\lambda^2\delta(\omega)+\lambda$$

由式(3.2.16)，得

$$G_Y(\omega)=|H(\omega)|^2G_X(\omega)=\frac{2\pi\lambda^2}{\alpha^2+\omega^2}\delta(\omega)+\frac{\lambda}{\alpha^2+\omega^2}=\frac{2\pi\lambda^2}{\alpha^2}\delta(\omega)+\frac{\lambda}{\alpha^2+\omega^2}$$

求上述功率谱的傅里叶反变换即可得输出的自相关函数为

$$R_Y(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}G_Y(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau}\,\mathrm{d}\omega=\frac{\lambda^2}{\alpha^2}+\frac{\lambda}{2\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha|\tau|}$$

例 3.5 如例3.3所述，运用频谱法求输出的功率谱和自相关函数。

解 系统的传递函数为

$$H(\omega)=\frac{\alpha}{\alpha+\mathrm{j}\omega}\qquad \alpha=\frac{1}{RC}$$

输入 $X(t)$ 的功率谱为

$$G_X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau=\frac{2\beta}{\beta^2+\omega^2}$$

由式(3.2.16)，可得

$$G_Y(\omega)=G_X(\omega)|H(\omega)|^2=\frac{2\beta}{\beta^2+\omega^2}\cdot\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\omega^2}=\frac{\alpha}{\alpha^2-\beta^2}\left(\alpha\cdot\frac{2\beta}{\beta^2+\omega^2}-\beta\cdot\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}\right)$$

求上式的傅里叶反变换，可得

$$R_Y(\tau)=\frac{\alpha}{\alpha^2-\beta^2}(\alpha e^{-\beta|\tau|}-\beta e^{-\alpha|\tau|})$$

与例 3.3 比较可见,对于本例,采用频谱法更为简单。

例 3.6 求随机相位信号通过线性系统后的自相关函数。设有图 3.8 所示线性系统,信号 $S(t)=a\cos(\omega_0 t+\Phi)$,其中 a 和 ω_0 均为常数,Φ 为$(0,2\pi)$区间上均匀分布的随机变量,求输出信号的自相关函数。

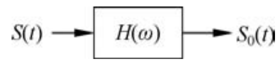


图 3.8 信号通过线性系统示意图

解 根据线性系统的理论,输出信号可以表示为 $S_0(t)=a|H(\omega_0)|\cos[\omega_0 t+\Phi+\arg H(\omega_0)]$,其中$|H(\omega_0)|$表示系统传递函数在 ω_0 处的幅度值,$\arg H(\omega_0)$表示系统传递函数在 ω_0 处的相角。输出的自相关函数为

$$\begin{aligned}R_{S_0}(\tau)&=E[S_0(t+\tau)S_0(t)]\\&=E\{a^2\,|\,H(\omega_0)\,|^2\cos[\omega_0(t+\tau)+\Phi+\arg H(\omega_0)]\cos[\omega_0 t+\Phi+\arg H(\omega_0)]\}\\&=\frac{1}{2}a^2\,|\,H(\omega_0)\,|^2E\{\cos[\omega_0(t+\tau)+\omega_0 t+2\Phi+2\arg H(\omega_0)]+\cos\omega_0\tau\}\\&=\frac{1}{2}a^2\,|\,H(\omega_0)\,|^2\cos\omega_0\tau\end{aligned}$$

输出信号的平均功率为 $R_{S_0}(0)=\frac{1}{2}a^2|H(\omega_0)|^2$。

3.2.3 平稳性的讨论

如果输入 $X(t)$是平稳的，$h(t)$在$(-\infty,+\infty)$中都存在(即系统是物理不可实现的)，那么由式(3.2.3)、式(3.2.9)和式(3.2.11)可以看出,输出 $Y(t)$也是平稳的，且输入与输出是联合平稳的。

对于物理可实现系统,即当 $t<0$ 时,$h(t)=0$,假定输入 $X(t)$是平稳的,且从$-\infty$ 时加入,则

$$Y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}X(t-u)h(u)\mathrm{d}u=\int_0^{+\infty}X(t-u)h(u)\mathrm{d}u \tag{3.2.19}$$

$$m_Y=m_X\int_0^{+\infty}h(u)\mathrm{d}u \tag{3.2.20}$$

可见输出的均值仍为常数。

$$\begin{aligned}R_{XY}(t+\tau,t)&=E\{X(t+\tau)Y(t)\}=E\left\{X(t+\tau)\int_0^{+\infty}X(t-u)h(u)\mathrm{d}u\right\}\\&=\int_0^{+\infty}R_X(\tau+u)h(u)\mathrm{d}u\end{aligned} \tag{3.2.21}$$

$$R_Y(t+\tau,t)=E[Y(t+\tau)Y(t)]=E\left\{\int_0^{+\infty}X(t+\tau-u)h(u)\mathrm{d}uY(t)\right\}$$

$$=\int_0^{+\infty} R_{XY}(\tau-u)h(u)\mathrm{d}u \tag{3.2.22}$$

$$R_Y(t+\tau,t)=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} R_X(\tau+v-u)h(u)h(v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{3.2.23}$$

从式(3.2.23)可以看出，相关函数只与 τ 有关，所以 $Y(t)$仍是平稳的。

如果 $X(t)$是从 $t=0$ 加入,则

$$Y(t)=\int_0^{t} X(t-u)h(u)\mathrm{d}u \tag{3.2.24}$$

$$m_Y(t)=m_X\int_0^{t} h(u)\mathrm{d}u \tag{3.2.25}$$

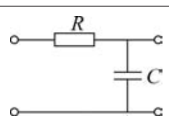
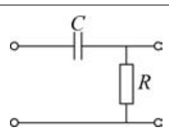
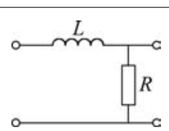
$$\begin{aligned}
R_{XY}(t_1,t_2)&=E[X(t_1)Y(t_2)]=E\left[X(t_1)\int_0^{t_2} X(t_2-u)h(u)\mathrm{d}u\right]\\
&=\int_0^{t_2} R_X(t_1,t_2-u)h(u)\mathrm{d}u\\
&=\int_0^{t_2} R_X(\tau+u)h(u)\mathrm{d}u \quad (\tau=t_1-t_2)
\end{aligned} \tag{3.2.26}$$

$$\begin{aligned}
R_Y(t_1,t_2)&=E[Y(t_1)Y(t_2)]=E\left[\int_0^{t_1} X(t_1-u)h(u)\mathrm{d}uY(t_2)\right]\\
&=\int_0^{t_1} R_{XY}(t_1-u,t_2)h(u)\mathrm{d}u\\
&=\int_0^{t_1} R_{XY}(\tau-u)h(u)\mathrm{d}u
\end{aligned} \tag{3.2.27}$$

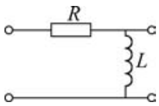
$$\begin{aligned}
R_Y(t_1,t_2)&=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} R_X(t_1-u,t_2-v)h(v)h(u)\mathrm{d}v\mathrm{d}u\\
&=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} R_X(\tau-u+v)h(v)h(u)\mathrm{d}v\mathrm{d}u
\end{aligned} \tag{3.2.28}$$

冲激响应法是随机过程通过线性系统分析的基本方法,对于平稳和非平稳情况都是适应的。表 3.1 列出了常用线性电路的系统传递函数和冲激响应,供大家参考。

表 3.1 常用线性电路的系统传递函数和冲激响应对照表

电　　路	$H(\omega)$	$h(t)$
	$\dfrac{1}{1+\mathrm{j}\omega RC}$	$\dfrac{1}{RC}\mathrm{e}^{-t/RC}U(t)$
	$\dfrac{\mathrm{j}\omega RC}{1+\mathrm{j}\omega RC}$	$\delta(t)-\dfrac{1}{RC}\mathrm{e}^{-t/RC}U(t)$
	$\dfrac{R}{R+\mathrm{j}\omega L}$	$\dfrac{R}{L}\mathrm{e}^{-Rt/L}U(t)$

续表

电　　路	$H(\omega)$	$h(t)$
	$\dfrac{\mathrm{j}\omega L}{R+\mathrm{j}\omega L}$	$\delta(t)-\dfrac{R}{L}\mathrm{e}^{-Rt/L}U(t)$

例 3.7　干扰抑制滤波器。假定 $Y(t)=X(t)-X(t-T)$，$X(t)=S(t)+I(t)$，其中 $S(t)$为输入的有用信号，$I(t)$为输入的干扰信号，可表示为 $I(t)=a\cos(2\pi f_0 t+\Phi)$，式中 a 为常数，$f_0=50\mathrm{Hz}$，Φ 为$(0,2\pi)$区间上均匀分布的随机变量，试分析系统对干扰信号 $I(t)$的抑制作用。

解　干扰信号是一个随机相位信号，它的自相关函数为 $R_I(\tau)=\dfrac{1}{2}a\cos 2\pi f_0\tau$，功率谱密度为 $G_I(f)=\dfrac{a^2}{4}[\delta(f+f_0)+\delta(f-f_0)]$。

干扰抑制器的冲激响应为 $h(t)=\delta(t)-\delta(t-T)$，对应的传递函数为 $H(f)=1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi fT}$，干扰抑制器输出的功率谱密度为

$$
\begin{aligned}
G_Y(f)&=G_X(f)\mid H(f)\mid^2=\left\{G_S(f)+\frac{a^2}{4}[\delta(f+f_0)+\delta(f-f_0)]\right\}\mid 1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi fT}\mid^2\\
&=\left\{G_S(f)+\frac{a^2}{4}[\delta(f+f_0)+\delta(f-f_0)]\right\}2(1-\cos 2\pi fT)
\end{aligned}
$$

当 $f=1/T=1/50$ 时，$(1-\cos 2\pi fT)|_{f=1/T}=0$，这时，干扰抑制滤波器在 $f=1/T$ 处形成一个零点，干扰信号刚好滤除。输出信号的功率谱为 $G_Y(f)=2(1-\cos 2\pi fT)G_S(f)$，输出信号得以保留。

3.3　限带过程

在 2.6.1 节中介绍了白噪声，白噪声的功率谱在整个频率轴上是一个常数，若随机过程在一个有限的频带内具有非零的功率谱，而在频带之外为零，则称其为限带随机过程，或限带过程。很显然，白噪声通过一个限带系统，输出就是一个限带随机过程，常见的限带随机过程有低通随机过程和带通随机过程。

3.3.1　低通过程

如果随机过程的功率谱 $G_X(\omega)$在$|\omega|<\omega_c$ 内不为零，而在其外为零，这样的随机过程称为低通随机过程，见图 3.9。很显然，白噪声通过低通滤波器后，其输出就是这种低通随机过程。

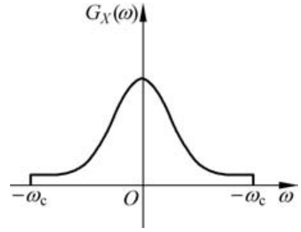


图 3.9　低通随机过程的功率谱

低通随机过程的自相关函数为

$$R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}G_X(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega \tag{3.3.1}$$

对于低通随机过程，它的自相关函数的任意 n 阶导数都是存在的，即

$$R_X^{(n)}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}(j\omega)^n G_X(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega<\infty \tag{3.3.2}$$

如果低通随机过程在频带内功率谱密度为常数，即

$$G_X(\omega)=\begin{cases}N_0/2 & (|\omega|<\omega_c, N_0\text{ 为常数})\\ 0 & (\text{其他})\end{cases} \tag{3.3.3}$$

则称 $X(t)$ 为理想低通随机过程或理想低通白噪声，其自相关函数为

$$R_X(\tau)=\frac{N_0\omega_c}{2\pi}\cdot\frac{\sin\omega_c\tau}{\omega_c\tau} \tag{3.3.4}$$

总的平均功率为

$$R_X(0)=\frac{N_0\omega_c}{2\pi} \tag{3.3.5}$$

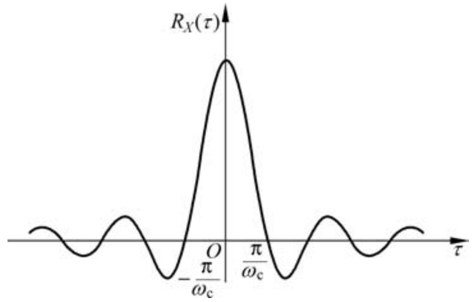


图 3.10　理想低通随机过程的自相关函数

从图 3.10 中可以看出，当 $\tau=k\pi/\omega_c(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 时，有

$$R_X(k\pi/\omega_c)=0 \tag{3.3.6}$$

所以理想低通白噪声 $X(t)$ 与 $X(t+k\pi/\omega_c)(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 是正交的。对于理想低通白噪声，如果以 $\Delta t=\pi/\omega_c$ 的时间间隔对它进行采样，那么，采样后得到的这组离散数据 $\{X(n),n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 是相互正交的。

3.3.2　带通过程

如果随机过程 $X(t)$ 的功率谱 $G_X(\omega)$ 集中在 ω_0 为中心的频带内，则称 $X(t)$ 为带通随机过程，白噪声通过一个带通滤波器后，其输出为带通随机过程。如果在频带内，功率谱密度为常数，则称其为理想带通随机过程，见图 3.11。

设理想带通随机过程的功率谱密度为

$$G_X(\omega)=\begin{cases}N_0/2 & (\omega_0-\omega_c<\omega<\omega_0+\omega_c\text{ 或 }-\omega_0-\omega_c<\omega<-\omega_0+\omega_c)\\ 0 & (\text{其他})\end{cases} \tag{3.3.7}$$

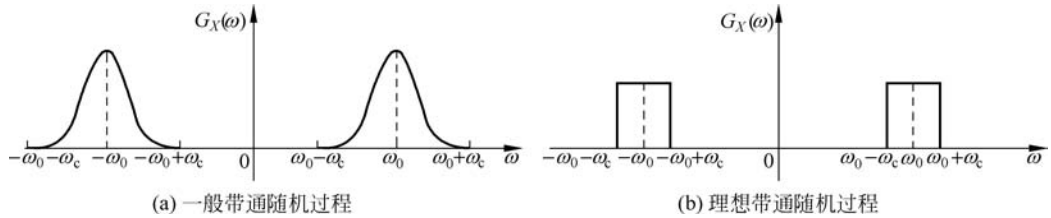


图 3.11　一般带通随机过程和理想带通随机过程示意图

对应的自相关函数为

$$R_X(\tau)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}G_X(\omega)\cos\omega\tau\,\mathrm{d}\omega=\frac{1}{\pi}\int_{\omega_0-\omega_c}^{\omega_0+\omega_c}\frac{N_0}{2}\cos\omega\tau\,\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{N_0\omega_c}{\pi}\cdot\frac{\sin\omega_c\tau}{\omega_c\tau}\cdot\cos\omega_0\tau \tag{3.3.8}$$

理想带通随机过程自相关函数的图形如图 3.12 所示,其总的平均功率为

$$R_X(0)=\frac{N_0\omega_c}{\pi} \tag{3.3.9}$$

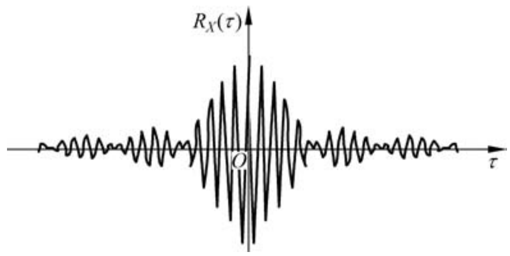


图 3.12　理想带通随机过程自相关函数

3.3.3　噪声等效通能带

在实际中,噪声等效通能带也是一个常用的概念。把白噪声通过线性系统后的非均匀物理谱密度等效成在一定频带内均匀的物理谱密度,这个频带称为噪声等效通能带,记为 Δf_e,它表示了系统对噪声功率谱的选择性,图 3.13 给出了噪声等效通能带的示意图。

由图 3.13 可以看出,

$$F_Y(\omega_0)\Delta\omega_e=\int_0^{+\infty}F_Y(\omega)\,\mathrm{d}\omega$$

因此噪声等效通能带为

$$\Delta f_e=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\int_0^{+\infty}F_Y(\omega)\,\mathrm{d}\omega}{F_Y(\omega_0)}=\frac{\int_0^{+\infty}|H(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega}{2\pi|H(\omega_0)|^2} \tag{3.3.10}$$

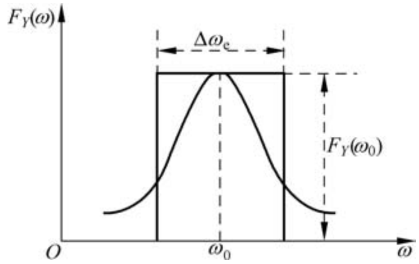


图 3.13　噪声等效通能带示意图

图 3.13 给出的是带通网络的情况，对于低通网络，等效通能带为

$$\Delta f_e = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\int_0^{+\infty} F_Y(\omega)\mathrm{d}\omega}{F_Y(0)} = \frac{\int_0^{+\infty} |H(\omega)|^2 \mathrm{d}\omega}{2\pi |H(0)|^2} \tag{3.3.11}$$

由此可见，噪声等效通能带只由线性系统特性来确定。根据噪声等效通能带，可以写出输出平均功率的表达式，对于带通网络，输出的平均功率为

$$R_Y(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} F_Y(\omega)\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\Delta\omega_e F_Y(\omega_0) = N_0 \Delta f_e |H(\omega_0)|^2 \tag{3.3.12}$$

对于低通网络，输出的平均功率为

$$R_Y(0) = N_0 \Delta f_e |H(0)|^2 \tag{3.3.13}$$

例 3.8　设有 n 阶巴特沃斯滤波器

$$|H_n(f)|^2 = \frac{1}{1 + (f/\Delta f)^{2n}}$$

其中 Δf 是滤波器 3dB 带宽，求噪声等效通能带。

解　由式(3.3.11)得

$$\begin{aligned}\Delta f_e &= \int_0^{+\infty} |H_n(f)|^2 \mathrm{d}f = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+(f/\Delta f)^{2n}}\mathrm{d}f = \Delta f \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^{2n}}\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi \Delta f/(2n)}{\sin(\pi/(2n))}\end{aligned}$$

$n=1$ 时，$\Delta f_e = (\pi/2)\Delta f = 1.57\Delta f$；$n=2$ 时，$\Delta f_e = 1.11\Delta f$；$n$ 越大，滤波器的带沿变得越陡峭，它的噪声等效通能带也越趋近于它的 3dB 带宽，当 $n \to \infty$ 时，$\Delta f_e \to \Delta f$。

例 3.9　白噪声通过图 3.7 所示的 RC 电路，分析输出的统计特性。

解　RC 电路为一低通网络，系统的传递函数为

$$H(\omega) = \frac{\alpha}{\alpha + \mathrm{j}\omega}, \quad \alpha = \frac{1}{RC}$$

输出的功率谱密度为

$$G_Y(\omega) = \frac{N_0}{2}|H(\omega)|^2 = \frac{N_0}{2} \cdot \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \omega^2}$$

输出的自相关函数为

$$R_Y(\tau)=\frac{\alpha N_0}{4}e^{-\alpha|\tau|}$$

相关系数为

$$r_Y(\tau)=\frac{R_Y(\tau)}{R_Y(0)}=e^{-\alpha|\tau|}$$

由式(3.3.11),可得噪声等效通能带为

$$\Delta f_e=\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\omega^2}d\omega=\frac{1}{4}\alpha$$

由式(2.3.16),可得输出随机过程的相关时间为

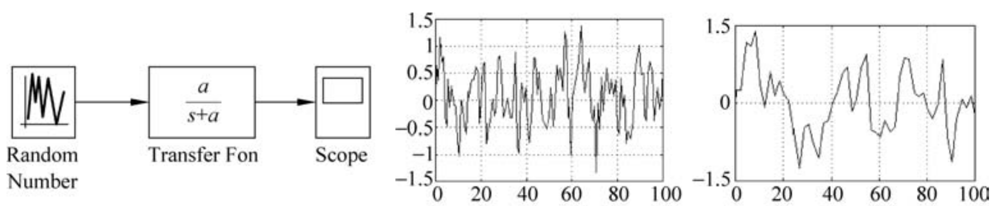
$$\tau_0=\int_0^{+\infty}r_X(\tau)d\tau=\int_0^{+\infty}e^{-\alpha|\tau|}\ d\tau=\frac{1}{\alpha}$$

所以

$$\tau_0=\frac{1}{4\Delta f_e}$$

即相关时间与系统的噪声等效通能带是成反比的,白噪声通过 RC 电路时,如果 $\alpha\to\infty$,则 $\Delta f_e\to\infty$,$\tau_0\to 0$,这时 RC 电路为全通网络,输出仍为白噪声;反之,如果 α 很小,则 Δf_e 也很小,τ_0 很大,这时白噪声只有低频部分通过,输出噪声变化缓慢。

图 3.14 给出了白噪声通过 RC 电路 MATLAB 的 Simulink 仿真模块,图 3.14(a)中的参数 a 为电路参数 $\alpha=\frac{1}{RC}$,在实际仿真过程中需要给出具体值;图 3.14(b)中给出的 a 值为 1,图 3.14(c)中给出的 a 值为 0.1。从仿真结果可以看出,大的 α 相关时间少,输出噪声波形变化很快,小的 α 相关时间大,输出噪声波形变化很缓慢。



(a) Simulink仿真模型 $\alpha=\frac{1}{RC}$　(b) 输出噪声波形(α=1)　(c) 输出噪声波形(α=0.1)

图 3.14　白噪声通过 RC 电路 MATLAB 的 Simulink 仿真模块

3.4　随机序列通过离散线性系统分析

设有图 3.15 所示的离散线性系统,线性系统的单位样值响应为 $h(n)$,系统传递函数 $H(\omega)$与单位样值响应之间是离散傅里叶变换对的关系,即

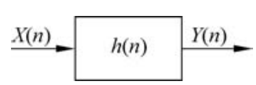


图 3.15　离散线性系统

$$H(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h(n)e^{-jn\omega}\tag{3.4.1}$$

或者用 z 变换可表示为

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h(n)z^{-n} \tag{3.4.2}$$

随机序列 $X(n)$通过线性系统后，输出 $Y(n)$为

$$Y(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h(k)X(n-k)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h(n-k)X(k)=h(n)*X(n) \tag{3.4.3}$$

那么，输出的均值为

$$m_Y(n)=E[Y(n)]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h(k)m_X(n-k)$$

即

$$m_Y(n)=h(n)*m_X(n) \tag{3.4.4}$$

输入与输出的互相关函数为

$$\begin{aligned}R_{XY}(n_1,n_2)&=E[X(n_1)Y(n_2)]=E\left[X(n_1)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h(k)X(n_2-k)\right]\\&=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h(k)E[X(n_1)X(n_2-k)]\\&=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h(k)R_X(n_1,n_2-k)\end{aligned}$$

即

$$R_{XY}(n_1,n_2)=h(n_2)*R_X(n_1,n_2) \tag{3.4.5}$$

输出的自相关函数为

$$\begin{aligned}R_Y(n_1,n_2)&=E[Y(n_1)Y(n_2)]\\&=E\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h(k)X(n_1-k)Y(n_2)\right]\\&=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h(k)R_{XY}(n_1-k,n_2)\\&=h(n_1)*R_{XY}(n_1,n_2)\end{aligned}$$

将式(3.4.5)代入上式可得

$$R_Y(n_1,n_2)=h(n_1)*h(n_2)*R_X(n_1,n_2) \tag{3.4.6}$$

如果输入 $X(n)$为平稳随机序列，则

$$m_Y=m_X\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h(k)=m_XH(0) \tag{3.4.7}$$

其中 $H(0)$是系统传递函数 $H(\omega)$在 $\omega=0$ 的值。

$$R_{XY}(m)=h(-m)*R_X(m) \tag{3.4.8}$$

$$R_Y(m)=h(m)*R_{XY}(m)=h(-m)*h(m)*R_X(m) \tag{3.4.9}$$

$$G_{XY}(\omega)=H(-\omega)G_X(\omega) \tag{3.4.10}$$

$$G_Y(\omega)=H(\omega)G_{XY}(\omega)=|H(\omega)|^2G_X(\omega) \tag{3.4.11}$$

如果用 z 变换表示，则

$$G_{XY}(z)=H(z^{-1})G_X(z) \tag{3.4.12}$$

$$G_Y(z)=H(z)G_{XY}(z)=H(z)H(z^{-1})G_X(z) \tag{3.4.13}$$

例 3.10 设有如下差分方程描述的离散线性系统：

$$X(n)=aX(n-1)+W(n) \tag{3.4.14}$$

系统如图 3.16 所示，其中 $W(n)$ 为平稳白噪声，方差为 σ^2，式(3.4.14)也称为一阶 AR(autoregressive)模型，由 AR 模型所产生的随机过程称为 AR 过程，求一阶 AR 过程的自相关函数和功率谱。

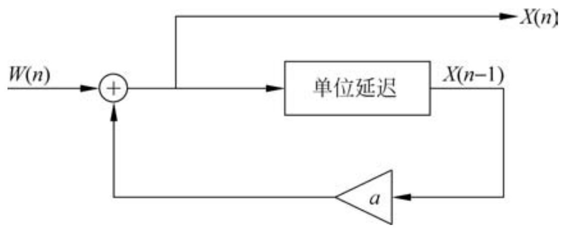


图 3.16 一阶 AR 模型

解 首先求系统的单位样值响应 $h(n)$，单位样值响应是当输入 $W(n)=\delta(n)$ 时系统的输出，即

$$\begin{aligned} h(n)&=ah(n-1)+\delta(n)=a^2h(n-2)+a\delta(n-1)+\delta(n) \\ &=\delta(n)+a\delta(n-1)+a^2\delta(n-2)+\cdots \end{aligned}$$

或者写成

$$h(n)=\begin{cases} a^n & (n\geqslant 0) \\ 0 & (n<0) \end{cases} \tag{3.4.15}$$

系统稳定的条件是$|a|<1$。系统的传递函数为

$$H(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h(n)e^{-jn\omega}=\sum_{n=0}^{+\infty}a^n e^{-jn\omega}=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}} \tag{3.4.16}$$

首先用冲激响应法求输出的均值和自相关函数，假定$|a|<1$，由于输入 $W(n)$ 的均值为零，所以，$X(n)$ 的均值亦为零。由式(3.4.9)，$X(n)$ 的自相关函数为

$$\begin{aligned} R_X(m)&=h(-m)*h(m)*R_W(m)=h(-m)*h(m)*\sigma^2\delta(m) \\ &=\sigma^2 h(-m)*h(m)=\sigma^2\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h(m+k)h(k) \end{aligned}$$

由于自相关函数是偶函数，所以可以先考虑 $m\geqslant 0$ 的情况，有

$$R_X(m)=\sigma^2\sum_{k=0}^{+\infty}a^{m+k}a^k=\frac{\sigma^2 a^m}{1-a^2}$$

综合 $m<0$ 的情况，有

$$R_X(m)=\frac{\sigma^2 a^{|m|}}{1-a^2} \tag{3.4.17}$$

可见一阶 AR 过程的自相关函数是无限长度的。

下面再用频谱法求解，由式(3.4.11)，有

$$G_X(\omega)=|H(\omega)|^2G_W(\omega)=\frac{\sigma^2}{|1-a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}|^2}=\frac{\sigma^2}{1+a^2-2a\cos\omega}\tag{3.4.18}$$

式(3.4.14)可以推广到 N 阶差分方程：

$$X(n)=a_1X(n-1)+a_2X(n-2)+a_NX(n-N)+W(n)\tag{3.4.19}$$

称为 N 阶 AR 模型，对应的 $X(n)$ 称为 N 阶 AR 过程，N 阶 AR 过程的功率谱为

$$G_X(\omega)=|H(\omega)|^2G_W(\omega)=\frac{\sigma^2}{\left|1-\sum_{k=1}^{N}a_k\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega k}\right|^2}\tag{3.4.20}$$

在实际中，可以利用观测到的数据，估计模型的参数，用一个 AR 模型对一个时间序列建模。

例 3.11 设有如下差分方程描述的离散线性系统：

$$X(n)=b_0W(n)+b_1W(n-1)\tag{3.4.21}$$

系统如图 3.17 所示，其中 $W(n)$ 为平稳白噪声，方差为 σ^2，式(3.4.21)也称为一阶 MA(moving average)模型，由 MA 模型所产生的随机过程称为 MA 过程，求一阶 MA 过程的自相关函数和功率谱。

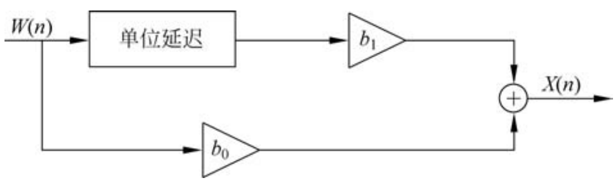


图 3.17 一阶 MA 模型

解 首先确定系统的单位样值响应和系统传递函数，单位样值响应是输入为 $W(n)=\delta(n)$ 时的响应，即

$$h(n)=b_0\delta(n)+b_1\delta(n-1)\tag{3.4.22}$$

可见系统的单位样值响应是有限长度的，系统的传递函数为

$$H(\omega)=b_0+b_1\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}\tag{3.4.23}$$

输出的均值为

$$E[X(n)]=b_0E[W(n)]+b_1E[W(n-1)]=0$$

由式(3.4.9)可得一阶 MA 过程的自相关函数为

$$\begin{aligned}R_X(m)&=h(-m)*h(m)*R_W(m)\\&=[b_0\delta(-m)+b_1\delta(-m-1)]*[b_0\delta(m)+b_1\delta(m-1)]*\sigma^2\delta(m)\\&=\sigma^2[b_0b_1\delta(m+1)+(b_0^2+b_1^2)\delta(m)+b_0b_1\delta(m-1)]\end{aligned}\tag{3.4.24}$$

一阶 MA 过程的功率谱为

$$\begin{aligned}G_X(\omega)&=\sigma^2[b_0b_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}+b_0^2+b_1^2+b_0b_1\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}]\\&=\sigma^2[2b_0b_1\cos\omega+b_0^2+b_1^2]\end{aligned}\tag{3.4.25}$$

式(3.4.21)可以推广到M阶MA过程：

$$X(n)=b_0W(n)+b_1W(n-1)+\cdots+b_MW(n-M) \tag{3.4.26}$$

很显然,M阶MA过程的均值仍为零,可以证明,当$m\geqslant 0$时,MA过程的自相关函数为

$$R_X(m)=\begin{cases}\sigma^2\sum\limits_{k=m}^{M}b_kb_{k-m} & (0\leqslant m\leqslant M)\\ 0 & (m>M)\end{cases} \tag{3.4.27}$$

由自相关函数的性质,可得当$m<0$时,$R_X(m)=R_X(-m)$。

组合AR模型和MA模型可以构成ARMA模型如下：

$$\begin{aligned}&a_0X(n)+a_1X(n-1)+a_2X(n-2)+a_NX(n-N)\\&=b_0W(n)+b_1W(n-1)+\cdots+b_MW(n-M)\end{aligned}$$

称$X(n)$为ARMA(N,M)(autoregressive/moving average)过程。ARMA系统的传递函数为

$$H(\omega)=\frac{\sum\limits_{k=0}^{M}b_k\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega}}{\sum\limits_{k=0}^{N}a_k\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega}} \tag{3.4.28}$$

ARMA过程的功率谱密度为

$$G_X(\omega)=\sigma^2\left|\frac{\sum\limits_{k=0}^{M}b_k\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega}}{\sum\limits_{k=0}^{N}a_k\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega}}\right|^2 \tag{3.4.29}$$

例3.12 设有ARMA(2,2)模型如下：

$$X(n)+1.4X(n-1)+0.5X(n-2)=W(n)-0.2W(n-1)-0.1W(n-2)$$

其中$W(n)$是零均值单位方差的平稳白噪声,求该过程的功率谱。

解 系统的传递函数为

$$H(\omega)=\frac{1-0.2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}-0.1\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}}{1+1.4\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}+0.5\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}}$$

由式(3.4.11)可得功率谱为

$$G_X(\omega)=\left|\frac{1-0.2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}-0.1\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}}{1+1.4\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}+0.5\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}}\right|^2$$

例3.13 图像边缘检测。边缘检测在图像处理中具有重要作用,例如,机场与机场周边的环境、公路路面与公路两边的区域具有不同的灰度等级,一阶差分运算是边缘检测简单实用的方法。一阶差分运算定义为$Y(n)=X(n)-X(n-1)$,求输出$Y(n)$的均值和自相关函数。

解 定义差分算子$L[X(n)]=X(n)-X(n-1)$,很显然,L是线性变换。$Y(n)$的均值为

$$E[Y(n)]=E\{L[X(n)]\}=L[m_X(n)]=m_X(n)-m_X(n-1)$$

输入与输出的互相关函数为

$$R_{XY}(n_1,n_2)=L_{n_2}[R_X(n_1,n_2)]=R_X(n_1,n_2)-R_X(n_1,n_2-1)$$

输出的自相关函数为

$$\begin{aligned}R_Y(n_1,n_2)&=L_{n_1}[R_{XY}(n_1,n_2)]=R_{XY}(n_1,n_2)-R_{XY}(n_1-1,n_2)\\&=R_X(n_1,n_2)-R_X(n_1,n_2-1)-R_X(n_1-1,n_2)+R_X(n_1-1,n_2-1)\end{aligned}$$

如果 $X(n)$为平稳随机序列,且自相关函数为 $R_X(n_1,n_2)=a^{|n_1-n_2|}$,$0<a<1$,则

$$E[Y(n)]=0$$

$$R_{XY}(n_1,n_2)=R_X(n_1-n_2)-R_X(n_1-n_2+1)=a^{|n_1-n_2|}-a^{|n_1-n_2+1|}$$

$$\begin{aligned}R_Y(n_1,n_2)&=R_{XY}(n_1,n_2)-R_{XY}(n_1-1,n_2)\\&=a^{|n_1-n_2|}-a^{|n_1-n_2+1|}-a^{|n_1-1-n_2|}+a^{|n_1-n_2|}\\&=2a^{|n_1-n_2|}-a^{|n_1-n_2+1|}-a^{|n_1-n_2-1|}\end{aligned}$$

即 $Y(n)$的自相关函数为

$$R_Y(m)=2a^{|m|}-a^{|m+1|}-a^{|m-1|}$$

输入和输出的自相关函数如图 3.18 所示,从图中还可以看出,输入序列 $X(n)$有相关性,经过差分变换后,输出的相关性减弱了,因此,差分器有去相关的作用。

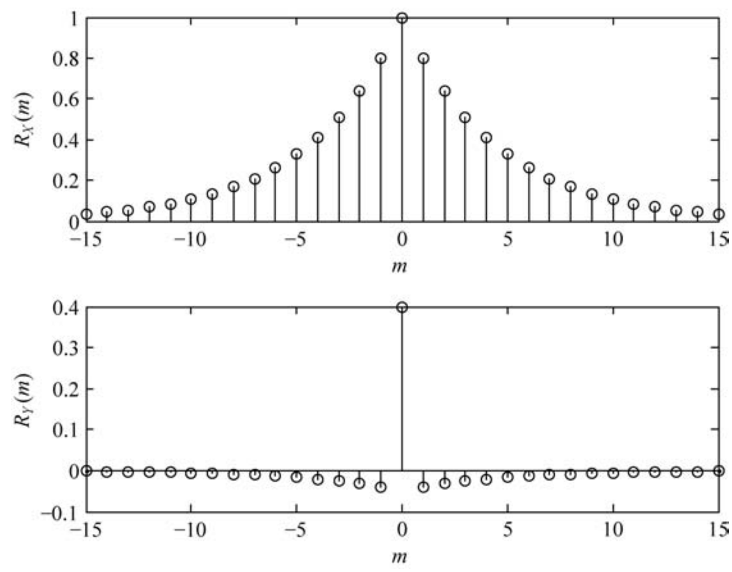


图 3.18 边缘检测器输入和输出的自相关函数

3.5 最佳线性滤波器

在许多回波探测型的电子系统(如雷达、声呐、红外探测等)中,一个基本的问题是如何在噪声背景中检测微弱信号,接收机输出的信噪比越高,越容易发现目标。同样,信噪

比在通信系统中是系统有效性的一个度量,信噪比越大,信息传输发生错误的概率越小。因此我们很自然会想到以输出信噪比最大作为准则来设计接收机。一般说来,能给出最大信噪比的接收机,其系统的性能也是最好的,因此,本节介绍的最佳线性滤波器是许多接收机的重要组成部分。

3.5.1 输出信噪比最大的最佳线性滤波器

如图3.19所示线性系统,假定系统的传递函数为$H(\omega)$,输入波形为

$$X(t)=s(t)+w(t) \tag{3.5.1}$$

其中$s(t)$是确知信号,$w(t)$是零均值平稳随机过程,功率谱密度为$G_w(\omega)$。

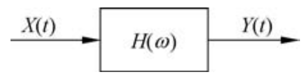


图3.19 线性系统示意图

根据线性系统的理论,输出$Y(t)$可表示为

$$Y(t)=s_0(t)+w_0(t) \tag{3.5.2}$$

其中

$$s_0(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S(\omega)H(\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{3.5.3}$$

式中$S(\omega)$是输入信号$s(t)$的频谱,$H(\omega)$是系统的传递函数,$n_0(t)$是输出的噪声,它的功率谱密度为

$$G_{w_0}(\omega)=G_w(\omega)\left|H(\omega)\right|^2 \tag{3.5.4}$$

输出噪声的平均功率为

$$E\left[w_0^2(t)\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}G_w(\omega)\left|H(\omega)\right|^2 d\omega \tag{3.5.5}$$

定义在某个时刻$t=t_0$时滤波器输出端信号的瞬时功率与噪声的平均功率之比(简称信噪比)为

$$d_0=\frac{s_0^2(t_0)}{E[w_0^2(t)]} \tag{3.5.6}$$

将式(3.5.3)和式(3.5.5)代入式(3.5.6),得

$$d_0=\frac{1}{2\pi}\frac{\left|\int_{-\infty}^{+\infty}S(\omega)H(\omega)e^{j\omega t_0}d\omega\right|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty}G_w(\omega)\left|H(\omega)\right|^2 d\omega} \tag{3.5.7}$$

我们的任务是要设计一个线性系统,使得输出的信噪比达到最大。可以证明(证明留作习题3.29),当

$$H(\omega)=cS^*(\omega)e^{-j\omega t_0}/G_w(\omega) \tag{3.5.8}$$

时,输出信噪比d_0达到最大,把这个最大的信噪比记为d_m。将式(3.5.8)代入式(3.5.7)可得最大的信噪比为

$$d_m=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left|S(\omega)\right|^2}{G_w(\omega)}d\omega \tag{3.5.9}$$

将式(3.5.8)代入式(3.5.3)得到输出信号为

$$s_0(t)=\frac{c}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|S(\omega)|^2}{G_w(\omega)}e^{j\omega(t-t_0)}d\omega \tag{3.5.10}$$

由式(3.5.10)可以看出，当 $t=t_0$ 时，输出信号达到最大。

下面从物理意义上解释上面的几个公式。滤波器的幅频特性为

$$|H(\omega)|=c|S(\omega)|/G_w(\omega) \tag{3.5.11}$$

$|H(\omega)|$实际上是对输入信号的频谱进行加权，由滤波器的幅频特性可以看出，最佳线性滤波器幅频特性与信号频谱的幅度成正比，与噪声的功率谱密度成反比；对于某个频率点，信号越强，该频率点的加权系数越大，噪声越强，加权越小。可见，最佳线性滤波器的幅频特性有抑制噪声的作用。

再考察一下滤波器的相频特性。由式(3.5.8)得

$$\arg H(\omega)=-\arg S(\omega)-\omega t_0 \tag{3.5.12}$$

相频特性由两项组成，第一项与信号的相频特性反相，第二项与频率呈线性关系，为一时间延迟项，由式(3.5.3)得

$$\begin{aligned}s_0(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|S(\omega)||H(\omega)|\exp\{j[\arg S(\omega)+\arg H(\omega)+\omega t]\}d\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|S(\omega)||H(\omega)|\exp\{j[\arg S(\omega)-\arg S(\omega)-\omega t_0+\omega t]\}d\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|S(\omega)||H(\omega)|\exp\{j\omega(t-t_0)\}d\omega\end{aligned}$$

由上式可以看出，滤波器的相频特性 $\arg H(\omega)$起到了抵消输入信号相角 $\arg S(\omega)$的作用，并且使输出信号 $s_0(t)$的全部频率分量的相位在 $t=t_0$ 时刻相同，达到了相位相同、幅度相加的目的。而噪声是平稳随机过程，各频率分量的相位是随机的，$\arg H(\omega)$不影响噪声的功率，也就是说，滤波器对信号的各频率分量起到的是幅度同相相加的作用，而对噪声的各频率分量起到的是功率相加的作用。综合而言，信噪比得到提高。

3.5.2 匹配滤波器

式(3.5.8)是针对一般的平稳噪声，如果噪声是白噪声，这时的最佳滤波器称为匹配滤波器。即匹配滤波器是在白噪声环境下以输出信噪比最大作为准则的最佳线性滤波器。由式(3.5.8)可得，匹配滤波器的传递函数为

$$H(\omega)=cS^*(\omega)e^{-j\omega t_0} \tag{3.5.13}$$

对式(3.5.13)做傅里叶反变换可得冲激响应为

$$h(t)=cs^*(t_0-t) \tag{3.5.14}$$

即匹配滤波器的冲激响应是输入信号的共轭镜像。对于实信号

$$h(t)=cs(t_0-t) \tag{3.5.15}$$

当 $c=1$ 时，$h(t)$与 $s(t)$关于 $t_0/2$ 呈偶对称关系。

匹配滤波器具有如下一些重要的性质和特点。

1. 输出的最大信噪比与输入信号的波形无关

由于白噪声的功率谱为一个常数,由式(3.5.9)可得

$$d_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2\pi}\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}|S(\omega)|^{2}\mathrm{d}\omega}{N_0/2}=\frac{2E}{N_0} \tag{3.5.16}$$

其中 E 代表信号的能量,由式(3.5.16)可以看出,最大信噪比只与信号的能量和噪声的强度有关,与信号的波形无关。

2. t_0 应该选在信号 $s(t)$ 结束之后

由式(3.5.15)可以看出,如果要求系统是物理可实现的,那么 t_0 必须选择在信号结束之后才能满足 $h(t)=0,t<0$。这从物理概念上也很好理解。对于物理可实现系统,因为只有 t_0 选在信号结束之后,才能把信号的能量全部利用上,信噪比才能达到最大。如果 t_0 不是选在信号结束之后,那么由式(3.5.15)确定的 $h(t)$ 在 $t<0$ 时不为零,如果将 $h(t)$ 当 $t<0$ 的部分截断为零,这时的滤波器就不是最佳的。

3. 匹配滤波器对信号幅度和时延具有适应性

在回波探测型系统中,发射信号的波形是已知的,接收信号通常幅度上有一定的衰减,并且时间上有一定的时延,如果发射信号为 $s(t)$,那么接收信号为 $s_1(t)=as(t-\tau)$,$s_1(t)$ 的频谱为

$$S_1(\omega)=aS(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}$$

对 $s_1(t)$ 的匹配滤波器的传递函数 $H_1(\omega)$ 为

$$\begin{aligned}H_1(\omega)&=cS_1^{*}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_1}=caS^{*}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(t_1-\tau)}\\&=caS^{*}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(t_1-\tau-t_0)}=aH(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(t_1-\tau-t_0)}\end{aligned}$$

其中 $H(\omega)=cS^{*}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}$ 是 $s(t)$ 信号的匹配滤波器,t_0 为 $s(t)$ 信号结束的时间,如果取 $t_1=t_0+\tau$,即取信号 $s_1(t)$ 结束的时间,这时 $H_1(\omega)=aH(\omega)$,a 相当于放大系数,它只影响输出信号的相对大小,对信号和噪声的作用是相同的,$H_1(\omega)$ 也可使输出信噪比达到最大。因此,如果按照发射信号设计匹配滤波器,当接收信号有一定的衰减和时延时,对接收信号同样是匹配的。

需要注意的是,匹配滤波器对信号的频移不具有适应性。也就是说,如果有个信号的频谱为 $S_2(\omega)=S(\omega+\omega_{\mathrm{d}})$,$\omega_{\mathrm{d}}$ 可以看作目标由于运动产生的多普勒频移,那么,对应的匹配滤波器为

$$H_2(\omega)=cS^{*}(\omega+\omega_{\mathrm{d}})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}$$

可见 $H_2(\omega)$ 与 $H(\omega)$ 是不同的。

例 3.14 单个矩形脉冲的匹配滤波器设计。设脉冲信号为

$$s(t)=\begin{cases}a & (0\leqslant t\leqslant\tau)\\0 & (\text{其他})\end{cases} \tag{3.5.17}$$

其中 a 是已知常数,求匹配滤波器的传递函数和输出波形。

解 信号的频谱为

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}s(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\int_{0}^{\tau}a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\frac{a}{\mathrm{j}\omega}(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}) \tag{3.5.18}$$

取匹配滤波器的时间 $t_0=\tau$，由式(3.5.13)，矩形脉冲信号的匹配滤波器的传递函数为

$$H(\omega)=\frac{ca}{-\mathrm{j}\omega}(1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}=\frac{ca}{\mathrm{j}\omega}(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}) \tag{3.5.19}$$

它的冲激响应为

$$h(t)=cs(t) \tag{3.5.20}$$

冲激响应与信号只相差一个比例因子。匹配滤波器的输出信号为

$$s_0(t)=s(t)*h(t)=cs(t)*s(t)=\begin{cases}ca^2t & (0<t\leqslant\tau)\\ ca^2(2\tau-t) & (\tau<t\leqslant 2\tau)\\ 0 & (0)\end{cases} \tag{3.5.21}$$

由式(3.5.21)可以看出，输入信号是矩形波，而输出信号变成了三角波(见图3.20)，因此，信号经过匹配滤波器以后出现了变形，对于雷达和声呐系统而言，重要的是要检测到目标，信号波形出现变形并不影响检测目标。滤波器的实现如图3.21所示。

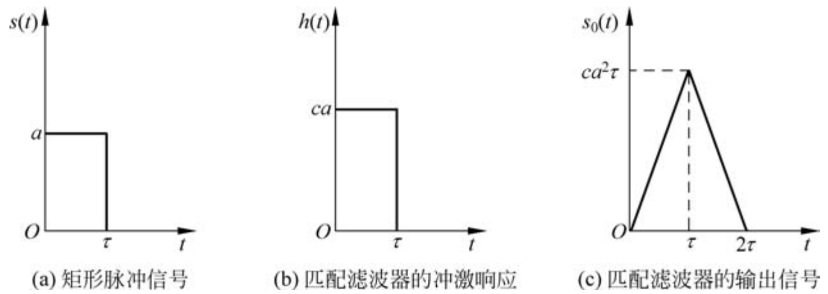


图3.20 矩形脉冲的匹配滤波器

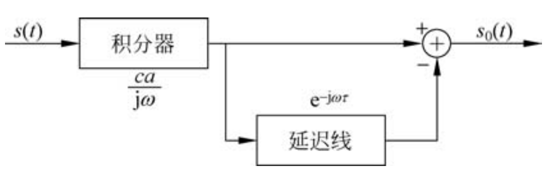


图3.21 矩形脉冲信号匹配滤波器实现框图

例3.15 设计矩形脉冲串信号的匹配滤波器。

解 设矩形脉冲串信号为

$$s(t)=\sum_{k=0}^{M-1}s_1(t-kT) \tag{3.5.22}$$

其中 $s_1(t)$ 是如式(3.5.17)所示的单个矩形脉冲信号，信号的频谱为

$$S(\omega)=\sum_{k=0}^{M-1}S_1(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega T} \tag{3.5.23}$$

$s(t)$的匹配滤波器为

$$H(\omega)=cS^{*}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}=c\sum_{k=0}^{M-1}S_1^{*}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega T}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}$$

取 $t_0=(M-1)T+\tau$,那么

$$H(\omega)=c\sum_{k=0}^{M-1}S_1^{*}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega T}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega[(M-1)T+\tau]}$$

$$=cS_1^{*}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\sum_{k=0}^{M-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(M-1-k)T}\tag{3.5.24}$$

可见匹配滤波器可表示为

$$H(\omega)=H_1(\omega)H_2(\omega)\tag{3.5.25}$$

匹配滤波器的组成如图 3.22 所示,其中

$$H_1(\omega)=cS_1^{*}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\tag{3.5.26}$$

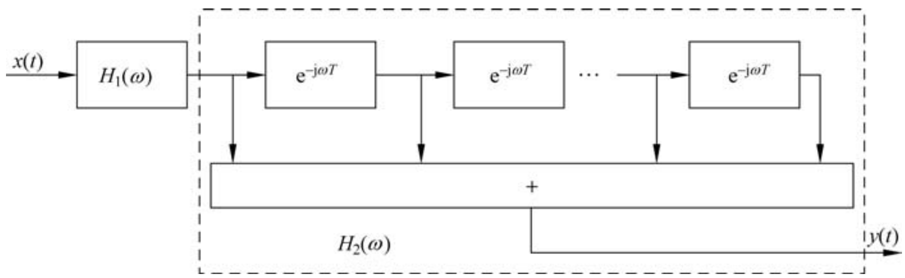


图 3.22　矩形脉冲串信号的匹配滤波器

是单个矩形脉冲信号的匹配滤波器,由于矩形脉冲串信号是由单个矩形信号经周期延拓得到的,将单个矩形脉冲信号称为矩形脉冲串信号的子脉冲,$H_1(\omega)$称为子脉冲匹配滤波器。而 $H_2(\omega)$为

$$H_2(\omega)=\sum_{k=0}^{M-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(M-1-k)T}=1+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T}+\cdots+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(M-1)T}\tag{3.5.27}$$

它是由延迟单元和求和器构成,通常称为相参积累器,它的作用是调整脉冲串信号的相位,使其在 $t_0=(M-1)T+\tau$ 实现同相相加。

由于矩形脉冲串信号的能量是单个矩形脉冲信号能量的 M 倍,由式(3.5.16)可得,匹配滤波器输出的最大信噪比为

$$d_{\mathrm{m}}=\frac{2E}{N_0}=\frac{2ME_1}{N_0}=M\cdot\frac{2E_1}{N_0}=Md_1\tag{3.5.28}$$

式中 E_1 代表单个矩形脉冲信号的能量,d_1 代表子脉冲匹配滤波器输出的最大信噪比。由式(3.5.28)可以看出,矩形脉冲串信号匹配滤波器输出的最大信噪比是单个矩形脉冲信号的 M 倍,即信噪比提高了 M 倍,信噪比的提高是得益于相参积累器的作用。式(3.5.25)和式(3.5.28)可以推广到任意的脉冲串信号。

3.5.3 广义匹配滤波器

匹配滤波器是在白噪声环境下的最佳线性滤波器，而式(3.5.8)是一般平稳噪声环境下的最佳线性滤波器，下面进一步讨论式(3.5.8)。

假定噪声具有有理的功率谱，由式(2.5.31)，它可以分解为

$$G_w(\omega)=G_w^+(\omega)G_w^-(\omega)=G_w^+(\omega)\cdot[G_w^+(\omega)]^* \tag{3.5.29}$$

那么式(3.5.8)可以写成

$$\begin{aligned}H(\omega)&=cS^*(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}/G_w(\omega)=\frac{1}{G_w^+(\omega)}\cdot c\left[\frac{S(\omega)}{G_w^+(\omega)}\right]^*\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}\\&=H_1(\omega)H_2(\omega)\end{aligned} \tag{3.5.30}$$

其中

$$H_1(\omega)=\frac{1}{G_w^+(\omega)},\quad H_2(\omega)=cS'^*(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0} \tag{3.5.31}$$

式中

$$S'(\omega)=S(\omega)/G_w^+(\omega) \tag{3.5.32}$$

它是 $s(t)$ 信号经过滤波器 $H_1(\omega)$ 后输出的信号。而平稳噪声通过 $H_1(\omega)$ 后变为 $w'(t)$，它的功率谱为

$$G_{w'}(\omega)=G_w(\omega)\cdot|H_1(\omega)|^2=G_w(\omega)\cdot\frac{1}{G_w^+(\omega)}\cdot\frac{1}{[G_w^+(\omega)]^*}=1$$

可见 $w'(t)$ 是白噪声，$H_1(\omega)$ 称为白化滤波器，那么 $H_2(\omega)$ 就可以看作白噪声环境下的匹配滤波器，只不过现在匹配的信号是 $s'(t)$ 而不是 $s(t)$。很显然，$H_1(\omega)$ 是物理可实现的滤波器，而 $H_2(\omega)$ 有可能是物理不可实现的，如果取物理可实现部分 $H_{2c}(\omega)$，那么，滤波器的传递函数为

$$H(\omega)=H_1(\omega)H_{2c}(\omega)=\frac{1}{G_w^+(\omega)}\cdot\left[\frac{cS^*(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}}{G_w^-(\omega)}\right]^+ \tag{3.5.33}$$

式中$[\ ]^+$表示取物理可实现部分。如果用拉普拉斯变换表示，则式(3.5.33)可表示为

$$H(s)=H_1(s)H_{2c}(s)=\frac{1}{G_w^+(s)}\cdot\left[\frac{cS(-s)\mathrm{e}^{-st_0}}{G_w^-(s)}\right]^+ \tag{3.5.34}$$

式(3.5.33)或式(3.5.34)称为广义匹配滤波器，它的实现结构如图3.23所示。

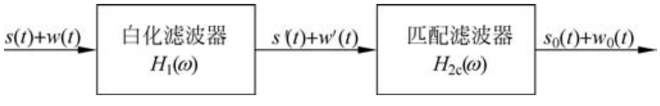


图3.23 广义匹配滤波器结构

例3.16 设信号为

$$s(t)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-t/2}-\mathrm{e}^{-t} & (t\geqslant 0)\\0 & (t<0)\end{cases}$$

噪声的功率谱为 $G_w(\omega)=1/(1+\omega^2)$，求广义匹配滤波器的传递函数。

解 首先将噪声功率谱用拉普拉斯变换表示为

$$G_w(s)=\frac{1}{1-s^2}=\frac{1}{(1+s)(1-s)}$$

所以

$$G_w^+(s)=\frac{1}{1+s},\quad G_w^-(s)=\frac{1}{1-s},\quad H_1(s)=\frac{1}{G_w^+(s)}=1+s$$

信号的拉普拉斯变换为

$$S(s)=\frac{1}{1/2+s}-\frac{1}{1+s}=\frac{1}{(1+2s)(1+s)},\quad H_2(s)=\frac{cS(-s)\mathrm{e}^{-st_0}}{G_w^-(s)}=\frac{c}{1-2s}\mathrm{e}^{-st_0}$$

求 $H_2(s)$的拉普拉斯反变换得冲激响应为

$$h_2(t)=\begin{cases}\dfrac{c}{2}\mathrm{e}^{(t-t_0)/2} & (-\infty<t\leqslant t_0)\\ 0 & (t>t_0)\end{cases}$$

很显然，$h_2(t)$在 $t<0$ 时不为零，因此 $H_2(s)$不是物理可实现的滤波器，如果取物理可实现部分，则

$$h_{2\mathrm{c}}(t)=\begin{cases}\dfrac{c}{2}\mathrm{e}^{(t-t_0)/2} & (0<t\leqslant t_0)\\ 0 & (t<0 \text{ 或 } t>t_0)\end{cases}$$

对应的传递函数为

$$H_{2\mathrm{c}}(s)=\int_0^{t_0}\frac{c}{2}\mathrm{e}^{(t-t_0)/2}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\frac{c}{1-2s}(\mathrm{e}^{-st_0}-\mathrm{e}^{-t_0/2})$$

那么，$s(t)$的广义匹配滤波器为

$$H(s)=H_1(s)H_{2\mathrm{c}}(s)=c\cdot\frac{1+s}{1-2s}(\mathrm{e}^{-st_0}-\mathrm{e}^{-t_0/2})$$

3.6 线性系统输出端随机过程的概率分布

在本章的前几节分析了线性系统输出的均值、相关函数和功率谱，本节将分析线性系统输出的概率密度。由于随机过程通过线性系统，就是对输入过程进行变换，即

$$Y(t)=L[X(t)] \tag{3.6.1}$$

对于某个时刻 t 而言，式(3.6.1)是一种函数变换关系，所以 $Y(t)$的一维概率密度可以用式(1.6.6)和式(1.6.8)来确定。同样，对于任意两个时刻 t_1 和 t_2，有

$$\begin{aligned}Y(t_1)&=L[X(t_1)]\\ Y(t_2)&=L[X(t_2)]\end{aligned} \tag{3.6.2}$$

$Y(t_1)$和 $Y(t_2)$的联合概率密度即为 $Y(t)$的二维概率密度，它可以由式(1.6.10)确定，以此类推，$Y(t)$的 N 维概率密度可由式(1.6.13)来确定。这是线性系统输出端概率密度

确定的一般方法,但实际上,由于线性系统特性不是一种简单的函数关系,通常都是由系统的冲激响应或传递函数来描述,因此,以上方法并不能直接使用。本节重点分析输出为正态的情况,其他情况通常只能运用概率密度估计的方法。

3.6.1 正态随机过程通过线性系统

设随机过程 $X(t)$通过冲激响应为 $h(t)$的线性系统,输出过程为 $Y(t)$,那么

$$Y(t)=\int_{-\infty}^{t} X(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\lim_{\max\Delta\tau_i\to 0}\sum_{i=1}^{N}X(\tau_i)h(t-\tau_i)\Delta\tau_i \qquad (3.6.3)$$

对于任意 N 个时刻 $t_1,t_2,\cdots,t_n$,设 $Y_k=Y(t_k)$,$X_k=X(\tau_k)$,则式(3.6.3)可用线性方程组来表示,即

$$\begin{cases}Y_1=l_{11}X_1+l_{12}X_2+\cdots+l_{1N}X_N\\ Y_2=l_{21}X_1+l_{22}X_2+\cdots+l_{2N}X_N\\ \vdots\\ Y_N=l_{N1}X_1+l_{N2}X_2+\cdots+l_{NN}X_N\end{cases} \qquad (3.6.4)$$

可见 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_N$ 是 $X_1,X_2,\cdots,X_N$ 经过线性变换后的响应,当 $X(t)$是正态随机过程时,$X_1,X_2,\cdots,X_N$ 是 N 维正态随机矢量,N 维正态随机矢量经过线性变换后仍为正态随机矢量,所以正态随机过程通过线性系统后仍然服从正态分布。

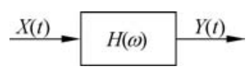


图 3.24 正态随机过程通过线性系统示意图

例 3.17 设有如图 3.24 所示系统,假定输入 $X(t)$为零均值平稳正态随机过程,功率谱密度为 $G_X(\omega)$,求输出过程的一、二维概率密度。

解 输出的功率谱为

$$G_Y(\omega)=G_X(\omega)|H(\omega)|^2$$

那么,输出的方差为

$$\sigma_Y^2=R_Y(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}G_X(\omega)|H(\omega)|^2\mathrm{d}\omega \qquad (3.6.5)$$

输出的自相关函数为

$$R_Y(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}G_X(\omega)|H(\omega)|^2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\omega \qquad (3.6.6)$$

所以,$Y(t)$的一维概率密度为

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi R_Y(0)}}\exp\left[-\frac{y^2}{2R_Y(0)}\right] \qquad (3.6.7)$$

由式(2.6.7)可知,$Y(t)$的二维概率密度为

$$f_Y(\boldsymbol{y})=\frac{1}{2\pi\det^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{C})}\exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{y}\right) \qquad (3.6.8)$$

其中

$$\boldsymbol{y}=[y_1\ y_2]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} R_Y(0) & R_Y(\tau) \\ R_Y(\tau) & R_Y(0) \end{bmatrix}$$

或者写成

$$f_Y(y_1,y_2)=\frac{1}{2\pi R_Y(0)\sqrt{1-r_Y^2(\tau)}}\exp\left\{-\frac{1}{2[1-r_Y^2(\tau)]R_Y(0)}[y_1^2-2r_Y(\tau)y_1y_2+y_2^2]\right\} \tag{3.6.9}$$

其中 $r_Y(\tau)=R_Y(\tau)/R_Y(0)$。

类似地,根据式(2.6.6),可以写出任意 N 维概率密度。

3.6.2 随机过程的正态化

随机过程的正态化是指非正态随机过程通过线性系统后,变换为正态过程。就随机变量而言,根据中心极限定理,大量独立同分布的随机变量之和,其分布是趋于正态的。因此,即使线性系统的输入过程是非正态的,则根据式(3.6.3)得

$$Y(t)=\lim_{\substack{\max\Delta\tau_i\to 0 \\ N\to\infty}}\sum_{i=1}^{N}X(\tau_i)h(t-\tau_i)\Delta\tau_i$$

$Y(t)$是许多随机变量之和,因此输出过程仍有可能逼近正态分布。可以证明,白噪声通过有限带宽的线性系统,输出是服从正态分布的。同样,宽带噪声通过窄带系统,输出也是近似服从正态分布的,这里的宽带噪声是相对于系统带宽而言的。如果噪声带宽与系统带宽之比大于7～10倍,就可以看成是宽带噪声通过窄带系统的情况。

在本章最后给出了一个随机过程正态化的实验,利用该实验可验证随机过程正态化的几点结论。

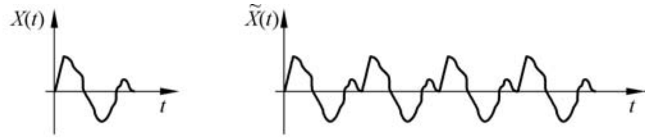
3.7 信号处理实例:有色高斯随机过程的模拟

在电子系统的仿真技术中,经常涉及随机过程的模拟,如雷达地杂波、海杂波的模拟,电子战技术中的电子干扰信号模拟等。在这些模拟中经常遇到需要模拟任意功率谱形状的平稳随机过程。在2.7节中初步介绍了给定相关函数的相关高斯随机序列的模拟,本节将介绍具有任意功率谱形状的有色高斯随机过程的模拟。模拟的方法有很多种,本节着重介绍频域法和时域滤波法两种。

3.7.1 频域法

假定需要模拟一个持续时长为 T_{d} 的高斯随机过程的一个样本 $X(t)$,要求功率谱满足 $G_X(f)$。为此,可以先将 $X(t)$进行周期延拓,得到一个周期信号,如图3.25所示,然后对周期信号进行傅里叶级数展开,即

$$\widetilde{X}(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X_k\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_0 k}\quad\left(f_0=\frac{1}{T_{\mathrm{d}}}\right)\tag{3.7.1}$$



(a) 随机过程X(t)的一条样本函数　　(b) X(t)的周期延拓

图 3.25　随机过程的样本函数及其周期延拓

由于傅里叶级数是 X_k 的线性组合，所以，如果 X_k 是零均值的高斯随机变量，那么 $\widetilde{X}(t)$也是零均值高斯过程，如果$\{X_k\}$是两两正交的序列，则周期信号的功率谱为线谱，如图 3.26 所示，即

$$G_{\widetilde{X}}(f)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}g_k^2\delta(f-kf_0)\quad(g_k^2=E(|X_k|^2))\tag{3.7.2}$$

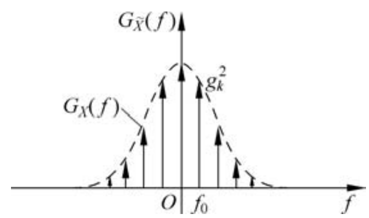


图 3.26　$\widetilde{X}(t)$的功率谱

通过选择 g_k 就可以得到期望的功率谱。

假定 $G_X(f)$是带限的，即

$$G_X(f)=0\quad(|f|>B)\tag{3.7.3}$$

其中 B 为功率谱的带宽，那么，$\{g_k^2\}$只有有限项，即$\{g_{-M}^2,g_{-M+1}^2,\cdots,g_0^2,\cdots,g_{M-1}^2,g_M^2\}$，其中 $M=[B/f_0]$，$[\cdot]$表示取整，与此对应的傅里叶级数系数$\{X_k\}$也是 $2M+1$ 项。因此，只需产生 $2M+1$ 个相互正交的零均值高斯随机变量$\{X_{-M},X_{-M+1},\cdots,X_0,\cdots,X_{M-1},X_M\}$，其方差 $E(|X_k|^2)=g_k^2$，并在式(3.7.1)中将时间限定为$(0,T_{\mathrm{d}})$就可以得到模拟过程 $X(t)$。g_k^2 应与$G_X(kf_0)$成比例，即 $g_k^2=\beta G_X(kf_0)$，系数 β 的选择可以通过满足下式来选择：

$$\int_{-B}^{B}G_X(f)\mathrm{d}f=\sum_{k=-M}^{M}E[|X_k|^2]=\sum_{k=-M}^{M}g_k^2=\beta\sum_{k=-M}^{M}G_X(kf_0)\tag{3.7.4}$$

即

$$\beta=\frac{\int_{-B}^{B}G_X(f)\mathrm{d}f}{\sum_{k=-M}^{M}G_X(f_0k)}\tag{3.7.5}$$

下面将频域产生有色高斯随机过程的步骤总结如下：

(1) 根据所需过程的时长 T_{d} 确定频率 f_0，并由此确定傅里叶级数系数的长度 $M=[B/f_0]$；

(2) 根据式(3.7.5)确定系数 β；

(3) 产生 $2M+1$ 个独立的高斯随机变量，即

$$X_k\sim N(0,\beta G_X(kf_0)),\quad k=-M,-M+1,\cdots,0,\cdots,M-1,M\tag{3.7.6}$$

(4) 构建时域样本函数。

$$X[i]=X(i\Delta t)=\sum_{k=-M}^{M}X_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_0 k(i\Delta t)} \tag{3.7.7}$$

其中 Δt 为任意小的时间间隔。

例 3.18 假定要产生一段 5ms 的零均值高斯随机过程的一个样本,其功率谱密度要求为

$$G_X(f)=\frac{1}{1+(f/\Delta f)^4}$$

其中 $\Delta f=1\text{kHz}$ 是功率谱密度的 3dB 带宽,严格地说,该过程的带宽是无限的,但当频率足够高时,功率谱密度已经很小,取 $B=6\Delta f$,按以上步骤产生的随机过程如图 3.27 所示。

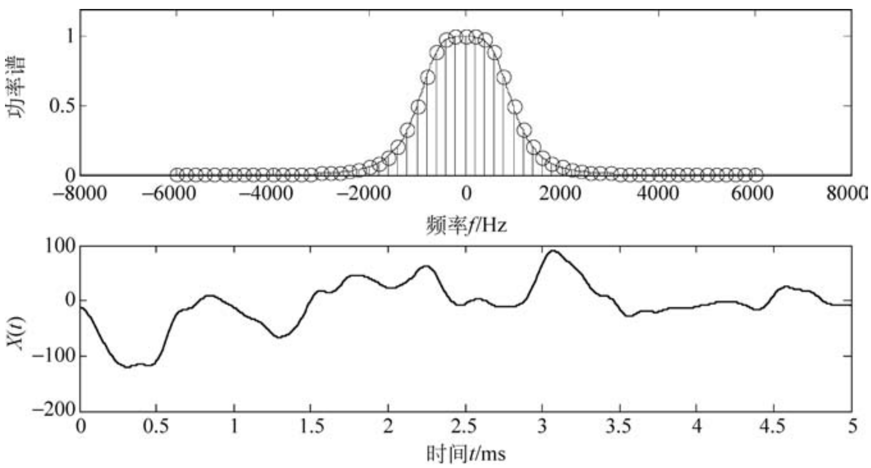


图 3.27 模拟产生的具有给定功率谱的高斯随机过程

3.7.2 时域滤波法

有色高斯随机过程产生的另一种方法是时域滤波法,如图 3.28 所示。

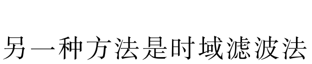


图 3.28 时域滤波法产生有色高斯噪声的示意图

根据 3.2 节和 3.6 节所介绍的理论,功率谱为 1 的白噪声通过线性系统,输出是服从高斯分布的,且输出的功率谱为 $G_X(f)=|H(f)|^2$。因此,要产生功率谱为 $G_X(f)$ 的有色高斯噪声,只需设计一个滤波器即可,该滤波器的传递函数应满足

$$H(f)=\sqrt{G_X(f)} \tag{3.7.8}$$

例 3.19 假定要产生一个例 3.18 所要求的有色高斯随机过程。功率谱密度可分

解为

$$G_X(f)=\frac{1}{1+(f/\Delta f)^4}$$

$$=\frac{(\Delta f)^4}{(f-\Delta f\cdot e^{j\pi/4})(f-\Delta f\cdot e^{j3\pi/4})(f-\Delta f\cdot e^{-j\pi/4})(f-\Delta f\cdot e^{-j3\pi/4})}$$

其中,前两个极点与 $H(f)$有关,后两个极点与 $H^*(f)$有关。所以,滤波器的传递函数为

$$H(f)=\frac{(\Delta f)^2}{(f-\Delta f\cdot e^{j\pi/4})(f-\Delta f\cdot e^{j3\pi/4})} \tag{3.7.9}$$

对式(3.7.9)做傅里叶反变换可得到系统的冲激响应为

$$h(t)=-2\omega_0 e^{-\omega_0 t}\cos\omega_0 t \quad (t\geqslant 0) \tag{3.7.10}$$

其中 $\omega_0=\sqrt{2}\pi\Delta f$。输出的有色高斯过程为

$$Y(t)=X(t)*h(t) \tag{3.7.11}$$

由于计算机产生的是连续时间信号的抽样值,即离散时间的信号,因此,在模拟滤波器设计后要转换成离散时间形式。根据模拟滤波器的原型设计相应的数字滤波器有许多方法,如冲激响应不变法、双线性变换法,有关设计的例子将在研讨题中进行实践。

习　　题

3.1　设随机过程 $X(t)$是平稳的和可微的,存在导数 $X'(t)$。证明对于给定的 t,随机变量 $X(t)$和 $X'(t)$是正交的和不相关的。

3.2　设输入随机过程 $X(t)$的自相关函数为 $R_X(\tau)=A^2+Be^{-|\tau|}$,系统冲激响应为

$$h(t)=\begin{cases} e^{-at} & (t\geqslant 0)\\ 0 & (\text{其他})\end{cases}$$

A,B,a 均为正实常数。试求输出 $Y(t)$的均值。

3.3　已知一个平稳随机过程输入到 RC 低通滤波器,如图 3.29 所示。$X(t)$的自相关函数 $R_X(t_1,t_2)=\delta(t_1-t_2)=\delta(\tau)$,求输出的自相关函数 $R_Y(\tau)$。

3.4　如图 3.30 所示 RL 电路,输入随机过程 $X(t)$,其 $E[X(t)]=0$,$R_X(t_1,t_2)=\sigma^2\exp[-\beta|t_1-t_2|]=\sigma^2\exp[-\beta|\tau|]$,$\beta>0$,试求稳态时输出的自相关函数 $R_Y(\tau)$。

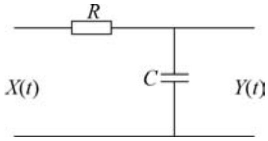


图 3.29　RC 电路

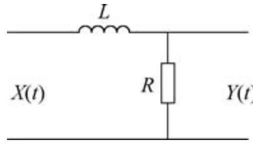


图 3.30　RL 电路

3.5 设线性时不变系统的冲激响应为 $h(t)=e^{-\beta t}U(t)$，输入平稳随机过程 $X(t)$ 的自相关函数为 $R_X(\tau)=e^{-\alpha|\tau|}$，其中 $\alpha>0,\beta>0$。

(1) 求输入输出之间的互相关函数 $R_{XY}(\tau)$；

(2) 当令 $\alpha=3,\beta=1$ 时，将所得结果画出来。

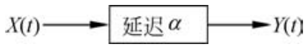


图 3.31 延迟电路

3.6 如图 3.31 所示电路中，输入平稳随机过程 $X(t)$ 的相关函数为 $R_X(\tau)$。试求 $R_Y(\tau)$、$R_{XY}(\tau)$。

3.7 设线性时不变系统的传递函数为

$$H(\omega)=\frac{j\omega-\alpha}{j\omega+\beta}$$

输入平稳随机过程 $X(t)$ 的自相关函数为 $R_X(\tau)=e^{-v|\tau|}\ (v>0)$，试求输入输出之间的互相关函数 $R_{XY}(\tau)$。

3.8 如图 3.29 所示，RC 低通滤波器的输入为白噪声，其物理谱密度 $F_X(\omega)=N_0\ (0<\omega<\infty)$，相应的自相关函数 $R_X(\tau)=\frac{N_0}{2}\delta(\tau)$。试求输出的 $F_Y(\omega)$ 和 $R_Y(\tau)$，并证明(令 $t_3>t_2>t_1$)

$$R_Y(t_3-t_1)=\frac{R_Y(t_3-t_2)R_Y(t_2-t_1)}{R_Y(0)}$$

3.9 假定功率谱密度为 $N_0/2$ 的高斯白噪声通过一个滤波器，其传递函数为

$$H(\omega)=\frac{1}{1+j\omega/\omega_1}$$

其中 ω_1 为常数，求输出的概率密度函数。

3.10 如图 3.32 所示 RL 系统中，输入 $X(t)$ 是物理谱密度为 N_0 的白噪声，试用频谱法求系统输出的自相关函数 $R_Y(\tau)$。

3.11 如图 3.33 所示，$X(t)$ 是输入随机过程，$G_X(\omega)=N_0/2$，$Z(t)$ 是输出随机过程。试用频谱法求输出 $Z(t)$ 的均方值。

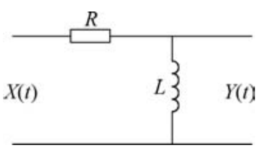


图 3.32 RL 电路

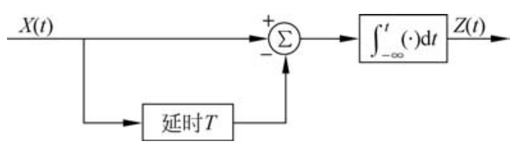


图 3.33 线性系统示意图

3.12 零均值平稳随机过程 $X(t)$ 输入一个线性滤波器，滤波器的冲激响应是指数形式的一段，即

$$h(t)=\begin{cases}e^{-\alpha t} & (0\leqslant t\leqslant T,\alpha>0)\\ 0 & (\text{其他})\end{cases}$$

证明输出随机过程的功率谱密度为

$$\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\omega^2}(1-2e^{-\alpha T}\cos\omega T+e^{-2\alpha T})G_X(\omega)$$

其中 $G_X(\omega)$是输入过程的功率谱密度。

3.13 设积分电路输入输出之间满足下述关系：

$$Y(t)=\int_{t-T}^{t}X(\tau)\mathrm{d}\tau$$

其中 T 为常数，且 $X(t)$和 $Y(t)$均为平稳随机过程。求证 $Y(t)$的功率谱密度

$$G_Y(\omega)=G_X(\omega)\frac{\sin^2(\omega T/2)}{(\omega/2)^2}$$

3.14 图 3.34 为单输入双输出的线性系统。求证：输出 $Y_1(t)$和 $Y_2(t)$的互谱密度

$$G_{Y_1Y_2}(\omega)=H_1(\omega)H_2^*(\omega)G_X(\omega)$$

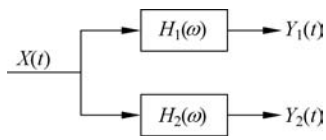


图 3.34 单输入双输出的线性系统

3.15 若线性系统输入随机过程 $X(t)$的功率谱密度为

$$G_X(\omega)=\frac{\omega^2+3}{\omega^2+8}$$

现已知其输出过程 $Y(t)$的功率谱密度 $G_Y(\omega)=1$，求该系统的传递函数。

3.16 假定随机过程 $X(t)$的功率谱为 $G_X(f)=\dfrac{1}{1+f^2}$，该过程加到一个传递函数为 $H(f)$的滤波器，该滤波器的功能是使输出的功率谱为 1，称该滤波器为白化滤波器。求该滤波器的传递函数，并画出它的实现电路。

3.17 证明随机过程的采样定理。设 $X(t)$为限带随机过程，即功率谱密度满足 $G_X(\omega)=0(|\omega|>\omega_c)$，试证明：

$$\hat{X}(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}X(nT)\frac{\sin(\omega_c t-n\pi)}{\omega_c t-n\pi}$$

提示：要证明上式，只需证明 $E\{[X(t)-\hat{X}(t)]^2\}=0$。

3.18 已知平稳随机过程的相关函数为

(1) $R_X(\tau)=\sigma_X^2(1-\alpha|\tau|)\left(\tau\leqslant\dfrac{1}{\alpha}\right)$

(2) $R_X(\tau)=\sigma_X^2\mathrm{e}^{-\alpha|\tau|}$

其中 $\alpha>0$，分别求其等效通能带 $\Delta\omega_e$。

3.19 设 $X(t)$为一个零均值高斯过程，其功率谱密度 $G_X(f)$如图 3.35 所示，若每 $1/(2W)$秒对 $X(t)$取样一次，得到样本集合 $X(0),X(1/(2W)),\cdots$，求前 N 个样本的联合概率密度。

3.20 设 $X(n)$是一个均值为零、方差为 σ_X^2 的白噪声，$Y(n)$是单位样值响应为 $h(n)$的线性时不变离散系统的输出，试证：

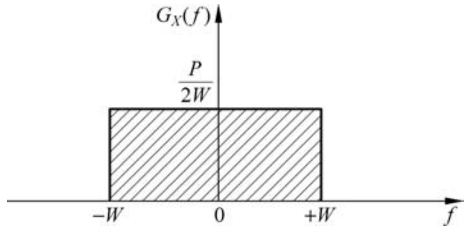


图 3.35　功率谱密度

(1) $E[X(n)Y(n)]=h(0)\sigma_X^2$；

(2) $\sigma_Y^2=\sigma_X^2\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}h^2(n)$。

3.21　图 3.36 所示系统，输入为均值为零、方差为 σ_X^2 的白噪声序列，其中 $h_1(n)=a^nU(n)$，$h_2(n)=b^nU(n)$，且 $|a|<1$ 和 $|b|<1$。试求 σ_Z^2。

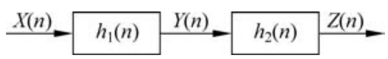


图 3.36　离散线性系统

3.22　设离散系统的单位样值响应 $h(n)=na^{-n}U(n)$，$a>1$，该系统输入为自相关函数为 $R_X(m)=\sigma_X^2\delta(m)$ 的白噪声，试求系统输出 $Y(n)$ 的自相关函数和功率谱密度。

3.23　序列 $Y(n)$ 和 $X(n)$ 满足差分方程 $Y(n)=X(n+a)-X(n-a)$，其中 a 为常数，试用 $X(n)$ 的自相关函数表示 $Y(n)$ 的自相关函数。

3.24　实值一阶自回归过程 $X(n)$ 满足差分方程 $X(n)+a_1X(n-1)=W(n)$，其中 a_1 为常数，$W(n)$ 为独立同分布随机序列。证明：

(1) 若 $W(n)$ 均值非零，则 $X(n)$ 非平稳；

(2) 若 $W(n)$ 均值为零，a_1 满足条件 $|a_1|<1$，则 $X(n)$ 的方差为 $\frac{\sigma_w^2}{1-a_1^2}$；

(3) 若 $W(n)$ 均值为零，分别求当 $0<a_1<1$ 和 $-1<a_1<0$ 时 $X(n)$ 的自相关函数。

3.25　假定一广义平稳随机过程由下面的差分方程描述，

$$X(n)-aX(n-1)=W(n)-bW(n-1)$$

其中 $W(n)$ 为白噪声，方差为 $\sigma_W^2=1$，对于参数 a 和 b 取下面两组值，分别画出 $X(n)$ 的功率谱密度，并解释你的结果。(1) $a=0.9$，$b=0.2$；(2) $a=0.2$，$b=0.9$。

3.26　假定二阶 AR 过程由如下差分方程描述，

$$X(n)-2r\cos(2\pi f_0)X(n-1)+r^2X(n-2)=W(n)$$

其中 $W(n)$ 为白噪声，方差为 $\sigma_W^2=1$，对于参数 r 和 f_0 取下面两组值，分别画出 $X(n)$ 的功率谱密度，并解释你的结果。(1) $r=0.7$，$f_0=0.1$；(2) $r=0.95$，$f_0=0.1$。(提示：确定 $H(z)$ 极点的位置)

3.27　输入过程 $X(n)$ 的功率谱密度为 σ_X^2，二阶 MA 模型为 $Y(n)=X(n)+a_1X(n-1)+a_2X(n-2)$，试求 $Y(n)$ 的自相关函数和功率谱密度。

3.28 平稳随机过程 $X_c(t)$ 的相关函数为

$$R_{X_c}(\tau)=e^{-4|\tau|}$$

若以间隔 20s 为周期对 $X_c(t)$ 采样得到随机序列 $X(n)$，求随机序列 $X(n)$ 的功率谱密度。

3.29 试证明最佳线性滤波器的传递函数为

$$H(\omega)=CS^*(\omega)e^{-j\omega t_0}\Big/G_w(\omega)$$

其中，C 为常数，$S(\omega)$ 是输入信号的频谱（* 表示共轭），$G_w(\omega)$ 是输入噪声功率谱密度，t_0 为信噪比最大的时刻。

3.30 设线性滤波器的输入为 $X(t)=s(t)+w(t)$，其中信号

$$s(t)=\begin{cases}A e^{\alpha(t-T)} & (t\leqslant T)\\ 0 & (t>T)\end{cases}$$

为指数形式脉冲，$\alpha>0$，$w(t)$ 为平稳白噪声，且与 $s(t)$ 之间统计独立。试求匹配滤波器的传输函数 $H(\omega)$，并画出电路示意图。

3.31 分析单个射频脉冲信号的匹配滤波。信号 $s(t)$ 是矩形包络的射频脉冲，脉冲宽度为 τ，角频率为 ω_0，其表示式为 $s(t)=a\,\mathrm{rect}(t)\cos\omega_0 t$，其中

$$\mathrm{rect}(t)=\begin{cases}1 & (0\leqslant t\leqslant \tau)\\ 0 & (\text{其他})\end{cases}$$

求 $s(t)$ 的匹配滤波器的传递函数、输出信号的波形、输出的信噪比，并画出匹配滤波器的实现框图。

3.32 分析相参射频脉冲串信号的匹配滤波器。设信号 $s(t)$ 为

$$s(t)=\sum_{k=0}^{M-1}s_1(t-kT)$$

其中 $s_1(t)$ 是习题 3.31 所表示的单个射频脉冲信号，求 $s(t)$ 的匹配滤波器的传递函数、输出信号的波形、输出的信噪比，并画出匹配滤波器的实现框图。

3.33 设图 3.29 所示的 RC 低通滤波器的输入信号为 $X(t)=s(t)+w(t)$，其中，$w(t)$ 的功率谱密度为 $G_w(\omega)=N_0/2$，$-\infty<\omega<\infty$，$s(t)$ 为与 $w(t)$ 统计独立的矩形脉冲

$$s(t)=\begin{cases}A & (0\leqslant t\leqslant \tau)\\ 0 & (\text{其他})\end{cases}$$

若定义 RC 低通滤波器的等效噪声频带 $\Delta f_e=\frac{1}{2}RC$，试求

(1) RC 低通滤波器输出信噪比的表达式；

(2) 最佳等效噪声频带 $\Delta f_{e,\mathrm{opt}}$ 与 τ 为什么关系时，RC 低通滤波器输出端有最大信噪比？

3.34 设线性滤波器的输入为 $X(t)=s(t)+w(t)$，已知 $s(t)$ 与 $w(t)$ 之间统计独立，且

$$s(t)=\begin{cases}A & (0\leqslant t\leqslant \tau)\\ 0 & (\text{其他})\end{cases}$$

$w(t)$是平稳噪声,其功率谱为

$$G_w(\omega)=\frac{2\alpha\omega^2}{\alpha^2+\omega^2}\quad(-\infty<\omega<\infty)$$

试求输出信噪比最大的最佳线性滤波器的传输函数。

3.35　设信号 $s(t)=1-\cos\omega_0 t(0\leqslant t\leqslant 2\pi/\omega_0)$,噪声的物理谱 $F_w(\omega)=N_0(0<\omega<\infty)$,且与信号统计独立,试设计匹配滤波器:

(1) 求传输函数和冲激响应;

(2) 求输出波形;

(3) 画出匹配滤波器的结构方框图;

(4) 若噪声功率谱为 $G_w(\omega)=\omega_1^2/(\omega^2+\omega_1^2)(-\infty<\omega<\infty)$,其中 ω_1 为常数,试求输出信噪比最大的线性滤波器的传输函数和冲激响应。

计算机作业

3.36　模拟产生一个功率谱为 $G_X(\omega)=1/(1.25+\cos\omega)$的正态随机序列,画出随机序列的波形。

3.37　图 3.14 是用 MATLAB 的 Simulink 模拟白噪声通过例 3.3 的 RC 电路,用示波器观察输入和输出的波形,改变 RC 的值,使电路时常数改变,观察输出波形的变化。

研讨题

3.38　在雷达信号处理中,杂波的对消非常重要,用杂波衰减因子来描述杂波对消的效果,它的定义为 $\mathrm{CA}=C_\mathrm{i}/C_\mathrm{o}$,其中 C_i 表示杂波对消器的输入杂波功率,C_o 表示杂波对消器的输出杂波功率。图 2.36 描述的就是一种最简单的二脉冲杂波对消器,假定进入到二脉冲对消器的杂波功率谱密度为 $G_X(f)=\dfrac{P_\mathrm{c}}{\sqrt{2\pi}\sigma_\mathrm{c}}\exp\left(-\dfrac{f^2}{2\sigma_\mathrm{c}^2}\right)$,$P_\mathrm{c}$ 为输入杂波的功率,求二脉冲对消器的杂波衰减因子。(提示:对正弦函数可以采用近似计算:对于小的 x,$\sin x\approx x$,在实际中通常有 $fT\ll 1$)

3.39　设有图 3.29 所示 RC 低通滤波器,输入 $X(t)=s(t)+w(t)$,$s(t)=a\cos(\omega_0 t+\Phi)$,其中 a,ω_0 是已知常数,Φ 是在$(0,2\pi)$上均匀分布的随机变量,$w(t)$是功率谱密度为 $N_0/2$ 的白噪声,且与 $s(t)$统计独立。

(1) 求输出 $Y(t)$的自相关函数;

(2) 如果定义输出的信噪比(SNR)为输出信号的平均功率与输出噪声的平均功率之比,求输出信噪比 SNR 的表达式;

(3) RC 应该如何选择可使输出信噪比达到最大?

3.40 在 3.7.1 节中介绍了频谱法模拟有色高斯随机过程的方法，请根据例 3.18 给出的要求，编写模拟有色高斯过程的 MATLAB 程序，并画出模拟产生的高斯随机过程的一个样本函数。

3.41 在 3.7.2 节中介绍了时域滤波法模拟有色高斯随机过程的方法，请根据例 3.19 给出的要求，按照双线性变换法设计相应的数字滤波器，编写模拟有色高斯过程的 MATLAB 程序，并画出模拟产生的高斯随机过程的一个样本函数。

3.42 设有图 3.37 所示系统。

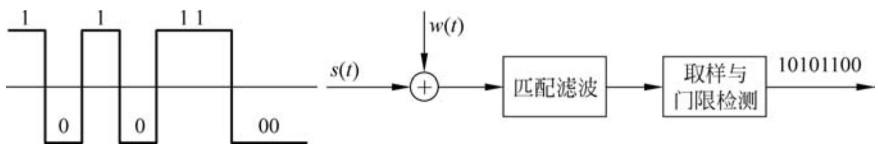


图 3.37 匹配滤波器在二元 PAM 信号传输中的应用

假定信号为脉冲幅度调制(PAM)信号，$s(t)=\sum_{k=0}^{M-1}A_k p(t-kt_s)$，$A_k$ 等概率取 $+1$ 和 -1 两个值，$t_s=1$，信号在信道中传输会受到加性高斯白噪声的污染，在接收端每一个脉冲要判断发射的是“1”还是“0”。

(1) 画出信号、信号加噪声的波形；

(2) 对匹配滤波器输出信号，每隔 t_s 秒进行取样(在每个脉冲结尾时刻取样)，取样值与一门限值(自行确定)进行比较，超过门限判“1”，低于门限判“0”，画出匹配滤波器输出的波形，并标出取样值。

(3) 产生 10000 个二进制数字(随机产生)，统计输出端检测的误码率。

实验

实验 3.1 典型时间序列模型分析

通过本实验熟悉几种常用的时间序列，实验内容如下。

1. 设有 AR(1)模型：

$$X(n)=-0.8X(n-1)+W(n)$$

$W(n)$是零均值正态白噪声，方差为 4。

(1) 用 MATLAB 模拟产生 $X(n)$的 500 观测点的样本函数，并绘出波形；

(2) 用产生的 500 个观测点估计 $X(n)$的均值和方差；

(3) 画出 $X(n)$的理论的自相关函数和功率谱；

(4) 估计 $X(n)$的自相关函数和功率谱。

2. 设有 AR(2)模型：

$$X(n)=-0.3X(n-1)-0.5X(n-2)+W(n)$$

$W(n)$是零均值正态白噪声，方差为 4。

(1) 用 MATLAB 模拟产生 $X(n)$的 500 观测点的样本函数,并绘出波形;

(2) 用产生的 500 个观测点估计 $X(n)$的均值和方差;

(3) 画出理论的功率谱;

(4) 估计 $X(n)$的相关函数和功率谱。

3. 设有 ARMA(2,2)模型:

$$X(n)+0.3X(n-1)-0.2X(n-2)=W(n)+0.5W(n-1)-0.2W(n-2)$$

$W(n)$是零均值正态白噪声,方差为 4。

(1) 用 MATLAB 模拟产生 $X(n)$的 500 观测点的样本函数,并绘出波形;

(2) 用产生的 500 个观测点估计 $X(n)$的均值和方差;

(3) 画出理论的功率谱;

(4) 估计 $X(n)$的相关函数和功率谱。

实验 3.2 随机过程通过线性系统分析

3.6.2 节介绍了随机过程的正态化问题,任意分布的白噪声通过线性系统后输出是服从正态分布的;宽带噪声通过窄带系统,输出近似服从正态分布,本实验的目的就是要验证以上结论。

实验内容如下。

假定滤波器为图 3.7 给出的 RC 电路(低通滤波器)。

(1) 将低通滤波器转化成数字低通滤波器;

(2) 产生一组均匀分布的白噪声序列,让这组白噪声序列通过数字低通滤波器,画出输出序列的直方图,并与输出的理论分布进行比较;

(3) 产生一组拉普拉斯分布的白噪声序列,让这组白噪声序列通过数字低通滤波器,画出输出序列的直方图,并与输出的理论分布进行比较;

(4) 改变滤波器的参数(电路 RC 值),重做(1)~(3),并与前一次的结果进行比较。