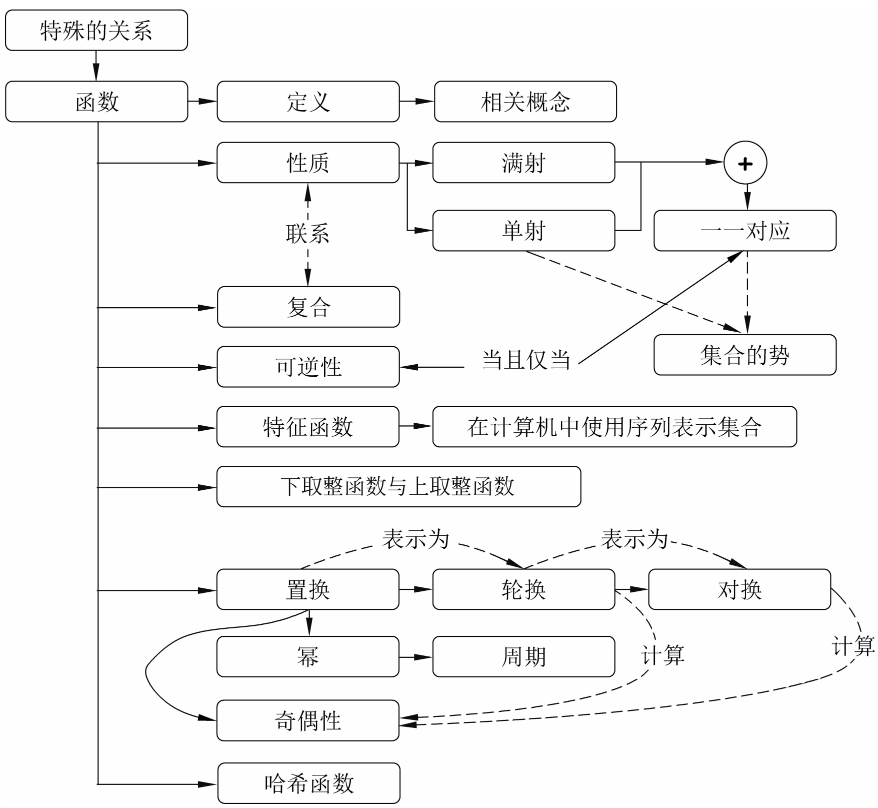
第5章 函 数

【本章知识结构图】



5.1 函数的定义

5.1.1 内容提要

定义 5.1 设 f 为集合 A 到 B 的二元关系。若对于任意 $x \in \mathrm{Dom}(f)$ 都存在唯一的 $y \in \mathrm{Ran}(f)$ 使得 $(x, y) \in f$ 成立，则称 f 为**函数**，此时记 $y = f(x)$，称 x 为**自变量**，y 为 **f 在 x 的值**或 **x 在 f 作用下的像**。函数也称为**映射**或**变换**。

定义 5.2 设 A、B 是非空集合，f 是 A 到 B 的一个关系。如果对每个 $x \in A$，存在唯

一的 $y\in B$,使得$(x,y)\in f$,则称 f 为 A **到** B **的函数**,记作 $f:A\to B$。此时也称 f 是**处处定义的**。

定义 5.3 设函数 $f:A\to B$,$A_1\subseteq A$,则称 $f(A_1)=\{f(x)\mid x\in A_1\}$为 $\boldsymbol{A_1}$ **在** $\boldsymbol{f}$ **下的像**,$f(A)$称为函数的**像**。

定义 5.4

(a) 设 $f:A\to B$,如果存在 $c\in B$ 使得对所有的 $x\in A$ 都有 $f(x)=c$,则称 $f:A\to B$ 是**常值函数**。

(b) 设 A 是非空集合,称 A 上的恒等关系 I_A 为 A 上的**恒等函数**,也记作 1_A。即对于所有的 $x\in A$,$1_A(x)=x$。

(c) 设 R 是 A 上的等价关系,定义从 A 到 A/R 的函数 $g:A\to A/R$,对任意 $a\in A$,$g(a)=[a]$,即将元素映到该元素所在的等价类,称 g 是从 A 到商集 A/R 的**典范映射**或**自然映射**。

(d) 设 n 是一个正整数,则可以定义从$\mathbb{Z}$到$\{0,1,2,\cdots,n-1\}$的**取余函数** $\bmod n$。

(e) 设集合 $A\subseteq B$,A 到 B 的**包含映射**或**嵌入**为函数 $i:A\hookrightarrow B$,对于任意 $x\in A$,$i(x)=x$。

5.1.2 主教材习题参考解答

5.1 判断以下 $A=\{\pm1,\pm2,\pm3,\pm4\}$上的关系中哪些构成函数。

(a) $R=\{(x,y)\mid x\in A,y\in A,y+x<7\}$。

(b) $R=\{(x,y)\mid x\in A,y\in A,x^2+y^2\leqslant 20\}$。

(c) $R=\{(x,y)\mid x\in A,y\in A,y=x^2\}$。

(d) $R=\{(x,y)\mid x\in A,y\in A,x=y^2\}$。

解:只有(c)是函数。

5.2 判断以下 $A=\{a,b,c\}$上的关系中哪些构成函数,哪些构成 A 上的函数。

(a) $R=\{(a,b),(a,c),(b,b),(b,a)\}$。

(b) $R=\{(a,b),(b,b)\}$。

(c) $R=\{(a,b),(b,b),(c,c)\}$。

解:(b)和(c)是函数,(c)是 A 上的函数。

5.3 判断以下关系 f 中哪些是 A 到 B 的函数。

(a) $A=B=\mathbb{R}$,xfy 当且仅当 $x^2=y^2$。

(b) $A=B=\mathbb{R}$,xfy 当且仅当 $x^3=y^3$。

(c) $A=B=\mathbb{C}$,$(a+b\mathrm{i})f(c+d\mathrm{i})$当且仅当 $a=c$。

解:只有(b)是 A 到 B 的函数。

5.4 设 $f:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{Z}^+$,定义为

$$f(x)=\begin{cases}x/2, & \text{若 } x \text{ 为偶数}\\ x+1, & \text{若 } x \text{ 为奇数}\end{cases}$$

令 $A=\{0,1\}$,$B=\{2\}$,计算 $f(A)$和 $f(B)$。

解:$f(A)=\{0,2\}$,$f(B)=\{1\}$。

5.5 设 f 和 g 都是集合 A 到集合 B 的函数,证明 $f\cap g$ 也是函数。

证明：否则存在 $x\in A$、$y_1,y_2\in B$，$(x,y_1)\in f\cap g$ 且 $(x,y_2)\in f\cap g$。于是 $(x,y_1)\in f$ 且 $(x,y_2)\in f$，与 f 是集合 A 到集合 B 的函数矛盾。 □

5.6　将集合 A 到集合 B 的所有函数的集合记为 B^A，称为**指数集**，即 $B^A=\{f\mid f:A\to B\}$。设 A、B 都是有限集合，$|A|=m$，$|B|=n$，请计算 $|B^A|$。

解：$|B^A|=|B|^{|A|}=n^m$。

5.7　设集合 $A=\{a,b,c,d,e,f\}$ 上划分 $\{\{a,b,c\},\{d,e\},\{f\}\}$ 决定的等价关系为 R，计算 A/R 的典范映射。

解：典范映射是 $g(a)=g(b)=g(c)=\{a,b,c\}$，$g(d)=g(e)=\{d,e\}$，$g(f)=\{f\}$。

5.2　函数的性质

5.2.1　内容提要

定义 5.5　设函数 $f:A\to B$。

(a) 若 $\mathrm{Ran}(f)=B$，则称 f 是**满射**或**映上**的。

(b) 若任意 $y\in\mathrm{Ran}(f)$ 都存在唯一的 $x\in A$ 使得 $f(x)=y$，则称 f 是**单射**或**一一**的。

(c) 若 f 既是满射又是单射，则称 f 是**双射**或**一一对应**。

注：

(a) f 是满射意味着：对于任意 $y\in B$，都存在 $x\in A$ 使得 $f(x)=y$。

(b) f 是单射另有如下两个等价定义：

(b.1) 如果 $a,b\in A$ 满足 $a\neq b$，则 $f(a)\neq f(b)$。

(b.2) 如果 $a,b\in A$ 满足 $f(a)=f(b)$，则 $a=b$。

定理 5.1　设 A 和 B 是两个有限集合且满足 $|A|=|B|$，则函数 $f:A\to B$ 是单射当且仅当 f 是满射。

定理 5.2　设 A 和 B 都是有限集合，则

(a) 若 $|A|<|B|$，则必然存在从 A 到 B 的单射函数，必然不存在从 A 到 B 的满射函数。

(b) 若 $|A|>|B|$，则必然存在从 A 到 B 的满射函数，必然不存在从 A 到 B 的单射函数。

(c) 若 $|A|=|B|$，则必然存在从 A 到 B 的双射函数。

推论　设 A 是有限集合，B 是无限集合，则

(a) 必然不存在从 A 到 B 的满射函数。

(b) 必然不存在从 B 到 A 的单射函数。

5.2.2　主教材习题参考解答

5.8　给出以下函数的例子。

(a) $\mathbb{Z}^+$ 到 $\mathbb{Z}^+$ 的既非单射又非满射的函数。

(b) $\mathbb{Z}^+$到$\mathbb{Z}^+$的是单射但不是满射的函数。

(c) $\mathbb{Z}^+$到$\mathbb{Z}^+$的非单射但是是满射的函数。

(d) $\mathbb{Z}^+$到$\mathbb{Z}^+$的既是单射又是满射的函数。

解：

(a) 例如 $f(x)=\begin{cases}2, & \text{若 } x \text{ 为偶数}\\ 1, & \text{若 } x \text{ 为奇数}\end{cases}$。

(b) 例如 $f(x)=\begin{cases}x, & \text{若 } x \text{ 为偶数}\\ x+2, & \text{若 } x \text{ 为奇数}\end{cases}$。

(c) 例如 $f(x)=\begin{cases}x/2, & \text{若 } x \text{ 为偶数}\\ 1, & \text{若 } x \text{ 为奇数}\end{cases}$。

(d) 例如 $f(x)=\begin{cases}x-1, & \text{若 } x \text{ 为偶数}\\ x+1, & \text{若 } x \text{ 为奇数}\end{cases}$。

5.9 判断下列函数是否为单射、满射、双射，为什么？

(a) $f:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{R}$，$f(x)=\ln x$。

(b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，$f(x)=|x|$。

(c) $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$，$f(x)=(x^2+1)/x$，其中$\mathbb{R}^+$为正实数集。

(d) $f:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$，$f(x,y)=x+y+1$。

(e) $f:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$，$f(x,y)=(x+y,x-y)$。

(f) $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}$，$f(x,y)=(x+y,x-y)$。

解：

(a) 是单射，不是满射，不是双射。

(b) 不是单射，不是满射，不是双射。

(c) 不是单射(如 $f(2)=f(1/2)$)，不是满射($(x^2+1)/x\geqslant 2$)，不是双射。

(d) 不是单射，是满射，不是双射。

(e) 是单射，不是满射，不是双射。

(f) 是单射，是满射，是双射。

5.10 设 A 和 B 是两个有限集，函数 $f:A\to B$，证明：

(a) 若 f 是单射，则$|A|\leqslant|B|$。

(b) 若 f 是满射，则$|B|\leqslant|A|$。

证明：

(a) 设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，则 $f(a_1),f(a_2),\cdots,f(a_n)$彼此互异，且$\{f(a_1),f(a_2),\cdots,f(a_n)\}\subseteq B$。于是$|A|=n=|\{f(a_1),f(a_2),\cdots,f(a_n)\}|\leqslant|B|$。

(b) 设 $B=\{b_1,b_2,\cdots,b_m\}$，则对于任一 $b_i\in B$，都存在 $a_i\in A$ 使得 $f(a_i)=b_i$，$1\leqslant i\leqslant m$。而且$\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$彼此互异，于是$|B|=m=|\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}|\leqslant|A|$。 □

5.11 证明定理 5.1。

证明：设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$。若 f 是单射，则 $f(a_1),f(a_2),\cdots,f(a_n)$彼此互异，且$\{f(a_1),f(a_2),\cdots,f(a_n)\}\subseteq B$；而由$|\{f(a_1),f(a_2),\cdots,f(a_n)\}|\leqslant|B|=|A|=n$ 可得$\{f(a_1),f(a_2),\cdots,f(a_n)\}=B$，于是 f 是满射。

设 $B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$。若 f 是满射，则对于任一 $b_i\in B$，都存在 $a_i\in A$ 使得 $f(a_i)=b_i$，$1\leqslant i\leqslant n$。$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$彼此互异且$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\subseteq A$，于是由$|\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}|\leqslant|A|=|B|=n$ 可得$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}=A$。这表明对于任意 $a_i,a_j\in A$，$a_i\neq a_j$，都有 $f(a_i)=b_i\neq b_j=f(a_j)$。于是 f 是单射。 □

5.12　证明定理 5.2。

证明：设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_m\}$。

(a) 若 $n<m$，则可以构造一个单射函数 $f(a_i)=b_i$，$1\leqslant i\leqslant n$。而若存在 A 到 B 的满射函数，则由题 5.10(b)，有$|B|\leqslant|A|$，产生矛盾。

(b) 若 $n>m$，则可以构造一个满射函数 $f(a_i)$：$1\leqslant i\leqslant m$ 时，$f(a_i)=b_i$；$m<i\leqslant n$ 时，$f(a_i)=b_1$。

而若存在 A 到 B 的单射函数，则由题 5.10(a)，有$|A|\leqslant|B|$，产生矛盾。

(c) 若 $n=m$，则可以构造一个双射函数 $f(a_i)=b_i$，$1\leqslant i\leqslant n$。 □

5.13　设 A、B 都是有限集合，$|A|=m$，$|B|=n$，请计算集合 A 到集合 B 的所有单射函数的个数。

解：设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$，f 是集合 A 到集合 B 的单射函数。则 $f(a_1)$，$f(a_2)$，$\cdots$，$f(a_m)$是 B 中元素组成的、各项彼此不同的、长为 m 的序列，这样的序列的个数是 $P(n,m)$。

5.14　设 A、B 都是有限集合，$|A|=|B|=n$，请计算集合 A 到集合 B 的所有双射函数的个数。

解：设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，f 是集合 A 到集合 B 的双射函数。则 $f(a_1)$，$f(a_2)$，$\cdots$，$f(a_n)$是 B 中元素组成的、各项彼此不同的、长为 n 的序列，即 B 中元素的一个全排列，这样的序列的个数是 $n!$。

5.15　设有函数 $f:A\to B$，$g:C\to D$，则可定义 $A\times C$ 到 $B\times D$ 的函数 $f\times g$ 为 $f\times g(x,y)=(f(x),g(y))$。

(a) 证明：若 f 和 g 都是单射，则 $f\times g$ 也是单射。

(b) 证明：若 f 和 g 都是满射，则 $f\times g$ 也是满射。

(c) 证明：若 f 和 g 都是双射，则 $f\times g$ 也是双射。

证明：

(a) 若(x_1,y_1)，$(x_2,y_2)\in A\times C$ 使得 $f\times g(x_1,y_1)=f\times g(x_2,y_2)$，则有$(f(x_1),g(y_1))=(f(x_2),g(y_2))$。于是 $f(x_1)=f(x_2)$及 $g(y_1)=g(y_2)$，并由 f 和 g 都是单射可得 $x_1=x_2$ 且 $y_1=y_2$，即$(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$。

(b) 设$(u,v)\in B\times D$。由于 f 和 g 都是满射，因此存在 $x\in A$ 及 $y\in C$ 使得 $f(x)=u$ 且 $g(y)=v$。于是 $f\times g(x,y)=(u,v)$。

(c) 由(a)和(b)即得。 □

5.16　对于以下集合 A 和 B，构造从 A 到 B 的双射函数。

(a) $A=(0,1)$，$B=(5,25)$(二者都是实数集上的开区间)。

(b) $A=\{a,b,c\}$，$B=\{$张三，李四，王五$\}$。

(c) $A=\mathbb{R}$，$B=\mathbb{R}^+$。

解：

(a) 例如 $f(x)=20x+5$。

(b) 例如 $f=\{(a,\text{张三}),(b,\text{李四}),(c,\text{王五})\}$。

(c) 例如 $f(x)=e^x$。

5.3 函数的复合

5.3.1 内容提要

定理 5.3 设 A、B、C 是集合，f 是 A 到 B 的关系，g 是 B 到 C 的关系。若 f、g 是函数，则 $g\circ f$ 也是函数，且满足以下两个条件：

(a) $\mathrm{Dom}(g\circ f)=\{x\mid x\in\mathrm{Dom}(f)\text{且}f(x)\in\mathrm{Dom}(g)\}$。

(b) 对于任意 $x\in\mathrm{Dom}(g\circ f)$有 $g\circ f(x)=g(f(x))$。

推论 设 A、B、C、D 均为非空集合，f 为 A 到 B 的关系，g 为 B 到 C 的关系，h 为 C 到 D 的关系。若 f、g、h 都是函数，则$(h\circ g)\circ f$ 和 $h\circ(g\circ f)$也都是函数，且$(h\circ g)\circ f=h\circ(g\circ f)$。

定理 5.4 设 A、B、C 为非空集合，函数 $f:A\to B$，$g:B\to C$，那么

(a) 如果 g 和 f 都是满射，则 $g\circ f$ 也是满射。

(b) 如果 g 和 f 都是单射，则 $g\circ f$ 也是单射。

(c) 如果 g 和 f 都是双射，则 $g\circ f$ 也是双射。

定理 5.5 设 A、B、C 为非空集合，函数 $f:A\to B$，$g:B\to C$，那么

(a) 若 $g\circ f$ 是单射，则 f 是单射。

(b) 若 $g\circ f$ 是满射，则 g 是满射。

(c) 若 $g\circ f$ 是双射，则 f 是单射，g 是满射。

定理 5.6 设 A、B 为集合，函数 $f:A\to B$，则 $f=f\circ 1_A=1_B\circ f$。

5.3.2 主教材习题参考解答

5.17 设 $f=\{(a,\alpha),(b,\alpha),(c,\beta)\}$，$g=\{(\alpha,0),(\beta,1)\}$，计算 $g\circ f$。

解： $g\circ f=\{(a,0),(b,0),(c,1)\}$。

5.18 设函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 定义为 $f(x)=256x$，$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 定义为 $g(x)=2^x$，$h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 定义为 $h(x)=x^3$，计算 $g\circ f(x)$、$f\circ g(x)$、$h\circ g\circ f(x)$。

解： $g\circ f(x)=2^{256x}$，$f\circ g(x)=256\times 2^x=2^{x+8}$，$h\circ g\circ f(x)=2^{768x}$。

5.19 设函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 3\\ -2, & x<3\end{cases}$；$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，$g(x)=x+2$。求 $f\circ g$ 和 $g\circ f$。

解： $f\circ g(x)=\begin{cases}(x+2)^2, & x\geqslant 1\\ -2, & x<1\end{cases}$，$g\circ f(x)=\begin{cases}x^2+2, & x\geqslant 3\\ 0, & x<3\end{cases}$。

5.20 设函数 $f:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{Z}^+$，定义为

$$f(x)=\begin{cases}x/2, & x\text{ 为偶数}\\ x+1, & x\text{ 为奇数}\end{cases}$$

计算 $f^4(15)$和 $f^6(65)$。

解：$f^4(15)=2$，$f^6(65)=9$。

5.21　设有两个$\mathbb{Z}^+$到$\mathbb{Z}^+$的函数：$f(n)=n+1$，$g(n)=\max(1,n-1)$。证明：

(a) f 是单射而不是满射。

(b) g 是满射而不是单射。

(c) $g\circ f=1_{\mathbb{Z}^+}$，而 $f\circ g\neq 1_{\mathbb{Z}^+}$。

证明：

(a) 不存在正整数 n 使得 $f(n)=1$；若 $f(n_1)=f(n_2)$，则由 $n_1+1=n_2+1$ 可得 $n_1=n_2$。

(b) 对于任意正整数 y 存在正整数 $y+1$ 使得 $f(y+1)=y$；而 $g(1)=g(2)=1$。

(c) $g\circ f(n)=\max(1,(n+1)-1)=\max(1,n)=n$，因此 $g\circ f=1_{\mathbb{Z}^+}$。而 $f\circ g(1)=f(1)=2$，因此 $f\circ g\neq 1_{\mathbb{Z}^+}$。 □

5.4　逆　函　数

5.4.1　内容提要

定义 5.6　设 A、B 为集合，如果以函数 f：$A\to B$ 作为关系的逆关系 f^{-1}是 B 到 A 的函数，则称之为**可逆的**，此时称 f^{-1}为 f 的**反函数**或**逆函数**。

定理 5.7　设 A、B 为集合，f：$A\to B$，若函数 f^{-1}存在，则

(a) $f^{-1}\circ f=1_A$。

(b) $f\circ f^{-1}=1_B$。

定理 5.8　设 A、B 为非空集合，函数 f：$A\to B$，则 f 可逆当且仅当 f 是双射，且 f 的逆函数若存在则也是双射。

定理 5.9　设 A、B 为集合，若 A 到 B 的函数 f 和 B 到 A 的函数 g 满足 $g\circ f=1_A$ 及 $f\circ g=1_B$，则 f 是一个 A 到 B 的双射，g 是一个 B 到 A 的双射，而且 f 和 g 互为逆函数。

定义 5.7　设 A、B 为集合，对于函数 f：$A\to B$ 若存在函数 g 使得 $g\circ f=1_A$ 且 $f\circ g=1_B$。则称 f 为**可逆的**，此时称 g 为 f 的**反函数**或**逆函数**，记作 $g=f^{-1}$。

5.4.2　主教材习题参考解答

5.22　设 $A=\{1,2,3\}$，求出 A 上所有的可逆函数。

解：A 上所有的可逆函数为$\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$、$\{(1,1),(2,3),(3,2)\}$、$\{(1,2),(2,1),(3,3)\}$、$\{(1,2),(2,3),(3,1)\}$、$\{(1,3),(2,1),(3,2)\}$、$\{(1,3),(2,2),(3,1)\}$。

5.23　设函数 f：$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 定义为 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 3\\ 9, & x<3\end{cases}$；$g$：$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 定义为 $g(x)=x+2$。如果 f 和 g 存在逆函数，则求出它们的逆函数；如果不存在逆函数，请说明理由。

解：f 不存在逆函数，因为 f 明显不是单射。g 存在逆函数 $g^{-1}(x)=x-2$。

5.24 设函数 $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 定义为 $f(x,y)=(x+y,x-y)$。

(a) 证明 f 是双射。

(b) 求 f 的逆函数。

(c) 求 $f\circ f$。

解：

(a) 对于任意的(x,y)，存在$((x+y)/2,(x-y)/2)$使得 $f((x+y)/2,(x-y)/2)=(x,y)$。因此 f 是满射。

若有 $f(x,y)=f(a,b)$，则由 $x+y=a+b,x-y=a-b$ 可得 $x=a,y=b$。因此 f 是单射。

(b) 对于$(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$，$f^{-1}(x,y)=((x+y)/2,(x-y)/2)$。

(c) 对于$(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$，$(f\circ f)(x,y)=(2x,2y)$。

5.25 设 $f_1,f_2,f_3:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{Z}^+$ 定义为

$$f_1(n)=2n$$

$$f_2(n)=\begin{cases}n/2, & n\text{ 为偶数}\\ n+1, & n\text{ 为奇数}\end{cases}$$

$$f_3(n)=\begin{cases}n-1, & n\text{ 为偶数}\\ n+1, & n\text{ 为奇数}\end{cases}$$

分析 f_1、f_2、f_3 是否为单射、满射、双射，说明 f_1、f_2、f_3 是否可逆。

解：f_1 是单射，不是满射，不是双射，不可逆。

f_2 不是单射($f(4)=f(1)=2$)，是满射，不是双射，不可逆。

f_3 是单射，也是满射，故是双射，可逆。

5.26 设 $f:A\to B,g:B\to C,h:C\to A$。若 $h\circ g\circ f=1_A,f\circ h\circ g=1_B,g\circ f\circ h=1_C$，证明 f、g、h 均为双射。

证明：由定理 5.5 及 $h\circ g\circ f=1_A$ 知 f 是单射，h 是满射。

由定理 5.5 及 $f\circ h\circ g=1_B$ 知 g 是单射，f 是满射。

由定理 5.5 及 $g\circ f\circ h=1_C$ 知 h 是单射，g 是满射。

因此，f、g、h 均为双射。 □

5.5 计算机科学中的常用函数

5.5.1 内容提要

定义 5.8 设 U 为全集，对于任意集合 $A\subseteq U$，可定义 A 的**特征函数** $\chi_A:U\to\{0,1\}$为

$$\chi_A(a)=\begin{cases}1, & a\in A\\ 0, & a\in\overline{A}\end{cases}$$

将集合运算转化为特征函数的运算见定理 5.10。

定理 5.10 设 U 为全集，A、B 是 U 的子集，则特征函数满足以下陈述：

(a) 对于所有 $x \in U$，$\chi_{\bar{A}}(x) = 1 - \chi_A(x)$。

(b) 对于所有 $x \in U$，$\chi_{A \cap B}(x) = \min(\chi_A(x), \chi_B(x)) = \chi_A(x)\chi_B(x)$。

(c) 对于所有 $x \in U$，$\chi_{A \cup B}(x) = \max(\chi_A(x), \chi_B(x)) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x)\chi_B(x)$。

(d) 对于所有 $x \in U$，$\chi_{A \oplus B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - 2\chi_A(x)\chi_B(x)$。

(e) 对于所有 $x \in U$，$\chi_{A-B}(x) = \chi_A(x)(1 - \chi_B(x))$。

(f) $A \subseteq B$ 当且仅当对于所有 $x \in U$ 有 $\chi_A(x) \leqslant \chi_B(x)$。

(g) $A = B$ 当且仅当对于所有 $x \in U$ 有 $\chi_A(x) = \chi_B(x)$。

定义 5.9 定义在$\mathbb{R}$上的**下取整函数**，也称作**地板函数**，其值是不超过自变量 x 的最大整数，记作 floor(x)或$\lfloor x \rfloor$。

定义 5.10 定义在$\mathbb{R}$上的**上取整函数**，也称作**天花板函数**，其值是不小于 x 的最小整数，记作 ceiling(x)或$\lceil x \rceil$。

上取整函数和下取整函数的性质见定理 5.11。

定理 5.11 设 n 为任意整数，x、y 为实数，则

(a) $\lfloor x \rfloor = n$ 当且仅当 $n \leqslant x < n+1$。

$\lceil x \rceil = n$ 当且仅当 $n-1 < x \leqslant n$。

$\lfloor x \rfloor = n$ 当且仅当 $x-1 < n \leqslant x$。

$\lceil x \rceil = n$ 当且仅当 $x \leqslant n < x+1$。

(b) $x-1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x \leqslant \lceil x \rceil < x+1$。

(c) $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$。

$\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$。

(d) $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$。

$\lceil x+n \rceil = \lceil x \rceil + n$。

(e) 若 $x < y$，则$\lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor y \rfloor$，$\lceil x \rceil \leqslant \lceil y \rceil$。

若 $x \leqslant y$，则$\lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor y \rfloor$，$\lceil x \rceil \leqslant \lceil y \rceil$。

定义 5.11 设非空有限集合 S 包含 n 个元素，S 上的一个双射 f 称为 S 的一个 ***n* 元置换**，简称**置换**，表示为

$$\pi = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ f(x_1) & f(x_2) & \cdots & f(x_n) \end{pmatrix}$$

其中 x_i 表示 S 中的互异元素。n 称为置换的**阶**。

定义 5.12 设有限集合 S 包含 n 个元素，则称 S 上的恒等函数为 S 的**恒等置换**或**不变置换**。

定义 5.13 设 π 是集合 S 的一个置换，则可定义 π 的**幂**为

(1) $\pi^0 = 1_S$，

(2) $\pi^n = \pi^{n-1} \circ \pi$，$n \geqslant 1$。

定义 5.14 设 π 是集合 S 的一个置换，使得 $\pi^k = 1_S$ 成立的最小正整数 k 称作 π 的**周期**，记作 per(π)。

定理 5.12 设 π 是有限集合 S 的一个置换，则 π 的周期必定存在。

定义 5.15 设有限集合 S 包含 n 个元素，以 $(a_1,a_2,\cdots,a_r)$ 表示 S 的一个如下置换：将 a_1 映射为 a_2，将 a_2 映射为 a_3……将 a_{r-1} 映射为 a_r，将 a_r 映射为 a_1，同时将其他元素映射到自身。$(a_1,a_2,\cdots,a_r)$ 称为一个 ***r*-轮换**，简称**轮换**，r 称为该轮换的**长度**。2-轮换也称为**对换**。

定义 5.16 若两个轮换 $\sigma_1=(a_1,a_2,\cdots,a_r)$ 和 $\sigma_2=(b_1,b_2,\cdots,b_s)$ 满足 $\{a_1,a_2,\cdots,a_r\}\cap\{b_1,b_2,\cdots,b_s\}=\varnothing$，则称它们是**不相交**的轮换。

定理 5.13 任一非恒等置换都可以唯一地（不计轮换的次序）表示成若干不相交轮换的复合（积）。

定理 5.14 任一非恒等置换都可以表示成若干对换之积。

定义 5.17 设 $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n)\end{pmatrix}$ 是 $1\sim n$ 的一个置换。若数对 (i,j) 满足 $\sigma(i)>\sigma(j)$ 且 $i<j$，则称其是一个**逆序对**。若 σ 中逆序对的总个数是奇数时，称 σ 为**奇置换**；否则称 σ 为**偶置换**。

定理 5.15 置换 σ 的逆序对总个数奇偶性等于将其表示为对换之积时对换个数的奇偶性。

注：

(a) 置换的奇偶性等于它分解成轮换后各个轮换长度之和与轮换个数之差的奇偶性，或者等价地说，等于各个轮换长度减一之和的奇偶性。

(b) 偶置换与偶置换之积仍然是偶置换，偶置换与奇置换之积是奇置换，奇置换与奇置换之积是偶置换。

定义 5.18 设 n 为大于 1 的正整数，则可以定义 $\mathbb{Z}$ 到 $\{0,1,2,\cdots,n-1\}$ 的**取余函数** $\bmod n$，$(\bmod n)(x)$ 习惯上也记做 $x \bmod n$，$y=x \bmod n$ 当且仅当 $y\equiv x\pmod n$。

定义 5.19 设 A 为有限集合，n 为确定的正整数，则 A^* 到 A^n 的函数 H：$A^*\to A^n$ 可称作一个**哈希函数**。

5.5.2 主教材习题参考解答

5.27 设 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，$A=\{2,3,5,7\}$，$B=\{1,2,4,8\}$，计算特征函数 χ_A 和 χ_B。用 0-1 序列表示集合 $A\cap B$、$A\cup B$、$A-B$、$\overline{A}$、$\overline{B}$ 和 $A\oplus B$。

解：$A\cap B$ 对应的序列是 01000000。$A\cup B$ 对应的序列是 11111011。$A-B$ 对应的序列是 00101010。$\overline{A}$ 对应的序列是 10010101。$\overline{B}$ 对应的序列是 00101110。$A\oplus B$ 对应的序列是 10111011。

5.28 证明定理 5.10 的(d)和(e)。

证明：

(d) 分以下 4 种情况讨论：

(1) $x\in A$ 且 $x\in B$，此时 $x\notin A\oplus B$。$\chi_{A\oplus B}(x)=0$，$\chi_A(x)=1$，$\chi_B(x)=1$。

(2) $x\in A$ 且 $x\notin B$，此时 $x\in A\oplus B$。$\chi_{A\oplus B}(x)=1$，$\chi_A(x)=1$，$\chi_B(x)=0$。

(3) $x\notin A$ 且 $x\in B$，此时 $x\in A\oplus B$。$\chi_{A\oplus B}(x)=1$，$\chi_A(x)=0$，$\chi_B(x)=1$。

(4) $x\notin A$ 且 $x\notin B$，此时 $x\notin A\oplus B$。$\chi_{A\oplus B}(x)=0$，$\chi_A(x)=0$，$\chi_B(x)=0$。