

3.1 引言

有限长序列在数字信号处理中占有很重要的地位。计算机只能处理有限长序列,前面讨论的傅里叶变换和Z变换虽然能分析研究有限长序列,但无法利用计算机进行数值计算。在这种情况下,可以推导出另一种傅里叶变换式,称作离散傅里叶变换(DFT)。离散傅里叶变换是有限长序列的傅里叶变换,它相当于把信号的傅里叶变换进行等频率间隔采样。离散傅里叶变换除了在理论上具有重要意义之外,由于存在快速算法,因而在各种数字信号处理的算法中,越来越起到核心的作用。

有限长序列的离散傅里叶变换(DFT)和周期序列的离散傅里叶级数(DFS)本质上是一样的。在讨论离散傅里叶级数与离散傅里叶变换前先来回顾并讨论一下傅里叶变换的几种可能形式。



3.2
微课视频

3.2 傅里叶变换的几种形式

傅里叶变换是建立以时间 t 为自变量的“信号”与以频率 f 为自变量的“频率函数”(频谱)之间的某种变换关系。所以“时间”或“频率”取连续值还是离散值,就形成各种不同形式的傅里叶变换对。

在深入讨论离散傅里叶变换(DFT)之前,先概述4种不同形式的傅里叶变换对,如图3-1所示。

3.2.1 连续时间、连续频率——连续傅里叶变换(FT)

这是非周期连续时间信号 $x(t)$ 的傅里叶变换,其频谱 $X(j\Omega)$ 是一个连续的非周期函数。这一变换对为

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt \quad (3-1)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \quad (3-2)$$

这一变换对的示意图如图3-1(a)所示。可以看出时域连续函数对应频域是非周期的谱,而时域的非周期对应频域是连续的谱。

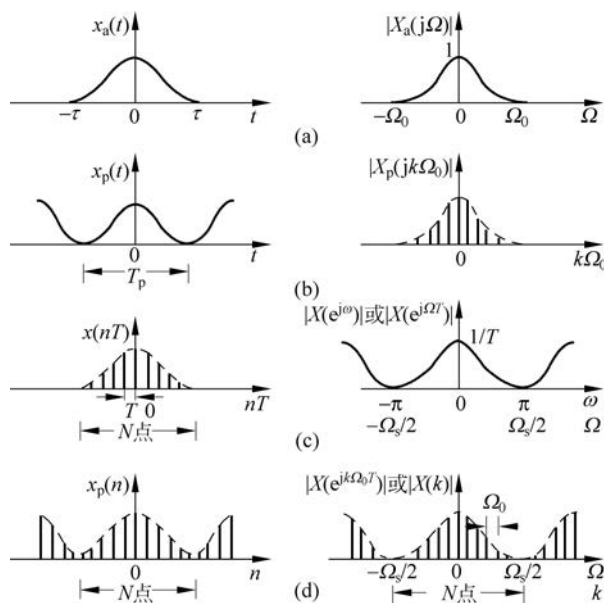


图 3-1 4 种形式的傅里叶变换对示意图

3.2.2 连续时间、离散频率——傅里叶级数(FS)

这是周期(T_p)连续时间信号 $x(t)$ 的傅里叶变换,得到的是非周期离散频谱函数 $X(jk\Omega_0)$,这一变换对为

$$X(jk\Omega_0) = \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} x(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt \quad (3-3)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\Omega_0) e^{jk\Omega_0 t} \quad (3-4)$$

其中, $\Omega_0 = 2\pi F = \frac{2\pi}{T_p}$ 为离散频谱相邻两谱线之间的角频率间隔, k 为谐波序号。

这一变换对的示意图如图 3-1(b)所示,可以看出时域的连续函数对应频域是非周期的频谱函数,而频域的离散频谱就与时域的周期时间函数相对应。

3.2.3 离散时间、连续频率——序列傅里叶变换(DTFT)

这是非周期离散时间信号的傅里叶变换,得到的是周期性连续的频率函数。这正是第 2 章介绍的序列(离散时间)傅里叶变换。这一变换对为

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \quad (3-5)$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (3-6)$$

其中, ω 是数字频率,它和模拟角频率 Ω 的关系为 $\omega = \Omega T$ 。

这一变换对的示意图如图 3-1(c)所示。可以看出时域的离散对应频域的周期延拓,而时域的非周期对应频域的连续。

3.2.4 离散时间、离散频率——离散傅里叶变换(DFT)

上面讨论的 3 种傅里叶变换对都不适用在计算机上运算,因为它们至少在一个域(时域或频域)中函数是连续的。我们感兴趣的是时域及频域都是离散的情况,这就是离散傅里叶变换。一种常用的离散傅里叶变换对可表示为

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (3-7)$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (3-8)$$

比较图 3-1(a)、图 3-1(b)和图 3-1(c)可发现有以下规律:如果信号频域是离散的,则表现为周期性的时间函数。相反,在时域上是离散的,则该信号在频域必然表现为周期性的频率函数。不难设想,一个离散周期序列,它一定具有既是周期又是离散的频谱,其示意图如图 3-1(d)所示。

由此可以得出一般的规律:一个域的离散对应另一个域的周期延拓,一个域的连续必定对应另一个域的非周期。表 3-1 对这 4 种傅里叶变换形式的特点作了简要归纳。

表 3-1 4 种傅里叶变换形式的归纳

时间函数	频率函数
连续和非周期	非周期和连续
连续和周期(T_p)	非周期和离散($\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_p}$)
离散(T)和非周期	周期($\Omega_s = \frac{2\pi}{T}$)和连续
离散(T)和周期(T_p)	周期($\Omega_s = \frac{2\pi}{T}$)和离散($\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_p}$)

下面先从周期性序列的离散傅里叶级数开始讨论,然后讨论可作为周期函数一个周期的有限长序列的离散傅里叶变换。

3.3 离散傅里叶级数(DFS)

3.3.1 DFS 的定义

设 $\tilde{x}(n)$ 是一个周期为 N 的周期序列,即

$$\tilde{x}(n) = \tilde{x}(n + rN), \quad r \text{ 为任意整数}$$

由于周期序列的数值随周期 N 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内周而复始地重复变化,因而在整个 z 平面内找不到一个合适的衰减因子 $|z|$,使周期序列绝对可和,即对于 z 平面内的任意 z 值,都有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\tilde{x}(n) z^{-n}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\tilde{x}(n)| |z|^{-n} = \infty$$

所以,周期序列不能用 Z 变换表示。

但是,正如连续时间周期信号可以用傅里叶级数表示一样,离散周期序列也可以用离散傅里叶级数表示,也就是用周期为 N 的复指数序列表示。表 3-2 表示了连续周期信号与离散周期序列的复指数对比。



3.3.1
微课视频

表 3-2 连续周期信号与离散周期序列的复指数对比

分 类	基 频 序 列	周 期	基 频	k 次谐波序列
连续周期	$e^{j\Omega_0 t} = e^{j\left(\frac{2\pi}{T_p}\right)t}$	T_p	$\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_p}$	$e^{j\left(\frac{2\pi}{T_p}\right)tk}$
离散周期	$e^{j\omega_0 n} = e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$	N	$\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$	$e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk}$

可见,周期为 N 的复指数序列的基频序列为 $e_1(n) = e^{j\omega_0 n} = e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$, k 次谐波序列为 $e_k(n) = e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk}$ 。

由于 $e^{j\frac{2\pi}{N}n(k+rN)} = e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$, 即 $e_{k+rN}(n) = e_k(n)$, 因而,离散傅里叶级数的所有谐波成分中只有 N 个是独立的,这点和连续傅里叶级数不同(后者有无穷多个谐波成分)。因此在展开成离散傅里叶级数时,我们只能取 N 个独立的谐波分量,否则将产生二义性。为方便起见,取 k 为 $0 \sim N-1$ 的 N 个独立谐波分量来构成 $\tilde{x}(n)$ 的离散傅里叶级数,即

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk} \quad (3-9)$$

式中, $1/N$ 是习惯上采用的常数, $\tilde{X}(k)$ 是 k 次谐波的系数,为求解这个系数要利用以下性质,即

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)rn} = \frac{1}{N} \cdot \frac{1 - e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)rN}}{1 - e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)r}} = \begin{cases} 1, & r = mN, m \text{ 为整数} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (3-10)$$

将式(3-9)两端同时乘以 $e^{-j\frac{2\pi}{N}rn}$, 并对 n 为 $0 \sim N-1$ 的一个周期求和,得

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)rn} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}n(k-r)} = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}n(k-r)} \right] = \tilde{X}(r)$$

将 r 换成 k , 可得

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk} \quad (3-11)$$

这就是求 k 为 $0 \sim N-1$ 的 N 个谐波系数 $\tilde{X}(k)$ 的公式。

由于

$$\tilde{X}(k+rN) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)n(k+rN)} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk} = \tilde{X}(k)$$

所以 $\tilde{X}(k)$ 也是一个以 N 为周期的周期序列。因此,时域离散周期序列的离散傅里叶级数在频域上仍然是一个周期序列。习惯上采用以下符号

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

这样,式(3-9)和式(3-11)又可表示为

$$\tilde{X}(k) = \text{DFS}[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{nk} \quad (3-12)$$

$$\tilde{x}(n) = \text{IDFS}[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-nk} \quad (3-13)$$

其中,符号 $\text{DFS}[\cdot]$ 表示离散傅里叶级数正变换, $\text{IDFS}[\cdot]$ 表示离散傅里叶级数反变换。

式(3-12)和式(3-13)中的表达式求和时都只取 N 个序列值,这一事实说明一个周期序

列虽然是无限长序列,但只要研究一个周期的性质,其他周期的性质也就知道了。因此周期序列与有限长序列有着本质的联系。

3.3.2 DFS 的性质

1. 线性

设 $\tilde{x}(n)$ 和 $\tilde{y}(n)$ 都是以 N 为周期的序列,并且

$$\text{DFS}[\tilde{x}(n)] = \tilde{X}(k), \quad \text{DFS}[\tilde{y}(n)] = \tilde{Y}(k)$$

则

$$\text{DFS}[a\tilde{x}(n) + b\tilde{y}(n)] = a\tilde{X}(k) + b\tilde{Y}(k) \quad (3-14)$$

其中, a, b 为任意常数。

2. 移位特性

首先看时移特性,即序列的移位。

设

$$\text{DFS}[\tilde{x}(n)] = \tilde{X}(k)$$

则

$$\text{DFS}[\tilde{x}(n-m)] = W_N^{mk} \tilde{X}(k) \quad (3-15a)$$

$$\text{证明} \quad \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n-m) W_N^{nk} = \sum_{n'=0}^{N-1} \tilde{x}(n') W_N^{(n'+m)k} = W_N^{mk} \sum_{n'=0}^{N-1} \tilde{x}(n') W_N^{n'k} = W_N^{mk} \tilde{X}(k)$$

再来看一下频移特性,即调制特性。

设

$$\text{DFS}[\tilde{x}(n)] = \tilde{X}(k)$$

则

$$\text{DFS}[W_N^{nl} \tilde{x}(n)] = \tilde{X}(k+l) \quad (3-15b)$$

$$\text{证明} \quad \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{nl} \tilde{x}(n) W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{n(k+l)} = \tilde{X}(k+l)$$

3. 周期卷积

设 $\tilde{x}(n)$ 和 $\tilde{y}(n)$ 都是以 N 为周期的序列,它们的离散傅里叶级数分别为 $\tilde{X}(k)$ 和 $\tilde{Y}(k)$,若

$$\tilde{F}(k) = \tilde{X}(k) \tilde{Y}(k)$$

则

$$\tilde{f}(n) = \text{IDFS}[\tilde{F}(k)] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}(m) \tilde{y}(n-m) \quad (3-16)$$

$$\begin{aligned} \text{证明} \quad \tilde{f}(n) &= \text{IDFS}[\tilde{X}(k) \tilde{Y}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) \tilde{Y}(k) W_N^{-kn} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}(m) W_N^{mk} \tilde{Y}(k) W_N^{-kn} = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}(m) \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{Y}(k) W_N^{-(n-m)k} \right] \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}(m) \tilde{y}(n-m) \end{aligned}$$

这是一个卷积公式,但是和前面所讨论的线性卷积不同, $\tilde{x}(m)$ 和 $\tilde{y}(n-m)$ 都是变量 m 的周期函数,周期为 N ,因而乘积也是周期为 N 的周期函数,另外,卷积过程也只是在一个周期内进行,这类卷积通常称为周期卷积。在作这类卷积的过程中,当一个周期移出计算区



3.3.2-3
微课视频

间时,下一周期就移入计算区间。

周期卷积的过程可以用图 3-2 说明,这是两个周期 $N=7$ 的卷积。每一个周期里 $\tilde{x}_1(n)$ 有一个宽度为 4 的矩形脉冲, $\tilde{x}_2(n)$ 有一个宽度为 3 的矩形脉冲,图中画出了对应于 $n=0,1,2$ 时的 $\tilde{x}_2(n-m)$ 。周期卷积过程中一个周期的某一序列值移出计算区间时,相邻的同一位置的序列值就移入计算区间。运算在 m 为 $0 \sim N-1$ 内进行,即在一个周期内将 $\tilde{x}_2(n-m)$ 与 $\tilde{x}_1(m)$ 逐点相乘后求和,先计算出 $n=0,1,\dots,N-1$ 的结果,然后将所得结果进行周期延拓,就得到所求的整个周期序列 $\tilde{y}(n)$ 。

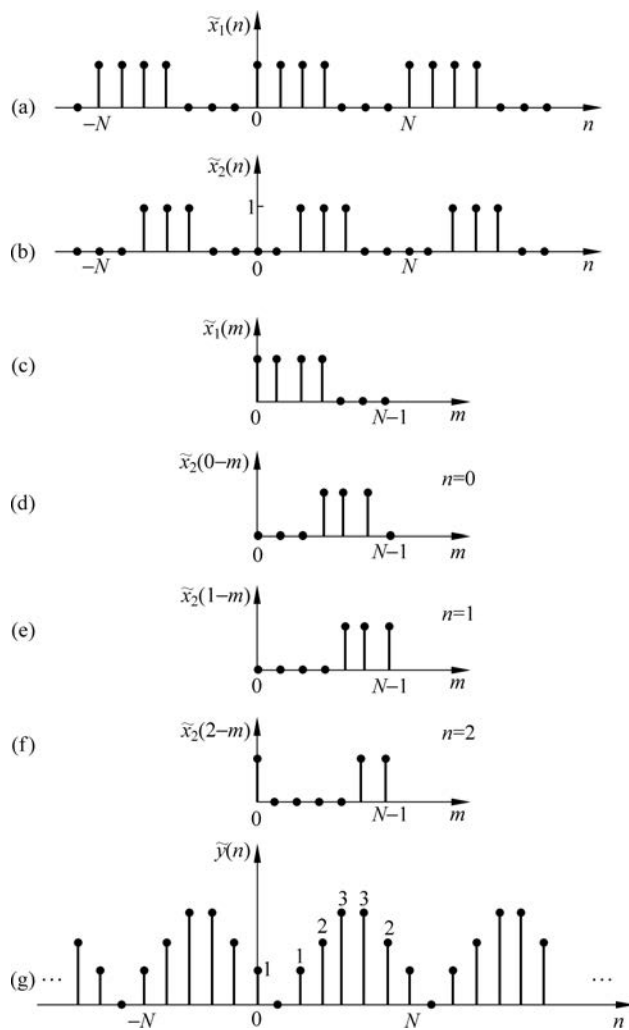


图 3-2 两个周期为 7 的序列的周期卷积

3.4 离散傅里叶变换(DFT)

3.4.1 DFT 的定义

由 3.3 节的讨论可知,周期序列实际上只有有限个序列值有意义,因而它和有限长序列有着本质的联系。本节将根据周期序列和有限长序列之间的关系,由周期序列的离散傅里



叶级数表示式推导得到有限长序列的离散频域表示,即离散傅里叶变换(DFT)。

1. 有限长序列和周期序列之间的关系

周期序列只有有限个序列值是独立的。对于长度为 N 的有限长序列,可以看成周期为 N 的周期序列的一个周期,这样利用离散傅里叶级数计算周期序列的一个周期,就相当于计算了有限长序列。

设 $x(n)$ 为有限长序列,长度为 N ,把它看成周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的一个周期,而把 $\tilde{x}(n)$ 看成 $x(n)$ 以 N 为周期的周期延拓,这样就建立了有限长序列 $x(n)$ 和周期序列 $\tilde{x}(n)$ 之间的联系,即

$$x(n) = \begin{cases} \tilde{x}(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

或

$$x(n) = \tilde{x}(n)R_N(n) \quad (3-17)$$

$$\tilde{x}(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n+rN) \quad (3-18)$$

上述关系如图 3-3 所示。习惯上把 $\tilde{x}(n)$ 的第一个周期(n 从 $0 \sim N-1$)定义为“主值区间”,而主值区间上的序列称为“主值序列”,所以 $x(n)$ 是 $\tilde{x}(n)$ 的“主值序列”。

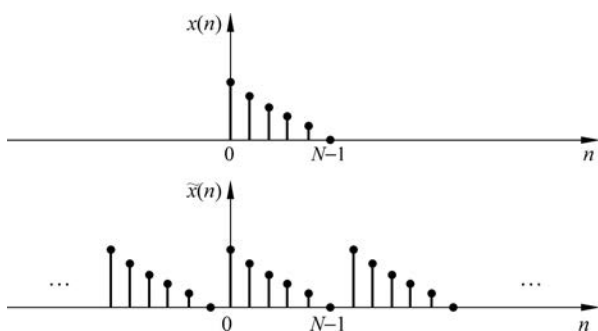


图 3-3 有限长序列及其周期延拓

对不同 r 值, $x(n+rN)$ 之间彼此并不重叠,故式(3-18)也可写成

$$\tilde{x}(n) = x(n \bmod N) = x((n))_N \quad (3-19)$$

用 $((n))_N$ 表示 $(n \bmod N)$,其数学上就是表示“ n 对 N 取余数”,或称“ n 对 N 取模值”。令

$$n = n_1 + mN, \quad 0 \leq n_1 \leq N-1, m \text{ 为整数}$$

则 n_1 为 n 对 N 的余数。不管 n_1 加上多少倍的 N ,其余数皆为 n_1 ,即周期性重复出现的 $x((n))_N$ 数值是相等的。例如, $\tilde{x}(n)$ 是周期 $N=8$ 的序列,求 $n=19$ 和 $n=-2$ 两数对 N 的余数。因为

$$n = 19 = 3 + 2 \times 8, \quad n = -2 = 6 + (-1) \times 8$$

所以

$$((19))_8 = 3, \quad ((-2))_8 = 6$$

因此 $\tilde{x}(19) = x((19))_8 = x(3)$, $\tilde{x}(-2) = x((-2))_8 = x(6)$ 。

同理,频域周期序列 $\tilde{X}(k)$ 也可看成对有限长序列 $X(k)$ 的周期延拓,而有限长序列

$X(k)$ 看成周期序列 $\tilde{X}(k)$ 的主值序列,即

$$\tilde{X}(k) = X((k))_N \quad (3-20)$$

$$X(k) = \tilde{X}(k)R_N(k) \quad (3-21)$$

2. 有限长序列的离散傅里叶变换

从 DFS 和 IDFS 的定义可以看出,求和运算只限定在 $n=0$ 到 $N-1$ 和 $k=0$ 到 $N-1$ 的主值区间内进行,因而完全适用于主值序列 $x(n)$ 与 $X(k)$ 。因此得到一个新的定义,这就是有限长序列的离散傅里叶变换:长度为 N 的有限长序列 $x(n)$,其离散傅里叶变换 $X(k)$ 仍然是一个长度为 N 的频域有限长序列,它们的关系为

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}, \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (3-22)$$

$$x(n) = \text{IDFT}[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk}, \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (3-23)$$

长度为 N 的有限长序列和周期为 N 的周期序列,都是由 N 个值定义。但有一点需要记住,凡是谈到傅里叶变换关系之处,有限长序列都是作为周期序列的一个周期来表示的,都隐含有周期性的意思。

例 3-1 已知序列 $x(n) = \delta(n)$, 求它的 N 点 DFT。

解 单位脉冲序列的 DFT 很容易由 DFT 的定义式(3-22)得到,即

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n)W_N^{nk} = W_N^0 = 1$$

$\delta(n)$ 的 $X(k)$ 如图 3-4 所示。这是一个很特殊的例子,它表明对序列 $\delta(n)$ 来说,不论对它进行多少点的 DFT,所得结果都是一个离散矩形序列。

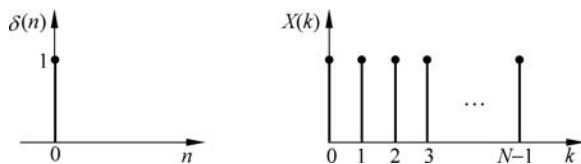


图 3-4 序列 $\delta(n)$ 及其离散傅里叶变换

在一般情况下, $X(k)$ 是一个复量,可表示为

$$X(k) = X_R(k) + jX_I(k)$$

或

$$X(k) = |X(k)|e^{j\theta(k)}$$

例 3-2 求有限长序列 $x(n) = \begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 的 DFT, 其中 $a=0.8, N=8$ 。

$$\text{解} \quad X(k) = \sum_{n=0}^{8-1} x(n)W_8^{nk} = \sum_{n=0}^7 a^n e^{-j\frac{2\pi}{8}nk} = \sum_{n=0}^7 (ae^{-j\frac{2\pi}{8}k})^n = \frac{1-a^8}{1-ae^{-j\frac{\pi}{4}k}}, \quad 0 \leq k \leq 7$$

因此得

$$X(0) = 4.16114$$

$$X(2) = 0.50746 - j0.40597$$

$$X(1) = 0.71063 - j0.92558$$

$$X(3) = 0.47017 - j0.16987$$

$$X(4) = 0.46235$$

$$X(5) = 0.47017 + j0.16987$$

$$X(6) = 0.50746 + j0.40597$$

$$X(7) = 0.71063 + j0.92558$$

例 3-3 已知序列 $x(n) = R_4(n)$, 求 $x(n)$ 的 8 点和 16 点 DFT。

解 设变换区间 $N=8$, 则

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{8-1} x(n) W_8^{nk} = \sum_{n=0}^3 e^{-j\frac{2\pi}{8}nk} \\ &= e^{-j\frac{3\pi}{8}k} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{8}k\right)}, \quad k=0, 1, \dots, 7 \end{aligned}$$

$$\text{设变换区间 } N=16, \text{ 则 } X(k) = \sum_{n=0}^{16-1} x(n) W_{16}^{nk} = \sum_{n=0}^3 e^{-j\frac{2\pi}{16}nk} = e^{-j\frac{3\pi}{16}k} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}k\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{16}k\right)}, k=0, 1, \dots, 15,$$

由此可以看出, $x(n)$ 的 DFT 结果与变换区间长度 N 的取值有关。讨论完 DFT 与 Z 变换的关系及 DFT 的物理意义后, 上述问题就会得到解释。



3.4.2
微课视频

3.4.2 DFT 与 Z 变换、DTFT 的关系

设序列 $x(n)$ 的长度为 N , 其 Z 变换和 DFT 分别为

$$\begin{aligned} X(z) &= Z[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n} \\ X(k) &= \text{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}, \quad 0 \leq k \leq N-1 \end{aligned}$$

比较 Z 变换和 DFT, 可以看出, 当 $z = W_N^{-k}$ 时, 有

$$X(z) \Big|_{z=W_N^{-k}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} = \text{DFT}[x(n)]$$

即

$$X(k) = X(z) \Big|_{z=W_N^{-k}}, \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (3-24)$$

$z = W_N^{-k} = e^{j(\frac{2\pi}{N})k}$ 表明 W_N^{-k} 是 z 平面单位圆上幅角为 $\omega = \frac{2\pi}{N}k$ 的点, 即将 z 平面单位圆 N 等分后的第 k 点, 所以 $X(k)$ 也就是 Z 变换在单位圆上的 N 点等间隔采样。

另外, 由于序列的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 就是单位圆上的 Z 变换, 根据式 (3-24), DFT 与序列傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 的关系为

$$X(k) = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} \quad (3-25)$$

式 (3-25) 说明, $X(k)$ 也可以看作序列 $x(n)$ 的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的 N 点等间隔采样, 其采样间隔为 $\omega = \frac{2\pi}{N}$, 这就是 DFT 的物理意义。显而易见, DFT 的变换区间长度 N 不同, 表示对 $X(e^{j\omega})$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的采样间隔和采样点数不同, 所以 DFT 的变换结果也不同, 当 N 足够大时, $X(k)$ 的包络可逼近曲线 $X(e^{j\omega})$ 。DFT 与 Z 变换和序列

傅里叶变换的关系如图 3-5 所示。

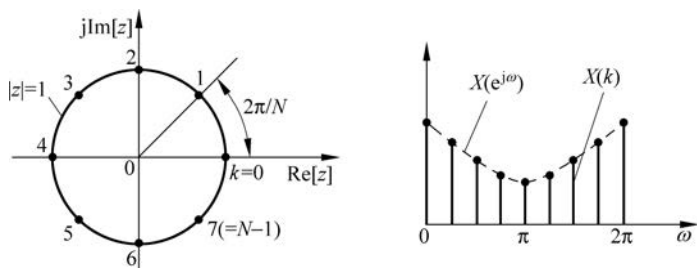


图 3-5 DFT 与 Z 变换和序列傅里叶变换(DTFT)的关系

信号时域采样理论实现了信号时域的离散化,使我们能用数字技术在时域对信号进行处理。而离散傅里叶变换理论实现了频域离散化,因而开辟了用数字技术在频域处理信号的新途径,从而推进了信号的频谱分析技术向更深更广的领域发展。

3.4.3 DFT 的性质

本节讨论 DFT 的一些性质,它们本质上和周期序列的 DFS 概念有关,而且是由有限长序列及其 DFT 表示式隐含的周期性得出的。以下讨论的序列都是 N 点有限长序列,用 $\text{DFT}[\cdot]$ 表示 N 点 DFT,且设

$$\text{DFT}[x_1(n)] = X_1(k), \quad \text{DFT}[x_2(n)] = X_2(k)$$

1. 线性

$$\text{DFT}[ax_1(n) + bx_2(n)] = aX_1(k) + bX_2(k) \quad (3-26)$$

式中, a 、 b 为任意常数。该式可根据 DFT 定义证明。若两个序列长度不等,取长度最大者,将短的序列通过补零加长,注意此时 DFT 与未补零的 DFT 不相等。

2. 圆周移位

1) 圆周移位定义

一个有限长序列 $x(n)$ 的圆周移位是指用它的长度 N 为周期,将其延拓成周期序列 $\tilde{x}(n)$,将周期序列 $\tilde{x}(n)$ 移位,然后取主值区间 $(n=0 \sim N-1)$ 上的序列值,即一个有限长序列 $x(n)$ 的圆周移位定义为

$$y(n) = x((n+m))_N \cdot R_N(n) \quad (3-27)$$

一个有限长序列 $x(n)$ 的圆周移位序列 $y(n)$ 仍然是一个长度为 N 的有限长序列,圆周移位的过程可用图 3-6 描述。

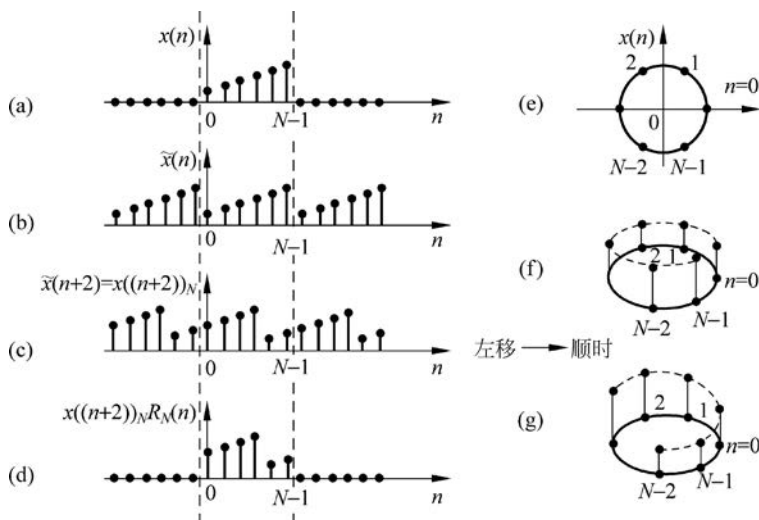
从图 3-6(c)可以看出,由于是周期序列的移位,当只观察 $0 \leq n \leq N-1$ 这一主值区间时,某一采样从该区间的一端移出时,与其相同值的采样又从该区的另一端循环移进。因而,可以想象 $x(n)$ 是排列在一个 N 等分的圆周上,序列 $x(n)$ 的圆周移位,就相当于 $x(n)$ 在此圆周上旋转,如图 3-6(e)~图 3-6(g)所示,因而称为圆周移位。若将 $x(n)$ 向左圆周移位时,此圆是顺时针旋转;将 $x(n)$ 向右圆周移位时,此圆是逆时针旋转。此外,如果围绕圆周观察几圈,那么看到的就是周期序列 $\tilde{x}(n)$ 。

2) 时域圆周移位定理

有限长序列圆周移位后的 DFT 为



3.4.3-2
微课视频

图 3-6 圆周移位过程示意图 ($N=6$)

$$Y(k) = \text{DFT}[x((n+m))_N R_N(n)] = W_N^{-mk} X(k) \quad (3-28)$$

证明 利用周期序列的移位特性

$$\text{DFS}[x((n+m))_N] = \text{DFS}[\tilde{x}(n+m)] = W_N^{-mk} \tilde{X}(k)$$

序列取主值区间, 变换也取主值区间, 可得

$$\begin{aligned} \text{DFT}[x((n+m))_N R_N(n)] &= \text{DFT}[\tilde{x}(n+m) R_N(n)] \\ &= W_N^{-mk} \tilde{X}(k) R_N(k) = W_N^{-mk} X(k) \end{aligned}$$

这表明, 有限长序列的圆周移位, 在离散频域中只引入一个和频率成正比的线性相移 W_N^{-mk} , 对频谱的幅度是没有影响的。

3) 频域圆周移位定理

对于频域有限长序列 $X(k)$, 也可看成分布在一个 N 等分的圆周上, 所以对于 $X(k)$ 的圆周移位, 利用频域与时域的对偶关系, 可以证明以下性质:

若 $Y(k) = X((k+l))_N \cdot R_N(k)$, 则

$$\text{IDFT}[X((k+l))_N R_N(k)] = W_N^{nl} x(n) = e^{-j\frac{2\pi}{N}nl} x(n) \quad (3-29)$$

3. 圆周卷积

设 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 都是长度为 N 的有限长序列 ($0 \leq n \leq N-1$), 且有 $\text{DFT}[x_1(n)] = X_1(k)$, $\text{DFT}[x_2(n)] = X_2(k)$ 。

若 $Y(k) = X_1(k) X_2(k)$, 则

$$\begin{aligned} y(n) &= \text{IDFT}[Y(k)] \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2((n-m))_N R_N(n) \end{aligned} \quad (3-30)$$

或

$$\begin{aligned} y(n) &= \text{IDFT}[Y(k)] \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x_2(m) x_1((n-m))_N R_N(n) \end{aligned}$$



3.4.3-3
微课视频

上式所表示的运算称为圆周卷积(也叫循环卷积),通常简记为 $y(n) = x_1(n) \circledast x_2(n)$ 。

证明 这个卷积式子相当于周期序列 $\tilde{x}_1(n)$ 、 $\tilde{x}_2(n)$ 作周期卷积后取主值序列。先将 $Y(k)$ 周期延拓,即

$$\tilde{Y}(k) = \tilde{X}_1(k) \tilde{X}_2(k)$$

按照 DFS 的周期卷积公式

$$\begin{aligned} \tilde{y}(n) &= \text{IDFS}[\tilde{Y}(k)] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \tilde{x}_2(n-m) \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x_1((m))_N x_2((n-m))_N \end{aligned}$$

因为 $0 \leq m \leq N-1$, 为主值区间, 故式中 $x_1((m))_N$ 等于 $x_1(m)$, 因此

$$y(n) = \tilde{y}(n) R_N(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2((n-m))_N R_N(n)$$

将 $\tilde{y}(n)$ 作简单的换元, 也可证明

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_2(m) x_1((n-m))_N R_N(n)$$

圆周卷积过程可以用图 3-7 表示, 求和变量为 m , 而 n 为参变量。先将 $x_2(m)$ 周期化, 形成 $x_2((m))_N$, 再翻转形成 $x_2((-m))_N$, 取主值序列则得到 $x_2((-m))_N R_N(m)$, 通常称为 $x_2(m)$ 的圆周翻转。对 $x_2(m)$ 的圆周翻转序列圆周右移 n , 形成 $x_2((n-m))_N R_N(m)$, 当 $n=0, 1, 2, \dots, N-1$ 时, 分别将 $x_1(m)$ 与 $x_2((n-m))_N R_N(m)$ 相乘, 并在 m 从 0 到 $N-1$ 区间内求和, 便得到圆周卷积 $y(n)$ 。

可见圆周卷积和周期卷积的过程是一样的, 只不过圆周卷积要取周期卷积结果的主值序列。特别要注意, 两个长度小于等于 N 的序列的 N 点圆周卷积长度仍为 N , 这与一般的线性卷积不同, 线性卷积的结果是一个长度为 $2N-1$ 的序列。圆周卷积是周期卷积取主值, 在一定条件下可与线性卷积相等。该问题将在 3.6 节详细讨论。

4. 共轭对称性

在第 2 章讨论了序列傅里叶变换(DTFT)的一些对称性质, 且定义了共轭对称序列与共轭反对称序列的概念。在那里, 对称性是指关于坐标原点的纵坐标的对称性。若 $x(n)$ 的长度为 N , 其共轭对称序列 $x_e(n)$ 与共轭反对称序列 $x_o(n)$ 分别为

$$x_e(n) = \frac{1}{2} [x(n) + x^*(-n)]$$

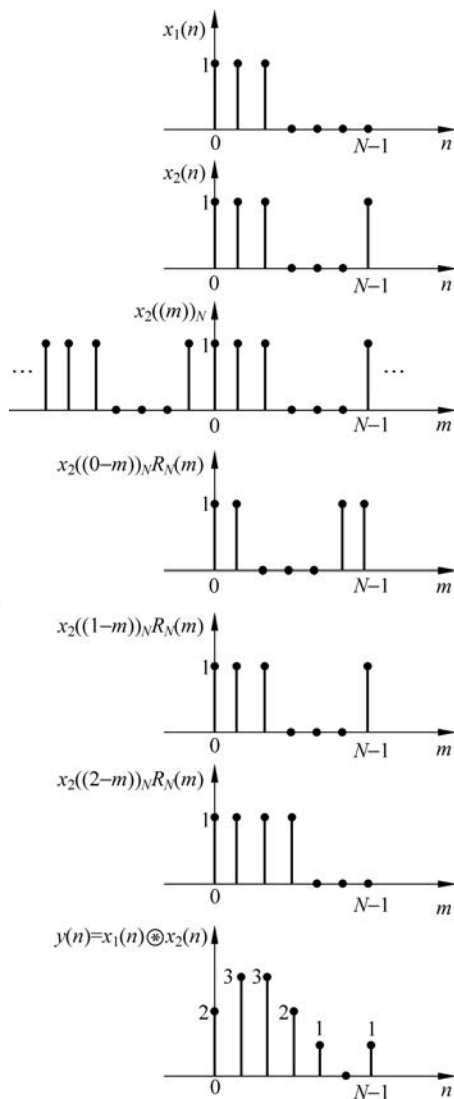


图 3-7 圆周卷积过程示意图($N=7$)



3.4.3-4
微课视频

$$x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(-n)]$$

可以看出, $x_e(n)$ 和 $x_o(n)$ 的长度均为 $2N-1$, 超出了 $x(n)$ 的主值区间 N 。因为在 DFT 中, 涉及的序列 $x(n)$ 及其离散傅里叶变换 $X(k)$ 均为有限长序列, 且定义区间从 $0 \sim N-1$, 所以, 这里的对称性是指关于 $N/2$ 点的对称性。为此引入新的长度为 N 且关于 $N/2$ 点的对称, 这称为圆周对称。

设有限长序列 $x(n)$ 的长度为 N 点, 则它的圆周共轭对称分量 $x_{ep}(n)$ 和圆周共轭反对称分量 $x_{op}(n)$ 分别定义为

$$x_{ep}(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(N-n)] \quad (3-31)$$

$$x_{op}(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(N-n)] \quad (3-32)$$

则两者满足

$$x_{ep}(n) = x_{ep}^*(N-n) \quad (3-33a)$$

$$x_{op}(n) = -x_{op}^*(N-n) \quad (3-33b)$$

如同任何实函数都可以分解成偶对称分量和奇对称分量一样, 任何有限长序列 $x(n)$ 都可以表示成其圆周共轭对称分量 $x_{ep}(n)$ 和圆周共轭反对称分量 $x_{op}(n)$ 之和, 即

$$x(n) = x_{ep}(n) + x_{op}(n), \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (3-34)$$

在讨论 DFT 的共轭对称性之前, 先看一下 $x(n)$ 的共轭复序列 $x^*(n)$ 的 DFT。因为

$$\begin{aligned} \text{DFT}[x^*(n)] &= \sum_{n=0}^{N-1} x^*(n) W_N^{nk} R_N(k) = \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{-nk} \right]^* R_N(k) \\ &= X^*((-k))_N R_N(k) = \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{(N-k)n} \right]^* R_N(k) \\ &= X^*((N-k))_N R_N(k) = X^*(N-k) \end{aligned}$$

所以

$$\text{DFT}[x^*(n)] = X^*(N-k), \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (3-35)$$

且

$$X(N) = X(0)$$

即认为 $X(k)$ 是等间隔地分布在单位圆上, 它们的终点就是起点。式(3-35)说明共轭序列的离散傅里叶变换等于原序列的离散傅里叶变换的反序列的共轭。

同理, 可证明共轭翻褶序列的 DFT 为

$$\text{DFT}[x^*(N-n)] = X^*(k) \quad (3-36)$$

下面利用式(3-35)和式(3-36)讨论 DFT 的共轭对称性。

(1) 将有限长序列 $x(n)$ 表示成圆周共轭对称分量 $x_{ep}(n)$ 和圆周共轭反对称分量 $x_{op}(n)$ 之和, 见式(3-34), 即

$$x(n) = x_{ep}(n) + x_{op}(n), \quad 0 \leq n \leq N-1$$

其中, $x_{ep}(n)$ 和 $x_{op}(n)$ 分别由式(3-31)和式(3-32)表示。

因为

$$\begin{aligned}\text{DFT}[x_{\text{ep}}(n)] &= \text{DFT}\left\{\frac{1}{2}[x(n) + x^*(N-n)]\right\} \\ &= \frac{1}{2}\text{DFT}[x(n)] + \frac{1}{2}\text{DFT}[x^*(N-n)]\end{aligned}$$

利用式(3-36),可得

$$\text{DFT}[x_{\text{ep}}(n)] = \frac{1}{2}[X(k) + X^*(k)] = \text{Re}[X(k)] = X_{\text{R}}(k) \quad (3-37)$$

同理,可得

$$\text{DFT}[x_{\text{op}}(n)] = \frac{1}{2}[X(k) - X^*(k)] = \text{jIm}[X(k)] = \text{j}X_{\text{I}}(k) \quad (3-38)$$

由式(3-34)并利用 DFT 的线性性质可得

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)] = \text{DFT}[x_{\text{ep}}(n)] + \text{DFT}[x_{\text{op}}(n)] = X_{\text{R}}(k) + \text{j}X_{\text{I}}(k) \quad (3-39)$$

式(3-37)和式(3-38)分别说明序列的圆周共轭对称分量的 DFT 等于原序列的 DFT 的实部分量,序列的圆周共轭反对称分量的 DFT 等于原序列的 DFT 的虚部分量乘以 j。

(2) 将有限长序列 $x(n)$ 表示成实部 $x_{\text{r}}(n)$ 和虚部 $x_{\text{i}}(n)$ 乘 j 之和,即

$$x(n) = x_{\text{r}}(n) + \text{j}x_{\text{i}}(n) \quad (3-40)$$

式中,

$$\begin{aligned}x_{\text{r}}(n) &= \frac{1}{2}[x(n) + x^*(n)] \\ \text{j}x_{\text{i}}(n) &= \frac{1}{2}[x(n) - x^*(n)]\end{aligned}$$

分别对 $x_{\text{r}}(n)$ 和 $\text{j}x_{\text{i}}(n)$ 求 DFT,并利用式(3-35),可得

$$\text{DFT}[x_{\text{r}}(n)] = \frac{1}{2}[X(k) + X^*(N-k)] = X_{\text{ep}}(k) \quad (3-41)$$

$$\text{DFT}[\text{j}x_{\text{i}}(n)] = \frac{1}{2}[X(k) - X^*(N-k)] = X_{\text{op}}(k) \quad (3-42)$$

由式(3-40)并利用 DFT 的线性性质可得

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)] = X_{\text{ep}}(k) + X_{\text{op}}(k) \quad (3-43)$$

可以证明

$$X_{\text{ep}}(k) = X_{\text{ep}}^*(N-k) \quad (3-44)$$

$X_{\text{ep}}(k)$ 称为 $X(k)$ 的圆周共轭对称分量或共轭偶部,即将 $X_{\text{ep}}(k)$ 认为是分布在 N 等分圆周上,则以 $k=0$ 为原点,其左半圆上与右半圆上的序列是共轭对称的。

同理,可以证明

$$X_{\text{op}}(k) = -X_{\text{op}}^*(N-k) \quad (3-45)$$

$X_{\text{op}}(k)$ 称为 $X(k)$ 的圆周共轭反对称分量或共轭奇部,即将 $X_{\text{op}}(k)$ 认为是分布在 N 等分圆周上,则以 $k=0$ 为原点,其左半圆上与右半圆上的序列是共轭反对称的。

式(3-41)和式(3-42)分别说明复序列实部的 DFT 等于序列 DFT 的圆周共轭对称分量,复序列虚部乘以 j 的 DFT 等于序列 DFT 的圆周共轭反对称分量。

式(3-37)和式(3-38)以及式(3-41)和式(3-42)的概念和对应关系,可用图 3-8 说明。比

较第2章图2-3,可见序列与其DTFT的对应关系和序列与其DFT的对应关系是一样的。因为实质上 $X(k)$ 可以看作序列 $x(n)$ 的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的 N 点等间隔采样,所以不难理解它们有类似的对称特性,但要注意DFT是关于 $N/2$ 点的对称,它是一种圆周对称。

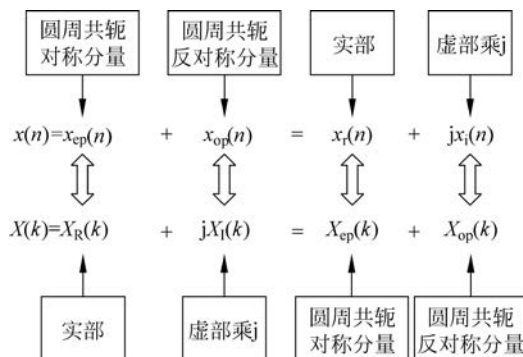


图 3-8 序列的两种表示与其 DFT 的对应关系示意图

此外,根据上述共轭对称特性可以证明有限长实序列和纯虚序列 DFT 的共轭对称特性。若 $x(n)$ 是实序列,这时 $x(n)=x^*(n)$,两边进行离散傅里叶变换并利用式(3-35),有

$$X(k) = X^*(N - k) \quad (3-46)$$

由上式可看出,实序列的 $X(k)$ 只有圆周共轭对称分量。

若 $x(n)$ 是纯虚序列,则显然只有圆周共轭反对称分量,即满足

$$X(k) = -X^*(N - k) \quad (3-47)$$

结论:以上这两种情况,只要知道一半数目的 $X(k)$ 就可以了,另一半可利用对称性求得。

关于 DFT 共轭对称特性的应用,在 4.6 节可以充分体现出来。

3.4.4 MATLAB 实现

在 MATLAB 中,可用特殊函数 dft 计算离散傅里叶变换。函数代码如下:

```
function [Xk] = dft(xn,N)
% xn = N点有限长度序列, N = DFT 的长度
n = [0:1:N-1]; k = [0:1:N-1]; WN = exp(-j*2*pi/N);
nk = n'*k; % 产生一个含 nk 值的 N 乘 N 维矩阵
WNnk = WN.^ nk; % DFT 矩阵
Xk = xn * WNnk; % DFT 系数的行向量
```

例 3-4 $x(n)$ 是一 4 点序列:

$$x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 3 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(1) 计算离散时间傅里叶变换(DTFT),即 $X(e^{j\omega})$,并且画出它的幅度和相位。

(2) 计算 $x(n)$ 的 4 点 DFT。

解 MATLAB 实现程序如下。

(1) 4 点序列的 DTFT:

```
x = [1,1,1,1]; w = [0:1:500]*2*pi/500;
```

```
[H] = freqz(x,1,w);
magH = abs(H); phaH = angle(H);
subplot(2,1,1); plot(w/pi,magH); grid
xlabel(''); ylabel('|X|'); title('DTFT 的幅度')
subplot(2,1,2); plot(w/pi,phaH/pi * 180); grid
xlabel('以 pi 为单位的频率'); ylabel('度'); title('DTFT 的相角')
```

(2) 4 点序列的 DFT:

```
N = 4; k = 0: N-1;
X = dft(x,N);
magX = abs(X), phaX = angle(X) * 180/pi
subplot(2,1,1); plot(w * N/(2 * pi),magH, '- - ');
axis([-0.1,4.1,0,5]); hold on
stem(k,magX);
ylabel('|X(k)|'); title('DFT 的幅度: N = 4'); text(4.3, -1, 'k')
hold off
subplot(2,1,2); plot(w * N/(2 * pi),phaH * 180/pi, '- - ');
axis([-0.1,4.1, -200,200]); hold on
stem(k,phaX);
ylabel('度'); title('DFT 相角: N = 4'); text(4.3, -200, 'k')
```

运行结果如图 3-9 所示。

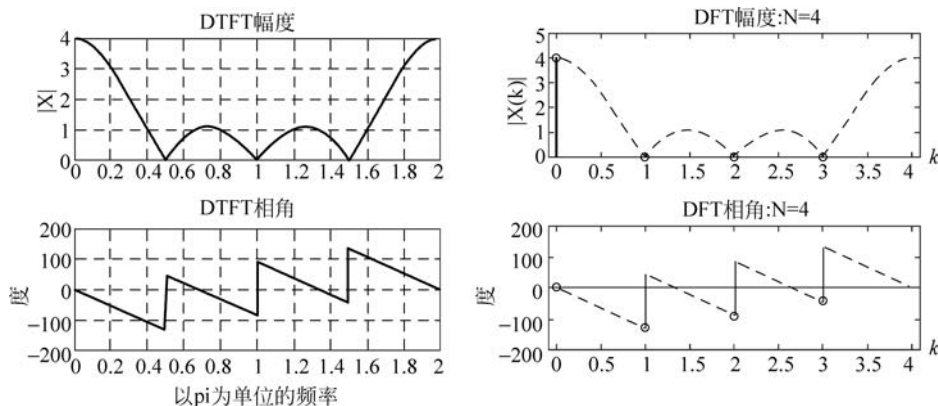


图 3-9 例 3-4 中的 4 点 DTFT 和 DFT 图

设 $X_4(k)$ 为 4 点 DFT, 从图中可以看出, $X_4(k)$ 正确给出了 $X(e^{j\omega})$ 的 4 个样本, 但它只有一个非零样本。为什么? 考察一个全 1 的 4 点 $x(n)$, 它的周期性延伸为

$$\tilde{x}(n) = 1, \quad \forall n$$

它是一恒定(或 DC)信号。这正是由 DFT, 即 $X_4(k)$ 推知的, 它在 $k=0$ (或 $\omega=0$) 上有一非零样本, 而在其他频率上为零。

例 3-5 在例 3-4 的基础上, 如何得到 $X(e^{j\omega})$ 的其他样本?

解 显然, 可以取采样频率更小一些, 也就是说, 应增加 N 。现将点数增加一倍, 即 $N=8$ 。可以在 $x(n)$ 后附上 4 个零得到一个 8 点序列。

$$x(n) = \{1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0\}$$

这是一个很重要的运算, 叫作补零运算。在实际应用中, 为了得到一个较密的频谱, 这种运算是非常必要的。设 $X_8(k)$ 为 8 点 DFT, 则

$$X_8(k) = \sum_{n=0}^7 x(n) W_8^{nk}, \quad k=0,1,\dots,7; \quad W_8 = e^{-j\pi/4}$$

此时,8点序列的DFT的频率分辨率为 $\omega = 2\pi/N = 2\pi/8 = \pi/4$ 。

MATLAB 主要程序如下:

```
N = 8; w1 = 2 * pi/N; k = 0:N-1;
x = [x, zeros(1,4)];
X = dft(x,N);
magX = abs(X), phaX = angle(X) * 180/pi
% 绘图语句略
```

更进一步,给 $x(n)$ 补 12 个零,成为 16 点序列,即

$$x(n) = \{1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$$

则其频率分辨率为 $\omega = 2\pi/N = 2\pi/16 = \pi/8$, $W_{16} = e^{-j\pi/8}$ 。因此得到频谱样本间隔为 $\pi/8$ 的更密的频谱,称为高密度谱,如图 3-10 所示。

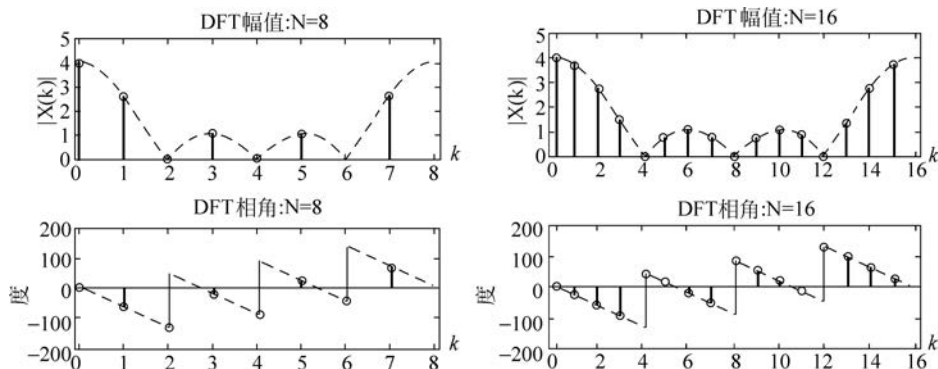


图 3-10 例 3-5 中的 DFT 图 ($N=8$ 、 $N=16$)

MATLAB 程序: 略。

通过以上两个例题可以得到以下几个重要结论:

(1) 补零是给原始序列填零的运算。这导致较长的 DFT, 它会给原始序列的离散傅里叶变换提供间隔较近的样本。在 MATLAB 中, 用 zeros 函数实现补零运算。

(2) 补零运算提供了一个较密的频谱和较好的图示形式。但因为在信号中只是附加了零, 而没有增加任何新的信息, 因此它不能提供高分辨率的频谱。

(3) 为得到高分辨率的频谱, 需从实验或观察中取得更多的数据。

关于对高密度频谱与高分辨率频谱的研究, 详见 3.7.3 节和第 9 章的数字信号处理实验。

例 3-6 设

$$x_1(n) = \{1, 2, 2, 1\}, \quad x_2(n) = \{1, -1, 1, -1\}$$

(1) 确定它们的线性卷积 $x_3(n)$;

(2) 计算圆周卷积 $x_4(n)$ 。

解 (1) MATLAB 实现程序如下:

```
x1 = [1, 2, 2, 1]; x2 = [1, -1, 1, -1];
x3 = conv(x1, x2)
```

运行结果:

```
x3 =
      1      1      1      0     -1     -1     -1
```

于是线性卷积 $x_3(n)$ 为 7 点序列: $x_3(n) = \{1, 1, 1, 0, -1, -1, -1\}$ 。

(2) 圆周卷积的长度为 $N = N_1 + N_2 - 1 = 4 + 4 - 1 = 7$

```
x4 = circonvt(x1,x2,7)
```

运行结果:

```
x4 =
      1      1      1      0     -1     -1     -1
```

可见此时 $x_3(n) = x_4(n) = \{1, 1, 1, 0, -1, -1, -1\}$, 即在一定条件下, 圆周卷积与线性卷积可以相等。

注意: 函数 `circonvt(x1,x2,N)` 是在 x_1 和 x_2 之间求 N 点圆周卷积, 当 x_1 和 x_2 的长度小于 N 时, 会自动补零。

3.5 频域采样理论——抽样 Z 变换

在上节中, 可看到离散傅里叶变换相当于序列傅里叶变换的等间隔采样, 也就是说实现了频域的采样, 便于计算机计算。那么是否任一序列都能用频域采样的方法去逼近呢?

3.5.1 频域采样

考虑一个任意的绝对可和的序列 $x(n)$, 它的 Z 变换为

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

如果对 $X(z)$ 在单位圆上进行等间隔采样, 得到

$$X(k) = X(z) \Big|_{z=W_N^{-k}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)W_N^{nk} \quad (3-48)$$

现在的问题是, 这样采样以后, 信息有没有损失? 或者说, 频域采样后从 $X(k)$ 的反变换中所获得的有限长序列, 即 $x_N(n) = \text{IDFT}[X(k)]$, 能不能代表原序列 $x(n)$? 为此, 先来分析 $X(k)$ 的周期延拓序列 $\tilde{X}(k)$ 的离散傅里叶级数的反变换。为了弄清这个问题, 首先从周期序列 $\tilde{x}_N(n)$ 开始:

$$\tilde{x}_N(n) = \text{IDFS}[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k)W_N^{-nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk}$$

将式(3-48)代入上式, 可得

$$\tilde{x}_N(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)W_N^{mk} \right] W_N^{-nk} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \left[\sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N} W_N^{(m-n)k} \right]$$

由于

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{(m-n)k} = \begin{cases} 1, & m = n + rN, r \text{ 为任意整数} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$



3.5.1
微课视频

所以

$$\tilde{x}_N(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n+rN) \quad (3-49)$$

即 $\tilde{x}_N(n)$ 是原非周期序列 $x(n)$ 的周期延拓序列, 其时域周期为频域采样点数 N 。在第 1 章中, 时域的采样造成频域的周期延拓, 这里又对称地看到, 频域采样同样造成时域的周期延拓。实际中, 根据序列 $x(n)$ 长度的不同, 可分为下列几种情况讨论:

(1) 如果 $x(n)$ 是有限长序列, 点数为 M , 则当频域采样不够密, 即当 $N < M$ 时, $x(n)$ 以 N 为周期进行延拓, 就会造成混叠。这时, 从 $\tilde{x}_N(n)$ 就不能不失真地恢复出原信号 $x(n)$ 。因此, 对于 M 点的有限长序列 $x(n)$, 频域采样不失真的条件是频域采样点数 N 要大于或等于时域序列长度 M (时域采样点数), 即满足

$$N \geq M \quad (3-50)$$

此时可得到

$$x_N(n) = \tilde{x}_N(n) R_N(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n+rN) R_N(n) = x(n), \quad N \geq M \quad (3-51)$$

也就是说, 点数为 N (或小于 N) 的有限长序列, 可以利用它的 Z 变换在单位圆上的 N 个等间隔点上的采样值精确地表示。

(2) 如果 $x(n)$ 不是有限长序列 (无限长序列), 则时域周期延拓后, 必然造成混叠现象, 因而一定会产生误差; 当 n 增加时信号衰减得越快, 或频域采样越密 (采样点数 N 越大), 则误差越小, 即 $\tilde{x}_N(n)$ 越接近 $x(n)$ 。

概括起来, 对于 M 点的有限长序列 $x(n)$, 如果频域采样点数 $N \geq M$, 则可由频域采样值 $X(k)$ 恢复出原序列 $x(n)$, 否则产生时域混叠现象, 这就是所谓的频域采样定理。

例 3-7 一个长度 $M=5$ 的矩形序列, 其波形和频谱图如图 3-11 所示, 若在频域上进行采样处理, 使其频域也离散化, 试比较采样点数分别取 5 和 4 时的结果。

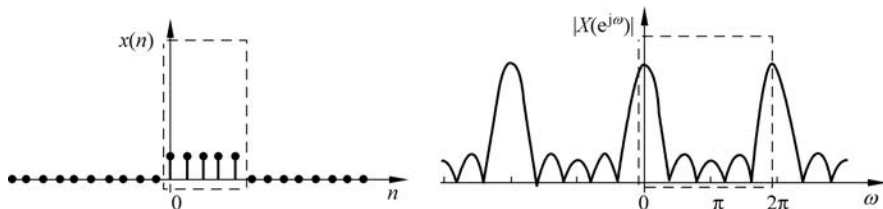


图 3-11 例 3-7 图

解 (1) 取 $N=5$ 点, 频域采样, 时域延拓相加, 时域延拓的周期个数等于频域的采样点数 $N=5$, 由于 $N=M$, 所以时域延拓后, 与原序列相比, 无混叠现象, 如图 3-12(a) 所示。

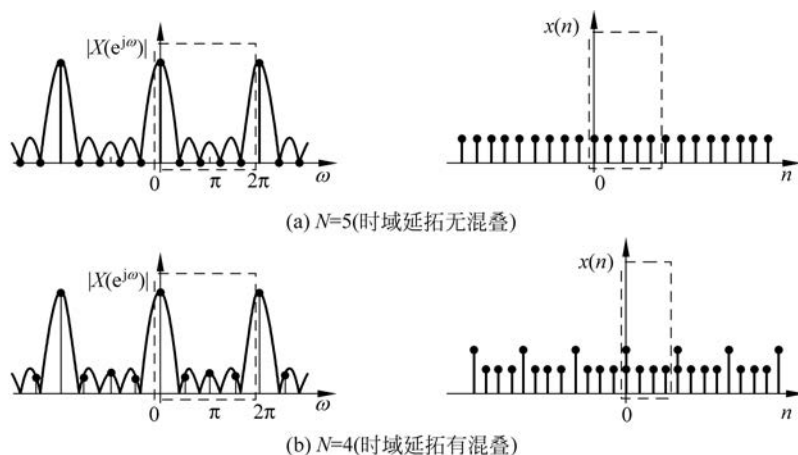
(2) 取 $N=4$ 时进行采样, 由于 $N=4$, 而序列长度 $M=5$, $N < M$, 时域延拓后, 与原序列相比, 产生混叠现象, 如图 3-12(b) 所示。



3.5.2
微课视频

3.5.2 频域恢复——频域内插公式

对于长度为 N 的有限长序列 $x(n)$, 既然其 N 个频域采样 $X(k)$ 就足以不失真地代表序列的特性, 那么由此 N 个采样值 $X(k)$ 就应该能够完整地表达整个 $X(z)$ 函数及其频率响应 $X(e^{j\omega})$, 即由 N 点 $X(k)$ 可内插恢复出 $X(z)$ 或 $X(e^{j\omega})$ 。讨论如下:

图 3-12 频域采样点数 N 取不同值时的结果

有限长序列 $x(n)$ ($0 \leq n \leq N-1$) 的 Z 变换为

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n}$$

由于

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}$$

将上式代入 $X(z)$, 得

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk} \right] z^{-n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \left[\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{-nk} z^{-n} \right] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot \frac{1 - W_N^{-Nk} z^{-N}}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} \end{aligned} \quad (3-52)$$

这就是用 N 个频域采样恢复 $X(z)$ 的内插公式。它可以表示为

$$X(z) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \Phi_k(z) \quad (3-53)$$

其中,

$$\Phi_k(z) = \frac{1}{N} \frac{1 - z^{-N}}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} \quad (3-54)$$

称为内插函数。

下面讨论 $\Phi_k(z)$ 的零极点特性。

令 $1 - W_N^{-k} z^{-1} = 0$, 得 $z = W_N^{-k} = e^{j(2\pi/N)k}$, $\Phi_k(z)$ 有一个极点。

令 $1 - z^{-N} = 0$, 得 $z = e^{j(2\pi/N)r}$, $r = 0, 1, \dots, N-1$, $\Phi_k(z)$ 有 N 个零点。

$\Phi_k(z)$ 的 N 个零点都在单位圆上, 但极点和第 k 个零点相抵消, 因而内插函数 $\Phi_k(z)$ 只在本采样点 $e^{j(2\pi/N)k}$ 处不为零, 在其他 $(N-1)$ 个采样点 i ($i \neq k$) 上都是零值。另外, $\Phi_k(z)$ 在 $z=0$ 处有 $(N-1)$ 阶极点。内插函数的零极点分布如图 3-13 所示。

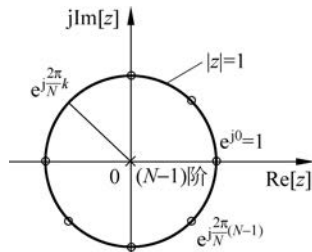


图 3-13 内插函数的零极点

现在讨论频率响应,即求单位圆上 $z=e^{j\omega}$ 的 Z 变换。由式(3-53)可得

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \Phi_k(e^{j\omega}) \quad (3-55)$$

式中, $\Phi_k(e^{j\omega})$ 可以推导为另一形式,即

$$\begin{aligned} \Phi_k(e^{j\omega}) &= \frac{1}{N} \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j(\omega - \frac{2\pi}{N}k)}} = \frac{1}{N} \frac{e^{-j\omega N/2} (e^{j\omega N/2} - e^{-j\omega N/2})}{e^{-j(\omega - \frac{2\pi}{N}k)/2} [e^{j(\omega - \frac{2\pi}{N}k)/2} - e^{-j(\omega - \frac{2\pi}{N}k)/2}]} \\ &= \frac{1}{N} \frac{\sin(\omega N/2) \cdot e^{-j\omega N/2}}{\sin\left[\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)/2\right] \cdot e^{-j(\omega - \frac{2\pi}{N}k)/2}} = \frac{1}{N} \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin\left[\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)/2\right]} \cdot e^{-j\left[\frac{(N-1)}{2}\omega + \frac{\pi}{N}k\right]} \\ &= \frac{1}{N} \frac{\sin\left(\frac{\omega' N}{2} + k\pi\right)}{\sin \frac{\omega'}{2}} \cdot e^{-j\left[\frac{(N-1)}{2}\omega' + k\pi\right]} = \frac{1}{N} \frac{\sin\left(\frac{\omega' N}{2}\right)}{\sin \frac{\omega'}{2}} \cdot e^{-j\frac{(N-1)}{2}\omega'} \end{aligned}$$

其中, $\omega - \frac{2\pi}{N}k = \omega'$, 并且利用了

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\omega' N}{2} + k\pi\right) &= \begin{cases} \sin\left(\frac{\omega' N}{2}\right), & k = \text{偶数} \\ -\sin\left(\frac{\omega' N}{2}\right), & k = \text{奇数} \end{cases} \\ e^{-jk\pi} &= \begin{cases} 1, & k = \text{偶数} \\ -1, & k = \text{奇数} \end{cases} \end{aligned}$$

令

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{N} \frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega} \quad (3-56)$$

则得

$$\Phi_k(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \frac{\sin\left(\frac{\omega' N}{2}\right)}{\sin \frac{\omega'}{2}} \cdot e^{-j\frac{(N-1)}{2}\omega'} = \Phi\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right) \quad (3-57)$$

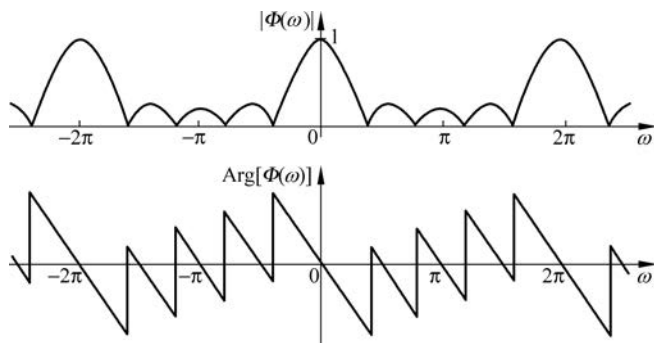
所以频率响应可以表示为下面更方便的形式:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \Phi\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right) \quad (3-58)$$

这就是用 N 个频域采样恢复频率响应的内插公式,其中 $\Phi\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)$ 或 $\Phi(\omega)$ 称为内插函数。

频域内插函数 $\Phi(\omega)$ 的幅度特性和相位特性如图 3-14 所示。可以看出,当 $\omega=0$ 时, $\Phi(\omega)=1$, 当 $\omega=\frac{2\pi}{N}i$ ($i=1,2,\dots,N-1$) 时, $\Phi(\omega)=0$ 。因而有

$$\Phi\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right) = \begin{cases} 1, & \omega = \frac{2\pi}{N}k \\ 0, & \omega = \frac{2\pi}{N}i, i \neq k \end{cases} \quad (3-59)$$

图 3-14 内插函数幅度特性与相位特性($N=5$)

也就是说, 函数 $\Phi\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)$ 在本采样点 $\left(\omega = \frac{2\pi}{N}k\right)$ 上值为 1, 而在其他采样点 $\left(\omega = \frac{2\pi}{N}i, i \neq k\right)$ 上值为 0。整个 $X(e^{j\omega})$ 就是由 N 个 $\Phi\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)$ 函数被 N 个 $X(k)$ 加权求和构成。很明显, 在每个采样点上 $X(e^{j\omega})$ 的值精确等于 $X(k)$, 即

$$X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{N}k} = X(k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

而各采样点之间的 $X(e^{j\omega})$ 值, 则由各采样点的加权内插函数 $X(k)\Phi\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)$ 在所求 ω 点上的值的叠加而得, 如图 3-15 所示。

内插函数的另一重要特点是具有分段线性相位特性。

在以后章节中将会看到, 频率采样理论为 FIR 滤波器系统函数的逼近以及 FIR 滤波器的结构设计提供了一个有力的工具。

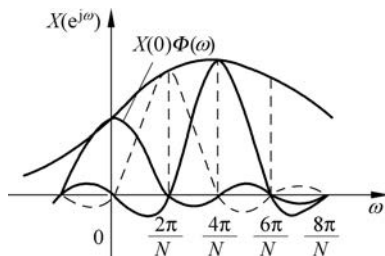


图 3-15 由内插函数求频率响应的示意图

3.6 用 DFT 计算线性卷积和线性相关

3.6.1 线性卷积的 DFT 算法

对于有限长序列, 存在两种形式的卷积: 线性卷积与圆周卷积。由于圆周卷积可以采用 DFT 的快速算法——快速傅里叶变换 (FFT) 进行运算, 运算速度上有很大的优越性。然而实际问题一般都是线性卷积运算。例如信号通过线性时不变系统, 系统的输出 $y(n)$ 是输入 $x(n)$ 与单位脉冲响应 $h(n)$ 的线性卷积, 即 $y(n) = x(n) * h(n)$ 。若 $x(n)$ 、 $h(n)$ 均为有限长序列, 那么能否用圆周卷积来代替线性卷积呢?

1. 用圆周卷积计算线性卷积的条件

设 $x_1(n)$ 是长度为 N_1 的有限长序列 ($0 \leq n \leq N_1 - 1$), $x_2(n)$ 是长度为 N_2 的有限长序列 ($0 \leq n \leq N_2 - 1$)。

1) 线性卷积

$$y_l(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)x_2(n-m) = \sum_{m=0}^{N_1-1} x_1(m)x_2(n-m) \quad (3-60)$$

3.6.1
微课视频

$x_1(m)$ 的非零区间为 $0 \leq m \leq N_1 - 1$, $x_2(n-m)$ 的非零区间为 $0 \leq n-m \leq N_2 - 1$, 将两个不等式相加, 有

$$0 \leq n \leq N_1 + N_2 - 2$$

在这个区间以外, 不是 $x_1(m)$ 等于 0, 就是 $x_2(n-m)$ 等于 0, 因而 $y_l(n) = 0$, 所以 $y_l(n)$ 是一个长度为 $N_1 + N_2 - 1$ 的有限长序列。例如, 图 3-16 中, $x_1(n)$ 为 $N_1 = 4$ 的矩形序列 (见图 3-16(a)), $x_2(n)$ 为 $N_2 = 5$ 的矩形序列 (见图 3-16(b)), 则它们的线性卷积 $y_l(n)$ 为 $N = N_1 + N_2 - 1 = 8$ 点的有限长序列 (见图 3-16(c))。

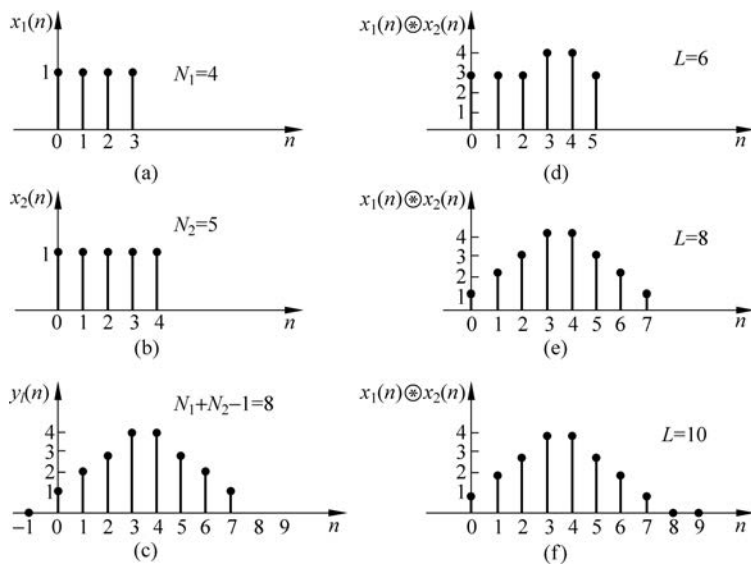


图 3-16 有限长序列的线性卷积与圆周卷积

2) 圆周卷积

圆周卷积运算要求两个有限长序列是等长度的。先一般性地假设是长度为 L 点的圆周卷积, 再讨论 L 取何值时, 圆周卷积和线性卷积相等。

设 $y_c(n) = x_1(n) \otimes x_2(n)$ 是两个序列的 L 点圆周卷积。首先, 序列 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 末尾补零, 构成 L 点序列, 即

$$x_1(n) = \begin{cases} x_1(n), & 0 \leq n \leq N_1 - 1 \\ 0, & N_1 \leq n \leq L - 1 \end{cases}$$

$$x_2(n) = \begin{cases} x_2(n), & 0 \leq n \leq N_2 - 1 \\ 0, & N_2 \leq n \leq L - 1 \end{cases}$$

即 $x_1(n)$ 补 $L - N_1$ 个零点值, $x_2(n)$ 补 $L - N_2$ 个零点值, 则

$$y_c(n) = \left[\sum_{m=0}^{L-1} x_1(m) x_2((n-m))_L \right] R_L(n) \quad (3-61)$$

将 $x_2(n)$ 变成周期延拓序列, 即

$$\tilde{x}_2(n) = x_2((n))_L = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_2(n + rL)$$

代入 $y_c(n)$ 表达式,并考虑到式(3-60)的线性卷积,有

$$\begin{aligned}
 y_c(n) &= \left[\sum_{m=0}^{L-1} x_1(m) \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_2(n+rL-m) \right] R_L(n) \\
 &= \left[\sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{L-1} x_1(m) x_2(n+rL-m) \right] R_L(n) \\
 &= \left[\sum_{r=-\infty}^{\infty} y_l(n+rL) \right] R_L(n)
 \end{aligned} \quad (3-62)$$

所以 L 点圆周卷积 $y_c(n)$ 是线性卷积 $y_l(n)$ 以 L 为周期的周期延拓序列的主值序列。因为 $y_l(n)$ 有 N_1+N_2-1 个非零值,所以只有当 $L \geq N_1+N_2-1$ 时,各延拓周期才不会混叠,即要使圆周卷积等于线性卷积而不产生混叠失真的充要条件是

$$L \geq N_1 + N_2 - 1 \quad (3-63)$$

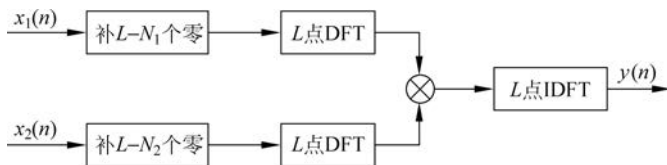
满足此条件后就有

$$y_c(n) = x_1(n) \circledast x_2(n) = x_1(n) * x_2(n) = y_l(n)$$

图 3-16(d)、图 3-16(e)、图 3-16(f)反映了式(3-62)的圆周卷积与线性卷积的关系。在图 3-16(d)中, $L=6$ 小于 $N_1+N_2-1=8$,这时产生混叠现象,其圆周卷积不等于线性卷积;而在图 3-16(e)、图 3-16(f)中, $L=8$ 和 $L=10$,这时圆周卷积结果与线性卷积相同,所得 $y_c(n)$ 的前 8 点序列值正好代表线性卷积结果,所以只要 $L \geq N_1+N_2-1$,圆周卷积结果就能完全代表线性卷积。

2. 用圆周卷积计算线性卷积的方法

用圆周卷积计算线性卷积的实现框图如图 3-17 所示。



图中, $L \geq N_1+N_2-1$, 并且 DFT 与 IDFT 子程序可以共用, 而且通常用 DFT 的快速算法(FFT)实现, 故圆周卷积也称为快速卷积。

若 $x_1(n)=h(n)$ 是系统的单位脉冲响应, $x_2(n)=x(n)$ 是系统的输入序列, 则输入序列通过线性时不变系统的响应(线性卷积结果)可以通过如图 3-17 所示的方法得到, 即

$$y(n) = x(n) * h(n) = x(n) \circledast h(n), \quad L \geq N_1 + N_2 - 1$$

在实际上,会遇到 $x(n)$ 的长度远大于 $h(n)$ 的长度的情况。若用上述快速卷积法计算线性卷积,则要求对短序列补充很多零值,长序列必须全部输入完才能进行快速计算,因此要求存储容量大,且这种方法运算时间长,运算效率降低,很难进行实时处理。为解决这一问题,可以对长序列分段计算,具体方法有重叠相加法和重叠保留法。下面简单介绍这两种方法。

1) 重叠相加法

设系统单位脉冲响应 $h(n)$ 是 N_1 点的有限长序列,而输入序列 $x(n)$ 的长度较长且不确定,如图 3-18 所示。

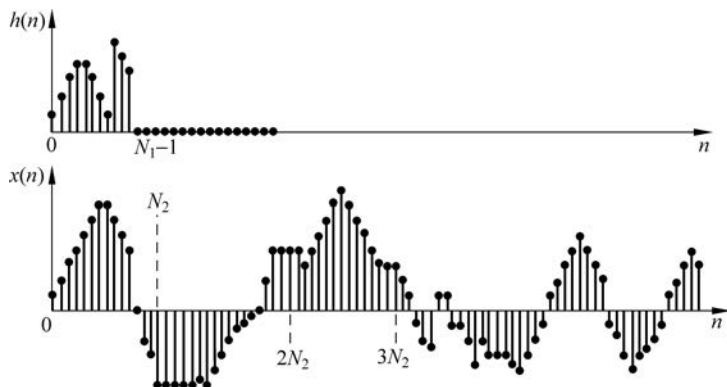


图 3-18 长序列分段滤波

假定 $x_i(n)$ 表示图 3-18 中第 i 段 $x(n)$ 序列, 即

$$x_i(n) = \begin{cases} x(n), & iN_2 \leq n \leq (i+1)N_2 - 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (3-64)$$

显然, 输入序列 $x(n)$ 可表示为

$$x(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i(n) \quad (3-65)$$

这样, $x(n)$ 和 $h(n)$ 的卷积就可以表示为

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i(n) * h(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} y_i(n) \quad (3-66)$$

式中,

$$y_i(n) = x_i(n) * h(n)$$

在式(3-65)中, 和式的每一项 $x_i(n)$ 只有 N_2 个非零样本, 而 $h(n)$ 的长度为 N_1 , 显而易见, 线性卷积 $x_i(n) * h(n)$ 的长度为 $(N_1 + N_2 - 1)$ 。也就是说, 具有 $(N_1 + N_2 - 1)$ 个非零样本, 即 $y_i(n)$ 有 $(N_1 + N_2 - 1)$ 个非零样本, 因此相邻两段 $y_i(n)$ 序列必然有 $(N_1 - 1)$ 点的部分要发生重叠, 如图 3-19 所示。根据式(3-66), 这个重叠部分应该相加起来才能构成最后的输出序列 $y(n)$ 。这种由分段卷积的各段相加构成的卷积输出的方法就称为重叠相加法。

注意, 为了采用基 2-FFT 算法, $x(n)$ 的分段长度 N_2 应按 $N_1 + N_2 - 1 = N = 2^M$ 来选定。

2) 重叠保留法

重叠保留法是将上面的分段序列中补零的部分不补零, 而是保留原来的输入序列, 于是重叠了输入信号段, 就可以省掉输出段的重叠相加。输入段的长度为 $N = N_1 + N_2 - 1$, 如图 3-20 所示, 其中的 $(N_1 - 1)$ 点与相邻段发生重叠。由于输入段 $x_i(n)$ 和 $h(n)$ 进行圆周卷积, 要去掉 $y_i(n)$ 中的混淆部分, 保留线性卷积部分, 这个混淆只发生在 $y_i(n)$ 的起始段。因此, 每一输出段 $y_i(n)$ 的前 $(N_1 - 1)$ 点就是要去掉的部分, 把各相邻段留下来的点衔接起来, 就构成了最终的输出。

重叠保留法与重叠相加法的工作量差不多, 但可以省去重叠相加法的最后一道相加运算。

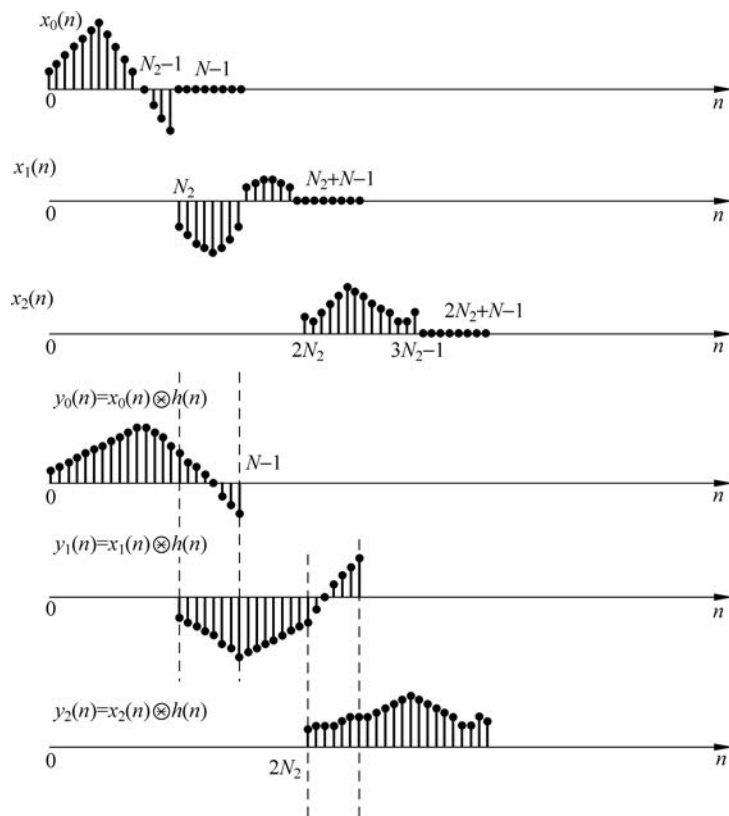


图 3-19 重叠相加法

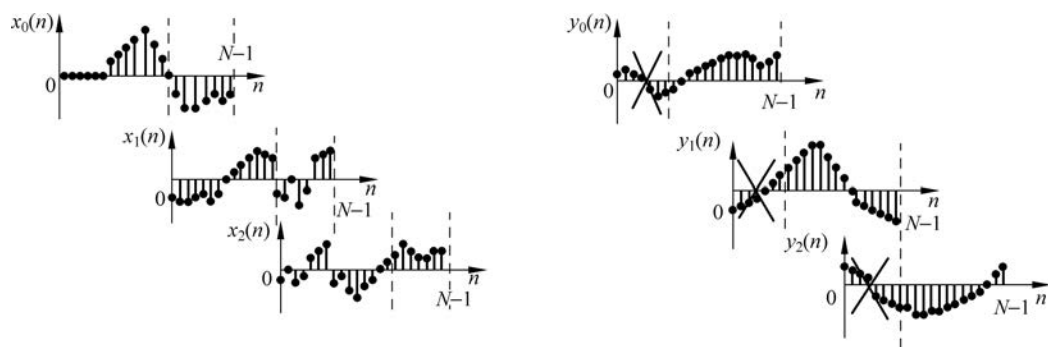


图 3-20 重叠保留法

3.6.2 线性相关的 DFT 算法

互相关和自相关的运算广泛应用于信号分析与统计分析。相关和卷积的物理概念完全不同,卷积反映了线性时不变系统输入和输出的关系,而相关只是反映两个信号的相似程度,和系统本身的特性无关。但在数学计算上相关和卷积确实有类似的地方。

设两个序列 $x(n)$ 和 $y(n)$ 已知,且均为实序列,则线性相关函数的定义为

$$r_{xy}(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n+m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-m)y(n) \quad (3-67)$$

式(3-67)表明,互相关函数 $r_{xy}(m)$ 在时刻 m 时的值,等于将 $x(n)$ 保持不动,而 $y(n)$ 左移 m 个抽样周期后,两个序列对应相乘再相加的结果,或者将 $y(n)$ 保持不动,而 $x(n)$ 右移 m 个抽样周期后,两个序列对应相乘再相加的结果。它与序列的线性卷积运算是相似的,但没有像卷积运算中有翻褶的过程。将式(3-67)与序列的线性卷积公式(为便于比较,将式中的 m, n 互调)相比较:

$$g(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(m-n)y(n) = x(m) * y(m)$$

可以得到线性相关和线性卷积的时域关系

$$\begin{aligned} r_{xy}(m) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-m)y(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-(m-n)]y(n) \\ &= x(-m) * y(m) \end{aligned} \quad (3-68)$$

另外,相关函数不满足交换律,即 $r_{xy}(m)$ 不能写为 $r_{yx}(m)$,这点与线性卷积不同,因为

$$\begin{aligned} r_{yx}(m) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)x(n+m) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} y(j-m)x(j) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n-m) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y[n+(-m)] = r_{xy}(-m) \end{aligned}$$

若 $y(n)=x(n)$,则上面的互相关函数就变成自相关函数 $r_{xx}(n)$,即

$$r_{xx}(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x(n+m) \quad (3-69)$$

自相关函数 $r_{xx}(n)$ 反映了信号 $x(n)$ 和其自身作了一段延迟后的 $x(n+m)$ 的相似程度。

若 $x(n)$ 和 $y(n)$ 均为长度为 N 点的有限长序列,则互相关函数写为

$$r_{xy}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)y(n+m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n-m)y(n) \quad (3-70)$$

根据 3.4 节讨论的 DFT 圆周卷积的性质,并利用 $\text{DFT}[x((-n))_N R_N(n)] = X^*(k)$,可以得到

$$\sum_{n=0}^{N-1} y(n)x((n-m))_N R_N(m) = \text{IDFT}[X^*(k)Y(k)] \quad (3-71)$$

式(3-71)实际上是对 $x(n-m)$ 作圆周移位,再计算相关,类似于圆周卷积,称为圆周相关。所以与求线性卷积一样,线性相关可以采用 DFT 法来求,即用圆周相关代替线性相关。采用 DFT 法求线性相关的步骤如下:

- (1) 对 N 点序列 $x(n)$ 和 $y(n)$ 补零至长度为 L ,选择 $L \geq 2N-1$,且 $L=2^r$ (r 为整数)。
- (2) 分别计算 $x(n)$ 和 $y(n)$ 的 L 点 DFT:

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)], \quad Y(k) = \text{DFT}[y(n)]$$

- (3) 将 $X(k)$ 的虚部 $\text{Im}[X(k)]$ 改变符号,求得其共轭 $X^*(k)$ 。

(4) 计算 $\text{IDFT}[X^*(k)Y(k)]$; 取后 $L/2$ 项,得 $r_{xy}(m)$, $-L/2 \leq m \leq -1$; 取前 $L/2$ 项,得 $r_{xy}(m)$, $0 \leq m \leq L/2-1$ 。

例 3-8 已知两个序列: $x(n)=[2 \ 4 \ -1 \ 1 \ 7 \ 3 \ 1 \ -3]$ 和 $y(n)=x(n-5)$, $y(n)$ 是 $x(n)$ 的延迟序列。试求这两个序列的互相关函数和延迟序列的自相关函数。

解 按照上述 DFT 法求线性相关的步骤,编制的 MATLAB 程序如下:

```

L=16; % 选取长度为 2 的整数次方
x=[2 4 -1 1 7 3 1 -3 0 0 0 0 0 0 0]; % 补零到 L 长度
y=[0 0 0 0 2 4 -1 1 7 3 1 -3 0 0 0]; % 右移 5 位后补零到 L 长度
xk=dft(x,L)
yk=dft(y,L);
rxy=real(idft(conj(xk).*yk,L));
rxy=[rxy(L/2+1:L) rxy(1:L/2)];
m=(-L/2):(L/2-1);
rxx=real(idft(conj(yk).*yk,L));
rxx=[rxx(L/2+1:L) rxx(1:L/2)];
m=(-L/2):(L/2-1);
subplot(121); stem(m,rxy,'. '); xlabel('m'); ylabel('幅度');
subplot(122); stem(m,rxx,'. '); xlabel('m'); ylabel('幅度');

```

运行结果如图 3-21 所示。由图 3-21(a) 可以看到,两个序列的互相关函数最大值出现在 $m=5$ 处,正好是 $y(n)$ 对于 $x(n)$ 的延迟。图 3-21(b) 是延迟序列的自相关函数,在 $m=0$ 处出现最大值,且波形具有偶对称特点,即自相关函数是实偶函数。

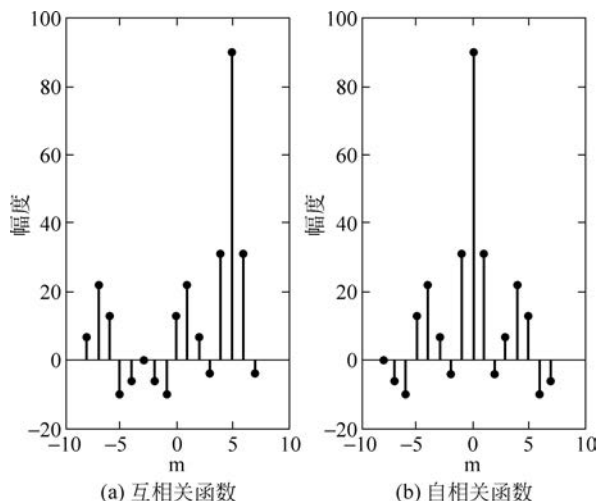


图 3-21 例 3-8 的互相关函数和自相关函数波形

3.7 用 DFT 进行谱分析

DFT 实现了频域采样,同时 DFT 存在快速算法,所以在实际应用中,可以利用计算机,用 DFT 逼近连续时间信号的傅里叶变换,进而分析连续时间信号的频谱。连续时间信号 DFT 分析的基本步骤如图 3-22 所示。

连续时间信号 $x_a(t)$ 首先通过抗混叠低通滤波器进行限带处理,然后用 A/D 变换进行采样、保持、量化,得到数字信号 $x(n)$,最后利用 DFT 处理信号 $x(n)$,就实现了连续时间信号的频谱分析。

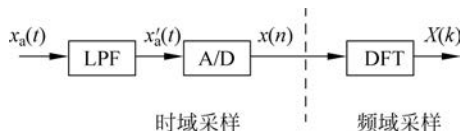


图 3-22 连续时间信号 DFT 分析的基本步骤

3.7.1
微课视频

3.7.1 利用 DFT 对连续非周期信号进行谱分析

所谓信号的谱分析就是计算信号的傅里叶变换。连续信号与系统的傅里叶分析显然不便于直接用计算机进行计算,使其应用受到限制。而 DFT 是一种时域和频域均离散化的变换,适合数值运算,成为分析离散信号和系统的有力工具。

工程实际中,经常遇到的连续信号 $x_a(t)$,其频谱函数 $X_a(j\Omega)$ 也是连续函数。数字计算机难于处理,因而采用 DFT 对其进行逼近。

设对连续非周期信号进行时域采样,采样间隔为 T (时域),对其连续非周期性的频谱函数进行频域采样,频域采样间隔为 F (频域)。时域采样,频域必然周期延拓,且延拓周期为时域采样的频率值,即频域周期 $f_s = \frac{1}{T}$; 频域采样,对应时域按频域采样间隔的倒数周期延拓,即 $T_p = \frac{1}{F}$ 。对无限长的信号,计算机是不能处理的,必须对时域与频域做截断,若时域取 N 点,则频域至少也要取 N 点。下面把以上的推演过程用严密的数学公式表示。

连续非周期信号 $x_a(t)$ 的傅里叶变换对为

$$X_a(jf) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (3-72)$$

$$x_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(jf) e^{j2\pi ft} df \quad (3-73)$$

下面介绍用 DFT 方法计算这一傅里叶变换对的步骤。首先由式(3-72)推出连续非周期信号的傅里叶变换的采样值。

(1) 对 $x_a(t)$ 以采样间隔 $T \leq \frac{1}{2f_c}$ ($f_s = \frac{1}{T} \geq 2f_c$) 采样得

$$x(n) = x_a(nT) = x_a(t) \Big|_{t=nT} \quad (3-74)$$

对 $X_a(jf)$ 作零阶近似,即 $t \rightarrow nT, dt \rightarrow T, \int_{-\infty}^{+\infty} dt \rightarrow \sum_{-\infty}^{+\infty} T$, 得频谱密度的近似值为

$$X(jf) \approx T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(nT) e^{-j2\pi fnT} \quad (3-75)$$

(2) 将序列 $x(n) = x_a(nT)$ 截断为从 $t=0$ 到 $t=T_p$ 的有限长序列,包含有 N 个采样(即时域取 N 个采样点),则上式成为

$$X(jf) \approx T \sum_{n=0}^{N-1} x_a(nT) e^{-j2\pi fnT} \quad (3-76)$$

因为时域采样(采样频率为 $f_s = \frac{1}{T}$),则频域必然周期延拓,且延拓周期为时域采样的频率值,即 f_s ,若频域是限带信号,则可能不产生混叠,则 $X(jf)$ 是频率 f 的连续周期函数(周期为 f_s), $x_a(t)$ 和 $X_a(jf)$ 的波形如图 3-23(a) 所示, $x_a(nT)$ 和 $X(jf)$ 的波形如图 3-23(b) 所示。

(3) 为了数值计算,在频域上也要离散化(采样),即对 $X(jf)$ 在区间 $[0, f_s]$ 上等间隔采样 N 点,采样间隔为 F ,如图 3-23(c) 所示。参数 f_s 、 T_p 、 N 和 F 满足如下关系式:

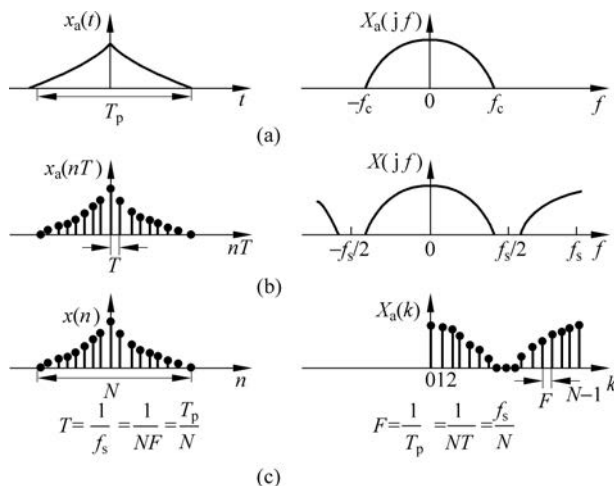


图 3-23 用 DFT 方法分析连续信号频谱的原理示意图

$$F = \frac{f_s}{N} = \frac{1}{NT} = \frac{1}{T_p} \quad (3-77)$$

式中, $NT = T_p$, T_p 是时域连续信号的持续时间或称记录长度。

需要强调的是, 频域采样、截断就是将连续函数 f 离散化, 且取有限个采样值, 即

$$f = kF, \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (3-78)$$

将式(3-78)和式(3-77)代入 $X(jf)$ 中, 可得 $X(jf)$ 的采样为

$$X(jkF) = X(jf) \Big|_{f=kF} = T \sum_{n=0}^{N-1} x_a(nT) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

将 $X(jkF) \rightarrow X_a(k)$, $x_a(nT) \rightarrow x(n)$, 则

$$X_a(k) = T \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = T \cdot \text{DFT}[x(n)] \quad (3-79)$$

同理, 由式(3-73)可推出由傅里叶变换的采样值得到连续非周期信号的表达式。

即由 $x_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(jf) e^{j2\pi ft} df$, 得

$$x(n) = x_a(nT) = F \sum_{k=0}^{N-1} X_a(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \text{FN} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \right] = \frac{1}{T} \text{IDFT}[X_a(k)] \quad (3-80)$$

式(3-79)和式(3-80)分别说明连续非周期信号的频谱可以通过对连续信号采样后进行 DFT 并乘以系数 T 的方法近似得到, 而对该 DFT 值作反变换并乘以系数 $\frac{1}{T}$ 就得到时域采样信号。

上面用数学表达式分析了利用 DFT 对连续非周期信号进行谱分析的逼近过程和原理, 现在用图 3-24 全面概括整个过程。进一步讨论的问题是: 第一, 最后得到的 $x_N(n)$ 是否为模拟信号 $x_a(t)$ 的准确采样(是否包含了 $x_a(t)$ 的全部信息)? 第二, $x_N(n)$ 的 DFT 系数 $X_N(k)$ 是否是 $x_a(t)$ 的频谱 $X_a(j\Omega)$ 的准确采样(是否包含了 $X_a(j\Omega)$ 的全部信息)?

根据连续时间信号傅里叶变换的尺度变换性质, 若 $x(t)$ 的 FT 为 $X(j\Omega)$, 则 $x(at)$ 的 FT 为 $\frac{1}{|a|} X\left(j\frac{\Omega}{a}\right)$, 式中 a 为常数。这说明若信号 $x(t)$ 沿时间轴压缩(或扩展)了 a 倍, 其

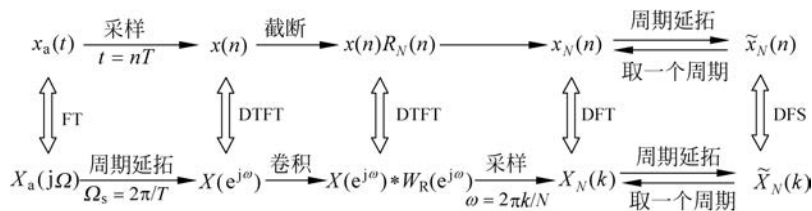


图 3-24 用 DFT 实现对连续时间信号逼近的全过程

频谱将在频率轴上扩展(或压缩) a 倍。这样,信号的时宽和频宽不可能同时缩小或同时扩大,也不可能同时为有限值,即若信号是有限时宽的,则其频谱必为无限带宽的,反之亦然。最典型的例子是矩形函数,设矩形函数的信号持续时间为 $(-T, T)$,而其频谱为 sinc 函数。若 T 为有限值,则 sinc 函数表示的频谱必覆盖 $(-\infty, \infty)$;若 $T \rightarrow \pm\infty$,则 sinc 函数趋近于 $\delta(\cdot)$;反之,若 $T \rightarrow 0$,则 sinc 函数趋近于一条水平直线。信号时宽和频宽的这种制约关系可以帮助我们理解 DFT 对 FT 的近似问题。

若 $X_a(j\Omega)$ 是有限带宽的,且满足在 $|\Omega| \geq \Omega_s/2$ 时为零,那么时域采样后的频谱将不会产生频谱混叠现象,则 $X(e^{j\omega})$ 的一个周期就等于 $X_a(j\Omega)$ 。此种情况, $x_a(t)$ 和 $x(n)$ 必是无限长的,当用窗函数,例如矩形序列 $R_N(n)$ 对 $x(n)$ 加窗截断时,因为 $X_N(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) * W_R(e^{j\omega})$,所以 $x_N(n)$ 的 DTFT $X_N(e^{j\omega})$ 受窗函数的影响已不再等于 $X_a(j\Omega)$,然后对 $X_N(e^{j\omega})$ 进行频域采样时,其一个周期的 $X_N(k)$ 当然也不完全等于 $X_a(j\Omega)$ 的采样,这时, $X_N(k)$ 只是对 $X_a(j\Omega)$ 的近似,则由 $X_N(k)$ 做反变换得到的 $x_N(n)$ 也将是对原 $x_a(t)$ 的近似。由于原 $x(n)$ 为无限长,因此,频域采样时域周期延拓将发生时域混叠失真。这样, $\tilde{x}_N(n)$ 的一个周期只是 $x(n)$ 或 $x_a(t)$ 的近似。

若 $x_a(t)$ 是有限长,那么 $X_a(j\Omega)$ 必不是有限带宽的,对 $x_a(t)$ 采样时将无法满足采样定理。这样,采样后的 $X(e^{j\omega})$ 将会发生混叠, $x(n)$ 也只是 $x_a(t)$ 的近似。而 $X_N(k)$ 是 $X(e^{j\omega})$ 在一个周期内的采样,则 $x_N(n)$ 和 $X_N(k)$ 分别是 $x_a(t)$ 和 $X_a(j\Omega)$ 的近似。

下面具体讨论用 DFT 实现对连续时间信号进行谱分析的误差问题。

3.7.2 用 DFT 进行谱分析的误差问题

在用 DFT 逼近连续非周期信号的傅里叶变换过程中,除了对幅度的线性加权外,由于用到了采样与截断的方法,因此也可能会带来一些产生的问题,使谱分析产生误差,例如混叠效应、截断效应、栅栏效应等。

1. 混叠效应

利用 DFT 逼近连续时间信号的傅里叶变换,为避免混叠失真,要求满足采样定理,即奈奎斯特定理

$$f_s \geq 2f_c \quad (3-81)$$

其中, f_s 为采样频率, f_c 为信号最高频率(谱分析范围)。但此条件只规定出 f_s 的下限为 $2f_c$,其上限要受采样间隔 F 的约束。

采样间隔 F 即频率分辨率,它是记录长度的倒数,即

$$F = \frac{1}{T_p} = \frac{f_s}{N} = \frac{1}{NT}$$



3.7.2
微课视频

若采样点数为 N , 则采样间隔 F 与 f_s 的关系为

$$F = \frac{f_s}{N} \geq 2 \frac{f_c}{N} \quad (3-82)$$

在 N 给定时, 为避免混叠失真而一味提高采样频率 f_s , 必然导致 F 增加, 即频率分辨率下降; 反之, 若要提高频率分辨率, 即减小 F , 则导致 f_s 减小, 最终必须减小信号的最高频率 f_c 。

以上两点结论都是 N 给定的条件下得到的。所以在参数 f_c 与 F 中, 保持其中一个不变而使另一个性能得以提高的唯一办法就是增加记录长度内的点数 N 。

T_p 和 N 可以按照以下两式进行选择:

$$N > 2 \frac{f_c}{F} \quad (3-83)$$

$$T_p \geq \frac{1}{F} \quad (3-84)$$

例 3-9 对实信号进行谱分析, 要求谱分辨率 $F \leq 10 \text{ Hz}$, 信号最高频率 $f_c = 2.5 \text{ kHz}$, 试确定最小记录时间 T_{pmin} , 最大的采样间隔 T_{max} , 最少的采样点数 N_{min} 。如果 f_c 不变, 要求谱分辨率增加一倍, 最少的采样点数和最小的记录时间是多少?

解

$$T_p \geq \frac{1}{F} = \frac{1}{10} = 0.1 \text{ s}$$

因此

$$T_{\text{pmin}} = 0.1 \text{ s}$$

因为要求 $f_s \geq 2f_c$, 所以

$$T_{\text{max}} = \frac{1}{2f_c} = \frac{1}{2 \times 2500} = 0.2 \times 10^{-3} \text{ s}$$

$$N_{\text{min}} = \frac{2f_c}{F} = \frac{2 \times 2500}{10} = 500$$

为使频率分辨率提高一倍, $F = 5 \text{ Hz}$, 要求

$$N_{\text{min}} = \frac{2f_c}{F} = \frac{2 \times 2500}{5} = 1000$$

$$T_{\text{pmin}} = \frac{1}{F} = \frac{1}{5} = 0.2 \text{ s}$$

2. 截断效应

在实际中, 要把观测的信号 $x(n)$ 限制在一定的时间间隔之内, 需要采取截断数据的过程。

时域的截断在数学上的意义为原无限长时间信号乘上一个窗函数, 使原时间函数成为两端突然截断, 中间为原信号与窗函数相乘的结果。时域两函数相乘, 在频域是其频谱的卷积。由于窗函数不可能取无限宽, 即其频谱不可能为一冲激函数, 信号的频谱与窗函数的卷积必然产生展宽和拖尾现象, 造成频谱的泄漏现象。具体的数学描述为:

设原信号为 $x(n)$, 序列截断的过程相当于给该序列乘上一个矩形窗函数 $R_N(n)$, 即截断后的序列为 $y(n) = x(n)R_N(n)$ 。如果原来序列的频谱为 $X(e^{j\omega})$, 矩形窗函数的频谱为

$W_R(e^{j\omega})$, 则截断后有限长序列的频谱为

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= \text{DTFT}[y(n)] \\ &= \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) * W_R(e^{j\omega}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) W_R(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \end{aligned}$$

其中, $X(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[x(n)]$ 。

$$\begin{aligned} W_R(e^{j\omega}) &= \text{DTFT}[R_N(n)] \\ &= \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \\ &= W_R(\omega) e^{j\varphi(\omega)} \end{aligned}$$

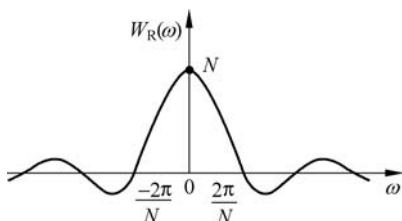


图 3-25 矩形窗函数的幅度谱曲线

幅度谱 $W_R(\omega) \sim \omega$ 曲线如图 3-25 所示。注意 $W_R(\omega)$ 以 2π 为周期, 图中只画出了低频部分。图中,

$|\omega| < \frac{2\pi}{N}$ 的部分称为主瓣, 其余部分称为旁瓣。

例 3-10 已知 $x(n) = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$, 比较截断前后的频谱。

解 截断前序列 $x(n)$ 的频谱为

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\delta\left(\omega - \frac{\pi}{4} - 2\pi m\right) \right. \\ &\quad \left. + \delta\left(\omega + \frac{\pi}{4} - 2\pi m\right) \right] \end{aligned}$$

截断后的序列为

$$y(n) = x(n)R_N(n) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) * W_R(e^{j\omega})$$

截断前后的频谱图如图 3-26 所示, 可见, 由于矩形窗函数频谱的引入, 使卷积后的频谱 $Y(e^{j\omega})$ 与原序列频谱 $X(e^{j\omega})$ 不一样了, 主要表现在两个方面:

(1) 频谱展宽: 截断后, 使原来的离散谱线向附近展宽, 即 $X(e^{j\omega})$ 的频谱“泄漏”到其他频率处, 显然, 泄漏使频谱变得模糊, 使谱分辨率降低。

(2) 频谱拖尾: 在主谱线两端形成许多旁瓣, 即频谱产生拖尾, 引起不同频率分量间的干扰, 这种谱间干扰同样会影响频谱分辨率。

在进行 DFT 时, 由于取无限个数据是不可能的, 所以序列的时域截断是必然的, 泄漏是难以避免的。为了尽量减少泄漏的影响, 截断时要根据具体的情况, 数据不要突然截断, 也就是不要加矩形窗, 而是要缓慢截断, 即选择适当形状的各种缓变的窗函数, 例如升余弦窗 (汉宁窗或海明窗) 等, 使得窗谱的旁瓣能量更小, 卷积后造成的频谱泄漏减小。该问题还会在第 6 章 FIR 滤波器设计中进一步讨论。

3. 栅栏效应

由于 DFT 是有限长序列的频谱等间隔采样所得到的样本值, 这就相当于透过一个栅栏

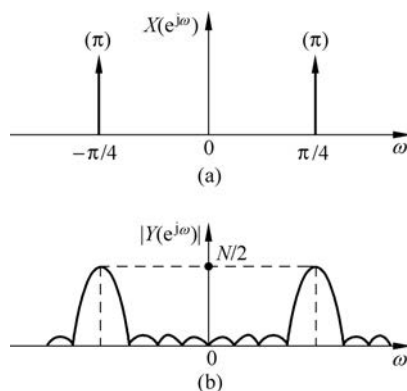


图 3-26 $\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$ 加矩形窗前、后的频谱

去观察原来信号的频谱,因此必然有一些地方被栅栏所遮挡,这些被遮挡的部分就是未被采样到的部分,这种现象称为“栅栏效应”,如图 3-27 所示。由于栅栏效应总是存在的,因而可能会使信号频率中某些较大的频率分量由于被“遮挡”而无法得到反映。

减小栅栏效应的一个方法就是要使频域采样更密,即增加频域采样点数 N ,在不改变时域数据的情况下,必然是在时域数据末端,即在有限长序列的尾部增补若干个零值,借以改变原序列的长度,但并不改变原有的记录数据。这样对加长的序列作 DFT 时,由于点数增加,就相当于调整了原来栅栏的间隙(频率间隔),谱线更密,可以使原来得不到反映的那些较大的频率分量落在采样点上而得到反映。

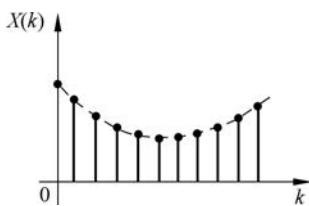


图 3-27 栅栏效应

但要注意,由于栅栏效应,使得被分析的频谱变得较为稀疏,为此,在采样样本序列 $x(n)$ 后面补零,在数据长度 T_p 不变的情况,可以改变频谱的频率取样密度,这样得到的是高密度频谱。但因在 $x(n)$ 后面补零并没有增加新的信息量,改善的仅是栅栏效应。所以补零是不能提高频率分辨率的,即得不到高分辨率谱。

3.7.3 用 DFT 进行谱分析的参数考虑

用 DFT 对连续信号进行谱分析时,一般要考虑两方面的问题:第一,频谱分析范围;第二,频率分辨率。

频谱分析范围由采样频率 f_s 决定。前面已经叙述,为减小混叠失真,通常要求 $f_s > 2f_c$ 。但采样频率 f_s 越高,频谱分析范围越宽,在单位时间内采样点增多,要存储的数据量加大,计算量也越大。所以应结合实际的具体情况,确定频谱分析范围。

频率分辨率在信号谱分析中是一个非常重要的概念。它反映了将两个相邻谱峰分开的能力,是分辨两个不同频率分量的最小间隔。因此将频域采样间隔 $F = \frac{f_s}{N} = \frac{1}{NT} = \frac{1}{T_p}$ 定义为频率分辨率。但要注意,由于对连续信号进行谱分析时要进行截断处理,所以频率分辨率实际上还与截断窗函数及时宽相关。因此有文献将 $F = \frac{f_s}{N}$ 称为“计算分辨率”,即该分辨率

是靠计算得出的,但它并不能反映真实的频率分辨能力。而另一方面将 $F = \frac{1}{T_p}$ 称为“物理分辨率”,数据的有效长度越小,频率分辨能力越差。前面提到,补零是改善栅栏效应的一个方法,但不能提高频率分辨率,即得不到高分辨率谱。这说明,补零仅仅是提高了计算分辨率,得到的是高密度频谱,而要得到高分辨率谱,则要通过增加数据的记录长度 T_p 提高物理分辨率。在实际工作中,当数据的实际长度 T_p 或 N 不能再增加时,通过发展新的信号处理算法也可能提高频率分辨率。

通过前面的讨论可知,频率分辨率的概念和 DFT 紧密相连,频率分辨率的大小反比于数据的实际长度。在数据长度相同的情况下,使用不同的窗函数将在频谱的分辨率和频谱的泄漏之间有着不同的取舍。窗函数的主瓣宽度主要影响分辨率,而旁瓣的大小影响了频谱的泄漏。

综上所述,DFT 参数选择的一般原则是:



3.7.3
微课视频

- (1) 确定信号的最高频率 f_c 后, 为防止混叠, 采样频率 $f_s \geq (3 \sim 6)f_c$ 。
- (2) 根据实际需要, 即根据频谱的“计算分辨率”需要确定频率采样两点之间的间隔 F , F 越小频谱越密, 计算量也越大。
- (3) F 确定后, 就可确定作 DFT 所需的点数 N , 即

$$N = \frac{f_s}{F}$$

为了使用后面将要介绍的基 2-FFT 算法, 一般取 $N = 2^M$, 若点数 N 已给定且不能再增加, 可采用补零的方法使 N 为 2 的整次幂。

- (4) f_s 和 N 确定后, 则可确定所需的数据长度, 即

$$T_p = \frac{N}{f_s} = NT$$

3.7.4 对 DFT 计算结果的解读

DFT 的计算结果是 $X(k)$, $0 \leq k \leq N-1$, 在解读结果时需要注意两点问题。

1. 幅度问题

DFT 的计算结果一般是复数序列 $X(k) = X_R(k) + jX_I(k)$, 因此 DFT 的输出幅度为

$$|X(k)| = \sqrt{X_R^2(k) + X_I^2(k)} \quad (3-85)$$

当根据 DFT 的计算结果确定输入时间序列的幅度时, 需要注意, $X(k)$ 的模是正比于频谱分量的幅度, 但并不等于幅度的实际大小, 下面具体讨论。

首先讨论正弦序列。设 $x(t) = A_1 \sin(2\pi f_1 t)$, 在一个周期内对其等间隔采样 N 个采样点, 得到正弦序列

$$\begin{aligned} x(n) &= x(t) \Big|_{t=nT} = A_1 \sin(2\pi f_1 nT) \\ &= A_1 \sin(2\pi nT/T_1) = A_1 \sin(2\pi n/N), \quad 0 \leq n \leq N-1 \end{aligned}$$

式中, A_1 是正弦信号的幅度, $T_1 = 1/f_1$ 是正弦信号的周期, $T = 1/f_s$ 是采样间隔。

序列 $x(n)$ 的 N 点 DFT 为

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=0}^{N-1} A_1 \sin(2\pi n/N) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \\ &= j \frac{A_1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \left[e^{-j\frac{2\pi n}{N}} - e^{j\frac{2\pi n}{N}} \right] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \end{aligned}$$

当 $k=1$, 即在分析频率 f_1 上, DFT 的值为

$$\begin{aligned} X(1) &= j \frac{A_1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \left[e^{-j\frac{2\pi}{N}n} - e^{j\frac{2\pi}{N}n} \right] e^{-j\frac{2\pi}{N}n} = j \frac{A_1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \left[e^{-j\frac{4\pi}{N}n} - 1 \right] \\ &= j \frac{A_1}{2} \left[\frac{1 - e^{-j\frac{4\pi}{N}N}}{1 - e^{-j\frac{4\pi}{N}}} - \sum_{n=0}^{N-1} 1 \right] = -j \frac{N}{2} A_1 \end{aligned}$$

则有

$$|X(1)| = \frac{N}{2} A_1 \quad (3-86)$$

即正弦序列的 DFT 在分析频率 f_1 上的值等于正弦幅度的 $N/2$ 倍。

再讨论复指数序列。设 $x(t) = A_1 e^{j2\pi f_1 t}$, 在一个周期内对其等间隔采样 N 个采样点, 得到复指数序列 $x(n) = A_1 e^{j2\pi f_1 nT} = A_1 e^{j2\pi n/N}$, $0 \leq n \leq N-1$, 该序列的 DFT 为

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} A_1 e^{j\frac{2\pi n}{N}} e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} A_1 e^{j\frac{2\pi n(1-k)}{N}}$$

由此得到在分析频率 f_1 上的 DFT 值为

$$X(1) = NA_1 \quad (3-87)$$

即复指数序列的 DFT 在分析频率 f_1 上的值等于复指数序列幅度的 N 倍。

因此, 在实际中需要根据 DFT 的计算结果确定输入时间序列的幅度时, 为了根据 DFT 的计算结果确定时域信号所含正弦分量的正确幅度, 需要将 DFT 的输出幅度除以 $N/2$ (输入为实序列时) 或 N (输入为复序列时)。如果原始时域数据经过了加窗处理, 那么还需要考虑窗函数造成的幅度衰减。

2. 频率问题

DFT 的计算结果 $X(k)$, $k=0, 1, \dots, N-1$, 其中 k 只是 $X(k)$ 的取样值的序号, 并不是实际频率, 而且, k 对应于 DFT 的分析频率点, 但也不意味着信号中一定包含这些频率成分。

一般解读 DFT 的计算结果时, 首先需要算出每个 k 值对应的绝对频率。由于离散频率点间隔等于 f_s/N , 所以序号 k 对应的绝对频率 $f = k \cdot f_s/N$ (单位: Hz)。实序列 $x(n)$ 的 DFT 具有对称性, 只有在 $0 \leq k \leq N/2-1$ 范围内的 $X(k)$ 才是独立的, 所以只需要计算这个范围内的绝对频率。如果输入时间序列是复序列, 则需计算在 $0 \leq k \leq N-1$ 整个范围内的绝对频率。

3.7.5 MATLAB 实现

例 3-11 设 $x(t) = \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t) + \sin(2\pi f_3 t)$, 其中 $f_1 = 2\text{Hz}$, $f_2 = 2.02\text{Hz}$, $f_3 = 2.07\text{Hz}$, 现用 $f_s = 10\text{Hz}$, 即 $T_s = 0.1\text{s}$ 对其进行采样。设 $T_p = 25.6\text{s}$, 即采样得 $x(n)$ 的点数为 256, 试分析若对 $x(n)$ 进行 DFT 时, 能否分辨出 3 个频率分量?

解 因为信号的最高频率 $f_c \leq 3\text{Hz}$, 由采样定理可知, 不会发生混叠问题。

$F = \frac{f_s}{N} = \frac{10}{256} = 0.039\ 062\ 5\text{Hz}$, 对 $x(n)$ 进行 DFT 求其频谱时, 幅频特性如图 3-28(a)

所示。

由于 $f_2 - f_1 = 0.02 < F$, 所以不能分辨出由 f_2 产生的正弦分量; 又由于 $f_3 - f_1 = 0.07 > F$, 所以能分辨出由 f_3 产生的正弦分量。

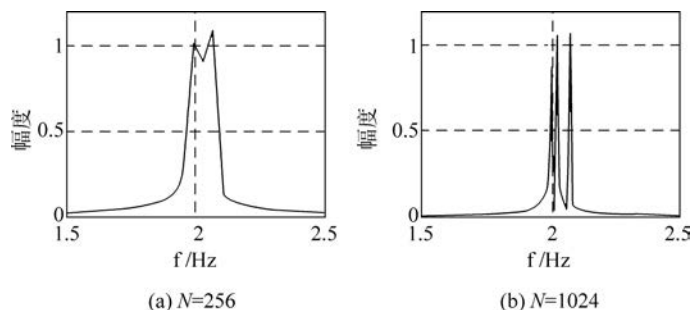
如果增加点数 N , 即增加数据的长度 T_p , 如令 $N = 1024$, 此时 $T_p = 1024 \times 0.1\text{s} = 102.4\text{s}$, 其幅频特性如图 3-28(b) 所示。可见, 此时可以分辨出 3 个频率分量。

MATLAB 实现程序如下:

```
% 观察数据长度 N 的变化对 DTFT 分辨率(物理分辨率)的影响
f1 = 2; f2 = 2.02; f3 = 2.07; fs = 10;
w = 2 * pi / fs; N = 256; n = 0: N-1; F = fs/N;
x = sin(w * f1 * n) + sin(w * f2 * n) + sin(w * f3 * n);
X = 2 * dft(x, N) / N; % DFT 的幅度除以 N/2 得到实际幅度
Y = abs(X); k = 0: N/2 - 1;
```



3.7.5
微课视频

图 3-28 数据长度 N 的变化对 DTFT 分辨率的影响

```

f = k * F; % 将 DFT 的序号 k 转化为绝对频率 f
subplot(221); plot(f, Y(1: N/2)); xlabel('f /Hz'); ylabel('幅度');
axis([1.5 2.5 0 1.2]); grid on;
N = 1024; n = 0: N - 1; F = fs/N;
x = sin(w * f1 * n) + sin(w * f2 * n) + sin(w * f3 * n);
X = 2 * dft(x, N)/N; % DFT 的幅度除以 N/2 得到实际幅度
Y = abs(X); k = 0: N/2 - 1;
f = k * F; % 将 DFT 的序号 k 转化为绝对频率 f
subplot(222); plot(f, Y(1: N/2)); xlabel('f /Hz'); ylabel('幅度');
axis([1.5 2.5 0 1.2]); grid on;

```

例 3-12 $x(n) = \cos(0.48\pi n) + \cos(0.52\pi n)$, 利用 MATLAB 程序求如下 $X(e^{j\omega})$ 、 $X(k)$ 。

- (1) 取 $x(n)$ 的前 10 点数据, 求 $N = 10$ 点的 $X(e^{j\omega})$ 、 $X(k)$ 并作图;
- (2) 将 $x(n)$ 补零至 100 点, 求 $N = 100$ 点的 $X(e^{j\omega})$ 、 $X(k)$ 并作图;
- (3) 取 $x(n)$ 的前 100 点数据, 求 $N = 100$ 点的 $X(e^{j\omega})$ 、 $X(k)$ 并作图;
- (4) 取 $x(n)$ 的前 128 点数据, 求 $N = 128$ 点的 $X(e^{j\omega})$ 、 $X(k)$ 并作图;
- (5) 取 $x(n)$ 的前 90 点数据并补零至 100 点, 求 $N = 100$ 点的 $X(e^{j\omega})$ 、 $X(k)$ 并作图。

解 $x(n)$ 是由频率分别为 $\omega_1 = 0.48\pi$ 、 $\omega_2 = 0.52\pi$ 的周期序列叠加的周期序列, 该序

列的基本周期可以采用求最小公倍数 $N = \frac{N_1 N_2}{\gcd(N_1, N_2)}$ 的方法得到, 可求得其周期 $N = 50$ 。

- (1) 求 $x(n)$ 的前 10 点数据对应的 $X(e^{j\omega})$ 、 $X(k)$ 。

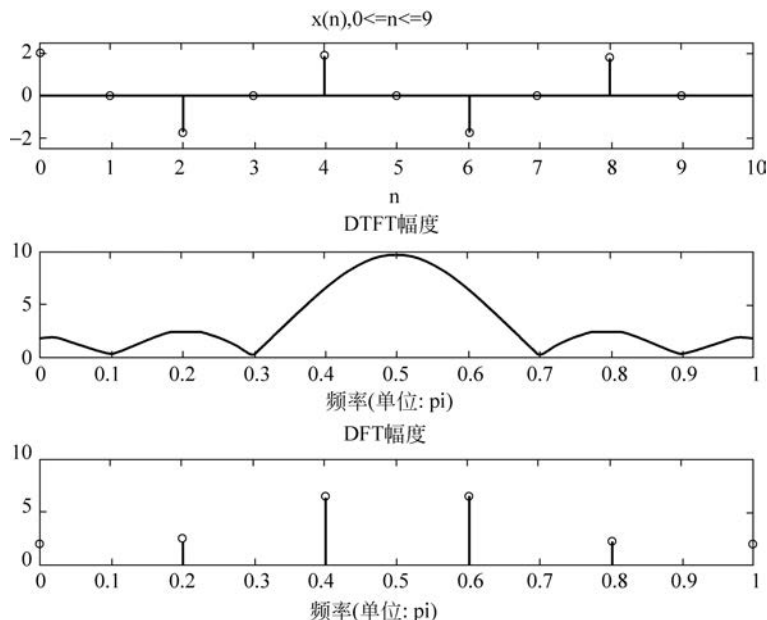
MATLAB 程序如下:

```

n = [0: 1: 9]; x = cos(0.48 * pi * n) + cos(0.52 * pi * n);
w = [0: 1: 500] * 2 * pi / 500;
X = x * exp(-j * n' * w); % 用矩阵-向量乘法求 DTFT
magx = abs(X);
x1 = fft(x); magx1 = abs(x1(1: 1: 10));
k1 = 0: 1: 9; w1 = 2 * pi / 10 * k1;
subplot(3,1,1); stem(n,x); title('x(n), 0<=n<=9'); xlabel('n')
axis([0,10, -2.5,2.5]); line([0,10],[0,0]);
subplot(3,1,2); plot(w/pi, magx); title('DTFT 幅度'); xlabel('频率(单位: pi)'); axis([0,1,0,10])
subplot(3,1,3); stem(w1/pi, magx1); title('DFT 幅度');
xlabel('频率(单位: pi)'); axis([0,1,0,10])

```

$x(n)$ 的前 10 点数据对应的 $x(n)$ 、 $X(e^{j\omega})$ 、 $X(k)$ 如图 3-29 所示。

图 3-29 $x(n)$ 的前 10 点数据对应的 $x(n)$ 、 $X(e^{j\omega})$ 、 $X(k)$

由图 3-29 可见,由于截断函数的频谱混叠作用, $X(k)$ 不能正确分辨 $\omega_1 = 0.48\pi$ 、 $\omega_2 = 0.52\pi$ 这两个频率分量。

(2) 将 $x(n)$ 补零至 100 点,求 $N=100$ 点的 $X(e^{j\omega})$ 、 $X(k)$ 。

MATLAB 主要程序如下:

```
n = [0:1:9]; y = cos(0.48 * pi * n) + cos(0.52 * pi * n);
n1 = [0:1:99]; x = [y(1:10) zeros(1,90)];
w = [0:1:500] * 2 * pi / 500;
X = x * exp(-j * n1' * w); magx = abs(X);
x1 = fft(x); magx1 = abs(x1(1:1:50));
k1 = 0:1:49; w1 = 2 * pi / 100 * k1;
%绘图语句略
```

$x(n)$ 补零至 100 点对应的 $x(n)$ 、 $X(e^{j\omega})$ 、 $X(k)$ 如图 3-30 所示。由图可见,虽然 $x(n)$ 补零至 100 点,只是改变 $X(k)$ 的密度,截断函数的频谱混叠作用没有改变,这时的物理分辨率使 $X(k)$ 仍不能正确分辨 $\omega_1 = 0.48\pi$ 、 $\omega_2 = 0.52\pi$ 这两个频率分量。这说明,补零仅仅是提高了计算分辨率,得到的是高密度频谱,而得不到高分辨率谱。

(3) 取 $x(n)$ 的前 100 点数据,求 $N=100$ 点的 $X(e^{j\omega})$ 、 $X(k)$ 。

程序略。

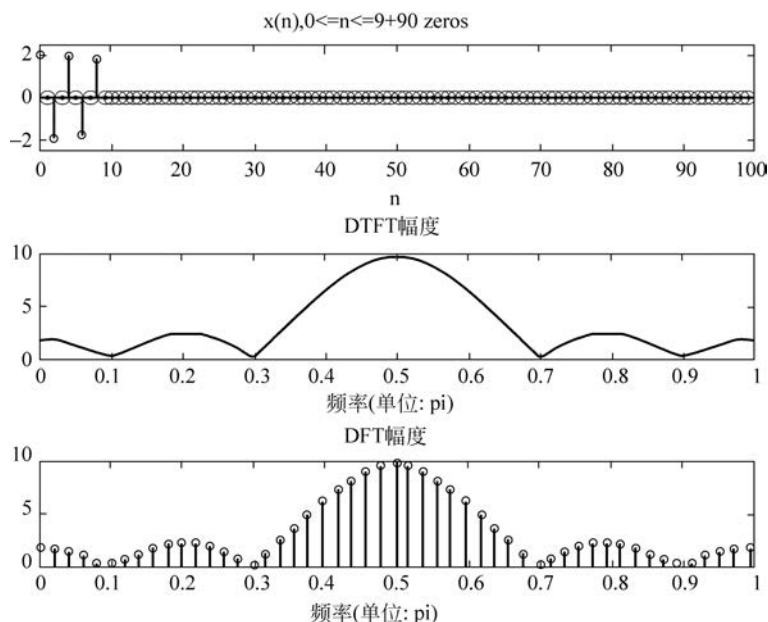
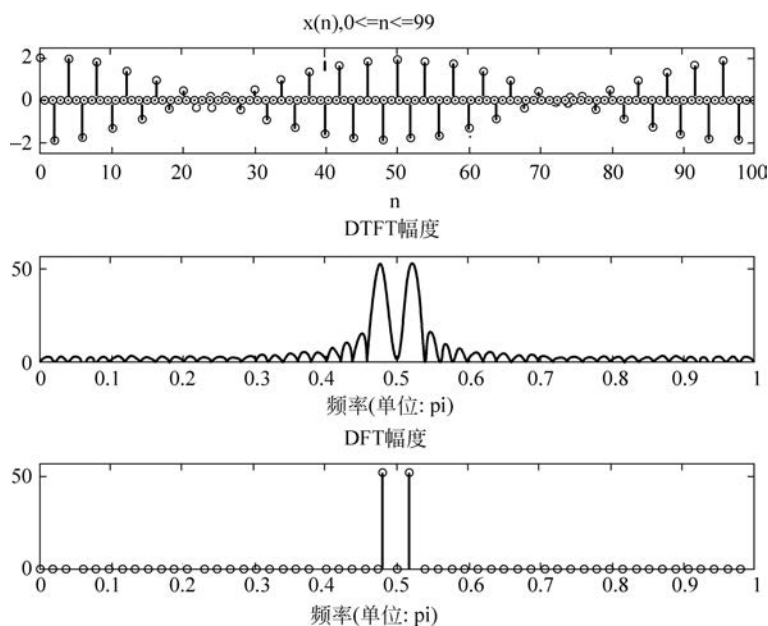
100 点 $x(n)$ 的数据对应的 $x(n)$ 、 $X(e^{j\omega})$ 、 $X(k)$ 如图 3-31 所示。

由图可见,截断函数的加宽且为周期序列的整数倍,改变了频谱混叠作用,提高了物理分辨率,使 $X(k)$ 能正确分辨 $\omega_1 = 0.48\pi$ 、 $\omega_2 = 0.52\pi$ 这两个频率分量。这说明通过增加数据的记录长度 T_p 来提高物理分辨率可以得到高分辨率谱。

(4) 取 $x(n)$ 的前 128 点数据,求 $N=128$ 点的 $X(e^{j\omega})$ 、 $X(k)$ 。

程序略。

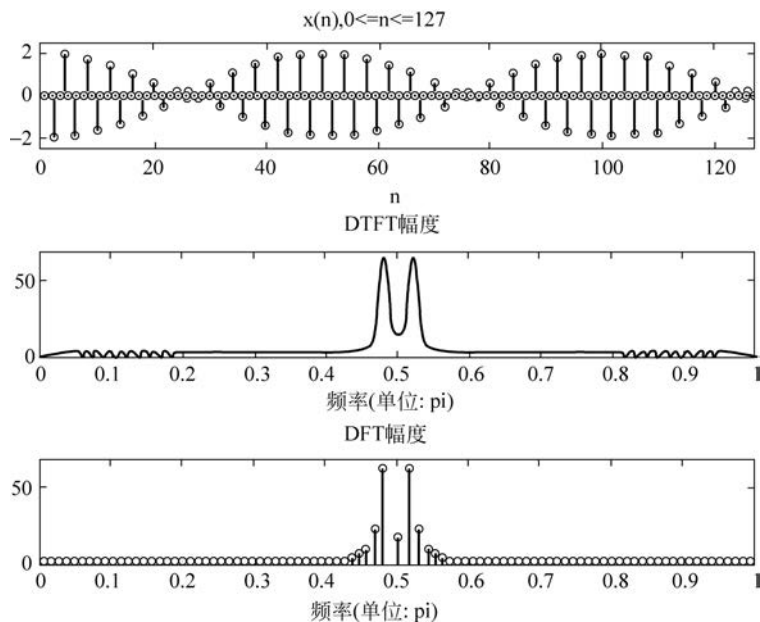
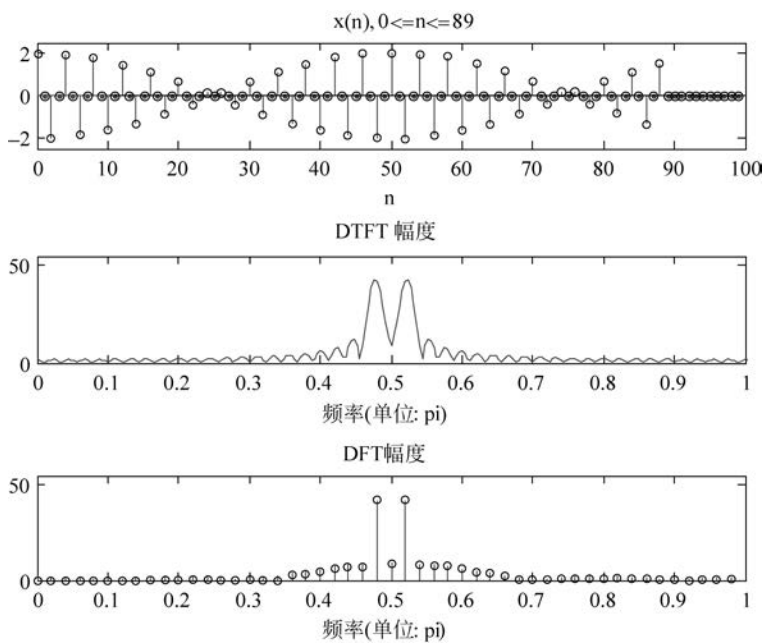
128 点 $x(n)$ 的数据对应的 $x(n)$ 、 $X(e^{j\omega})$ 、 $X(k)$ 如图 3-32 所示。

图 3-30 $x(n)$ 补零至 100 点对应的 $x(n)$ 、 $X(e^{j\omega})$ 、 $X(k)$ 图 3-31 100 点 $x(n)$ 对应的 $x(n)$ 、 $X(e^{j\omega})$ 、 $X(k)$

由图可见,截断函数虽然进一步加宽,但不是周期序列的整数倍,所以尽管 $X(k)$ 能正确分辨 $\omega_1 = 0.48\pi$ 、 $\omega_2 = 0.52\pi$ 这两个频率分量,但还呈现频谱泄漏。

(5) 取 $x(n)$ 的前 90 点数据并补零至 100 点,求 $N=100$ 点的 $X(e^{j\omega})$ 、 $X(k)$ 并作图。程序略。

取前 90 点数据并补零至 100 点,得 100 点 $x(n)$ 对应的 $x(n)$ 、 $X(e^{j\omega})$ 、 $X(k)$ 如图 3-33 所示。

图 3-32 128 点 $x(n)$ 对应的 $x(n)$ 、 $X(e^{j\omega})$ 、 $X(k)$ 图 3-33 取 $x(n)$ 前 90 点补零至 100 点对应的 $x(n)$ 、 $X(e^{j\omega})$ 、 $X(k)$

由图可见,截断函数虽然是周期序列的整数倍,但因为补了 10 个零值,所以尽管 $X(k)$ 能正确分辨 $\omega_1 = 0.48\pi$ 、 $\omega_2 = 0.52\pi$ 这两个频率分量,但也呈现频谱泄漏。

因此对于周期信号利用 DFT 分析频谱时,截断长度必须为采样后的周期序列的一个周期或者为周期的整数倍,并且不能补零值点,否则会产生频谱泄漏。

3.7.6 DFT 的应用实例——旋转机械故障诊断

大型旋转机械如汽轮机、压缩机、发电机、风机、泵等是生产企业的设备,其运行状况好坏直接影响企业的生产,有效可靠的状态监测与故障诊断技术是设备安全运行的保障。设备在运行过程中,与运行状态有关的各种物理量,如位移、速度、加速度、噪声、温度、压力、电压和电流等随时间的变化呈现一定的规律,有效地分析与处理这些信息,建立它们与设备之间的联系,是设备故障诊断的基础。由于机械设备发生故障时,其动态性能劣化,会出现机器运行失稳与产生异常振动和噪声等,因此目前常用的故障诊断技术主要是基于振动信号测量与分析的振动诊断技术。振动信号特征提取是实现故障诊断的重要手段。常用的信号特征包括时域特征、频域特征和时频域特征等,工业中应用最广泛的还是频域特征,即 DFT 频谱分析。

对于旋转机械设备,常用的振动传感器为振动加速度传感器。振动加速度传感器产生的是模拟信号,为了对其进行 DFT 分析需要对其采样。根据时域采样定理,采样频率 f_s 要大于或等于 $2f_c$,否则会产生频率混叠现象。在振动分析领域,考虑到计算机识别二进制的表示方式,一般选择 $f_s = 2.56f_c$ 。采样点数 N 的选取与要求的频率分辨率有关,一般用 1024 的整数倍表示,如某机组采样获得 16K 加速度波形,这里 K 代表 1024,即采样点数为 $16 \times 1024 = 16384$ 。

这里,再来示例采样点数 N 、频率分辨率 F 与最高分析频率 f_c 之间的关系。假设某电机轴承转速 $n = 3000 \text{ r/min}$,则对应工频(或转速频率) $f = 50 \text{ Hz}$ 。若要分析的故障频率在 8 倍频以下,则可认为需要分析的信号最高频率 $f_c = 8 \times 50 = 400 \text{ Hz}$,采样频率 $f_s = 2.56 \times 400 = 1024 \text{ Hz}$ 。频率分辨率 F 是频谱图上相邻两根谱线之间的频率间隔,常用的有 1 Hz 、 0.5 Hz 、 0.25 Hz 三种。本例中,若要求频率分辨率 $F = 1 \text{ Hz}$,则采样点数 $N = f_s / F = 1024$ 。按照 DFT 定义,在频域可以得到 1024 点的谱线。考虑到 DFT 的共轭对称性,只有前 512 点的谱线具有实际物理含义,因此只要分析这 512 点的谱线即可。但是,由于频率混叠和截断效应的影响,一般认为 401~512 谱线的频谱精度不高而不予考虑,这样在具体应用时只需分析前 400 个点的谱线值。

工业应用中的分析软件定义了谱线数 M 的概念, M 即是工业软件在频率分析中实际显示的频率成分的点的个数。采样点数 N 和谱线数 M 的关系为 $N = 2.56M$ 。信号分析中常用的采样点数是 512、1024、2048 和 4096 等,等效于谱线数为 200、400、800 和 1600。

图 3-34(a)所示为某机组驱动端轴承采样得到的加速度波形,轴承型号为斯凯孚公司 6205-2RS 深沟球轴承,其内圈故障和外圈故障频率分别为转速频率的 5.4152 和 3.5848 倍。已知采样频率 $f_s = 12 \text{ kHz}$,电机平均转速 $n = 1796 \text{ r/min}$,即转速频率 $f = 29.93 \text{ Hz}$,则外圈故障频率 $f_o = 3.5848 \times 1796 / 60 \approx 107.305 \text{ Hz}$,内圈故障频率 $f_i \approx 162 \text{ Hz}$ 。图 3-34(b)和图 3-34(c)分别为原始信号频谱和包络谱。由图可见,包络谱获得了信号故障特征频率,其幅值最大频率分量为 107.614 Hz ,与理论计算的外圈故障频率一致,因此可判断测试对象的故障为滚动轴承外圈故障。

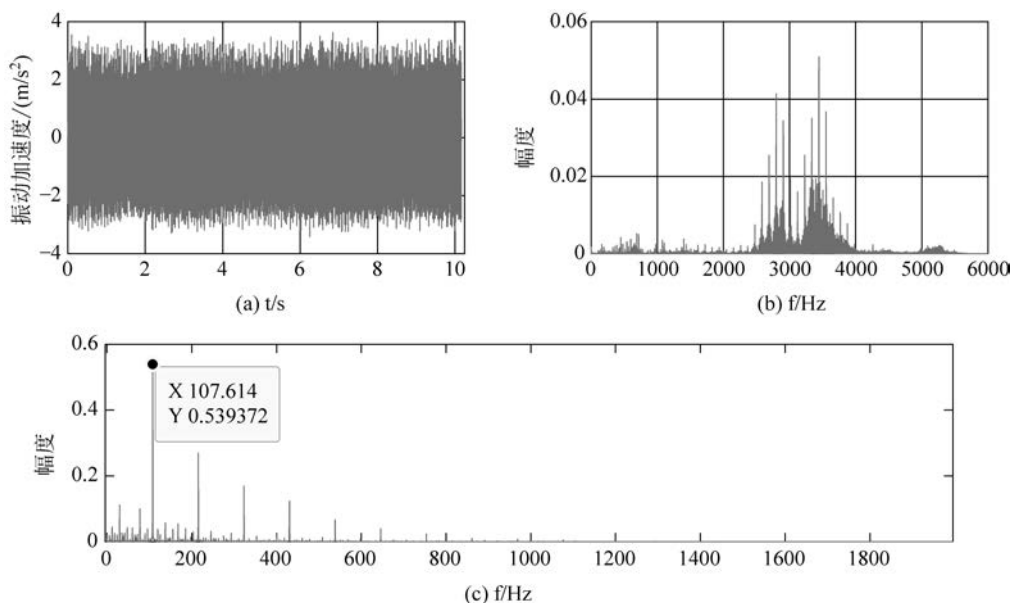


图 3-34 某机组采样得到的时域波形、频谱及包络谱

本章小结

(1) 离散傅里叶变换(DFT)是有限长序列的傅里叶变换,其时域及频域都是离散的信号。这一对变换可表示为

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad 0 \leq n \leq N-1$$

(2) 归纳 4 种不同形式的傅里叶变换,有以下规律:如果信号频域是离散的,则表现为周期性的时间函数。相反,在时域上是离散的,则该信号在频域必然表现为周期性的频率函数。所以要讨论 DFT,一般要先从周期性序列的离散傅里叶级数开始讨论,然后讨论可作周期函数一个周期的有限长序列的离散傅里叶变换。

周期序列的离散傅里叶级数(DFS)的一对变换的表达式为

$$\tilde{X}(k) = \text{DFS}[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{nk}$$

$$\tilde{x}(n) = \text{IDFS}[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-nk}$$

(3) 有限长序列 $x(n)$ 和周期序列之间的联系为

$$x(n) = \begin{cases} \tilde{x}(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad \text{或} \quad x(n) = \tilde{x}(n) R_N(n)$$

$$\tilde{x}(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n+rN)$$

(4) 离散傅里叶变换(DFT)与Z变换以及序列傅里叶变换(DTFT)的关系:

DFT与Z变换的关系—— $X(k) = X(z) \Big|_{z=W_N^{-k}}$, 即 $X(k)$ 是Z变换在单位圆上的 N 点等间隔采样。

DFT与序列傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 的关系—— $X(k) = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$, 即 $X(k)$ 可以看作序列 $x(n)$ 的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的 N 点等间隔采样, 其采样间隔为 $\omega = \frac{2\pi}{N}$, 这就是DFT的物理意义。

(5) DFT的主要性质有线性、圆周移位特性、圆周卷积、共轭对称性等。

(6) 频域采样理论——抽样Z变换:

对于 M 点的有限长序列 $x(n)$, 如果频域采样点数 $N \geq M$, 则可由频域采样值 $X(k)$ 恢复出原序列 $x(n)$, 否则产生时域混叠现象, 这就是所谓的频域采样定理。

用 N 个频域采样来恢复 $X(z)$ 的内插公式为

$$X(z) = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$$

(7) 用DFT计算线性卷积:

设 $x_1(n)$ 是长度为 N_1 的有限长序列, $x_2(n)$ 是长度为 N_2 的有限长序列, 它们的线性卷积为

$$y_l(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=0}^{N_1-1} x_1(m) x_2(n-m)$$

它们的圆周卷积为

$$y_c(n) = x_1(n) \otimes x_2(n) = \left[\sum_{m=0}^{L-1} x_1(m) x_2((n-m)_L) \right] R_L(n)$$

线性卷积和圆周卷积的关系为

$$y_c(n) = \left[\sum_{r=-\infty}^{\infty} y_l(n+rL) \right] R_L(n)$$

圆周卷积等于线性卷积而不产生混叠失真的充要条件是

$$L \geq N_1 + N_2 - 1$$

(8) 用DFT进行频谱分析:

$$X_a(k) = T \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = T \cdot \text{DFT}[x(n)]$$

$$x(n) = x_a(nT) = \frac{1}{T} \text{IDFT}[X_a(k)]$$

即连续非周期信号的频谱可以通过对连续信号采样后进行DFT并乘以系数 T 的方法近似得到, 而对该DFT值作反变换并除以系数 T 就得到时域采样信号。

利用DFT对连续非周期信号进行谱分析时, 时域与频域都要作采样和截断, 所用到的相关公式为

$$T = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{NF} = \frac{T_p}{N}; \quad F = \frac{1}{T_p} = \frac{1}{NT} = \frac{f_s}{N}$$

要注意的是,在用 DFT 逼近连续非周期信号的傅里叶变换过程中,除了对幅度的线性加权外,由于用到了采样与截断的方法,因此也可能会带来一些产生的问题,使谱分析产生误差,例如混叠效应、截断效应、栅栏效应等。

习题

3-1 计算以下序列的 N 点离散傅里叶变换。

(1) $x(n) = \delta(n - n_0)$;

(2) $x(n) = R_4(n)$;

(3) $x(n) = e^{j\frac{2\pi}{N}nm}$, $0 \leq m < N$;

(4) $x(n) = e^{j\omega_0 n} R_N(n)$;

(5) $x(n) = \sin(\omega_0 n) R_N(n)$ 。

3-2 长度为 $N=10$ 的两个有限长序列

$$x_1(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & 5 \leq n \leq 9 \end{cases}; \quad x_2(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 4 \\ -1, & 5 \leq n \leq 9 \end{cases}$$

试分别用图解法和列表法求 $y(n) = x_1(n) \otimes x_2(n)$ 。

3-3 设 $x(n) = R_4(n)$, $\tilde{x}(n) = x((n))_6$, 试求 $\tilde{X}(k)$, 并画出 $\tilde{x}(n)$ 和 $\tilde{X}(k)$ 的图形。

3-4 证明 DFT 的对称定理, 即假设 $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$, 试证明:

$$\text{DFT}[X(n)] = Nx(N-k)$$

3-5 证明离散傅里叶变换的下列对称性质。

(1) $x^*(n) \leftrightarrow X^*((-k))_N R_N(k)$;

(2) $x^*((-n))_N R_N(n) \leftrightarrow X^*(k)$;

(3) $\text{Re}[x(n)] \leftrightarrow X_{\text{ep}}(k)$;

(4) $j\text{Im}[x(n)] \leftrightarrow X_{\text{op}}(k)$ 。

3-6 证明若 $x(n)$ 实偶对称, 即 $x(n) = x(N-n)$, 则 $X(k)$ 也是实偶对称; 若 $x(n)$ 实奇对称, 即 $x(n) = -x(N-n)$, 则 $X(k)$ 为纯虚函数并奇对称。(注: $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$)

3-7 已知长度为 N 的有限长序列 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的关系为 $x_2(n) = x_1(N-1-n)$ 。设 $\text{DFT}[x_1(n)] = X_1(k)$, 试证明 $\text{DFT}[x_2(n)] = W_N^{-k} X_1(N-k)$ 。

3-8 已知序列 $x(n) = a^n u(n)$, $0 < a < 1$, 对 $x(n)$ 的 Z 变换 $X(z)$ 在单位圆上等间隔采样 N 点, 采样值为

$$X(k) = X(z) \Big|_{z=W_N^{-k}}, \quad k=0, 1, \dots, N-1$$

求有限长序列 $\text{IDFT}[X(k)]$ 。

3-9 已知序列 $x(n) = a^n R_8(n)$, $X(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[x(n)]$, 对 $X(e^{j\omega})$ 在 ω 的一个周期 ($0 \leq \omega \leq 2\pi$) 内进行等间隔采样, 采样点数为 6 点, 采样值为

$$X(k) = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=2\pi k/6}, \quad k=0, 1, \dots, 5$$

试根据频率采样定理求有限长序列 $x_6(n) = \text{IDFT}[X(k)]$, $n=0, 1, \dots, 5$ 。

3-10 已知两个序列 $x(n) = \{1, 2, 3, 4, 5, 0, 0\}$, $y(n) = \{1, 1, 1, 1, 0, 0, 0\}$, 试求:

(1) 它们的周期卷积(周期长度为 $N=7$);

(2) 它们的圆周卷积(序列长度为 $N=7$);

(3) 用圆周卷积定理求这两个序列的线性卷积, 它与上述两结果又有何不同(请用 $N_1=5$ 和 $N_2=4$ 来做)?

3-11 已知两个序列 $x(n) = n+1, 0 \leq n \leq 3$, $y(n) = (-1)^n, 0 \leq n \leq 3$, 用圆周卷积法求这两个序列的线性卷积。

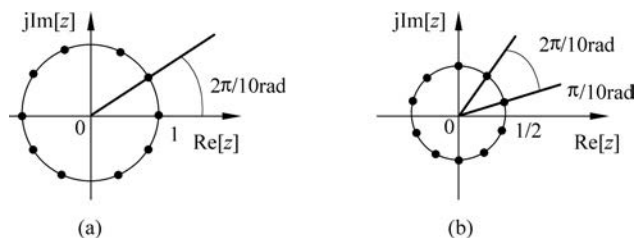
3-12 已知两个序列 $x_1(n) = (0.5)^n R_4(n)$, $x_2(n) = R_4(n)$, 求它们的线性卷积以及 4 点、6 点和 8 点的圆周卷积。

3-13 已知 $x(n)$ 是长度为 N 的有限长序列, $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$, 现将长度扩大 r 倍, 得长度为 rN 的有限长序列 $y(n)$ 为

$$y(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & N \leq n \leq rN-1 \end{cases}$$

求 $\text{DFT}[y(n)]$ 与 $X(k)$ 的关系。

3-14 有限宽序列的离散傅里叶变换相当于其 Z 变换在单位圆上的采样。例如 10 点序列 $x(n)$ 的离散傅里叶变换相当于 $X(z)$ 在单位圆 10 个均分点上的采样, 如图题 3-14(a) 所示, 希望求出图题 3-14(b) 所示圆周上 $X(z)$ 的等间隔采样, 即 $X(z) \Big|_{z=0.5e^{j[(2k\pi/10)+(\pi/10)]}}$, 如何修改 $x(n)$, 才能得到序列 $x_1(n)$, 使其离散傅里叶变换相当于上述的 $X(z)$ 采样。



图题 3-14

3-15 (1) 模拟数据以 10.24kHz 速率采样, 且计算了 1024 个采样的离散傅里叶变换。求频谱采样之间的频率间隔。

(2) 以上数据经处理以后又进行了离散傅里叶反变换, 求离散傅里叶反变换后采样点的间隔是多少? 整个 1024 点的时宽为多少?

3-16 若 $x(n)$ 表示长度 $N=8$ 点的有限长序列, $y(n)$ 表示长度 $N=20$ 点的有限长序列, $R(k)$ 为两个序列 20 点的离散傅里叶变换相乘, 求 $r(n)$, 并指出 $r(n)$ 的哪些点与 $x(n)$ 、 $y(n)$ 的线性卷积相等。

3-17 两个有限长序列 $x(n)$ 和 $y(n)$ 的零值区间为

$$x(n) = 0, \quad n < 0, 8 \leq n$$

$$y(n) = 0, \quad n < 0, 20 \leq n$$

对每个序列作 20 点 DFT, 即

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)], \quad k = 0, 1, \dots, 19$$

$$Y(k) = \text{DFT}[y(n)], \quad k = 0, 1, \dots, 19$$

如果

$$F(k) = X(k) \cdot Y(k) \quad k = 0, 1, \dots, 19$$

$$f(n) = \text{IDFT}[F(k)], \quad k = 0, 1, \dots, 19$$

试问在哪些点上 $f(n) = x(n) * y(n)$? 为什么?

3-18 已知序列 $x(n)$ 的长度为 120 点, 序列 $y(n)$ 的长度为 185 点, 若计算 $x(n)$ 和 $y(n)$ 的 256 点圆周卷积, 试分析结果中相当于 $x(n)$ 与 $y(n)$ 的线性卷积的范围是多少?

3-19 已知一个有限长序列为

$$x(n) = \delta(n-2) + 3\delta(n-4)$$

(1) 求它的 8 点离散傅里叶变换 $X(k)$;

(2) 已知序列 $y(n)$ 的 8 点离散傅里叶变换为 $Y(k) = W_8^{4k} X(k)$, 求序列 $y(n)$ 。

3-20 已知一个长度为 10 的有限长序列

$$x(n) = 5\delta(n-4) + \delta(n-5) + 4\delta(n-6)$$

(1) 试求它的 10 点离散傅里叶变换 $X(k)$;

(2) 若序列 $y(n)$ 的 10 点离散傅里叶变换为 $Y(k) = W_{10}^{5k} X(k)$, 求 $\text{IDFT}[Y(k)]$;

(3) 若已知另一长度为 8 的序列 $g(n)$ 为实序列, 其 8 点 DFT 的前 5 点值为 $\{4.161, 0.710 - j0.926, 0.507 - j0.406, 0.470 - j0.171, 0.462\}$, 写出 8 点 DFT 的后 3 点值。

3-21 用微处理机对实序列作谱分析, 要求谱分辨率 $F \leq 50\text{Hz}$, 信号最高频率为 1kHz , 试确定以下各参数:

(1) 最小记录时间 T_{pmin} ;

(2) 最大取样间隔 T_{max} ;

(3) 最少采样点数 N_{min} ;

(4) 在频带宽度不变的情况下, 将频谱分辨率提高一倍的 N 值。

3-22 已知调幅信号的载波频率 $f_c = 1\text{kHz}$, 调制信号频率 $f_m = 100\text{Hz}$, 用 FFT 对其进行谱分析, 试确定以下各参数:

(1) 最小记录时间 T_p ;

(2) 最低采样频率 f_s ;

(3) 最少采样点 N 。

3-23 若 $x_1(n)$ 是长度为 50 点的有限长序列, 非零区间为 $0 \leq n \leq 49$, $x_2(n)$ 是长度为 15 点的有限长序列, 非零区间为 $5 \leq n \leq 19$, 对两序列做 50 点的圆周卷积, 即

$$y(n) = \sum_{m=0}^{49} x_1(m) x_2((n-m))_{50} R_{50}(n)$$

指出 $y(n)$ 的哪些点与 $x_1(n) * x_2(n)$ 的结果相等。

3-24 以 20kHz 的采样率对最高频率为 10kHz 的带限信号 $x_a(t)$ 采样, 然后计算 $x(n)$ 的 $N=1000$ 个采样点的 DFT, 即

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad N=1000$$

试求: (1) $k=150$ 对应的模拟频率是多少? $k=800$ 呢?

(2) 频谱采样点之间的间隔是多少?

3-25 假设以 8kHz 速率对一段长为 10s 的语音信号采样,现用一个长度 $L=64$ 的 FIR 滤波器 $h(n)$ 对其进行滤波,若采用 DFT 为 1024 点的重叠保留法,那么共需要多少次 DFT 变换和多少次 IDFT 变换来进行卷积?

3-26 对一个连续时间信号 $x(t)$ 进行采样,采样频率为 8192Hz,共采样 500 点,得到一个有限长序列 $x(n)$,试:

(1) 通过 DFT 方法分析该序列在 800Hz 频率处的频率特性,应如何做?

(2) 如果只能一次进行 256 点数值的 FFT 运算,用什么办法能实现信号 $x(n)$ 的谱分析?

3-27 研究偶对称序列傅里叶变换的特点。

(1) 令 $x(n)=1, n=-N, \dots, 0, \dots, N$, 求 $X(e^{j\omega})$;

(2) 令 $x_1(n)=1, n=0, 1, \dots, N$, 求 $X_1(e^{j\omega})$;

(3) 令 $x_2(n)=1, n=-N, -N+1, \dots, -1$, 求 $X_2(e^{j\omega})$;

(4) 容易看出 $x(n)=x_1(n)+x_2(n)$, 试分析 $X(e^{j\omega}), X_1(e^{j\omega}), X_2(e^{j\omega})$ 有何关系。

3-28 已知序列 $x(n)=\cos(n\pi/6)$, 其中 $n=0, 1, \dots, N-1$, 而 $N=12$ 。借助 MATLAB 工具求解下列问题:

(1) 求 $x(n)$ 的 DTFT $X(e^{j\omega})$ 和 DFT $X(k)$;

(2) 若在 $x(n)$ 后补 N 个零, 得到 $x_1(n)$, 即 $x_1(n)$ 为 $2N$ 点序列, 再求 $x_1(n)$ 的 DFT $X_1(k)$;

(3) 经过上面的求解后, 对正弦信号采样及其 DFT 和 DTFT 之间的关系, 能总结出什么结论?

3-29 给定信号 $x(t)=\sin(2\pi f_0 t)$, $f_0=50\text{Hz}$, 现对 $x(t)$ 采样, 设采样点数 $N=16$ 。因为正弦信号 $x(t)$ 的频谱是在 $\pm f_0$ 处的 $\delta(\cdot)$ 函数, 将 $x(t)$ 采样变成 $x(n)$ 后, 若采样频率及数据长度 N 取得合适, 那么 $x(n)$ 的 DFT 也应是在 $\pm 50\text{Hz}$ 的 $\delta(\cdot)$ 函数。根据 DFT 形式下的帕斯瓦尔 (Parseval) 定理, $\sum_{n=0}^{N-1} x^2(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$, 可以得到 $E_t = \sum_{n=0}^{N-1} x^2(n) = \frac{2}{N} |X_{f_0}|^2 = E_f$, 其中, X_{f_0} 表示 $x(n)$ 的 DFT $X(k)$ 对应 f_0 处的谱线, 若上式不成立, 说明 $X(k)$ 在频域有泄漏。

给定下面三种采样频率: $f_s=100\text{Hz}$; $f_s=150\text{Hz}$; $f_s=200\text{Hz}$ 。

(1) 分别画出 $x(n)$ 及 $X(k)$ 的 MATLAB 仿真波形;

(2) 利用题(1)的结果, 分别求出 $x(n)$ 及 $X(k)$, 然后用帕斯瓦尔定理讨论其泄漏情况;

(3) 总结对正弦信号采样应掌握的原则。