



第5章 控制系统的频域分析法

CHAPTER 5

学习目标

- (1) 理解频率特性的基本概念,学会频率特性的几种几何表示方法。
- (2) 掌握最小相位和非最小相位典型环节的幅相频率特性曲线、对数频率特性曲线的特点。
- (3) 掌握由系统开环传递函数绘制概略开环幅相频率特性曲线和开环对数幅频渐近特性曲线及对数相频特性曲线的方法,学会应用频率域稳定判据判断闭环系统的稳定性。
- (4) 掌握由具有最小相位性质的系统开环对数幅频渐近特性曲线求开环传递函数的方法。
- (5) 理解幅值裕度和相角裕度的概念,并会求解。
- (6) 理解系统开环频域指标和时域指标的关系(特别是典型二阶系统),理解三频段法分析闭环系统性能的方法。
- (7) 理解系统闭环频域指标与开环频域指标、时域指标的关系。

本章重点

- (1) 典型环节的频率特性。
- (2) 系统概略开环幅相频率特性曲线和开环对数幅频渐近特性曲线的绘制。
- (3) 奈奎斯特稳定判据和对数频率稳定判据及其应用。
- (4) 幅值裕度和相角裕度的求解。
- (5) 利用开环频率特性分析闭环系统性能的三频段法。

频域分析法是经典控制理论中研究线性系统的3种方法之一。它是利用系统的频率特性来分析和设计控制系统的一种图解方法。相较于时域分析法和根轨迹法,频域分析法具有以下特点:

- (1) 控制系统或元件的频率特性可以由分析法和实验法确定,且具有明确的物理意义;
- (2) 频率特性可以用多种形式的几何方法表示,因此可以运用图解法对控制系统进行研究,从而避免了求解微分方程时的一些烦琐计算;
- (3) 频域分析法是通过开环频率特性来分析闭环系统的性能,且能较方便地分析系统参数对系统性能的影响,从而进一步提出改善系统性能的方法;
- (4) 控制系统的频域设计可以兼顾动态响应和噪声抑制两方面的要求;
- (5) 频域分析法既适用于线性定常系统,在一定条件下,也能推广应用于某些非线性控

制系统(如含有延迟环节的系统)。

因此,频域分析法在工程实际中得到了广泛的应用。

5.1 频率特性的基本概念



视频讲解

控制系统的频率特性,指系统在不同频率的正弦信号作用下,其稳态响应随输入信号频率变化(ω 从 0 变到 ∞)而变化的特性,它是控制系统的频率域数学模型。

5.1.1 控制系统在正弦信号作用下的稳态响应

设有 n 阶稳定的线性定常系统,其传递函数的零极点形式表达式为

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_m(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{a_n(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

为讨论方便且不失一般性,假设 n 个极点 p_i ($i=1,2,\cdots,n$) 都是单极点。

当输入为正弦信号 $r(t)=A\sin\omega t$ 时,有

$$R(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$$

则输出响应的拉普拉斯变换为

$$\begin{aligned} C(s) &= G(s)R(s) = \frac{b_m(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{a_n(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} \cdot \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{s-p_i} + \frac{B}{s-j\omega} + \frac{D}{s+j\omega} \end{aligned} \quad (5-1-1)$$

式(5-1-1)中, C_i ($i=1,2,\cdots,n$)、 B 、 D 为待定常数。

对式(5-1-1)两端取拉普拉斯反变换,得系统的输出响应为

$$c(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{p_i t} + B e^{j\omega t} + D e^{-j\omega t}$$

由于系统稳定,所以当 $t \rightarrow \infty$ 时,上式右端第一项趋于 0。系统的稳态响应为

$$c_{ss}(t) = B e^{j\omega t} + D e^{-j\omega t}$$

其中

$$\begin{aligned} B &= (s-j\omega)G(s) \cdot \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} \Big|_{s=j\omega} = \frac{A \cdot G(j\omega)}{2j} = \frac{A |G(j\omega)|}{2j} e^{j\angle G(j\omega)} \\ D &= (s+j\omega)G(s) \cdot \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} \Big|_{s=-j\omega} = \frac{A \cdot G(-j\omega)}{-2j} = -\frac{A |G(j\omega)|}{2j} e^{-j\angle G(j\omega)} \end{aligned}$$

则有

$$c_{ss}(t) = A |G(j\omega)| \left(\frac{e^{j\angle G(j\omega)} e^{j\omega t} - e^{-j\angle G(j\omega)} e^{-j\omega t}}{2j} \right)$$

根据欧拉公式得

$$c_{ss}(t) = A |G(j\omega)| \sin[\omega t + \angle G(j\omega)] \quad (5-1-2)$$

式(5-1-2)表明,稳定的线性定常系统在正弦信号作用下的稳态响应,是与输入同频率的正弦信号,其与输入信号的幅值之比是 $G(j\omega)$ 的幅值 $|G(j\omega)|$,相位之差是 $G(j\omega)$ 的相角

$\angle G(j\omega)$, 它们都是输入信号频率 ω 的函数。

5.1.2 频率特性

1. 频率特性的定义

线性定常系统在正弦信号作用下, 稳态响应与输入信号的幅值之比定义为系统的幅频特性, 相位之差定义为系统的相频特性, 分别用 $A(\omega)$ 和 $\varphi(\omega)$ 表示。即

$$\begin{cases} A(\omega) = |G(j\omega)| \\ \varphi(\omega) = \angle G(j\omega) \end{cases}$$

指数形式表达式为

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\angle G(j\omega)} = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)} \quad (5-1-3)$$

将式(5-1-3)定义为系统的频率特性。频率特性也可以表示成复数形式, 即

$$G(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$$

$P(\omega)$ 称为系统的实频特性, $Q(\omega)$ 称为系统的虚频特性。可得到

$$\begin{cases} P(\omega) = A(\omega) \cos\varphi(\omega) \\ Q(\omega) = A(\omega) \sin\varphi(\omega) \\ A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} \\ \varphi(\omega) = \arctan \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} \end{cases}$$

上述频率特性的定义是通过稳定系统推导出来的, 实际上也适用于不稳定系统。稳定系统的频率特性可以通过实验的方法确定, 即将不同频率的正弦信号加到系统的输入端, 在输出端测量系统的稳态响应, 根据幅值比和相位差就可获得系统的频率特性。而不稳定系统的频率特性是不能用实验方法确定的。

2. 频率特性与传递函数的关系

由 5.1.1 节的推导过程可以看出, 将系统传递函数 $G(s)$ 中的复变量 s 用 $j\omega$ 代替, 就得到系统的频率特性 $G(j\omega)$, 即

$$G(j\omega) = G(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{C(s)}{R(s)} \Big|_{s=j\omega} = \frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} \quad (5-1-4)$$

式(5-1-4)中, $C(j\omega)$ 和 $R(j\omega)$ 可以看作输出和输入的傅里叶变换。也就是说, 稳定系统的频率特性等于输出和输入的傅里叶变换之比, 这正是频率特性的物理意义。

同微分方程和传递函数一样, 频率特性也只取决于系统的结构和参数, 表征了系统本身的特性和运动规律, 是描述线性控制系统的数学模型之一。

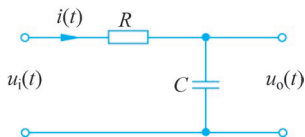


图 5-1-1 RC 无源网络

例 5-1 求图 5-1-1 所示 RC 无源网络的频率特性。

解: RC 无源网络的传递函数为

$$G(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{1}{RCs + 1} = \frac{1}{Ts + 1}$$

其中 $T = RC$ 为时间常数。令 $s = j\omega$, 得到网络的频率特性为

$$G(j\omega) = G(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{1}{1 + j\omega T} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}} e^{-j\arctan\omega T} = \frac{1}{1 + (\omega T)^2} + j \frac{-\omega T}{1 + (\omega T)^2}$$

$$\text{幅频特性为} \quad A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega T)^2}} \quad (5-1-5)$$

$$\text{相频特性为} \quad \varphi(\omega) = -\arctan \omega T \quad (5-1-6)$$

$$\text{实频特性为} \quad P(\omega) = \frac{1}{1+(\omega T)^2}$$

$$\text{虚频特性为} \quad Q(\omega) = \frac{-\omega T}{1+(\omega T)^2}$$

5.1.3 频率特性的几何表示法

在工程实际中,采用频域分析法对控制系统进行分析和设计时,通常将频率特性绘制成曲线,然后运用图解法研究。下面介绍几种常见的频率特性曲线。

1. 幅频特性曲线和相频特性曲线

(1) 幅频特性曲线。在以频率 ω 为横轴、幅频特性 $A(\omega)$ 为纵轴的直角坐标平面上,绘制出 $A(\omega)$ 随 ω 变化而变化的曲线,即为幅频特性曲线。

(2) 相频特性曲线。在以频率 ω 为横轴、相频特性 $\varphi(\omega)$ 为纵轴的直角坐标平面上,绘制出 $\varphi(\omega)$ 随 ω 变化而变化的曲线,即为相频特性曲线。

例 5-2 试绘制图 5-1-1 所示 RC 无源网络的幅频特性和相频特性曲线。

解: 根据例 5-1 中求出的幅频特性和相频特性的表达式 (5-1-5) 和式 (5-1-6), 计算出 $A(\omega)$ 和 $\varphi(\omega)$ 随频率 ω 变化的值如表 5-1-1 所示。

表 5-1-1 $A(\omega)$ 和 $\varphi(\omega)$ 随频率 ω 变化的值

ω	0	$1/2T$	$1/T$	$2/T$	$3/T$	$4/T$	$5/T$	∞
$A(\omega)$	1	0.894	0.707	0.447	0.316	0.243	0.196	0
$\varphi(\omega)$	0	-26.6°	-45°	-63.5°	-71.5°	-76°	-78.7°	-90°

由表中数据采用描点法画出幅频特性曲线和相频特性曲线如图 5-1-2 所示。

2. 幅相频率特性曲线

在以 $G(j\omega)$ 的实部为横轴(实轴)、虚部为纵轴(虚轴)的复平面(简称 G 平面)上,将频率 ω 作为参变量,绘制出幅频特性 $A(\omega)$ 和相频特性 $\varphi(\omega)$ 之间的关系曲线,即为幅相频率特性曲线,又称奈奎斯特(Nyquist)曲线或极坐标图。

由式(5-1-3)可知,频率特性 $G(j\omega)$ 为 G 平面上的向量,向量的长度为幅频特性 $A(\omega)$, 向量与实轴正方向的夹角等于相频特性 $\varphi(\omega)$, 且逆时针方向为正。当 ω 从 0 到 ∞ 变化时, 向量的端点在 G 平面上画出的曲线就是幅相频率特性曲线。通常用箭头表明 ω 增大时幅相特性曲线的变化方向, 并把 ω 标在箭头旁边。

例 5-3 画出图 5-1-1 所示 RC 无源网络的幅相频率特性曲线。

解: 由表 5-1-1 中数据采用描点法画出 RC 网络的幅相频率特性曲线如图 5-1-3 所示。

3. 对数频率特性曲线

对数频率特性曲线也称伯德(Bode)图,包括对数幅频特性曲线和对数相频特性曲线,是工程中广泛使用的一组曲线。

(1) 对数幅频特性曲线。

在以频率 ω 为横轴、幅频特性 $A(\omega)$ 的对数值 $L(\omega) = 20\lg A(\omega)$ 为纵轴的坐标平面上,

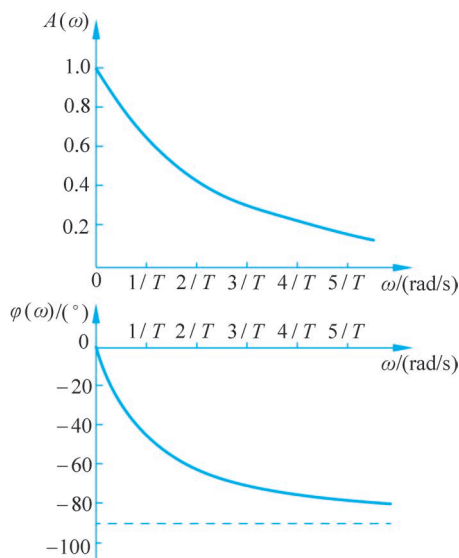


图 5-1-2 RC 网络的幅频特性和相频特性曲线

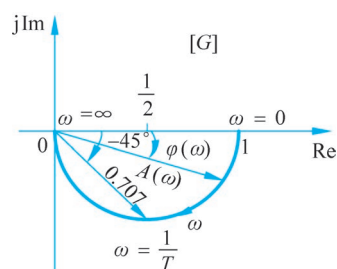


图 5-1-3 RC 网络的幅相频率特性曲线

绘制出 $L(\omega)$ 随 ω 变化而变化的曲线,即为对数幅频特性曲线。其中,纵坐标单位是 dB(分贝),为线性分度,即 $A(\omega)$ 每变化 10 倍, $L(\omega)$ 变化 20dB; 横坐标单位是弧度/秒(rad/s),以 ω 对数分度,即 ω 取常用对数后是线性分度,但为了便于观察仍标注为频率 ω ,因此横坐标对于 ω 而言不是线性分度。

对数分度如图 5-1-4 所示。当频率 ω 每变化 10 倍(称为十倍频程或 dec)时,坐标间距离变化一个单位长度。

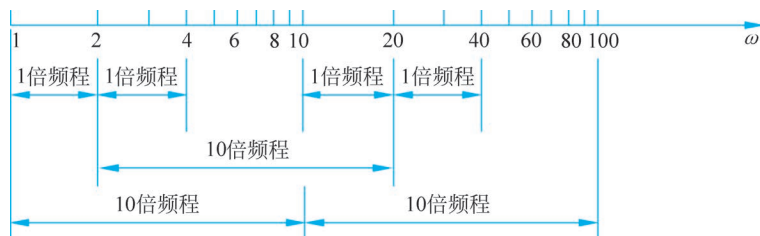


图 5-1-4 对数分度

(2) 对数相频特性曲线。

在以频率 ω 为横轴、相频特性 $\varphi(\omega)$ 为纵轴的坐标平面上,绘制出 $\varphi(\omega)$ 随 ω 变化而变化的曲线,即为对数相频特性曲线。其中,纵坐标单位是度($^\circ$),为线性分度;横坐标与对数幅频特性曲线的横坐标相同。

综上所述,对数频率特性曲线具有如下特点。

(1) 对数幅频特性和对数相频特性的纵坐标,分别以对数幅频分贝数和相频度数线性分度,是均匀的;横坐标以频率对数分度,但标注的是频率的实际值,是不均匀的。由此构成的坐标系称为半对数坐标系。

(2) 横轴上,对应于频率每变化十倍的范围,称为十倍频程(dec),横轴上所有十倍频程的长度是相等的。

(3) 横坐标采用 ω 的对数分度扩大了频带宽度,便于在较大频率范围反映频率特性的变化情况。

(4) 对数幅频特性采用 $20\lg A(\omega)$ 将幅值的乘除运算化为加减运算,简化了曲线的绘制过程。

(5) 为了说明对数幅频特性的特点,引入斜率的概念。半对数坐标系中的直线斜率为

$$k = \frac{L(\omega_2) - L(\omega_1)}{\lg \omega_2 - \lg \omega_1} \quad (5-1-7)$$

例 5-4 画出图 5-1-1 所示 RC 无源网络当 $T=1$ 时的对数频率特性曲线。

解: 由表 5-1-1 中数据采用描点法画出 RC 网络当 $T=1$ 时的对数频率特性曲线如图 5-1-5 所示。

4. 对数幅相频率特性曲线

在以相频特性 $\varphi(\omega)$ 为横轴、对数幅频特性 $L(\omega)$ 为纵轴的直角坐标平面上,将 ω 作为参变量,绘制出 $L(\omega)$ 与 $\varphi(\omega)$ 的关系曲线,即为对数幅相频率特性曲线,也称尼柯尔斯(Nichols)图。其中,纵坐标单位是 dB(分贝),横坐标单位是度($^\circ$),均为线性分度。

对于如图 5-1-6 所示的典型线性定常控制系统,其频率特性根据反馈点是否断开,分为开环频率特性和闭环频率特性。频域分析法一般是基于开环频率特性来分析和设计系统的。在开环频率特性中,工程中广泛使用的是幅相频率特性曲线和对数频率特性曲线,下文将分别详细介绍。

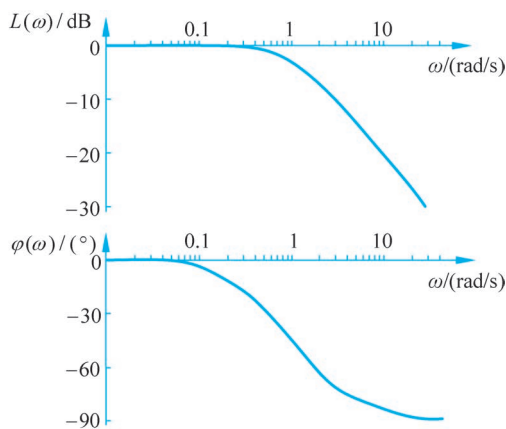


图 5-1-5 $T=1$ 时 RC 网络的对数频率特性曲线

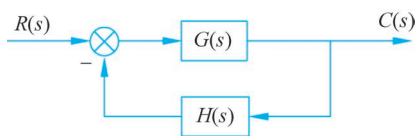


图 5-1-6 典型线性定常控制系统的结构图

5.1.4 MATLAB 实现

1. 控制系统在正弦信号作用下稳态响应的 MATLAB 实现

控制系统在正弦信号作用下的稳态响应可以用 MATLAB 提供的 `lsim()` 函数实现。

例 5-5 已知某控制系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{2s + 1}{s^2 + 3s + 2}$$

当输入信号为 $r(t) = \sin t$ 时,求系统的输出响应。

解: MATLAB 程序如下。

```

clc;clear
num = [2,1];
den = [1,3,2];
G = tf(num,den);
t = 0:0.1:20;
r = sin(t);
y = lsim(G,r,t);
plot(t,r,t,y); grid;
xlabel('t');
gtext('r(t)');
gtext('c(t)');

```

运行结果如图 5-1-7 所示。可见,正弦信号作用下的稳态响应,是与输入同频率的正弦信号,仅幅值与相位不同。

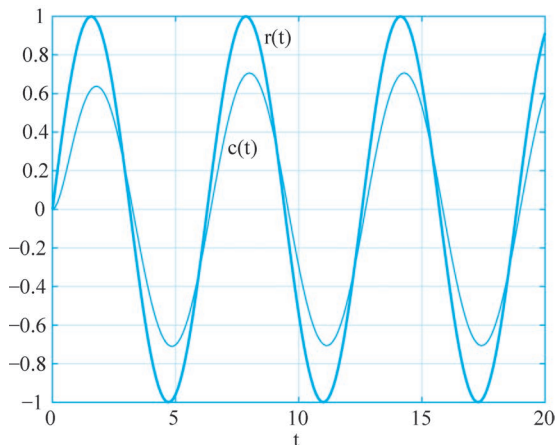


图 5-1-7 例 5-5 的运行结果

2. 系统频率特性的 MATLAB 实现

系统的频率特性可以用 MATLAB 提供的 `freqs()` 函数来分析。该函数可以求出系统频率特性的数值解,也可以绘出系统的幅频和相频特性曲线,其调用格式如下:

```

G = freqs(num,den,w)    % w 是形如 w1:p:w2 的频率范围,向量 G 返回向量 w 所定义的频率点上的频率特性的样值
[G,w] = freqs(b,a)      % 向量 G 返回默认频率范围内 200 个频率点上的频率特性的样值,200 个频率点记录在 w 中
[G,w] = freqs(b,a,n)    % 向量 G 返回默认频率范围内 n 个频率点上的频率特性的样值,n 个频率点记录在 w 中
freqs(b,a)              % 该调用格式不返回频率特性的样值,直接绘出系统的幅频和相频特性曲线

```

例 5-6 画出例 5-5 中系统的幅频特性 $A(\omega)$ 和相频特性 $\varphi(\omega)$ 曲线。

解: MATLAB 程序如下。

```

clc;clear
w = [0:0.01:10];
num = [2,1];
den = [1,3,2];
G = freqs(num,den,w);
subplot(2,1,1);
plot(w,abs(G));
xlabel('\omega(rad/s)');

```



```

ylabel('A(\omega)');
grid on;
subplot(2,1,2);
plot(w,angle(G));
xlabel('\omega(rad/s)');
ylabel('\phi(\omega)');
grid on;

```

运行结果如图 5-1-8 所示。

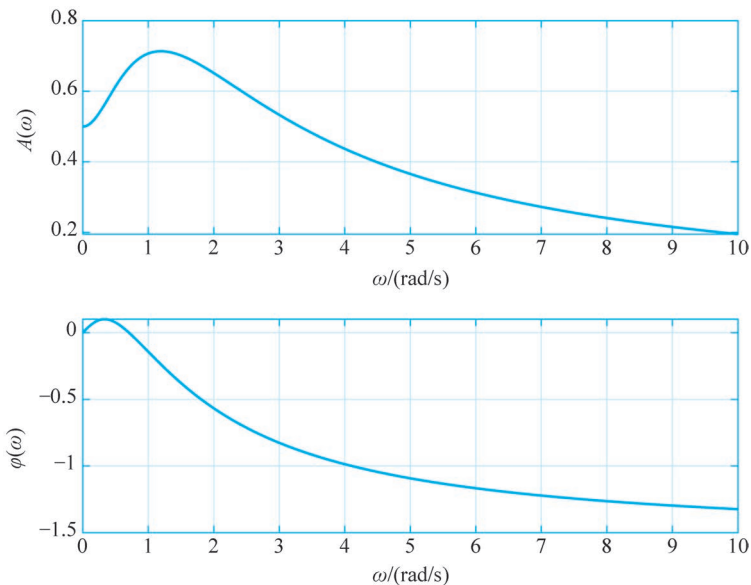


图 5-1-8 例 5-6 的运行结果

5.2 典型环节的频率特性



视频讲解

典型线性定常控制系统如图 5-1-6 所示,其开环传递函数 $G(s)H(s)$ 可以分解为若干典型环节的串联形式,即

$$G(s)H(s) = \prod_{i=1}^N G_i(s) \quad (5-2-1)$$

式(5-2-1)中 $G_i(s)$ 是各典型环节的传递函数。为了绘制系统的开环频率特性曲线,需要先熟悉典型环节的频率特性。

典型环节可分为最小相位环节和非最小相位环节两大类。在 2.2 节介绍的典型环节中,除延迟环节外,其余都是最小相位环节。非最小相位环节有比例环节、惯性环节、一阶微分环节、振荡环节和二阶微分环节 5 种。除比例环节外,其他 4 种非最小相位环节和相对应的最小相位环节的不同在于开环零点或极点位于 s 右半平面。

5.2.1 比例环节

1. 最小相位比例环节

最小相位比例环节的传递函数为 $G(s) = K (K > 0)$, 其频率特性为

$$G(j\omega) = K = K \cdot e^{j0^\circ}$$

(1) 幅相频率特性。

幅频特性和相频特性为

$$\begin{cases} A(\omega) = K \\ \varphi(\omega) = 0^\circ \end{cases}$$

当频率 ω 从 0 到 ∞ 变化时,可画出幅相频率特性曲线如图 5-2-1 中①所示,其为 G 平面正实轴上的一个点。

(2) 对数频率特性。

对数幅频特性和对数相频特性为

$$\begin{cases} L(\omega) = 20\lg K \\ \varphi(\omega) = 0^\circ \end{cases}$$

当频率 ω 从 0 到 ∞ 变化时,可画出对数频率特性曲线如图 5-2-2 中①所示,其对数幅频特性是一条高度为 $20\lg K$ 的水平线,对数相频特性是与横轴重合的一条直线。

2. 非最小相位比例环节

非最小相位比例环节的传递函数为 $G(s) = -K (K > 0)$,其频率特性为

$$G(j\omega) = -K = K \cdot e^{-j180^\circ}$$

(1) 幅相频率特性。

幅频特性和相频特性为

$$\begin{cases} A(\omega) = K \\ \varphi(\omega) = -180^\circ \end{cases}$$

当频率 ω 从 0 到 ∞ 变化时,可画出幅相频率特性曲线如图 5-2-1 中②所示,其为 G 平面负实轴上的一个点。

(2) 对数频率特性。

对数幅频特性和对数相频特性为

$$\begin{cases} L(\omega) = 20\lg K \\ \varphi(\omega) = -180^\circ \end{cases}$$

当频率 ω 从 0 到 ∞ 变化时,可画出对数频率特性曲线如图 5-2-2 中②所示,其对数幅频特性与最小相位比例环节的对数幅频特性相同,对数相频特性是过 -180° 的一条水平线。

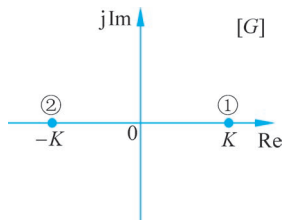


图 5-2-1 比例环节的幅相频率特性曲线

- ① 最小相位比例环节;
- ② 非最小相位比例环节

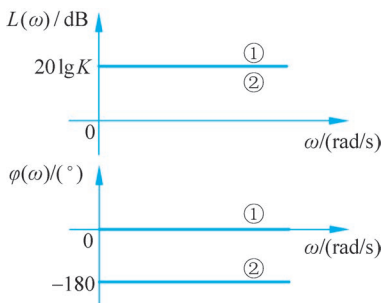


图 5-2-2 比例环节的对数频率特性曲线

- ① 最小相位比例环节;
- ② 非最小相位比例环节

5.2.2 积分环节

积分环节的传递函数为 $G(s) = \frac{1}{s}$, 其频率特性为

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = \frac{1}{\omega} \cdot e^{-j90^\circ}$$

(1) 幅相频率特性。

幅频特性和相频特性为

$$\begin{cases} A(\omega) = \frac{1}{\omega} \\ \varphi(\omega) = -90^\circ \end{cases}$$

当频率 ω 从 0 到 ∞ 变化时, 可画出幅相频率特性曲线如图 5-2-3 中①所示, 其为 G 平面上与负虚轴重合的一条直线。

(2) 对数频率特性。

对数幅频特性和对数相频特性为

$$\begin{cases} L(\omega) = -20\lg\omega \\ \varphi(\omega) = -90^\circ \end{cases}$$

当频率 ω 从 0 到 ∞ 变化时, 可画出对数频率特性曲线如图 5-2-4 中①所示, 其对数幅频特性是斜率为 -20dB/dec 且过 $(1, 0)$ 点的一条直线, 对数相频特性是通过 -90° 的一条水平线。

5.2.3 微分环节

微分环节的传递函数为 $G(s) = s$, 其频率特性为

$$G(j\omega) = j\omega = \omega \cdot e^{j90^\circ}$$

(1) 幅相频率特性。

幅频特性和相频特性为

$$\begin{cases} A(\omega) = \omega \\ \varphi(\omega) = 90^\circ \end{cases}$$

当频率 ω 从 0 到 ∞ 变化时, 可画出幅相频率特性曲线如图 5-2-3 中②所示, 其为 G 平面上与正虚轴重合的一条直线。

(2) 对数频率特性。

对数幅频特性和对数相频特性为

$$\begin{cases} L(\omega) = 20\lg\omega \\ \varphi(\omega) = 90^\circ \end{cases}$$

当频率 ω 从 0 到 ∞ 变化时, 可画出对数频率特性曲线如图 5-2-4 中②所示, 其对数幅频特性是斜率为 20dB/dec 且过 $(1, 0)$ 点的一条直线, 对数相频特性是通过 90° 的一条水平线。可见, 微分环节与积分环节的对数幅频特性曲线关于 0dB 线对称, 对数相频特性曲线关于 0° 线对称。此结论同样适用于其他传递函数互为倒数的典型环节。

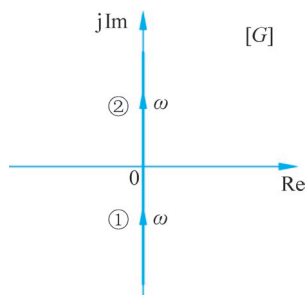


图 5-2-3 积分、微分环节的幅相频率特性曲线

① 积分环节; ② 微分环节

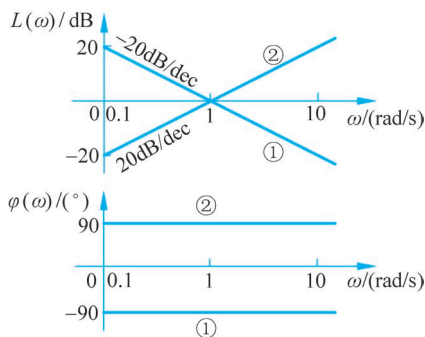


图 5-2-4 积分、微分环节的对数频率特性曲线

① 积分环节; ② 微分环节

5.2.4 惯性环节

1. 最小相位惯性环节

最小相位惯性环节的传递函数为 $G(s) = \frac{1}{Ts+1}$ ($T>0$), 其频率特性为

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega T + 1} = \frac{1}{\sqrt{(\omega T)^2 + 1}} e^{-j\arctan\omega T}$$

(1) 幅相频率特性。

幅频特性和相频特性为

$$\begin{cases} A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(\omega T)^2 + 1}} \\ \varphi(\omega) = -\arctan\omega T \end{cases}$$

当频率 ω 从 $0 \rightarrow \infty$ 变化时, 可画出幅相频率特性曲线如图 5-2-5 中①所示。可以证明, 最小相位惯性环节的幅相特性是 G 平面第四象限内, 以 $(\frac{1}{2}, j0)$ 为圆心、 $\frac{1}{2}$ 为半径的半圆。

(2) 对数频率特性。

① 对数幅频特性。

最小相位惯性环节的对数幅频特性为

$$L(\omega) = -20\lg\sqrt{(\omega T)^2 + 1}$$

当频率 ω 从 $0 \rightarrow \infty$ 变化时, 给出不同的 ω 值, 可以逐点求出 $L(\omega)$ 的值, 由此可画出对数幅频特性曲线如图 5-2-6 中曲线①的虚线所示。在控制工程中, 为了简化对数幅频特性曲线的作图, 常用对数幅频渐近特性曲线近似表示。最小相位惯性环节的对数幅频渐近特性曲线的绘制方法如下。

当 $\omega \ll \frac{1}{T}$ 时, $(\omega T)^2 \ll 1$, 则 $L(\omega) \approx -20\lg 1 = 0$, 即低频渐近线是一条与 0dB 线重合的直线; 当 $\omega \gg \frac{1}{T}$ 时, $(\omega T)^2 \gg 1$, 则 $L(\omega) \approx -20\lg\omega T$, 即高频渐近线是过点 $(\frac{1}{T}, 0)$ 、斜率为 -20dB/dec 的一条直线。由此可画出对数幅频渐近特性曲线如图 5-2-6 中曲线①的实线所示。

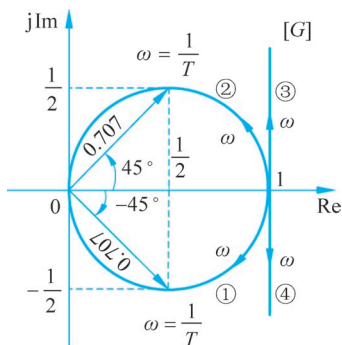


图 5-2-5 惯性、一阶微分环节的幅相频率特性曲线

- ① 最小相位惯性环节；② 非最小相位惯性环节；
③ 最小相位一阶微分环节；④ 非最小相位一阶微分环节

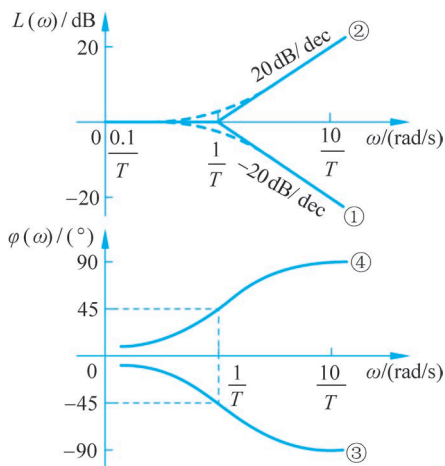


图 5-2-6 惯性、一阶微分环节的对数频率特性曲线

- ① 惯性环节；② 一阶微分环节；③ 最小相位惯性环节或非最小相位一阶微分环节；④ 非最小相位惯性环节或非最小相位一阶微分环节

可见,低频渐近线与高频渐近线相交于 $\omega = \frac{1}{T}$ 处,称频率 $\frac{1}{T}$ 为惯性环节的转折频率,这是绘制惯性环节对数频率特性曲线的一个重要参数。

由图 5-2-6 中曲线①可以看出,用对数幅频渐近特性近似表示对数幅频特性存在误差,误差曲线如图 5-2-7 所示。在转折频率 $\omega = \frac{1}{T}$ 处误差最大,约为 -3dB 。通常可以根据误差曲线对对数幅频渐近特性曲线进行修正而获得准确的对数幅频特性曲线。

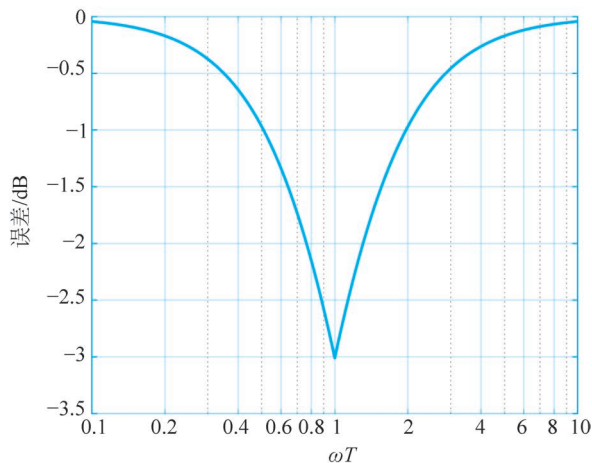


图 5-2-7 惯性环节的误差曲线

② 对数相频特性。

最小相位惯性环节的对数相频特性为

$$\varphi(\omega) = -\arctan \omega T$$

当频率 ω 从 $0 \rightarrow \infty$ 变化时,可画出对数相频特性曲线如图 5-2-6 中曲线③所示。可以证

明,该曲线关于点 $\left(\frac{1}{T}, -45^\circ\right)$ 中心对称。

2. 非最小相位惯性环节

非最小相位惯性环节的传递函数为 $G(s) = \frac{1}{-Ts+1} (T>0)$,其频率特性为

$$G(j\omega) = \frac{1}{-j\omega T + 1} = \frac{1}{\sqrt{(\omega T)^2 + 1}} e^{j\arctan\omega T}$$

(1) 幅相频率特性。

幅频特性和相频特性为

$$\begin{cases} A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(\omega T)^2 + 1}} \\ \varphi(\omega) = \arctan\omega T \end{cases}$$

当频率 ω 从 $0 \rightarrow \infty$ 变化时,可画出幅相频率特性曲线如图 5-2-5 中②所示,其为 G 平面第一象限内,以 $\left(\frac{1}{2}, j0\right)$ 为圆心、 $\frac{1}{2}$ 为半径的半圆。可见,非最小相位与最小相位惯性环节的幅相特性曲线关于实轴对称。此结论同样适用于最小相位与非最小相位的一阶微分环节、振荡环节、二阶微分环节。

(2) 对数频率特性。

非最小相位惯性环节的对数幅频特性和对数相频特性为

$$\begin{cases} L(\omega) = -20\lg\sqrt{(\omega T)^2 + 1} \\ \varphi(\omega) = \arctan\omega T \end{cases}$$

类似于最小相位惯性环节的分析方法,可画出非最小相位惯性环节的对数幅频特性曲线如图 5-2-6 中的曲线①所示,对数相频特性曲线如图 5-2-6 中的曲线④所示。可见,非最小相位与最小相位的惯性环节对数幅频特性曲线相同,对数相频特性曲线关于 0° 线对称。此结论同样适用于最小相位与非最小相位的一阶微分环节、振荡环节、二阶微分环节。

5.2.5 一阶微分环节

1. 最小相位一阶微分环节

最小相位一阶微分环节的传递函数为 $G(s) = Ts+1 (T>0)$,其频率特性为

$$G(j\omega) = j\omega T + 1 = \sqrt{(\omega T)^2 + 1} e^{j\arctan\omega T}$$

(1) 幅相频率特性。

幅频特性和相频特性为

$$\begin{cases} A(\omega) = \sqrt{(\omega T)^2 + 1} \\ \varphi(\omega) = \arctan\omega T \end{cases}$$

当频率 ω 从 $0 \rightarrow \infty$ 变化时, $G(j\omega)$ 的实部恒等于1,虚部从0变化到 ∞ ,由此可画出幅相频率特性曲线如图 5-2-5 中③所示,其为 G 平面第一象限内,过点 $(1, j0)$ 且平行于虚轴的一条直线。

(2) 对数频率特性。

最小相位一阶微分环节的对数幅频特性和对数相频特性为

$$\begin{cases} L(\omega) = 20\lg\sqrt{(\omega T)^2 + 1} \\ \varphi(\omega) = \arctan\omega T \end{cases}$$

由于最小相位的一阶微分环节和惯性环节传递函数互为倒数,所以它们的对数幅频特性曲线关于 0dB 线对称,对数相频特性曲线关于 0° 线对称,可画出一阶微分环节的对数幅频特性曲线如图 5-2-6 中曲线②所示,其对数幅频渐近特性曲线的低频渐近线是一条与 0dB 线重合的直线,高频渐近线是过点 $(\frac{1}{T}, 0)$ 、斜率为 20dB/dec 的一条直线,转折频率为 $\frac{1}{T}$;当频率 ω 从 0 到 ∞ 变化时,可画出对数相频特性曲线如图 5-2-6 中曲线④所示。该曲线关于点 $(\frac{1}{T}, 45^\circ)$ 中心对称。

2. 非最小相位一阶微分环节

非最小相位一阶微分环节的传递函数为 $G(s) = -Ts + 1 (T > 0)$,其频率特性为

$$G(j\omega) = -j\omega T + 1 = \sqrt{(\omega T)^2 + 1} e^{-j\arctan\omega T}$$

(1) 幅相频率特性。

幅频特性和相频特性为

$$\begin{cases} A(\omega) = \sqrt{(\omega T)^2 + 1} \\ \varphi(\omega) = -\arctan\omega T \end{cases}$$

根据非最小相位与最小相位的一阶微分环节幅相特性曲线关于实轴对称,可画出幅相频率特性曲线如图 5-2-5 中④所示,其为 G 平面第四象限内,过点 $(1, j0)$ 且平行于虚轴的一条直线。

(2) 对数频率特性。

非最小相位一阶微分环节的对数幅频特性和对数相频特性为

$$\begin{cases} L(\omega) = 20\lg\sqrt{(\omega T)^2 + 1} \\ \varphi(\omega) = -\arctan\omega T \end{cases}$$

根据非最小相位与最小相位的一阶微分环节对数幅频特性曲线相同、对数相频特性曲线关于 0° 线对称,可画出对数幅频特性曲线如图 5-2-6 中的曲线②所示,对数相频特性曲线如图 5-2-6 中的曲线③所示。

5.2.6 振荡环节

1. 最小相位振荡环节

最小相位振荡环节的传递函数为 $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} (0 < \zeta < 1, \omega_n > 0)$,其频率特性为

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{-\omega^2 + j2\zeta\omega_n\omega + \omega_n^2} = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}$$

(1) 幅相频率特性。

幅频特性和相频特性为

$$\left\{ \begin{array}{l} A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}} \\ \varphi(\omega) = -\arctan \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} = \begin{cases} -\arctan \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}, & \omega \leq \omega_n \\ 180^\circ - \arctan \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{\frac{\omega^2}{\omega_n^2} - 1}, & \omega > \omega_n \end{cases} \end{array} \right. \quad (5-2-2)$$

振荡环节的幅相频率特性曲线与阻尼比 ζ 有关,给出不同的 ζ 值,可绘出一簇形状相似的曲线。

当频率 ω 从 0 到 ∞ 变化时, $A(\omega)$ 从 1 到 0 变化, $\varphi(\omega)$ 从 0° 到 -180° 变化。当 $\omega = \omega_n$ 时, $A(\omega_n) = \frac{1}{2\zeta}$, $\varphi(\omega_n) = -90^\circ$, 即曲线与虚轴的交点为 $-j \frac{1}{2\zeta}$ 。为了分析 ζ 取值对曲线形状的影响,先求 $A(\omega)$ 对 ω 的一阶导数,即

$$\frac{dA(\omega)}{d\omega} = \frac{-\left[-\frac{2\omega}{\omega_n^2}\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + 4\zeta^2 \frac{\omega}{\omega_n^2}\right]}{\left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right]^{\frac{3}{2}}}$$

当 $0 < \zeta \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时,令 $\frac{dA(\omega)}{d\omega} = 0$,求得

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

在 $\omega \in (0, \omega_r)$ 时, $A(\omega)$ 单调递增, $\omega \in (\omega_r, \infty)$ 时, $A(\omega)$ 单调递减,表明在 $\omega = \omega_r$ 处, $A(\omega)$ 具有极大值。极大值为

$$M_r = A(\omega_r) = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

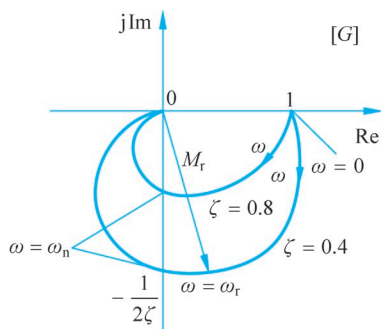


图 5-2-8 振荡环节的幅相频率特性曲线

ω_r 称为谐振频率, M_r 称为谐振峰值,它们均是阻尼比 ζ 的减函数。

当 $\frac{\sqrt{2}}{2} < \zeta < 1$ 时,在 $\omega \in (0, \infty)$ 的范围内,可求得

$\frac{dA(\omega)}{d\omega} < 0$,表明 $A(\omega)$ 单调递减。由此可画出振荡环节在不同阻尼比 ζ 时的幅相频率特性曲线如图 5-2-8 所示。

(2) 对数频率特性。

① 对数幅频特性。

最小相位振荡环节的对数幅频特性为

$$L(\omega) = -20 \lg \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

与惯性环节类似,控制工程中,也常用对数幅频渐近特性曲线近似表示对数幅频特性。最小相位振荡环节的对数幅频渐近特性曲线的绘制方法如下。

当 $\omega \ll \omega_n$ 时, $L(\omega) \approx -20 \lg 1 = 0$, 即低频渐近线与 0dB 线重合; 当 $\omega \gg \omega_n$ 时, $L(\omega) \approx -40 \lg \frac{\omega}{\omega_n}$, 即高频渐近线是过点 $(\omega_n, 0)$ 、斜率为 -40dB/dec 的一条直线。由此可画出振荡环节的对数幅频渐近特性曲线如图 5-2-9 中曲线①所示。两条渐近线相交于 $\omega = \omega_n$ 处, 称频率 ω_n 为振荡环节的转折频率。

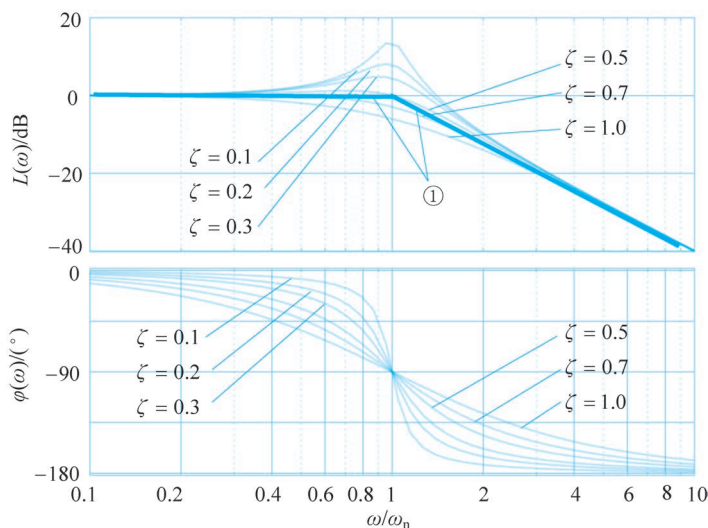


图 5-2-9 振荡环节的对数频率特性曲线

① 对数幅频渐近特性曲线

用振荡环节的渐近特性曲线近似表示对数幅频特性曲线存在误差,误差的大小与 ω 和 ζ 均有关,振荡环节的误差曲线如图 5-2-10 所示。根据误差曲线通过对渐近特性曲线进行修正,得到对数幅频特性曲线如图 5-2-9 所示。

② 对数相频特性。

最小相位振荡环节的对数相频特性与式(5-2-2)相同。 $\varphi(\omega)$ 是 ω 和 ζ 的函数。当频率 ω 从 0 到 ∞ 变化时,以 ζ 为参变量,可画出振荡环节的对数相频特性曲线如图 5-2-9 所示,该簇曲线关于点 $(\omega_n, -90^\circ)$ 中心对称。

2. 非最小相位振荡环节

非最小相位振荡环节的传递函数为 $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 - 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$ ($0 < \zeta < 1, \omega_n > 0$), 其频率

特性为

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{-\omega^2 - j2\zeta\omega_n\omega + \omega_n^2} = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} - j2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}$$

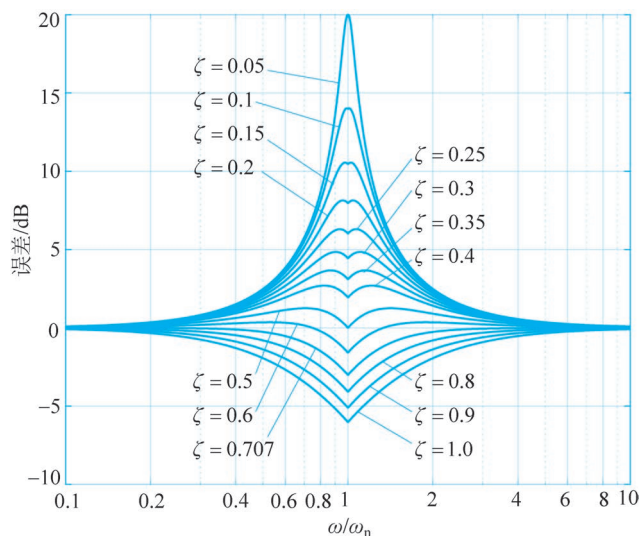


图 5-2-10 振荡环节的误差曲线

(1) 幅相频率特性。

幅频特性和相频特性为

$$\left\{ \begin{array}{l} A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}} \\ \varphi(\omega) = \arctan \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} = \begin{cases} \arctan \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}, & \omega \leq \omega_n \\ 180^\circ - \arctan \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{\frac{\omega^2}{\omega_n^2} - 1}, & \omega > \omega_n \end{cases} \end{array} \right.$$

根据非最小相位与最小相位的振荡环节幅相频率特性曲线关于实轴对称,即可画出非最小相位振荡环节的幅相频率特性曲线。

(2) 对数频率特性。

根据非最小相位与最小相位的振荡环节对数幅频特性曲线相同、对数相频特性曲线关于 0° 线对称,即可画出非最小相位振荡环节的对数频率特性曲线。

5.2.7 二阶微分环节

1. 最小相位二阶微分环节

最小相位二阶微分环节的传递函数为 $G(s) = \frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\zeta \frac{s}{\omega_n} + 1$ ($0 < \zeta < 1, \omega_n > 0$), 其频率

特性为

$$G(j\omega) = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}$$

(1) 幅相频率特性。

幅频特性和相频特性为

$$\left\{ \begin{array}{l} A(\omega) = \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \\ \varphi(\omega) = \arctan \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} = \begin{cases} \arctan \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}, & \omega \leq \omega_n \\ 180^\circ - \arctan \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{\frac{\omega^2}{\omega_n^2} - 1}, & \omega > \omega_n \end{cases} \end{array} \right.$$

同振荡环节一样,二阶微分环节的幅相频率特性曲线也与阻尼比 ζ 有关。

当频率 ω 从 0 到 ∞ 变化时, $A(\omega)$ 从 1 到 ∞ 变化, $\varphi(\omega)$ 从 0° 到 180° 变化。当 $\omega = \omega_n$ 时, $A(\omega_n) = 2\zeta$, $\varphi(\omega_n) = 90^\circ$, 即曲线与虚轴的交点为 $j2\zeta$ 。由于二阶微分环节的幅频特性是振荡环节幅频特性的倒数, 所以当 $0 < \zeta \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $A(\omega)$ 在 $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$ 处出现极小值 $M_r = A(\omega_r) = 2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}$, 在 $\omega \in (0, \omega_r)$ 时, $A(\omega)$ 从 1 单调递减至 M_r , $\omega \in (\omega_r, \infty)$ 时, $A(\omega)$ 从 M_r 单调递增至 ∞ ; 当 $\frac{\sqrt{2}}{2} < \zeta < 1$ 时, 在 $\omega \in (0, \infty)$ 的范围内, $A(\omega)$ 从 1 单调递增至 ∞ 。由

此可画出二阶微分环节的幅相频率特性曲线如图 5-2-11 所示, 其中 $0 < \zeta_1 < \frac{\sqrt{2}}{2} < \zeta_2 < 1$ 。

(2) 对数频率特性。

由于最小相位的二阶微分环节和振荡环节传递函数互为倒数, 根据上文得出的结论, 两者的对数幅频特性曲线关于 0dB 线对称, 对数相频特性曲线关于 0° 线对称。由此可画出二阶微分环节的对数频率特性曲线如图 5-2-12 所示。

2. 非最小相位二阶微分环节

非最小相位二阶微分环节的传递函数为 $G(s) = \frac{s^2}{\omega_n^2} -$

$2\zeta \frac{s}{\omega_n} + 1 (0 < \zeta < 1, \omega_n > 0)$, 其频率特性为

$$G(j\omega) = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} - j2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}$$

(1) 幅相频率特性。

根据非最小相位与最小相位的二阶微分环节幅相频率特性曲线关于实轴对称, 即可画

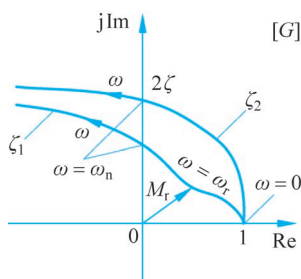


图 5-2-11 二阶微分环节的幅相频率特性曲线

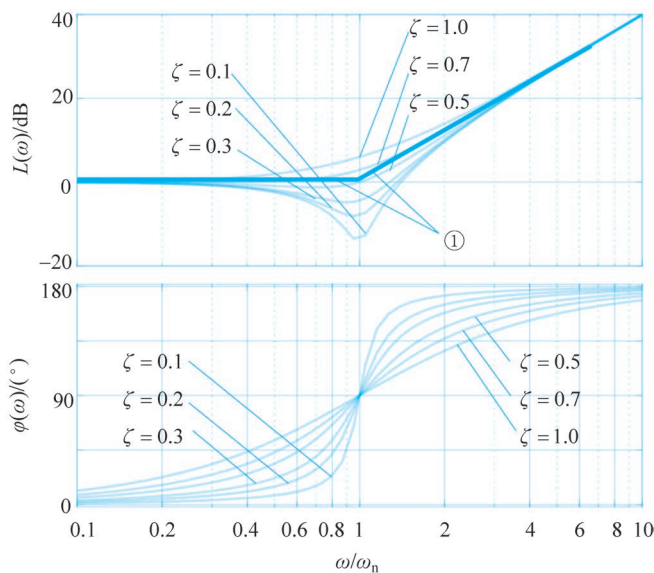


图 5-2-12 二阶微分环节的对数频率特性曲线

① 对数幅频渐近特性曲线

出非最小相位二阶微分环节的幅相频率特性曲线。

(2) 对数频率特性。

根据非最小相位与最小相位的二阶微分环节对数幅频特性曲线相同、对数相频特性曲线关于 0° 线对称,即可画出非最小相位二阶微分环节的对数频率特性曲线。

5.2.8 延迟环节

延迟环节的传递函数为 $G(s) = e^{-\tau s}$,其频率特性为

$$G(j\omega) = e^{-j\omega\tau} = 1 \cdot e^{-j\omega\tau}$$

(1) 幅相频率特性。

幅频特性和相频特性为

$$\begin{cases} A(\omega) = 1 \\ \varphi(\omega) = -\omega\tau(\text{rad}) = -57.3\omega\tau(^{\circ}) \end{cases}$$

当频率 ω 从 0 到 ∞ 变化时, $A(\omega)$ 恒等于 1, $\varphi(\omega)$ 从 0° 变化到 $-\infty$,可画出延迟环节的幅相频率特性曲线如图 5-2-13 所示,其为圆心在原点的单位圆。

(2) 对数频率特性。

对数幅频特性和对数相频特性为

$$\begin{cases} L(\omega) = 20\lg 1 = 0 \\ \varphi(\omega) = -\omega\tau(\text{rad}) = -57.3\omega\tau(^{\circ}) \end{cases}$$

当频率 ω 从 0 到 ∞ 变化时, $L(\omega)$ 恒等于 0, $\varphi(\omega)$ 从 0 变化到 $-\infty$,可画出延迟环节的对数频率特性曲线如图 5-2-14 所示,其对数幅频特性曲线与 0dB 线重合,对数相频特性曲线是一条呈指数规律下降的曲线。

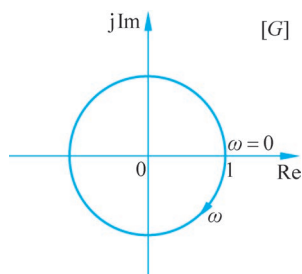


图 5-2-13 延迟环节的幅相频率特性曲线

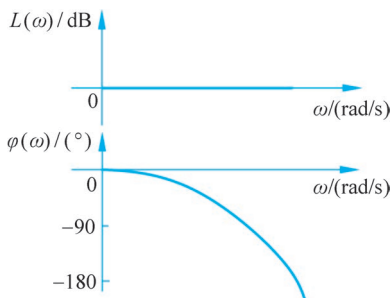


图 5-2-14 延迟环节的对数频率特性曲线

5.3 系统的开环频率特性

常用的系统开环频率特性曲线有开环幅相频率特性曲线和开环对数频率特性曲线。

5.3.1 开环幅相频率特性曲线

典型线性定常系统的开环传递函数如式(5-2-1)所示。设典型环节的频率特性为

$$G_i(j\omega) = A_i(\omega)e^{j\varphi_i(\omega)}$$

则系统的开环频率特性为

$$G(j\omega)H(j\omega) = \prod_{i=1}^N G_i(j\omega) = \left[\prod_{i=1}^N A_i(\omega) \right] e^{j \left[\sum_{i=1}^N \varphi_i(\omega) \right]}$$

因此系统的开环幅频特性和开环相频特性为

$$\begin{cases} A(\omega) = \prod_{i=1}^N A_i(\omega) \\ \varphi(\omega) = \sum_{i=1}^N \varphi_i(\omega) \end{cases} \quad (5-3-1)$$

即系统的开环幅频特性为组成系统的各典型环节的幅频特性之积,开环相频特性为各典型环节的相频特性之和。当频率 ω 从 0 到 ∞ 变化时,可以通过描点法绘制出系统的开环幅相频率特性曲线。

实际中,只需要绘制概略的开环幅相频率特性曲线就可以满足工程需要,其方法如下:

(1) 将开环传递函数按典型环节进行分解,并写出开环频率特性表达式。

通常,系统的开环传递函数可分解为

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s^v} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m_1} (\tau_i s + 1) \prod_{k=1}^{m_2} (\tau_k^2 s^2 + 2\zeta\tau_k s + 1)}{\prod_{j=1}^{n_1} (T_j s + 1) \prod_{l=1}^{n_2} (T_l^2 s^2 + 2\zeta T_l s + 1)} \quad (5-3-2)$$

式(5-3-2)中, $m_1 + 2m_2 = m$ 为分子多项式的阶次; $v + n_1 + 2n_2 = n$ 为分母多项式的阶次。系统的开环频率特性为



视频讲解

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^v} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m_1} (j\omega\tau_i + 1) \prod_{k=1}^{m_2} (-\tau_k^2\omega^2 + 2j\omega\zeta\tau_k + 1)}{\prod_{j=1}^{n_1} (j\omega T_j + 1) \prod_{l=1}^{n_2} (-T_l^2\omega^2 + 2j\omega\zeta T_l + 1)}$$

(2) 确定开环幅相频率特性曲线的起点($\omega=0_+$)和终点($\omega=\infty$)。

① 起点($\omega=0_+$)。开环幅相频率特性曲线的起点取决于比例环节 K 和系统积分环节的个数 v (系统型别)。对于最小相位系统,起点为

$$G(j0_+)H(j0_+) = \lim_{\omega \rightarrow 0_+} \frac{K}{(j\omega)^v} = \begin{cases} K \angle 0^\circ, & v=0 \\ \infty \angle -90^\circ \cdot v, & v>0 \end{cases}$$

② 终点($\omega=\infty$)。开环幅相频率特性曲线的终点取决于开环传递函数分子、分母多项式中最小相位环节和非最小相位环节的阶次和。对于最小相位系统,终点为

$$G(j\infty)H(j\infty) = \begin{cases} K^* \angle 0^\circ, & n=m \\ 0 \angle -90^\circ \cdot (n-m), & n>m \end{cases}$$

其中 K^* 为系统根轨迹增益。

(3) 确定开环幅相频率特性曲线与实轴和虚轴的交点。

① 与实轴的交点。令 $G(j\omega)H(j\omega)$ 的虚部为

$$\text{Im}[G(j\omega)H(j\omega)] = 0$$

或

$$\varphi(\omega) = \angle G(j\omega)H(j\omega) = k\pi \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

求出频率 ω_x , 称为实轴穿越频率, 则开环幅相频率特性曲线与实轴的交点坐标值为

$$\text{Re}[G(j\omega_x)H(j\omega_x)]$$

② 与虚轴的交点。令 $G(j\omega)H(j\omega)$ 的实部为

$$\text{Re}[G(j\omega)H(j\omega)] = 0$$

或

$$\varphi(\omega) = \angle G(j\omega)H(j\omega) = \frac{(2k+1)\pi}{2} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

求出频率 ω_y , 称为虚轴穿越频率, 则开环幅相频率特性曲线与虚轴的交点坐标值为

$$\text{Im}[G(j\omega_y)H(j\omega_y)]$$

(4) 分析开环幅相频率特性曲线的变化范围(象限、单调性等)。

例 5-7 系统开环传递函数如下列各式, 分别绘制系统的概略开环幅相频率特性曲线。

$$(1) G(s)H(s) = \frac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1)} \quad K, T_1, T_2 > 0$$

$$(2) G(s)H(s) = \frac{K}{s(Ts+1)} \quad K, T > 0$$

$$(3) G(s)H(s) = \frac{K(\tau s+1)}{s(Ts+1)} \quad K, T, \tau > 0$$

解: (1)

① 系统的开环频率特性为

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K}{(jT_1\omega + 1)(jT_2\omega + 1)} = \frac{K[1 - T_1T_2\omega^2 - j(T_1 + T_2)\omega]}{(1 + T_1^2\omega^2)(1 + T_2^2\omega^2)}$$

② 由系统的开环传递函数可知 $v=0$, 起点为

$$G(j0)H(j0) = K \angle 0^\circ$$

终点为

$$G(j\infty)H(j\infty) = 0 \angle -90^\circ \cdot (n - m) = 0 \angle -180^\circ$$

③ 与实轴的交点。

$$\operatorname{Im}[G(j\omega)H(j\omega)] = \frac{K[-(T_1 + T_2)\omega]}{(1 + T_1^2\omega^2)(1 + T_2^2\omega^2)} = 0$$

解得 $\omega_x = 0$, 即系统的开环幅相频率特性曲线除起点外与实轴无交点。

与虚轴的交点。

$$\operatorname{Re}[G(j\omega)H(j\omega)] = \frac{K(1 - T_1T_2\omega^2)}{(1 + T_1^2\omega^2)(1 + T_2^2\omega^2)} = 0$$

解得 $\omega_y = \frac{1}{\sqrt{T_1T_2}}$, 则开环幅相频率特性曲线与虚轴的交点坐标值为

$$\operatorname{Im}[G(j\omega_y)H(j\omega_y)] = -\frac{K\sqrt{T_1T_2}}{T_1 + T_2}$$

④ 在 ω 从 0 到 ∞ 变化时, $G(j\omega)H(j\omega)$ 的实部可正可负而虚部小于 0, 故该系统的开环幅相频率特性曲线的变化范围为第四和第三象限。

综上, 可绘出系统概略开环幅相频率特性曲线如图 5-3-1(a) 所示。

(2)

① 系统的开环频率特性为

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K}{j\omega(jT\omega + 1)} = \frac{K(-T\omega - j)}{\omega(1 + T^2\omega^2)}$$

② 由系统的开环传递函数可知 $v=1$, 起点为

$$G(j0_+)H(j0_+) = \infty \angle -90^\circ$$

起点处

$$\operatorname{Re}[G(j0_+)H(j0_+)] = -KT$$

$$\operatorname{Im}[G(j0_+)H(j0_+)] = -\infty$$

终点为

$$G(j\infty)H(j\infty) = 0 \angle -90^\circ \cdot (n - m) = 0 \angle -180^\circ$$

③ 在 ω 从 0 到 ∞ 变化时, 系统的开环幅相频率特性曲线与实轴和虚轴均无交点。

④ 在 ω 从 0 到 ∞ 变化时, $G(j\omega)H(j\omega)$ 的实部和虚部都小于 0, 故该系统的开环幅相频率特性曲线的变化范围在第三象限。

综上, 可绘出系统概略开环幅相频率特性曲线如图 5-3-1(b) 中①所示。图中虚线为开环幅相频率特性曲线的低频渐近线。通常利用开环幅相频率特性曲线对系统进行分析时不需要准确知道渐近线的位置, 因此一般根据 $\varphi(0_+)$ 取渐近线为坐标轴, 可绘出开环幅相频率特性曲线如图 5-3-1(b) 中②所示。

(3)

① 系统的开环频率特性为

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K(j\tau\omega + 1)}{j\omega(jT\omega + 1)} = \frac{K[-(T-\tau)\omega - j(1+T\tau\omega^2)]}{\omega(1+T^2\omega^2)}$$

② 由系统的开环传递函数可知 $v=1$, 起点为

$$G(j0_+)H(j0_+) = \infty \angle -90^\circ$$

终点为

$$G(j\infty)H(j\infty) = 0 \angle -90^\circ \cdot (n-m) = 0 \angle -90^\circ$$

③ 在 ω 从 0 到 ∞ 变化时, 系统的开环幅相频率特性曲线与实轴和虚轴均无交点。

④ 在 ω 从 0 到 ∞ 变化时, 若 $T > \tau$, $G(j\omega)H(j\omega)$ 的实部和虚部都小于 0, 开环幅相频率特性曲线的变化范围在第三象限; 若 $T < \tau$, $G(j\omega)H(j\omega)$ 的实部大于 0 而虚部小于 0, 开环幅相频率特性曲线的变化范围在第四象限。

综上, 可绘出系统概略开环幅相频率特性曲线如图 5-3-1(c) 所示。

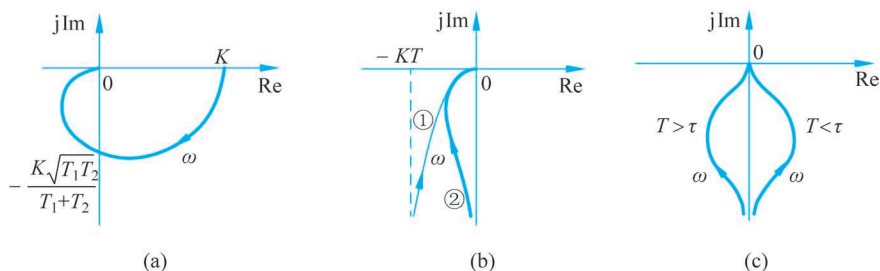


图 5-3-1 例 5-7 的系统概略开环幅相频率特性曲线

需要指出, 如果开环传递函数没有开环零点, 则在 ω 从 0 到 ∞ 变化时, 频率特性的相位单调减小, 系统的开环幅相频率特性曲线平滑地变化; 而当开环传递函数具有开环零点时, 在 ω 从 0 到 ∞ 变化的过程中, 频率特性的相位不再单调减小, 有可能在某一频段范围内呈增加趋势, 而使幅相频率特性曲线出现凹凸现象。当绘制概略开环幅相频率特性曲线时, 这一现象可不必准确反映。

5.3.2 开环对数频率特性曲线

1. 开环对数频率特性曲线的绘制

根据式(5-3-1), 可得系统的开环对数幅频特性和开环对数相频特性为

$$\begin{cases} L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg \left[\prod_{i=1}^N A_i(\omega) \right] = \sum_{i=1}^N 20\lg A_i(\omega) = \sum_{i=1}^N L_i(\omega) \\ \varphi(\omega) = \sum_{i=1}^N \varphi_i(\omega) \end{cases}$$

即系统的开环对数幅频特性为组成系统的各典型环节的对数幅频特性之和, 开环对数相频特性为组成系统的各典型环节的对数相频特性之和。因此, 可先绘制各典型环节的对数频率特性曲线, 然后将它们叠加即可绘制出系统的开环对数频率特性曲线。

实际上, 系统的开环对数幅频渐近特性曲线在控制系统的分析和设计中具有十分重要的作用, 其绘制方法如下:



视频讲解

(1) 将开环传递函数写成时间常数形式表达式,确定其由哪些典型环节串联组成。

(2) 确定系统的开环增益 K 、积分环节的个数(系统型别) v 、一阶环节的转折频率 $\frac{1}{T}$ 和二阶环节的转折频率 ω_n ,并将各转折频率从小到大标注在半对数坐标系的横轴上。

(3) 绘制低频段(小于最小转折频率 $\omega_{\min}$ 的频率范围)渐近特性曲线。当 $\omega < \omega_{\min}$ 时,一阶环节和二阶环节的对数幅频渐近特性曲线与 0dB 线重合,所以低频段内的系统开环对数幅频渐近特性曲线仅由 $\frac{K}{s^v}$ 决定,即满足方程

$$L(\omega) = 20\lg \frac{K}{\omega^v} = 20\lg K - 20v\lg \omega$$

这是一条斜率为 $-20v$ dB/dec 且过 $(1, 20\lg K)$ 或 $(K^{\frac{1}{v}}, 0)$ 点的直线。

(4) 绘制 $\omega \geq \omega_{\min}$ 频段的渐近特性曲线。当 $\omega \geq \omega_{\min}$ 时,每遇到一个转折频率,根据该转折频率对应的典型环节的种类,系统开环对数幅频渐近特性曲线的斜率进行相应的改变。改变规律为:惯性环节斜率减小 20dB/dec,一阶微分环节斜率增大 20dB/dec,振荡环节斜率减小 40dB/dec,二阶微分环节斜率增大 40dB/dec。

(5) 若需要得到较为准确的对数幅频特性曲线,可以根据 5.2 节给出的典型环节的误差曲线,在相应转折频率点处对分段折线进行修正。

例 5-8 已知系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{20000(s+1)}{s(s+5)(s^2+10s+400)}$$

绘制系统的开环对数幅频渐近特性曲线。

解: (1) 系统开环传递函数的时间常数形式表达式为

$$G(s)H(s) = \frac{10(s+1)}{s\left(\frac{s}{5}+1\right)\left(\frac{s^2}{400}+\frac{s}{40}+1\right)}$$

可见开环系统由积分环节和最小相位的比例环节、一阶微分环节、惯性环节、振荡环节 5 个典型环节串联而成的。

(2) 系统的开环增益为 $K=10, v=1$, 在半对数坐标系的横轴上顺序标出转折频率:

一阶微分环节转折频率为 $\omega_{\min} = \omega_1 = 1$;

惯性环节转折频率为 $\omega_2 = 5$;

振荡环节转折频率为 $\omega_3 = 20$ 。

(3) 绘制低频段($\omega < 1$)渐近特性曲线。低频段满足方程

$$L(\omega) = 20\lg K - 20v\lg \omega = 20 - 20\lg \omega$$

即一条斜率为 -20 dB/dec 且过 $(1, 20)$ 点的直线。

(4) 绘制 $\omega \geq 1$ 频段的渐近特性曲线。

① $1 \leq \omega < 5$ 时,由于一阶微分环节的作用,渐近线斜率增大 20dB/dec,即由 -20 dB/dec 变化到 0dB/dec;

② $5 \leq \omega < 20$ 时,由于惯性环节的作用,渐近线斜率减小 20dB/dec,即由 0dB/dec 变化到 -20 dB/dec;

③ $\omega \geq 20$ 时,由于振荡环节的作用,渐近线斜率减小 40dB/dec ,即由 -20dB/dec 变化到 -60dB/dec ;

(5) 若有必要,对开环对数幅频渐近特性曲线进行修正。

综上,可绘出系统的开环对数幅频渐近特性曲线如图 5-3-2 所示。

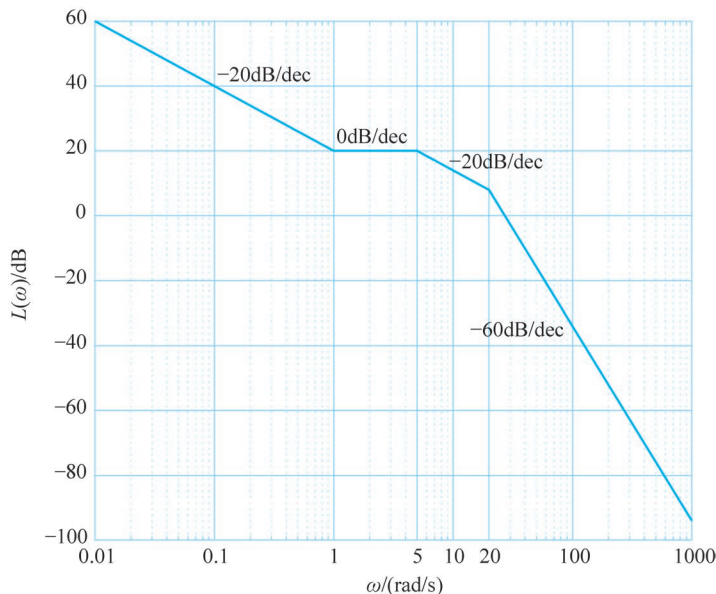


图 5-3-2 例 5-8 的系统开环对数幅频渐近特性曲线

系统的开环对数相频特性曲线的绘制,一般有两种方法。一种是分别绘出各典型环节的对数相频特性曲线,然后逐点叠加并连接成光滑曲线,便得到系统的开环对数相频特性曲线;另一种是写出开环对数相频特性 $\varphi(\omega)$ 的表达式,通过描点法绘出开环对数相频特性曲线。

例 5-9 绘出例 5-8 中系统的开环对数相频特性曲线。

解: 系统的开环对数相频特性为

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} \arctan \omega - 90^\circ - \arctan \frac{\omega}{5} - \arctan \frac{\frac{\omega}{40}}{1 - \frac{\omega^2}{400}}, & 0 < \omega \leq 20 \\ \arctan \omega - 90^\circ - \arctan \frac{\omega}{5} - 180^\circ + \arctan \frac{\frac{\omega}{40}}{\frac{\omega^2}{400} - 1}, & \omega > 20 \end{cases}$$

当 ω 从 $0 \rightarrow \infty$ 变化时,通过描点法可绘出开环对数相频特性曲线如图 5-3-3 所示。

2. 由开环对数频率特性曲线确定系统的开环传递函数

由开环对数频率特性曲线确定系统的开环传递函数,是根据开环传递函数绘制系统开环对数频率特性曲线的逆过程。对于最小相位系统,其开环对数幅频特性与开环传递函数具有一一对应的关系,所以可以直接由开环对数幅频渐近特性曲线来确定开环传递函数。方法如下:

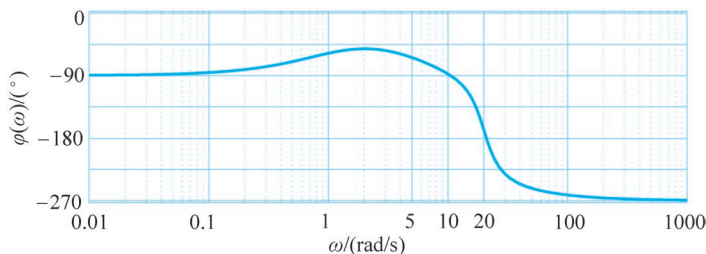


图 5-3-3 例 5-9 的系统开环对数相频特性曲线

(1) 确定系统积分环节的个数(系统型别) ν 和开环增益 K 。由于低频渐近线的斜率为 $-20\nu\text{dB/dec}$ 且过 $(1, 20\lg K)$ 或 $(K^{\frac{1}{\nu}}, 0)$ 点,所以可以根据低频段直线确定 K 和 ν 。

(2) 确定开环传递函数的结构形式。根据转折频率前后直线的斜率,确定该转折频率所对应的典型环节的类型,从而写出包含待定参数的开环传递函数表达式。

(3) 由给定条件确定传递函数中的待定参数。

例 5-10 已知某最小相位系统的开环对数幅频渐近特性曲线如图 5-3-4 所示,确定系统的开环传递函数。

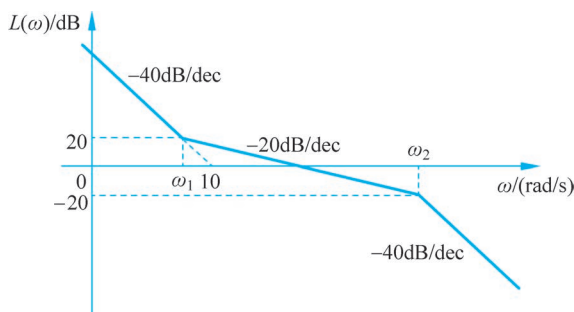


图 5-3-4 例 5-10 的系统开环对数幅频渐近特性曲线

解: (1) 确定系统积分环节的个数(系统型别) ν 和开环增益 K 。因为开环对数幅频渐近特性曲线的低频段的斜率为 -40dB/dec ,故 $\nu=2$;又因为低频渐近线的延长线过点 $(10, 0)$,所以 $K^{\frac{1}{\nu}}=K^{\frac{1}{2}}=10$,故 $K=100$ 。

(2) 确定开环传递函数的结构形式。

① $\omega=\omega_1$ 处,渐近线斜率由 -40dB/dec 变化到 -20dB/dec ,增大 20dB/dec ,所以对应一阶微分环节 $\frac{s}{\omega_1}+1$;

② $\omega=\omega_2$ 处,渐近线斜率由 -20dB/dec 变化到 -40dB/dec ,减小 20dB/dec ,所以对应惯性环节 $\frac{1}{\frac{s}{\omega_2}+1}$ 。因此,系统的开环传递函数形式为

$$G(s)H(s) = \frac{100\left(\frac{s}{\omega_1} + 1\right)}{s^2\left(\frac{s}{\omega_2} + 1\right)}$$

(3) 由给定条件确定传递函数中的待定参数。

由式(5-1-7)得

$$-40 = \frac{0-20}{\lg 10 - \lg \omega_1}, \quad \text{解得 } \omega_1 = 3.16$$

$$-20 = \frac{-20-20}{\lg \omega_2 - \lg \omega_1}, \quad \text{解得 } \omega_2 = 316$$

于是,系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{100\left(\frac{s}{3.16} + 1\right)}{s^2\left(\frac{s}{316} + 1\right)}$$

由于非最小相位系统,可能与某些最小相位系统具有相同的开环对数幅频特性曲线。因此不能直接由开环对数幅频特性曲线来确定非最小相位系统的开环传递函数,还需要根据其包含的非最小相位环节或延迟环节对相频特性的影响,并结合系统的开环相频特性曲线予以确定。

5.3.3 MATLAB 实现

1. 系统开环幅相频率特性曲线的 MATLAB 实现

绘制系统的开环幅相频率特性曲线可以用 MATLAB 提供的 `nyquist()` 函数实现,其调用格式如下。

```
nyquist(sys)      % 绘制系统在默认频率范围内的奈奎斯特图,sys 是由函数 tf()、zpk()或 ss()建
                  % 立的系统模型
nyquist(sys,w)    % 绘制系统在向量 w 所定义的频率范围内的奈奎斯特图
nyquist(sys1,sys2,...) % 在同一个绘图窗口中绘制多个系统的奈奎斯特图
[re,im,w] = nyquist(sys) % 该调用格式不绘制系统的奈奎斯特图,而是返回系统奈奎斯特图相应
                        % 的实部、虚部和频率向量
[re,im] = nyquist(sys,w) % 该调用格式不绘制系统的奈奎斯特图,而是返回系统奈奎斯特图在向
                        % 量 w 所定义频率范围内的实部和虚部向量
```

例 5-11 已知系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{s(Ts + 1)} \quad K, T, \tau > 0$$

利用 MATLAB 绘制 $K=10$ 、 $T=2$ 或 8 、 $\tau=5$ 时系统的开环幅相频率特性曲线。

解: MATLAB 程序如下。

```
clc;clear;
k = 10;
T = [2,8];
tao = 5;
for j = 1:length(T)
    num = [k * tao,k];
    den = [T(j),1,0];
    sys = tf(num,den);
    nyquist(sys);
    hold on;
end
```

```
gtext('T<tao');gtext('T>tao');
```

运行结果如图 5-3-5 所示。

例 5-12 利用 MATLAB 绘制例 5-8 中系统的开环幅相频率特性曲线。

解：MATLAB 程序如下。

```
clc;clear;
num = [20000,20000];
den = conv([1,0],conv([1,5],[1,10,400]));
sys = tf(num,den);
nyquist(sys);
axis([-6,8,-30,30]);
```

运行结果如图 5-3-6 所示。

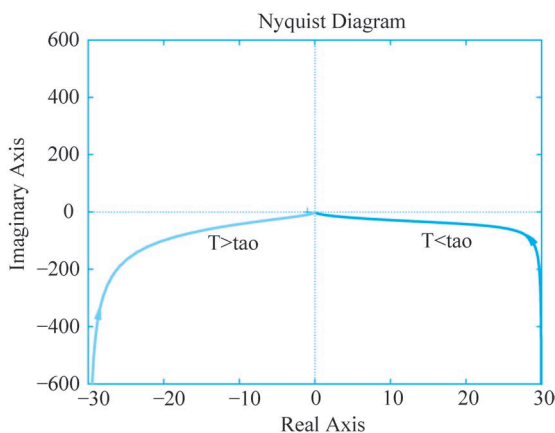


图 5-3-5 例 5-11 的运行结果

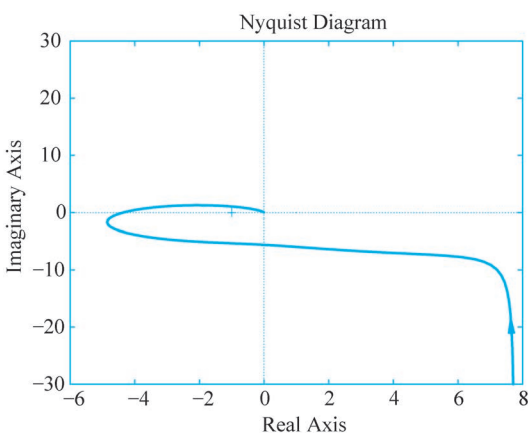


图 5-3-6 例 5-12 的运行结果

2. 系统开环对数频率特性曲线的 MATLAB 实现

绘制系统的开环对数频率特性曲线可以用 MATLAB 提供的 `bode()` 函数实现,其调用格式如下:

```
bode(sys)           % 绘制系统在默认频率范围内的伯德图,sys 是由函数 tf()、zpk()或 ss()建立的系
% 统模型
bode(sys,w)         % 绘制系统在向量 w 所定义的频率范围内的伯德图
bode(sys1,sys2,...) % 在同一个绘图窗口中绘制多个系统的伯德图
[mag,phase,w] = bode(sys) % 该调用格式不绘制系统的伯德图,而是返回系统伯德图相应的幅值、
% 相位和频率向量,可用 magdB = 20 * log10(mag)将幅值转换为分贝值
[mag,phase] = bode(sys,w) % 该调用格式不绘制系统的伯德图,而是返回系统伯德图在向量 w 所定
% 义频率范围内的幅值和相位向量,可用 magdB = 20 * log10(mag)将幅值转换为分贝值
```

例 5-13 已知某系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K(10s+1)}{s(s+1)(0.01s^2+0.1s+1)}$$

利用 MATLAB 绘制 K 取不同值时系统的开环对数频率特性曲线,并分析 K 的取值对曲线的影响。

解：MATLAB 程序如下。

```

clc;clear;
% K 分别取 10,100,1000
k = [10,100,1000];
for i = 1:length(k)
    num = [10 * k(i),k(i)];
    den = conv([1,0],conv([1,1],[0.01,0.1,1]));
    sys = tf(num,den);
    bode(sys);
    hold on;
end
grid on;
gtext('k = 10');
gtext('k = 100');
gtext('k = 1000');

```

运行结果如图 5-3-7 所示。由图 5-3-7 可知,随着 K 值的增大,对数幅频特性曲线向上平移,形状不变;而对数相频特性曲线不受影响。

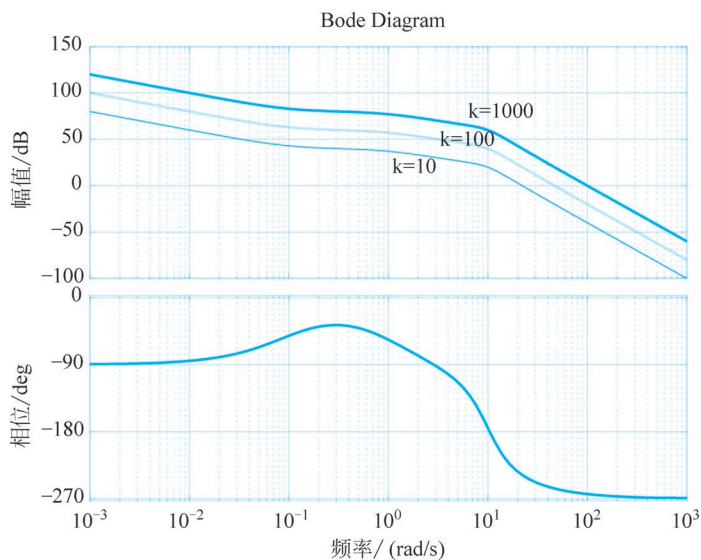


图 5-3-7 例 5-13 的运行结果

5.4 频率稳定判据

系统的闭环稳定性是控制系统分析和设计的首要任务,频率稳定判据就是根据系统的开环频率特性曲线来判断系统的闭环稳定性。常用的频率稳定判据有奈奎斯特稳定判据和对数频率稳定判据两种,其理论基础是复变函数中的幅角原理。

5.4.1 幅角原理

设 $F(s)$ 是一个复变函数,若其有 m 个零点 $z_i (i=1,2,\dots,m)$, n 个极点 $p_j (j=1,2,\dots,n)$,则 $F(s)$ 可以表示成一个有理分式

$$F(s) = \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} \quad (5-4-1)$$

对于 s 平面上的任意一点 s , 根据映射关系, 在 F 平面上可以确定对应的象 $F(s)$ 。若在 s 平面上任画一条不通过 $F(s)$ 任一零点和极点的闭合曲线 Γ_s , 当 s 从曲线 Γ_s 上某点 A 开始顺时针沿 Γ_s 旋转一周回到点 A , 那么在 F 平面上对应的象亦从 $F(A)$ 开始形成一条闭合曲线 Γ_F 回到 $F(A)$, 如图 5-4-1 所示。

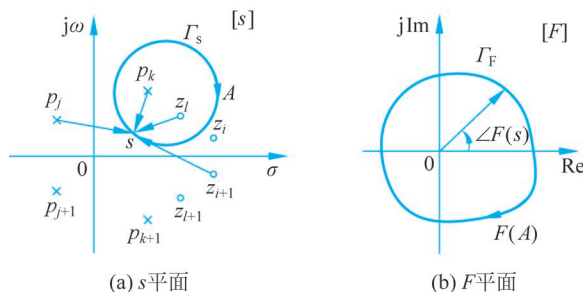


图 5-4-1 s 平面和 F 平面的映射关系

设 s 沿闭合曲线 Γ_s 顺时针转动时, $F(s)$ 的幅角变化为 $\Delta \angle F(s)$ 。根据式(5-4-1)可得

$$\Delta \angle F(s) = \sum_{i=1}^m \Delta \angle (s - z_i) - \sum_{j=1}^n \Delta \angle (s - p_j)$$

由图 5-4-1 可知, 当 s 沿闭合曲线 Γ_s 顺时针旋转一周时, 被 Γ_s 包围的零点向量 $(s - z_i)$ 和极点向量 $(s - p_k)$ 的幅角变化均为 -2π (逆时针旋转为正), 即

$$\Delta \angle (s - z_i) = \Delta \angle (s - p_k) = -2\pi$$

而不被 Γ_s 包围的零点向量和极点向量的幅角变化均为 0。若有 Z 个零点和 P 个极点被 Γ_s 包围, 则 $F(s)$ 的幅角变化为

$$\Delta \angle F(s) = (Z - P)(-2\pi) = 2\pi(P - Z) \quad (5-4-2)$$

式(5-4-2)表示在 F 平面上闭合曲线 Γ_F 逆时针绕原点 $(P - Z)$ 圈。

根据以上分析, 可得如下幅角原理:

设在 s 平面上闭合曲线 Γ_s 不通过 $F(s)$ 的任何零点和极点且包围 $F(s)$ 的 Z 个零点和 P 个极点, 则当 s 沿 Γ_s 顺时针旋转一周时, 在 F 平面上闭合曲线 Γ_F 逆时针绕原点的圈数 R 满足

$$R = P - Z$$

注意, 若 $R < 0$, 表示曲线 Γ_F 顺时针绕原点 $|R|$ 圈。

5.4.2 奈奎斯特稳定判据

奈奎斯特稳定判据是根据系统的开环幅相频率特性曲线判断系统的闭环稳定性。幅角原理应用于控制系统的奈奎斯特稳定判据, 需要选取合适的辅助函数 $F(s)$ 。

1. 辅助函数 $F(s)$ 的选取

对如图 5-4-2 所示的反馈控制系统, 设其开环传递函数为



视频讲解

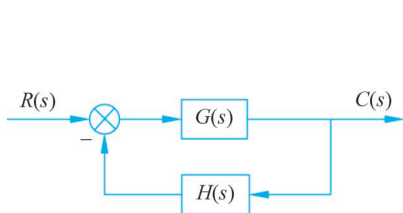


图 5-4-2 反馈控制系统的结构图

$$G(s)H(s) = \frac{M(s)}{N(s)}$$

则其闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{N(s)G(s)}{N(s) + M(s)} \quad (5-4-3)$$

令辅助函数 $F(s)$ 为

$$F(s) = 1 + G(s)H(s) = \frac{N(s) + M(s)}{N(s)} \quad (5-4-4)$$

式(5-4-4)表明,辅助函数 $F(s)$ 是闭环特征多项式与开环特征多项式之比。

由式(5-4-3)和式(5-4-4)可以看出, $F(s)$ 具有如下特点:

(1) $F(s)$ 的零点和极点分别是系统的闭环极点和开环极点。因此,要使系统闭环稳定, $F(s)$ 的所有零点都必须位于 s 的左半平面上。

(2) 若系统开环传递函数的分子多项式和分母多项式阶次分别为 m 和 n , 通常 $m \leq n$, 则 $F(s)$ 的零点数和极点数相同, 均为 n 个。

(3) $F(s)$ 与开环传递函数 $G(s)H(s)$ 之间只相差常数 1, 所以 F 平面上的坐标原点就是 GH 平面上的 $(-1, j0)$ 点。当 s 沿闭合曲线 Γ_s 顺时针旋转一周时, 在 F 平面上形成的闭合曲线 Γ_F 绕原点逆时针旋转的圈数 R 就等于在 GH 平面上形成的闭合曲线 Γ_{GH} 绕 $(-1, j0)$ 点逆时针旋转的圈数。

综上所述, 为了确定系统的闭环稳定性, 就要确定是否有闭环极点(即 $F(s)$ 的零点)在 s 右半平面上。根据幅角原理, 可以在 s 平面上选取一条包围整个 s 右半平面的闭合曲线 Γ_s , 将 $F(s)$ 的所有右零点(设有 Z 个)和右极点(设有 P 个)包围在内; 同时, 在 GH 平面上绘制闭合曲线 Γ_{GH} 并确定 Γ_{GH} 绕 $(-1, j0)$ 点逆时针旋转的圈数 R 。则有

$$Z = P - R$$

若 $Z = 0$, 则系统闭环稳定; 否则系统闭环不稳定。

2. 闭合曲线 Γ_s 的选取和闭合曲线 Γ_{GH} 的绘制

根据前文分析可知, 闭合曲线 Γ_s 不通过 $F(s)$ 的任一零极点且包围整个 s 右半平面。下文分两种情况进一步分析。

(1) $G(s)H(s)$ 在虚轴上无极点。

如图 5-4-3(a) 所示, 闭合曲线 Γ_s 由三部分组成。对应地, GH 平面上闭合曲线 Γ_{GH} 也由三部分组成。

① 正虚轴 $s = j\omega$, ω 从 $0 \rightarrow \infty$ 变化。对应地, 在 GH 平面上是系统的开环幅相频率特性曲线 $G(j\omega)H(j\omega)$ 。

② 半径无穷大的右半圆 $s = \infty e^{j\theta}$, θ 从 $90^\circ \rightarrow -90^\circ$ 变化。对应地, 在 GH 平面上是原点 ($m < n$ 时) 或 $(K^*, j0)$ 点 ($m = n$ 时), K^* 为系统的根轨迹增益。此点不影响 R 的确定, 所以确定圈数 R 时不考虑。

③ 负虚轴 $s = -j\omega$, ω 从 $-\infty \rightarrow 0$ 变化。对应地, 在 GH 平面上是系统的开环幅相频率特性曲线 $G(j\omega)H(j\omega)$ 关于实轴的镜像。

由于闭合曲线 Γ_{GH} 关于实轴对称, 因此在实际系统分析中, 只需绘制 ω 从 $0 \rightarrow \infty$ 变化时系统的开环幅相频率特性曲线 $G(j\omega)H(j\omega)$, 而不必绘制其镜像, 如此得到的曲线称为半

闭合曲线, 仍用 Γ_{GH} 表示。不难得到, 若半闭合曲线 Γ_{GH} 绕 $(-1, j0)$ 点逆时针旋转的圈数为 N , 则

$$R = 2N$$

(2) $G(s)H(s)$ 在虚轴上有极点。

以 $G(s)H(s)$ 含有积分环节为例进行说明。如图 5-4-3(b) 所示, 为了避开原点处极点, 闭合曲线 Γ_s 在图 5-4-3(a) 的基础上略加修改, 即在原点附近取以原点为圆心、半径为无穷小的右半圆为 $s = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon e^{j\theta}$, θ 从 $-90^\circ \rightarrow 90^\circ$ 变化。同样只绘制 ω 从 $0 \rightarrow \infty$ 变化时的半闭合曲线 Γ_{GH} , 此时 s 取值需要先从 $\omega=0$ 绕半径无穷小的圆弧逆时针转 90° 到 $\omega=0_+$, 然后再沿虚轴到 $\omega \rightarrow \infty$ 。这样需要补充 ω 从 $0 \rightarrow 0_+$ 变化时小圆弧所对应的半闭合曲线部分。

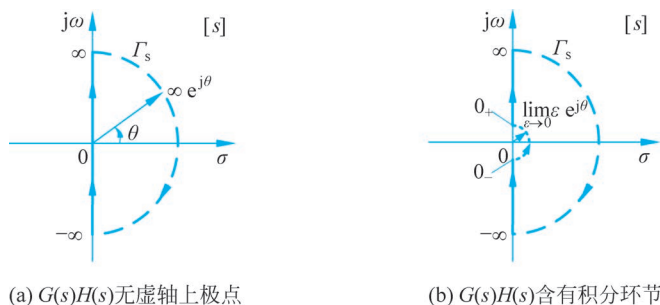


图 5-4-3 s 平面上的闭合曲线 Γ_s

设开环传递函数如式(5-3-2)所示。当 s 沿着无穷小圆弧从 $\omega=0$ 逆时针转动到 $\omega=0_+$ 时, 有 $s = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon e^{j\theta}$, 对应 GH 平面上的曲线为

$$\begin{aligned}
 G(s)H(s) \Big|_{s = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon e^{j\theta}} &= \frac{K}{s^v} \frac{\prod_{i=1}^{m_1} (\tau_i s + 1) \prod_{k=1}^{m_2} (\tau_k^2 s^2 + 2\zeta_k \tau_k s + 1)}{\prod_{j=1}^{n_1} (T_j s + 1) \prod_{l=1}^{n_2} (T_l^2 s^2 + 2\zeta_l T_l s + 1)} \Bigg|_{s = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon e^{j\theta}} \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{K}{\epsilon^v} e^{-jv\theta} = \infty e^{-jv\theta}
 \end{aligned}$$

可见, 当 s 沿着无穷小圆弧从 $\omega=0$ 变化到 $\omega=0_+$ 时, θ 角沿逆时针方向从 0° 变化到 90° , 对应 GH 平面上的曲线从 $G(j0)H(j0)$ 开始沿半径无穷大圆弧顺时针转过 $v \cdot 90^\circ$ 到 $G(j0_+)H(j0_+)$, 也可以说, GH 平面上的曲线从 $G(j0_+)H(j0_+)$ 开始沿半径无穷大圆弧逆时针转过 $v \cdot 90^\circ$ 到 $G(j0)H(j0)$ 。上述分析表明, 半闭合曲线 Γ_{GH} 由开环幅相频率特性曲线和根据积分环节个数所补作的无穷大半径的虚圆弧两部分组成。

3. 奈奎斯特稳定判据

综上所述, 奈奎斯特稳定判据可表述如下。

若开环传递函数 $G(s)H(s)$ 在 s 右半平面有 P 个极点, 闭环传递函数 $\Phi(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$ 在 s 右半平面有 Z 个极点, 当频率 ω 从 $0 \rightarrow \infty$ 变化时, 半闭合曲线 Γ_{GH} 不穿过 $(-1, j0)$ 点且包围 $(-1, j0)$ 点逆时针旋转的圈数为 N , 则有

$$Z = P - 2N$$

那么系统闭环稳定的充分必要条件是 $Z=0$ ；否则系统闭环不稳定。其中, N 可通过半闭合曲线 Γ_{GH} 穿越 $(-1, j0)$ 点左侧负实轴的次数来确定。

若 N_+ 表示正穿越的次数和(从上向下穿越), N_- 表示负穿越的次数和(从下向上穿越), 则

$$N = N_+ - N_-$$

注意, 若 Γ_{GH} 由上向下起于或止于 $(-1, j0)$ 点左侧的负实轴, 则为半次正穿越; 若 Γ_{GH} 由下向上起于或止于 $(-1, j0)$ 点左侧的负实轴, 则为半次负穿越。当半闭合曲线 Γ_{GH} 穿过 $(-1, j0)$ 点时, 表明闭环传递函数在虚轴上有共轭复数极点, 系统可能临界稳定, 称 $(-1, j0)$ 为临界点。

应用奈奎斯特稳定判据判断系统闭环稳定性的步骤如下:

- (1) 由系统开环传递函数确定 P 和 v ;
- (2) 绘制系统的开环幅相频率特性曲线;
- (3) 若 $v \neq 0$, 补全半闭合曲线 Γ_{GH} , 即从 $G(j0_+)H(j0_+)$ 点处开始逆时针绘制半径无穷大、圆心角为 $v \cdot 90^\circ$ 的圆弧;
- (4) 依据奈奎斯特稳定判据判断系统的闭环稳定性。

例 5-14 已知系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{2(s+2)}{(s+1)(s^2+2s-3)}$$

根据奈奎斯特稳定判据判断系统的闭环稳定性。

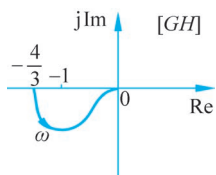


图 5-4-4 例 5-14 的系统概略开环幅相频率特性曲线

解: (1) 由系统的开环传递函数可知 $P=1, v=0$ 。

(2) 绘制系统的开环幅相频率特性曲线。根据 5.3.1 节所述方法, 可绘出系统概略开环幅相频率特性曲线如图 5-4-4 所示。

(3) 由于 $v=0$, 所以无需补线。

(4) 依据奈奎斯特稳定判据判断系统的闭环稳定性。

由图 5-4-4 可知, 随 ω 的增大, 半闭合曲线 Γ_{GH} 自上

向下起于 $(-1, j0)$ 点左侧负实轴, 所以为半次正穿越, 即 $N_+ = \frac{1}{2}$, 而 $N_- = 0$, 所以

$$Z = P - 2N = P - 2(N_+ - N_-) = 0$$

因此该系统是闭环稳定的。

例 5-15 已知单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s^2(Ts+1)}, \quad K, T > 0$$

利用奈奎斯特稳定判据判断系统的闭环稳定性。若系统闭环不稳定, 指出其在 s 右半平面的极点数。

解: (1) 由系统的开环传递函数可知 $P=0, v=2$ 。

(2) 绘制系统的开环幅相频率特性曲线如图 5-4-5 中实线所示。

(3) 由于 $v=2$, 所以需补全半闭合曲线 Γ_{GH} : 从 $G(j0_+)H(j0_+)$ 点处开始逆时针绘制半径无穷大、圆心角为 180° 的圆弧, 如图 5-4-5 中虚线所示。

(4) 依据奈奎斯特稳定判据判断系统的闭环稳定性。

由图 5-4-5 可知,随 ω 的增大,半闭合曲线 Γ_{GH} 自下向上穿越 $(-1, j0)$ 点左侧负实轴,即 $N_- = 1$,而 $N_+ = 0$,所以

$$Z = P - 2N = P - 2(N_+ - N_-) = 2$$

因此该系统是闭环不稳定的,闭环系统在 s 右半平面有 2 个极点。

该例的分析表明,系统的闭环稳定性与开环传递函数的某些系数(如开环增益 K)无关,即无论系数如何变化,系统总是闭环不稳定的,此类系统为结构不稳定系统。

例 5-16 单位负反馈系统的结构图如图 5-4-6 所示,其中 $K_c, K_t, T_1, T_2 > 0$ 。利用奈奎斯特稳定判据分析系统的闭环稳定性与系统开环总增益的关系,并确定临界稳定时的开环总增益。

解: 根据系统结构图可写出系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K_c K_t}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} = \frac{K}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

式中 $K = K_c K_t$ 是系统的开环总增益。

(1) 由系统的开环传递函数可知 $P=0, v=1$ 。

(2) 绘制系统的概略开环幅相频率特性曲线如图 5-4-7 中实线所示。

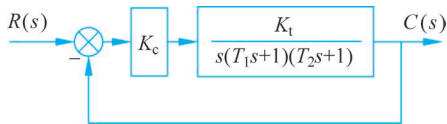


图 5-4-6 例 5-16 的系统结构图

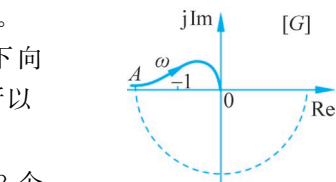


图 5-4-5 例 5-15 的系统概略开环幅相频率特性曲线

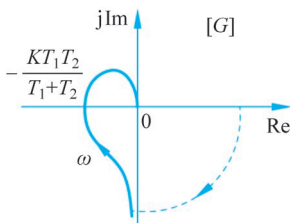


图 5-4-7 例 5-16 的系统概略开环幅相频率特性曲线

(3) 由于 $v=1$,所以需补半闭合曲线 Γ_{GH} : 从 $G(j0_+)H(j0_+)$ 点处开始逆时针绘制半径无穷大、圆心角为 90° 的圆弧,如图 5-4-7 中虚线所示。

(4) 由图 5-4-7 可知,随 ω 的增大,半闭合曲线 Γ_{GH} 点自下向上穿越负实轴,根据奈奎斯特稳定判据进行如下分析:

当 $-\frac{KT_1 T_2}{T_1 + T_2} > -1$ 即 $K < \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}$ 时,半闭合曲线 Γ_{GH} 穿越 $(-1, j0)$ 点右侧负实轴,所以 $N_- = 0$,而 $N_+ = 0$,因此 $Z = P - 2N = P - 2(N_+ - N_-) = 0$,系统闭环稳定;

当 $-\frac{KT_1 T_2}{T_1 + T_2} < -1$ 即 $K > \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}$ 时,半闭合曲线 Γ_{GH} 穿越 $(-1, j0)$ 点左侧负实轴,所以 $N_- = 1$,而 $N_+ = 0$,因此 $Z = P - 2N = P - 2(N_+ - N_-) = 2$,系统闭环不稳定,且闭环系统在 s 右半平面有 2 个极点;

当 $-\frac{KT_1 T_2}{T_1 + T_2} = -1$ 即 $K = \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}$ 时,半闭合曲线 Γ_{GH} 穿过 $(-1, j0)$ 点,系统临界稳定。



视频讲解

该例的分析表明,系统的闭环稳定性与开环传递函数的某些系数(如开环增益 K)有关,当系数改变时,闭环系统的稳定性发生变化,此类系统为条件稳定系统。

5.4.3 对数频率稳定判据

对数频率稳定判据是根据系统的开环对数频率特性曲线判断系统的闭环稳定性。由于系统的开环幅相频率特性曲线与开环对数频率特性曲线存在一定的对应关系,所以将奈奎斯特稳定判据推广运用,即可得到对数频率稳定判据。

1. 开环幅相频率特性曲线与开环对数频率特性曲线的对应关系

系统的开环幅相频率特性曲线(奈奎斯特图)和开环对数频率特性曲线(伯德图)有如下对应关系:

(1) 奈奎斯特图的单位圆($A(\omega)=1$)对应伯德图的 0dB 线($L(\omega)=0$),单位圆的外部($A(\omega)>1$)对应 0dB 线以上的部分($L(\omega)>0$),单位圆的内部($A(\omega)<1$)对应 0dB 线以下的部分($L(\omega)<0$)。

(2) 奈奎斯特图的负实轴对应伯德图的 $\varphi(\omega)=(2k+1)\pi, k=0, \pm 1, \dots$ 。

(3) 奈奎斯特图的 $(-1, j0)$ 点对应伯德图的 $L(\omega)=0$ 且 $\varphi(\omega)=(2k+1)\pi, k=0, \pm 1, \dots$ 的点; $(-1, j0)$ 点的左侧负实轴对应伯德图的 $L(\omega)>0$ 且 $\varphi(\omega)=(2k+1)\pi, k=0, \pm 1, \dots$ 的区域; $(-1, j0)$ 点的右侧负实轴对应伯德图的 $L(\omega)<0$ 且 $\varphi(\omega)=(2k+1)\pi, k=0, \pm 1, \dots$ 的区域。

(4) 奈奎斯特图的半闭合曲线 Γ_{GH} 与伯德图的对数幅频特性曲线和对数相频特性曲线的对应关系。

设 Γ_{GH} 对应的对数幅频特性曲线和对数相频特性曲线分别为 Γ_L 和 Γ_φ 。

① 若 $G(s)H(s)$ 在虚轴上无极点, Γ_{GH} 是系统的开环幅相频率特性曲线。对应地, Γ_L 是开环对数幅频特性曲线 $L(\omega)$, Γ_φ 是开环对数相频特性曲线 $\varphi(\omega)$ 。

② 若 $G(s)H(s)$ 含有 v 个积分环节, Γ_{GH} 在系统开环幅相频率特性曲线的基础上,需从 $G(j0_+)H(j0_+)$ 点起逆时针绘制半径无穷大、圆心角为 $v \cdot 90^\circ$ 的虚圆弧。对应地, Γ_L 仍是开环对数幅频特性曲线 $L(\omega)$, 而 Γ_φ 在开环对数相频特性曲线 $\varphi(\omega)$ 的基础上,需从 $\varphi(0_+)$ 点处向上补画 $v \cdot 90^\circ$ 的虚直线。

(5) 奈奎斯特图和伯德图的正负穿越次数的对应关系。

① 正穿越一次: 奈奎斯特图的半闭合曲线 Γ_{GH} 从上向下穿越 $(-1, j0)$ 点左侧负实轴一次, 对应于伯德图中, 在 $L(\omega)>0$ 的范围内, Γ_φ 曲线从下向上穿越 $(2k+1)\pi, k=0, \pm 1, \dots$ 线一次。

② 负穿越一次: 奈奎斯特图的半闭合曲线 Γ_{GH} 从下向上穿越 $(-1, j0)$ 点左侧负实轴一次, 对应于伯德图中, 在 $L(\omega)>0$ 的范围内, Γ_φ 曲线从上向下穿越 $(2k+1)\pi, k=0, \pm 1, \dots$ 线一次。

③ 正穿越半次: 奈奎斯特图的半闭合曲线 Γ_{GH} 从上向下起于或止于 $(-1, j0)$ 点左侧负实轴, 对应于伯德图中, 在 $L(\omega)>0$ 的范围内, Γ_φ 曲线从下向上起于或止于 $(2k+1)\pi, k=0, \pm 1, \dots$ 线。

④ 负穿越半次：奈奎斯特图的半闭合曲线 Γ_{GH} 从下向上起于或止于 $(-1, j0)$ 点左侧负实轴，对应于伯德图中，在 $L(\omega) > 0$ 的范围内， Γ_φ 曲线从上向下起于或止于 $(2k+1)\pi$ ， $k=0, \pm 1, \dots$ 线。

2. 对数频率稳定判据

设 $\omega = \omega_c$ 时，满足

$$\begin{cases} A(\omega_c) = |G(j\omega_c)H(j\omega_c)| = 1 \\ L(\omega_c) = 20\lg A(\omega_c) = 0 \end{cases}$$

则称 ω_c 为系统的截止频率。

对数频率稳定判据表述为若系统有 P 个 s 右半平面的开环极点， Z 个 s 右半平面的闭环极点，则系统闭环稳定的充分必要条件是：当频率 ω 从 $0 \rightarrow \infty$ 变化时， $\varphi(\omega_c) \neq (2k+1)\pi$ ， $k=0, \pm 1, \dots$ 且在 $L(\omega) > 0$ 的范围内， Γ_φ 曲线穿越 $(2k+1)\pi$ ， $k=0, \pm 1, \dots$ 线的次数

$$N = N_+ - N_-$$

满足

$$Z = P - 2N = 0$$

应用对数频率稳定判据判断系统闭环稳定性的步骤如下：

- (1) 由系统开环传递函数确定 P 和 v ；
- (2) 绘制系统的开环对数幅频特性曲线 $L(\omega)$ 和开环对数相频特性曲线 $\varphi(\omega)$ ；
- (3) 若 $v \neq 0$ ，补画相频特性曲线 Γ_φ ，即从 $\varphi(0_+)$ 点处向上补画 $v \cdot 90^\circ$ 的虚直线；
- (4) 依据对数频率稳定判据判断系统的闭环稳定性。

例 5-17 已知系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{20000(s+1)}{s(s+5)(s^2+10s+400)}$$

利用对数频率稳定判据判断系统的闭环稳定性。

解：(1) 由系统的开环传递函数可知 $P=0, v=1$ 。

(2) 绘制系统的开环对数频率特性曲线如图 5-4-8 中实线所示。

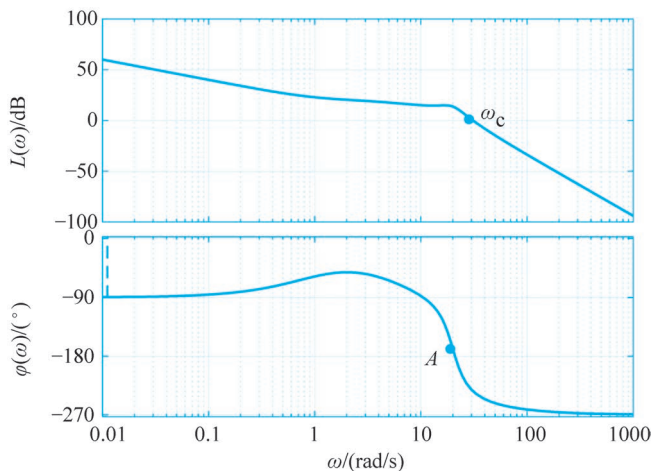


图 5-4-8 例 5-17 的系统开环对数频率特性曲线

(3) 由于 $v=1$, 所以需补画相频特性曲线 Γ_φ : 从 $\varphi(0_+)$ 点处向上补画 90° 的虚直线, 如图 5-4-8 中虚线所示。

(4) 依据对数频率稳定判据判断系统的闭环稳定性。

由图 5-4-8 可知, 随 ω 的增大, 在 $L(\omega) > 0$ 的范围内, 相频特性曲线 Γ_φ 自上向下穿越 -180° 线, 即 $N_- = 1$, 而 $N_+ = 0$, 所以

$$Z = P - 2N = P - 2(N_+ - N_-) = 2$$

因此该系统是闭环不稳定的, 闭环系统在 s 右半平面有 2 个极点。

5.4.4 MATLAB 实现

1. 利用奈奎斯特稳定判据判断系统闭环稳定性的 MATLAB 实现

例 5-18 已知单位负反馈系统的开环传递函数为

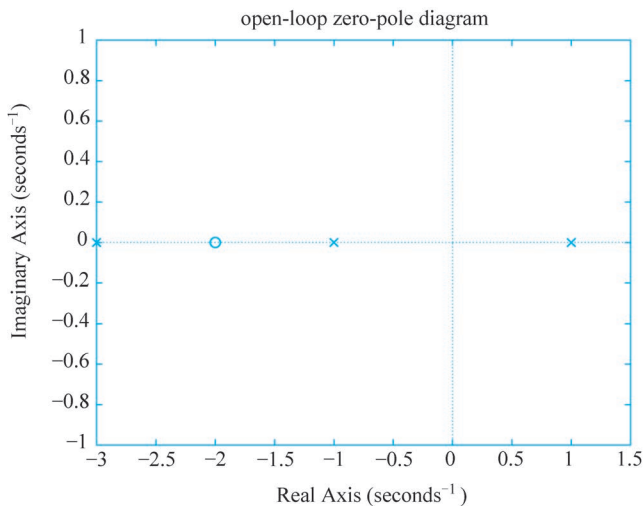
$$G(s) = \frac{2(s+2)}{(s+1)(s^2+2s-3)}$$

绘制系统的奈奎斯特图, 并利用奈奎斯特稳定判据判断系统的闭环稳定性。

解: MATLAB 程序如下。

```
clc;clear
num = [2,4];
den = conv([1,1],[1,2,-3]);
sys = tf(num,den);
pzmap(sys);
title('open-loop zero-pole diagram');
figure(2)
nyquist(sys);
axis([-1.5,0.5,-0.2,0.2]);
figure(3)
pzmap(feedback(sys,1));
title('close-loop zero-pole diagram');
```

运行结果如图 5-4-9 所示。



(a) 开环零极点图

图 5-4-9 例 5-18 的运行结果

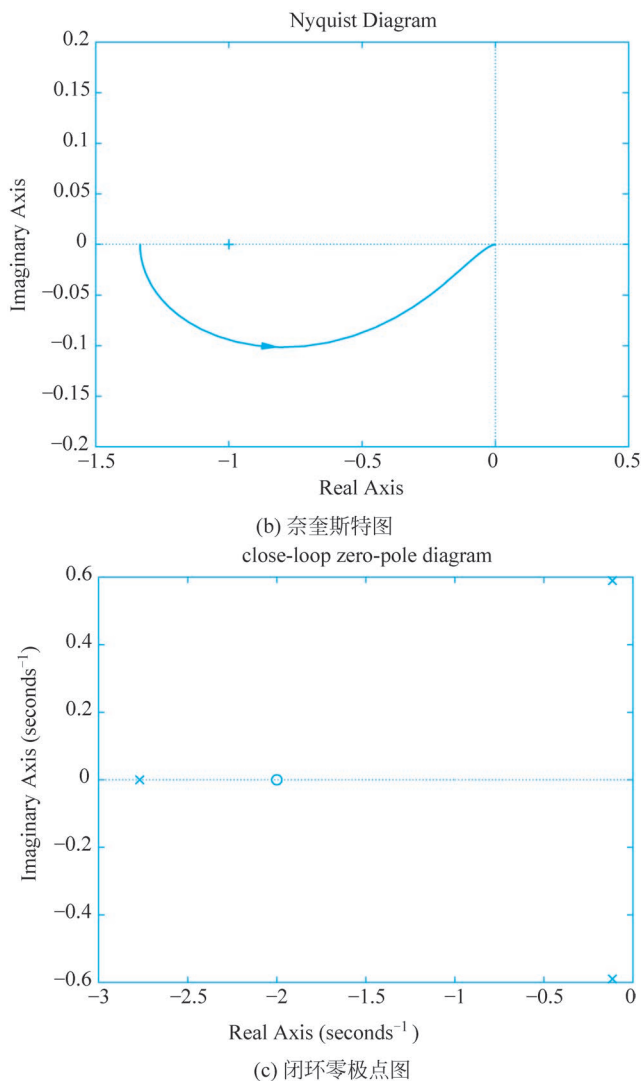


图 5-4-9 (续)

由图 5-4-9(a)可以看出,开环系统 s 右半平面有一个极点,即 $P=1$; 由图 5-4-9(b)可以看出,随 ω 的增大,在 $(-1, j0)$ 点左侧有半次正穿越,即 $N_+ = \frac{1}{2}$, 而 $N_- = 0$, 所以

$$Z = P - R = P - 2N = P - 2(N_+ - N_-) = 0$$

因此该系统是闭环稳定的,与例 5-14 的结果相同。由图 5-4-9(c)可以看出,闭环系统所有极点均在 s 左半平面,即可以验证系统是闭环稳定的。

2. 利用对数频率稳定判据判断系统闭环稳定性的 MATLAB 实现

例 5-19 绘制例 5-18 中系统的伯德图,并利用对数频率稳定判据判断系统的闭环稳定性。

解: MATLAB 程序如下。

```
clc;clear
num = [2,4];
den = conv([1,1],[1,2,-3]);
```

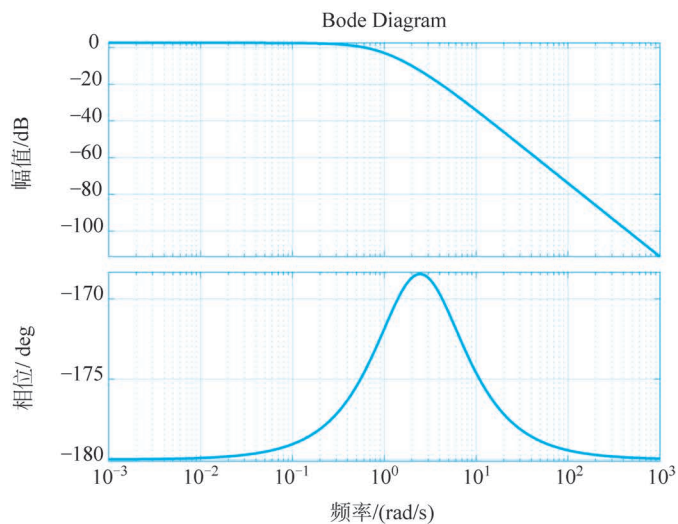


```

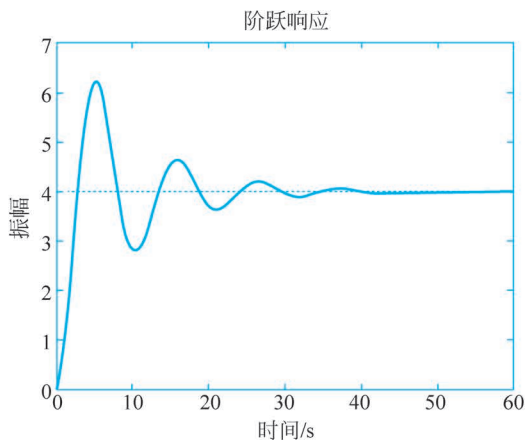
sys = tf(num,den);
w = logspace(-3,3,500);
bode(sys,w);
grid on;
figure(2)
step(feedback(sys,1));

```

运行结果如图 5-4-10 所示。



(a) 伯德图



(b) 闭环系统的阶跃响应

图 5-4-10 例 5-19 的运行结果

由图 5-4-9(a)可以看出,开环系统 s 右半平面有一个极点,即 $P=1$; 由图 5-4-10(a)可以看出,随 ω 的增大,在 $L(\omega)>0$ 的范围内,对数相频特性曲线自下向上起于 -180° 线,即 $N_+=\frac{1}{2}$,而 $N_-=0$,所以

$$Z = P - R = P - 2N = P - 2(N_+ - N_-) = 0$$

因此该系统是闭环稳定的。由图 5-4-10(b)可以看出,闭环系统的阶跃响应呈衰减波形,即可以验证系统是闭环稳定的。



视频讲解

5.5 稳定裕度

在控制系统的分析和设计中,不仅要考虑系统的稳定性,还要求系统有一定的稳定程度,即相对稳定性。频域的相对稳定性通常用稳定裕度来衡量。稳定裕度是系统接近临界稳定状态的程度,包括相角裕度 γ 和幅值裕度 h 。对于最小相位系统,在奈奎斯特图中就是开环幅相频率特性曲线 $G(j\omega)H(j\omega)$ 接近临界点 $(-1, j0)$ 的程度, $G(j\omega)H(j\omega)$ 曲线越接近临界点 $(-1, j0)$, 系统的相对稳定性越差。

5.5.1 相角裕度 γ

1. 相角裕度 γ 的定义

如图 5-5-1 所示,设 ω_c 为开环幅相频率特性曲线 $G(j\omega)H(j\omega)$ 与单位圆交点处的频率(截止频率),则系统在 ω_c 处的幅值和相角为

$$\begin{cases} A(\omega_c) = |G(j\omega_c)H(j\omega_c)| = 1 \\ \varphi(\omega_c) = \angle G(j\omega_c)H(j\omega_c) \end{cases}$$

相角裕度 γ 定义为

$$\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 180^\circ + \angle G(j\omega_c)H(j\omega_c)$$

相角裕度 γ 的物理意义是,闭环稳定系统的开环相频特性再滞后 γ 度,则开环幅相频率特性曲线 $G(j\omega)H(j\omega)$ 会穿过临界点 $(-1, j0)$, 系统将处于临界稳定状态; 如果开环相频特性滞后角超过 γ 度, 系统就会变为不稳定系统。相角裕度是设计控制系统时的一个重要依据。

2. 相角裕度在伯德图上的表示

如图 5-5-2 所示, ω_c 为对数幅频特性曲线 $L(\omega)$ 与 0dB 线交点处的频率, 相角裕度 γ 为 ω_c 处相角 $\varphi(\omega_c)$ 与 -180° 线的距离。

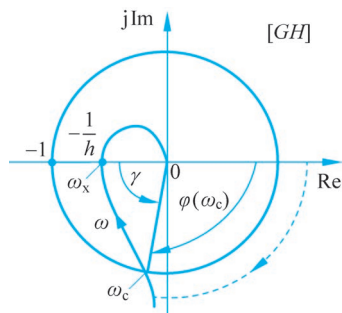


图 5-5-1 稳定裕度的定义图示

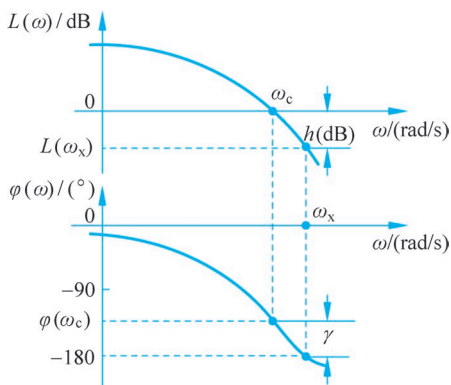


图 5-5-2 稳定裕度在伯德图上的表示

5.5.2 幅值裕度 h

1. 幅值裕度 h 的定义

如图 5-5-1 所示,设 ω_x 为开环幅相频率特性曲线 $G(j\omega)H(j\omega)$ 与负实轴交点处的频率

(穿越频率),则系统在 ω_x 处的相角和幅值为

$$\begin{cases} \varphi(\omega_x) = \angle G(j\omega_x)H(j\omega_x) = (2k+1)\pi, & k=0, \pm 1, \dots \\ A(\omega_x) = |G(j\omega_x)H(j\omega_x)| \end{cases}$$

幅值裕度 h 定义为 $A(\omega_x)$ 的倒数,即

$$h = \frac{1}{A(\omega_x)} = \frac{1}{|G(j\omega_x)H(j\omega_x)|}$$

幅值裕度 h 的物理意义是,闭环稳定系统的开环幅频特性再增大 h 倍,则开环幅相频率特性曲线 $G(j\omega)H(j\omega)$ 会穿过临界点 $(-1, j0)$, 系统将处于临界稳定状态; 如果开环幅频特性增大超过 h 倍, 系统就会变为不稳定系统。

2. 幅值裕度在伯德图上的表示

如图 5-5-2 所示, ω_x 为对数相频特性曲线 $\varphi(\omega)$ 与 $(2k+1)\pi, k=0, \pm 1, \dots$ 线(通常为 -180° 线)交点处的频率, 则

$$h(\text{dB}) = -20\lg |G(j\omega_x)H(j\omega_x)| = -L(\omega_x)$$

相角裕度和幅值裕度通常作为控制系统分析和设计的开环频域指标, 如果只用两者之一, 都不足以说明系统的相对稳定性, 只有同时给出这两个量才能确定系统的相对稳定性。对于最小相位系统, 只要满足 $\gamma > 0$ 或 $h(\text{dB}) > 0 (h > 1)$ 时, 闭环系统就是稳定的。

例 5-20 已知单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(0.5s+1)(0.02s+1)}$$

系统开环增益 K 为 10、25 和 100 时分别确定系统的稳定裕度。

解: 系统的开环频率特性为

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{K}{j\omega(j0.5\omega+1)(j0.02\omega+1)} \\ &= \frac{K}{\omega\sqrt{1+(0.5\omega)^2}\sqrt{1+(0.02\omega)^2}} e^{j[-90^\circ - \arctan(0.5\omega) - \arctan(0.02\omega)]} \end{aligned}$$

按 ω_x 定义有

$$-90^\circ - \arctan(0.5\omega_x) - \arctan(0.02\omega_x) = -180^\circ$$

解得

$$\omega_x = 10 \text{ rad/s}$$

① 当 $K=10$ 时

$$A(\omega_x) = \frac{10}{\omega_x \sqrt{1+(0.5\omega_x)^2} \sqrt{1+(0.02\omega_x)^2}} = 0.19$$

$$h = \frac{1}{A(\omega_x)} = 5.26, \quad h(\text{dB}) = -20\lg A(\omega_x) = 14.42 \text{ dB}$$

按 ω_c 的定义有

$$A(\omega_c) = \frac{10}{\omega_c \sqrt{1+(0.5\omega_c)^2} \sqrt{1+(0.02\omega_c)^2}} = 1$$

解得

$$\omega_c = 4.47 \text{ rad/s}$$

$$\begin{aligned}\varphi(\omega_c) &= -90^\circ - \arctan(0.5\omega_c) - \arctan(0.02\omega_c) = -161^\circ \\ \gamma &= 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 19^\circ\end{aligned}$$

由上文的计算可以看出,对于高阶系统,一般难以准确计算截止频率 ω_c 。在工程上,可根据对数幅频渐近特性曲线确定截止频率 ω_c ,即 ω_c 满足 $L(\omega_c)=0$,再由相频特性确定相角裕度 γ 。

② 当 $K=25$ 和 $K=100$ 时

绘出 $K=25$ 和 $K=100$ 时的对数幅频渐近特性曲线和对数相频特性曲线如图5-5-3所示。它们的幅频特性曲线不同,但具有相同的相频特性曲线。

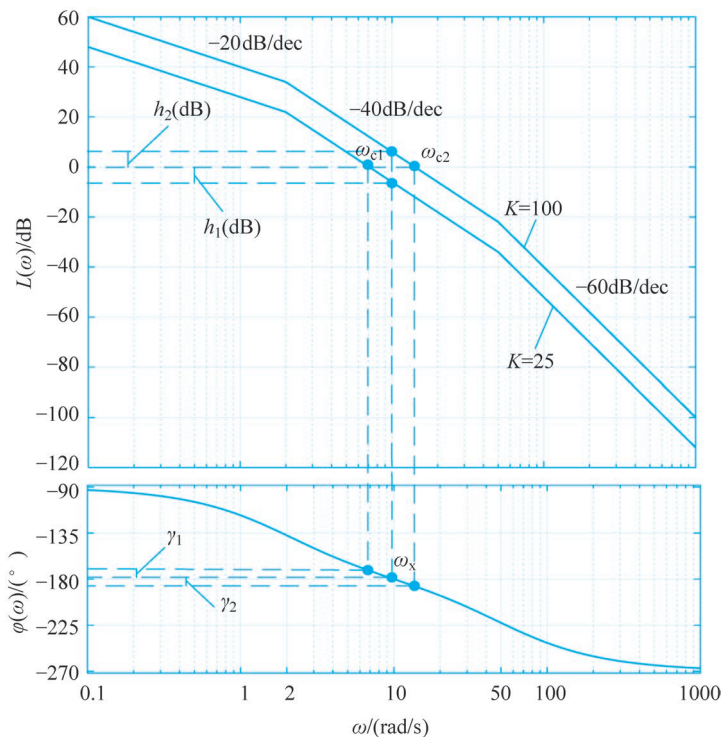


图 5-5-3 例 5-20 的系统对数频率特性曲线

由图 5-5-3 可得,当 $K=25$ 时, $h_1(\text{dB})=6.36\text{dB}$, $\omega_{c1}=7\text{rad/s}$, $\gamma_1=8^\circ$;当 $K=100$ 时, $h_2(\text{dB})=-5.68\text{dB}$, $\omega_{c2}=14\text{rad/s}$, $\gamma_2=-7.5^\circ$ 。

例 5-20 分析表明,减小开环增益 K ,能够增大系统的稳定裕度,但会使系统的稳态误差变大。为了使系统具有良好的过渡过程,工程上一般要求相角裕度 γ 为 $30^\circ\sim 60^\circ$,幅值裕度 $h(\text{dB})$ 应大于 6dB 。而欲满足相角裕度 γ 为 $30^\circ\sim 60^\circ$ 这一要求,应使开环对数幅频特性在截止频率 ω_c 附近的斜率大于 -40dB/dec 且具有一定的宽度,通常取 -20dB/dec 。

5.5.3 MATLAB 实现

MATLAB 提供了用于计算系统稳定裕度的函数 `margin()` 和 `allmargin()`,其调用格式如下:

```
margin(sys) % 绘制系统在默认频率范围内的伯德图,并显示幅值裕度、相角裕度及相应的频率
[Gm,Pm,wg,wp] = margin(sys) % 该调用格式不绘制系统的伯德图,而是返回系统的幅值裕度、相角
```

% 裕度及相应的频率,可用 $G_{\text{m dB}} = 20 * \log_{10}(G_{\text{m}})$ 将幅值转换为分贝值

$[G_{\text{m}}, P_{\text{m}}, w_{\text{g}}, w_{\text{p}}] = \text{margin}(\text{map}, \text{phase}, w)$ % 该调用格式首先由 `bode()` 函数得到幅值 `map`、相位 `phase`

% 和频率向量 `w`, 然后返回系统的幅值裕度、相角裕度及相应的频率, 而不绘制系统的伯德图. 可用

% $G_{\text{m dB}} = 20 * \log_{10}(G_{\text{m}})$ 将幅值转换为分贝值

`allmargin(sys)` % 返回单输入单输出系统的幅值裕度、相角裕度及相应频率, 时滞幅值裕度及临界

% 频率, 相应闭环系统稳定等详细信息

例 5-21 已知单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{10}{s(0.5s + 1)(0.02s + 1)}$$

利用 MATLAB 求系统的稳定裕度。

解：MATLAB 程序如下。

```
clc;clear
num = [10];
den = conv([0.5, 1, 0], [0.02, 1]);
sys = tf(num, den);
margin(sys);
grid on;
[Gm, Pm, wg, wp] = margin(sys)
Gm dB = 20 * log10(Gm)
s = allmargin(sys)
```

运行结果如图 5-5-4 所示。

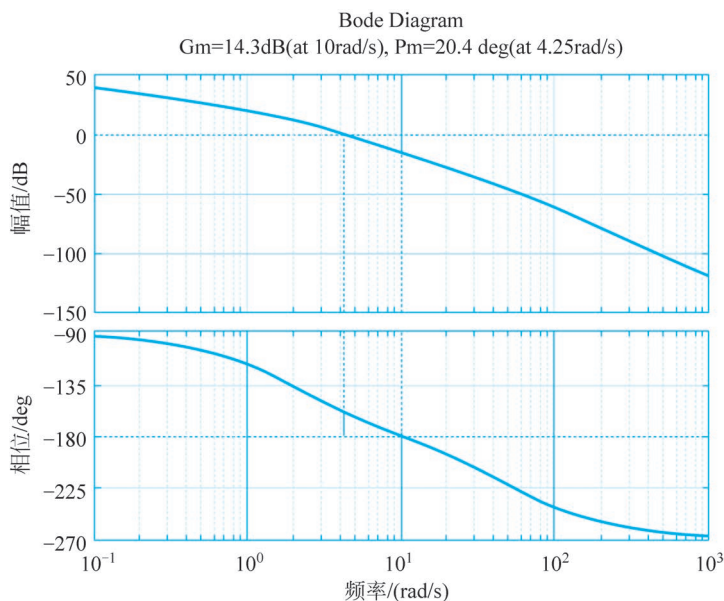


图 5-5-4 例 5-21 的运行结果

```
Gm =
    5.2000
Pm =
    20.3681
wg =
    10
wp =
```

```

4.2460
GmdB =
14.3201
s =
包含以下字段的 struct:
GainMargin: 5.2000
GMFrequency: 10
PhaseMargin: 20.3681
PMFrequency: 4.2460
DelayMargin: 0.0837
DMFrequency: 4.2460
Stable: 1

```

5.6 利用开环频率特性分析系统的性能

在系统闭环稳定的前提下,可以利用开环频率特性分析系统的准确性、快速性、抗高频干扰能力等性能。鉴于开环对数频率特性在控制工程中应用更广泛,且对于最小相位系统,对数幅频特性和对数相频特性具有一一对应的关系,所以通常采用对数幅频特性对系统的性能进行分析。

实际系统的开环对数幅频渐近特性曲线一般如图 5-6-1 所示,将它分成低频段、中频段和高频段 3 个频段进行讨论。

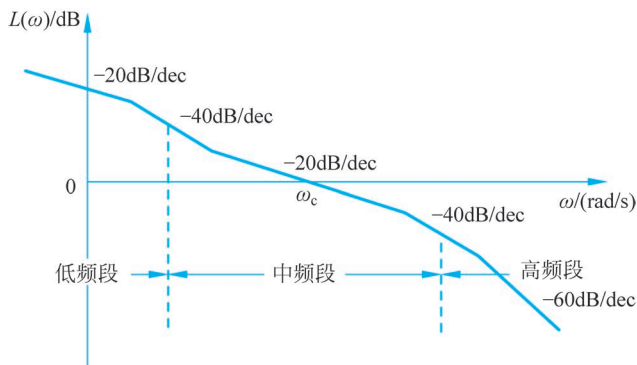


图 5-6-1 实际系统的开环对数幅频渐近特性曲线

5.6.1 低频段与系统稳态性能的关系

低频段通常是指开环对数幅频渐近特性曲线第一个转折频率之前的频段,这一频段的特性完全由积分环节和开环增益决定,反映了系统的稳态性能。低频段的对数幅频特性为

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{K}{\omega^v} = 20 \lg K - 20v \lg \omega$$

即低频段的斜率表示积分环节的个数 v (系统型别),而高度决定系统的开环增益 K 。

若低频段斜率为 0 dB/dec ,则 $v=0$,即系统为 0 型系统。低频段的高度为 $20 \lg K$,则位置误差系数为 $K_p = K$;

若低频段斜率为 -20 dB/dec ,则 $v=1$,即系统为 I 型系统。绘制低频段的延长线交 0 dB 线于 ω_k ,有 $L(\omega_k) = 20 \lg K - 20 \lg \omega_k = 0$,得 $K = \omega_k$,则速度误差系数为 $K_v = K = \omega_k$;

若低频段斜率为 -40dB/dec ,则 $v=2$,即系统为Ⅱ型系统。同理可得加速度误差系数为 $K_a=K=\omega_k^2$ 。

由上述分析可以看出,低频段的斜率越小,位置越高,则对应的积分环节数目越多,开环增益越大,那么在系统闭环稳定的前提下,稳态误差越小,稳态精度越高。

5.6.2 中频段与系统动态性能的关系

中频段是指开环对数幅频渐近特性曲线在截止频率 ω_c 附近的频段,这一频段的特性集中反映了系统的动态性能。系统的动态性能主要取决于中频段的形状,而中频段形状又取决于开环截止频率 ω_c 、中频段的斜率和中频段的宽度3个参数。其中,中频段的斜率和宽度反映系统的平稳性,开环截止频率 ω_c 的大小反映系统的快速性。

对于最小相位系统,对数幅频特性和对数相频特性具有一一对应的关系。对数相频特性 $\varphi(\omega)$ 在某频率 ω_0 处的大小与该频率对应数幅频渐近特性曲线 $L(\omega)$ 的斜率有密切的关系, $L(\omega)$ 的斜率越负,则 $\varphi(\omega_0)$ 负值越大。因此,在开环截止频率 ω_c 处, $L(\omega)$ 的斜率越负,则 $\varphi(\omega_c)$ 负值越大,那么相角裕度 $\gamma=180^\circ+\varphi(\omega_c)$ 就越小,系统的稳定程度和动态性能就会变差,甚至系统会变得不稳定。为了使系统稳定且具有满意的动态性能,一般希望开环截止频率 ω_c 处的开环对数幅频特性曲线斜率为 -20dB/dec ,且中频段有足够的宽度。

1. 二阶系统

对于二阶系统,开环频域指标截止频率 ω_c 和相角裕度 γ 与时域指标超调量 $\sigma\%$ 和调节时间 t_s 之间有准确的解析关系,下面进行详细讨论。

典型二阶系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$$

开环频率特性为

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{j\omega(j\omega + 2\zeta\omega_n)} = \frac{\omega_n^2}{\omega\sqrt{\omega^2 + 4\zeta^2\omega_n^2}} e^{j[-90^\circ - \arctan \frac{\omega}{2\zeta\omega_n}]} = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$$

(1) γ 和 $\sigma\%$ 的关系。

根据相角裕度的定义,有

$$A(\omega_c) = \frac{\omega_n^2}{\omega_c\sqrt{\omega_c^2 + 4\zeta^2\omega_n^2}} = 1$$

可求得

$$\omega_c = \omega_n \sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{4\zeta^4 + 1}} \quad (5-6-1)$$

则

$$\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 90^\circ - \arctan \frac{\omega_c}{2\zeta\omega_n} = \arctan \frac{2\zeta\omega_n}{\omega_c} \quad (5-6-2)$$

将式(5-6-1)代入式(5-6-2)得

$$\gamma = \arctan \frac{2\zeta}{\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{4\zeta^4 + 1}}} \quad (5-6-3)$$

当 $0 < \zeta < 0.6$ 时, γ 和 ζ 之间近似线性关系,且

$$\gamma \approx 100\zeta$$

由第3章时域分析可知,二阶系统的超调量为

$$\sigma\% = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\% \quad (5-6-4)$$

画出式(5-6-3)和式(5-6-4)的函数关系曲线如图 5-6-2 所示。可见,相角裕度 γ 和超调量 $\sigma\%$ 都仅由阻尼比 ζ 决定,且 γ 是 ζ 的增函数, $\sigma\%$ 是 ζ 的减函数。阻尼比 ζ 越大,相角裕度 γ 越大,超调量 $\sigma\%$ 越小,系统阶跃响应的平稳性就越好。工程上通常希望 $30^\circ \leq \gamma \leq 60^\circ$ 。

(2) ω_c 、 γ 和 t_s 的关系。

由第3章时域分析可知,二阶系统的调节时间($\Delta=5\%$ 时)为

$$t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n} \quad (5-6-5)$$

将式(5-6-1)与式(5-6-5)相乘,得

$$\omega_c t_s = \frac{3}{\zeta} \sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{4\zeta^4 + 1}} \quad (5-6-6)$$

由式(5-6-3)和式(5-6-6)可得

$$\omega_c t_s = \frac{6}{\tan\gamma} \quad (5-6-7)$$

画出式(5-6-7)的函数关系曲线如图 5-6-3 所示。可见,当 γ 一定时,开环截止频率 ω_c 与调节时间 t_s 成反比,即 ω_c 越大,调节时间 t_s 越短,系统响应速度越快,但系统抗高频干扰的能力也会越差。

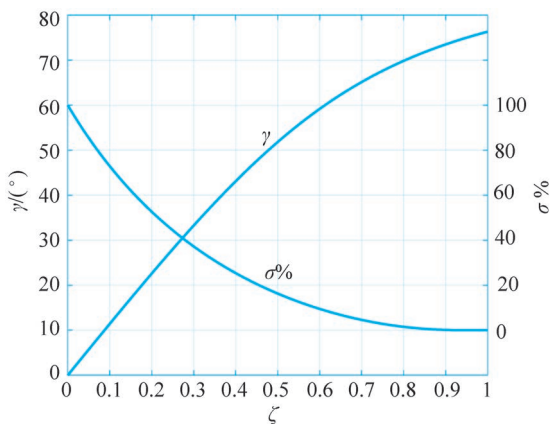


图 5-6-2 二阶系统 γ 、 $\sigma\%$ 与 ζ 的关系曲线

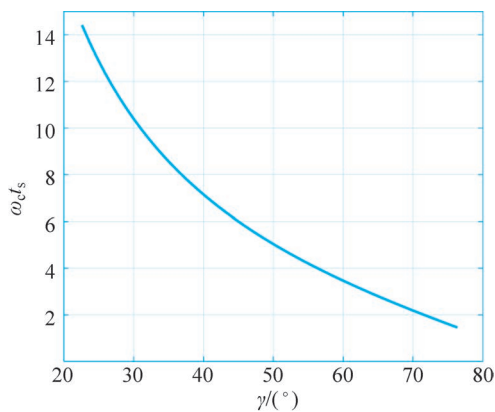


图 5-6-3 二阶系统 $\omega_c t_s$ 与 γ 的关系曲线

2. 高阶系统

对于高阶系统,要准确建立开环频域指标和时域指标之间的数学表达式是很困难的。工程实际中,常用以下两个经验公式通过开环频域指标估算时域指标:

$$\sigma\% = \left[0.16 + 0.4 \left(\frac{1}{\sin\gamma} - 1 \right) \right] \times 100\% \quad 35^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ \quad (5-6-8)$$

$$t_s = \frac{\pi}{\omega_c} \left[2 + 1.5 \left(\frac{1}{\sin\gamma} - 1 \right) + 2.5 \left(\frac{1}{\sin\gamma} - 1 \right)^2 \right] \quad 35^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ \quad (5-6-9)$$

画出式(5-6-8)和式(5-6-9)的函数关系曲线如图 5-6-4 所示。可见,当 ω_c 一定时,高阶系统

的超调量 $\sigma\%$ 和调节时间 t_s 都随 γ 的增大而减小。

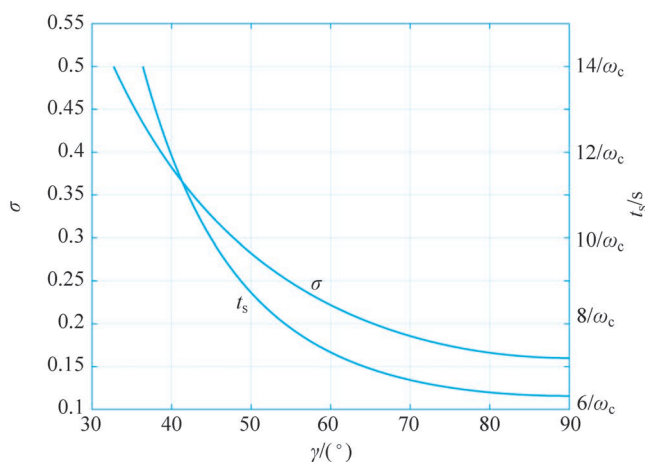


图 5-6-4 高阶系统 $\sigma\%$ 、 t_s 与 γ 的关系曲线

5.6.3 高频段与系统抗高频干扰能力的关系

高频段是指开环对数幅频渐近特性曲线在中频段以后的频段,这一频段的特性是由系统中时间常数很小的环节决定的,这些环节的转折频率都远大于开环截止频率 ω_c ,故对系统的动态性能影响不大。高频段主要反映了系统对高频干扰信号的抑制能力。

对于单位负反馈系统,闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

令 $s = j\omega$ 得

$$\Phi(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)} \quad (5-6-10)$$

式(5-6-10)中, $G(j\omega)$ 为系统的开环频率特性, $\Phi(j\omega)$ 为系统的闭环频率特性。

在高频段,系统的开环对数幅频特性值一般都很小,即 $20\lg |G(j\omega)| \ll 0$,亦即 $G(j\omega) \ll 1$,因此有

$$|\Phi(j\omega)| = \frac{|G(j\omega)|}{|1 + G(j\omega)|} \approx |G(j\omega)| \quad (5-6-11)$$

式(5-6-11)表明,在高频段,系统的闭环频率特性和开环频率特性近似相等。因此,高频段的斜率越负,幅值越小,系统对高频干扰信号的衰减作用就越大,即系统的抗高频干扰能力就越强。

综上所述,一个合理的控制系统,其开环对数幅频特性曲线的形状应具有如下特点:

(1) 低频段应具有 -20dB/dec 或 -40dB/dec 的斜率,并有一定的高度,以满足系统稳态性能的要求。

(2) 中频段的斜率应为 -20dB/dec ,且具有足够的宽度,以保证系统的动态性能比较好。

(3) 高频段应有较负的斜率,以提高系统抗高频干扰的能力。

值得注意的是,三频段的划分没有严格的准则,三频段的理论也没有为校正系统提供具体方法,但三频段的概念为直接利用开环频率特性分析稳定闭环系统的稳态、动态和抗干扰

性能提供了原则和方向。

5.7 控制系统的闭环频率特性

工程上常利用开环频率特性分析和设计控制系统。在对控制系统进行进一步的分析和设计时,也常利用其闭环频率特性。

5.7.1 闭环频率特性的确定方法

闭环频率特性的确定有不同的方法,下面介绍通过系统的开环频率特性来求闭环频率特性的向量作图法。

反馈控制系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{1}{H(s)} \cdot \frac{G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

其中 $H(s)$ 为主反馈通道的传递函数,一般为常数,故不影响闭环频率特性的形状。而 $G(s)H(s)/[1+G(s)H(s)]$ 可以看成是前向通道传递函数为 $G(s)H(s)$ 的单位负反馈系统的传递函数。因此,确定系统的闭环频率特性时,只需对单位负反馈系统进行分析。

设单位负反馈系统的开环频率特性为

$$G(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

那么闭环频率特性为

$$\Phi(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)} = M(j\omega)e^{j\alpha(\omega)}$$

若开环幅相频率特性曲线如图 5-7-1 所示,由图可得

$$\begin{cases} G(j\omega) = \mathbf{OA} = |\mathbf{OA}|e^{j\varphi(\omega)} \\ 1 + G(j\omega) = \mathbf{PA} = |\mathbf{PA}|e^{j\theta(\omega)} \end{cases}$$

故闭环频率特性为

$$\Phi(j\omega) = \frac{\mathbf{OA}}{\mathbf{PA}} = \frac{|\mathbf{OA}|}{|\mathbf{PA}|}e^{j[\varphi(\omega) - \theta(\omega)]}$$

即

$$\begin{cases} M(j\omega) = \frac{|\mathbf{OA}|}{|\mathbf{PA}|} \\ \alpha(\omega) = \varphi(\omega) - \theta(\omega) \end{cases}$$

当 ω 从 $0 \rightarrow \infty$ 变化时,便可以通过描点法绘制出系统概略的闭环幅频特性曲线和闭环相频特性曲线。典型的闭环幅频特性曲线如图 5-7-2 所示。此方法几何意义明确,容易理解,但绘制过程比较烦琐。工程上常用 MATLAB 等计算机软件求闭环频率特性。

5.7.2 系统的闭环频域性能指标及其与时域指标的关系

用闭环频率特性来评价系统的性能,通常采用零频值 $M(0)$ 、谐振峰值 M_r 、谐振频率 ω_r 、带宽频率 ω_b 等性能指标,如图 5-7-2 所示。

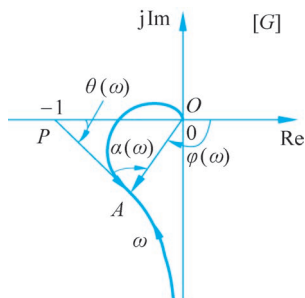


图 5-7-1 由开环频率特性确定闭环频率特性

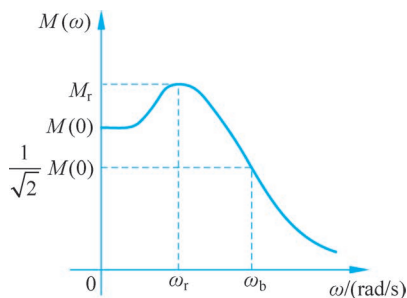


图 5-7-2 典型的闭环幅频特性曲线

1. 零频值 $M(0)$

零频值 $M(0)$ 是 $\omega=0$ 时的闭环幅频特性值, 其大小反映了系统的稳态精度。

对于单位负反馈系统, 设开环传递函数

$$G(s) = \frac{K}{s^v} G_0(s)$$

其中 $G_0(s)$ 中不包含比例环节和积分环节。则闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{KG_0(s)}{s^v + KG_0(s)}$$

所以

$$M(0) = |\Phi(j\omega)|_{\omega=0} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left| \frac{KG_0(j\omega)}{(j\omega)^v + KG_0(j\omega)} \right| = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left| \frac{K}{(j\omega)^v + K} \right|$$

(1) 若 $M(0)=1$, 说明 $v \neq 0$, 即系统为 I 型及以上系统, 其在单位阶跃信号作用下的稳态误差为 0。

(2) 若 $M(0) < 1$, 说明 $v=0$, 即系统为 0 型系统, 且 $M(0) = \frac{K}{1+K}$, 系统在单位阶跃信号作用下存在稳态误差。

综上所述可知, $M(0)$ 越接近 1, 系统的稳态精度越高。

2. 谐振峰值 M_r

谐振峰值 M_r 是闭环幅频特性的最大值, 其大小反映了系统的平稳性。

对于典型二阶系统, 其闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

由 5.2 节中振荡环节的讨论可知, 二阶系统的谐振峰值为

$$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}, \quad 0 < \zeta \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (5-7-1)$$

由第 3 章时域分析可知, 二阶系统的超调量为

$$\sigma\% = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\% \quad (5-7-2)$$

画出式(5-7-1)和式(5-7-2)的函数关系曲线如图 5-7-3 所示。可见, 谐振峰值 M_r 和超调量 $\sigma\%$ 都由阻尼比 ζ 决定, 且都是 ζ 的减函数。 ζ 越小, M_r 越大, $\sigma\%$ 也越大, 系统阶跃响应

的平稳性就越差。当谐振峰值 $M_r = 1.2 \sim 1.5$, 相应的 $\sigma\% = 20\% \sim 30\%$, 此时系统的动态过程有适度的振荡, 平稳性较好, 系统响应结果比较满意。工程上, 设计控制系统时, 常以 $M_r = 1.3$ 作为设计依据。

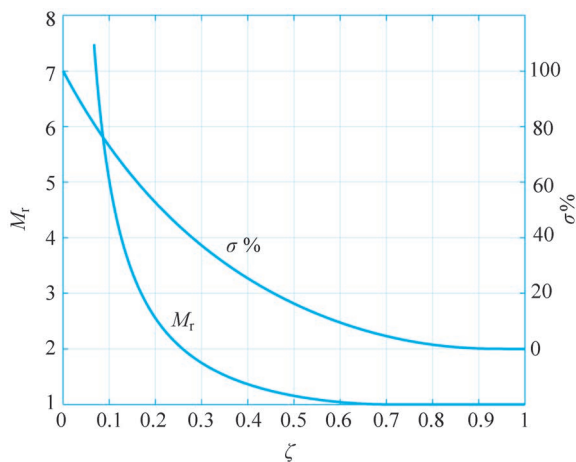


图 5-7-3 二阶系统 M_r 、 $\sigma\%$ 与 ζ 的关系曲线

进一步分析可以得到谐振峰值 M_r 和超调量 $\sigma\%$ 之间的关系为

$$\sigma\% = e^{-\pi\sqrt{M_r - \sqrt{M_r^2 - 1}}} \times 100\%$$

3. 谐振频率 ω_r

谐振频率 ω_r 是闭环幅频特性出现谐振峰值时的频率, 其大小反映系统的快速性。

对于典型二阶系统, 由 5.2 节中振荡环节的讨论可知, 谐振频率为

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

由第 3 章时域分析可知, 二阶系统的峰值时间为

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

则

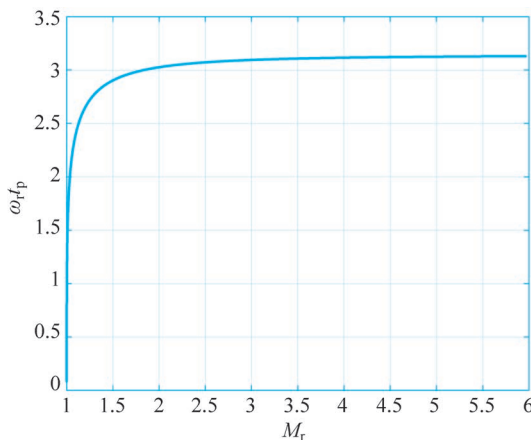
$$\omega_r t_p = \frac{\pi \sqrt{1 - 2\zeta^2}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (5-7-3)$$

结合式(5-7-1)和式(5-7-3), 画出 $\omega_r t_p$ 与 M_r 之间的关系曲线如图 5-7-4 所示。可见, 当 M_r 一定时, 谐振频率 ω_r 与峰值时间 t_p 成反比, 即 ω_r 越大, t_p 越小, 系统阶跃响应的快速性越好。

4. 带宽频率 ω_b

带宽频率 ω_b 是闭环幅频特性下降到 $\frac{1}{\sqrt{2}}M(0)$ 时的频率。将频率范围 $(0, \omega_b)$ 称为系统的频带宽度, 简称带宽。带宽是频域中一项非常重要的性能指标, 其大小反映了系统的快速性和抗干扰能力。

对于典型二阶系统, 其闭环幅频特性为

图 5-7-4 二阶系统 $\omega_r t_p$ 与 M_r 的关系曲线

$$M(\omega) = |\Phi(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}}$$

显然 $M(0)=1$, 由带宽频率的定义得

$$\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_b^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega_b^2}{\omega_n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

解得

$$\omega_b = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2 + \sqrt{2 - 4\zeta^2 + 4\zeta^4}} \quad (5-7-4)$$

由第 3 章时域分析可知, 二阶系统的调节时间 ($\Delta=5\%$ 时) 为

$$t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n}$$

则

$$\omega_b t_s = \frac{3}{\zeta} \sqrt{1 - 2\zeta^2 + \sqrt{2 - 4\zeta^2 + 4\zeta^4}} \quad (5-7-5)$$

结合式(5-7-1)和式(5-7-5), 画出 $\omega_b t_s$ 与 M_r 之间的关系曲线如图 5-7-5 所示。可见, 当 M_r 一定时, 带宽频率 ω_b 与调节时间 t_s 成反比, 即 ω_b 越大, t_s 越短, 系统响应速度越快, 但系统抗高频干扰的能力也会越差。这一规律对任意阶次的控制系统都是成立的。

上文讨论了典型二阶系统的闭环频域指标和时域指标之间的关系, 两者可以用准确的解析表达式表示。对于高阶系统, 时域指标和闭环频域指标之间很难建立严格的数学表达式。但当高阶系统存在一对共轭复数主导极点时, 可以将高阶系统近似为二阶系统进行分析和设计。至于一般的高阶系统, 在工程上, 常用以下两个经验公式通过闭环频域指标估算时域指标:

$$\sigma\% = [0.16 + 0.4(M_r - 1)] \times 100\% \quad 1 \leq M_r \leq 1.8 \quad (5-7-6)$$

$$t_s = \frac{\pi}{\omega_c} [2 + 1.5(M_r - 1) + 2.5(M_r - 1)^2] \quad 1 \leq M_r \leq 1.8 \quad (5-7-7)$$

画出式(5-7-6)和式(5-7-7)的函数关系曲线如图 5-7-6 所示。可见,高阶系统的超调量 $\sigma\%$ 随谐振峰值 M_r 的增大而增大;调节时间 t_s 随 M_r 的增大而增大,但随截止频率 ω_c 的增大而减小。

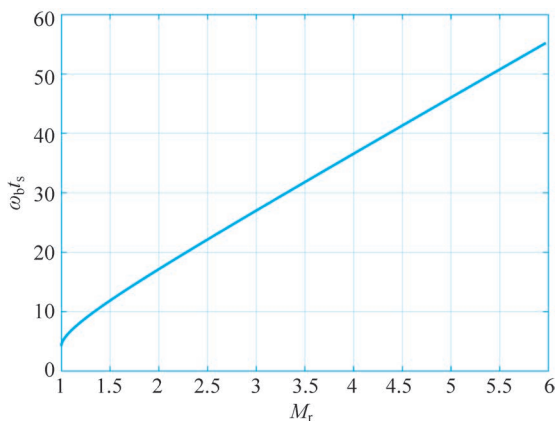


图 5-7-5 二阶系统 $\omega_b t_s$ 与 M_r 的关系曲线

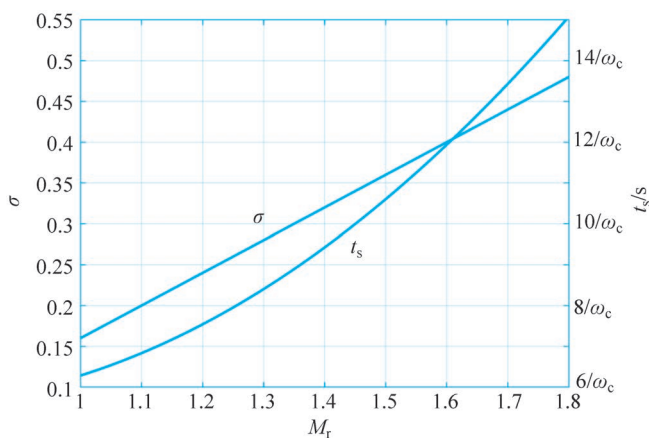


图 5-7-6 高阶系统 $\sigma\%$ 、 t_s 与 M_r 的关系曲线

5.7.3 系统闭环频域指标和开环频域指标的关系

系统闭环频域指标带宽频率 ω_b 和谐振峰值 M_r 与开环频域指标截止频率 ω_c 和相角裕度 γ 之间存在密切的关系。

1. 带宽频率 ω_b 和截止频率 ω_c 的关系

由前面章节的分析可知,带宽频率 ω_b 和截止频率 ω_c 都与系统的响应速度成正比,均可用来衡量系统的快速性。

对于典型二阶系统,由式(5-6-1)和式(5-7-4)可得

$$\frac{\omega_b}{\omega_c} = \sqrt{\frac{1 - 2\zeta^2 + \sqrt{2 - 4\zeta^2 + 4\zeta^4}}{-2\zeta^2 + \sqrt{4\zeta^4 + 1}}}$$

当 $0.4 < \zeta < 0.707$ 时,带宽频率为 $1.55\omega_c < \omega_b < 1.6\omega_c$ 。

对于高阶系统,初步设计时,可近似取

$$\omega_b = 1.6\omega_c \quad (5-7-8)$$

2. 谐振峰值 M_r 和相角裕度 γ 的关系

由前面章节的分析可知,谐振峰值 M_r 和相角裕度 γ 都能表征系统的稳定程度和平稳性。通常情况下,谐振频率 ω_r 位于截止频率 ω_c 附近,且在谐振峰值 M_r 附近,相频特性 $\varphi(\omega)$ 变化比较缓慢。基于此,谐振峰值 M_r 和相角裕度 γ 之间有如下的近似关系:

$$M_r \approx \frac{1}{\sin\gamma} \quad (5-7-9)$$

设计控制系统时,一般先根据控制要求提出闭环频域指标 ω_b 和 M_r ,再由式(5-7-8)和式(5-7-9)选择合适的截止频率 ω_c 和确定相角裕度 γ ,然后根据 ω_c 和 γ 选择校正网络的结构并确定参数。

5.7.4 MATLAB 实现

MATLAB 没有提供直接求闭环系统的谐振频率、谐振峰值和带宽的函数。下面举例说明如何利用 MATLAB 求闭环系统的谐振频率、谐振峰值和带宽。

例 5-22 已知单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{10}{s(0.5s + 1)(0.02s + 1)}$$

利用 MATLAB 绘制闭环系统的伯德图,并求其谐振频率、谐振峰值和带宽。

解: MATLAB 程序如下。

```
clc;clear
num = [10];
den = conv([0.5,1,0],[0.02,1]);
sys_open = tf(num,den);
sys_close = feedback(sys_open,1);
w = logspace(-1,2);
bode(sys_close,w);
grid on;
[mag,phase,w] = bode(sys_close,w);
[Mr,i] = max(mag);
resonant_peak = 20 * log10(Mr)
resonant_frequency = w(i)
k = 1;
while 20 * log10(mag(k)) > -3;
    k = k + 1;
end
bandwidth = w(k)
```

闭环系统的伯德图如图 5-7-7 所示。

程序运行结果如下。

```
resonant_peak =
    8.8114
resonant_frequency =
    4.4984
bandwidth =
    6.8665
```

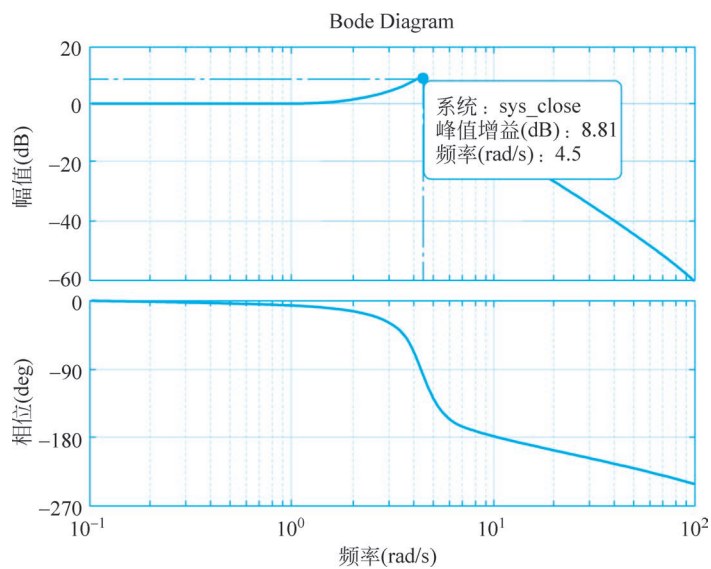


图 5-7-7 例 5-22 的闭环系统的伯德图

5.8 习题

