

第 3 章

命题逻辑

3.1 命题概念

数理逻辑的核心是推理,它着重于推理过程的研究。推理的前提和结论应该是表述明确的陈述句,它是推理的基本单位。逻辑是思维的规律和规则,是思维过程的抽象。

定义 3-1 具有确定真假含义的陈述句称为**命题**。若一个命题的含义为真,称该命题是真命题,也称该命题的真值为真,用 T 或 1 表示这个真值;若一个命题的含义为假,称该命题是假命题,也称该命题的真值为假,用 F 或 0 表示这个真值。

依据命题的定义,命题有两个特性:

- (1) 命题是陈述句。因此,疑问句、感叹句、祈使句都不是命题;
- (2) 命题有确定的真值。任何存在二义性的句子都不是命题,即命题是真假可判定的,要么是真命题,要么是假命题。

例 3.1 下列句子哪些是命题? 并判断其真假。

- (1) 上海是中国的大城市。
- (2) 下午 2 点上课?
- (3) 全体立正!
- (4) $1+1=3$ 。
- (5) 我正在说谎。
- (6) 如果今天天气好,我就去商店。
- (7) 火星上有生命。
- (8) 大偶数是两个素数的和。

上例中,语句(1)是真命题。语句(2)是疑问句,语句(3)是感叹句,均不是命题。语句(4)是假命题。语句(5)是陈述句,但没有明确的真值,如果我在说谎,则我讲了真话,

如果我讲了真话,我就是在说谎,所以,这个句子没有明确的真值,不是命题,语句(5)也称为“说谎者悖论”。语句(6)是命题,是由“今天天气好”和“我就去商店”两个命题通过“如果……就……”组合成。语句(7)和(8)是命题,但是,真值目前还不能判断,语句(7)火星上是否有生命,真值是唯一的,只是目前还未知,语句(8)也就是哥德巴赫猜想,目前还没有被证明,但是,未来一定可以确定其真值。

在数理逻辑中,将命题和它的真值用抽象的符号表示,称为命题的符号化或形式化。本书中,使用大写字母 P 、 Q 、 R 、 $\cdots$ 表示命题。数字 1 或 T 表示命题为真,数字 0 或 F 表示命题为假,即命题的两个真值。上例中(1)、(4)、(7)命题符号化为:

- (1) P : 上海是中国的大城市。
- (4) Q : $1+1=3$ 。
- (7) R : 火星上有生命。

其中, P 的真值为 1, Q 的真值为 0, R 的真值目前未知。但是,未来一定能知道火星上是否有生命,其真值只能是 0 或 1 之一。

这三个陈述句均无联结词,称为简单命题或原子命题。原子命题是不能再细分的命题,原子命题通过联结词构造而成的命题称为复合命题。例如,“如果……那么……”“与”“并且”“或者”“当且仅当”“若……则……”等联结词,可以用于构造复合命题。

3.2 命题联结词

3.2.1 否定联结词 “ $\neg$ ”

定义 3-2 设 P 是一个命题, P 的否定是一个复合命题,记作 $\neg P$,读作“非 P ”。若 P 的真值为 1,则 $\neg P$ 的真值为 0;若 P 的真值为 0,则 $\neg P$ 的真值为 1。真值表如表 3-1 所示。

表 3-1 否定联结词及真值表

P	$\neg P$
0	1
1	0

例如:

- (1) P : 4 是偶数。
 $\neg P$: 4 不是偶数。
 - (2) Q : 参会的都是大学老师。
 $\neg Q$: 参会的不都是大学老师。
- 需要注意的是, $\neg Q$ 不能理解为: 参会的都不是大学老师。

3.2.2 合取联结词 “ $\wedge$ ”

定义 3-3 设 P 、 Q 是任意两个命题,复合命题“ P 与 Q ”称为 P 和 Q 的合取式,记作 $P \wedge Q$,读作“ P 与 Q ”,或者“ P 合取 Q ”。若 P 、 Q 的真值都为真(即 1),则 $P \wedge Q$ 真值为真,否则为假(即 0)。真值表如表 3-2 所示。书写时, P 、 Q 的组合按二进制大小排列。

表 3-2 合取联结词及真值表

P	Q	$P \wedge Q$	P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	1

自然语言中的“与”“并且”“和”“与”“不仅……而且……”“既……又……”等均可用“ $\wedge$ ”联结词表示,但是不能看到“和”“与”就使用合取联结词。

联结词“ $\wedge$ ”本质上是一个二元运算符,与程序设计语言中的“逻辑与”运算类似,仅当两个条件都成立时,“逻辑与”的结果为真。例如,表达式“ $x < 5 \wedge y > 2$ ”为真,只有当 x 小于 5 并且 y 大于 2。

- 例如,
- P : 张三是软件专业学生。
- Q : 张三是男生。
- $P \wedge Q$: 张三是软件专业的男生。

还需要注意,合取与自然语言中的“并且”“和”“与”,有时不完全相同,例如,小王和小张是好朋友,就不是一个合取命题,它只是一个命题,而不是两个命题的合取。

- 又如, P 和 Q 是命题,
- P : 厦门是一个城市。
- Q : 我是一名大学生。

命题 P 和 Q 的合取式 $P \wedge Q$,表示厦门是一个城市并且我是一名大学生,在自然语

言中,这个合取式没有实际意义, P 和 Q 之间没有关联。但是,在数理逻辑中, P 和 Q 有确定的真值, $P \wedge Q$ 是复合命题,合取式的真值由 P 、 Q 的真值确定。

例 3.2 将下列命题形式化。

(1) 2 既是偶数又是素数,

$P \wedge Q$, 其中, P : 2 是偶数, Q : 2 是素数。

(2) 6 是偶数, 7 是奇数,

$P \wedge Q$, 其中, P : 6 是偶数, Q : 7 是奇数。

(3) 虽然今天下雨,但我还要去上课,

$P \wedge Q$, 其中, P : 今天下雨, Q : 我还要去上课。

(4) 2 与 3 的最小公倍数是 6,

P : 2 与 3 的最小公倍数是 6, 不能使用合取, 不能再细分。

(5) 张明和张元是亲兄弟,

P : 张明和张元是亲兄弟, 不能使用合取, 不能再细分。

3.2.3 析取联结词“ $\vee$ ”

定义 3-4 设 P 、 Q 是任意两个命题, 复合命题“ P 或 Q ”称为 P 和 Q 的析取式, 记作 $P \vee Q$, 读作“ P 或 Q ”“ P 析取 Q ”。若 P 、 Q 的真值都为假, 则 $P \vee Q$ 真值为假, 否则为真。也就是, 只要命题 P 或 Q 有一个为真, $P \vee Q$ 就为真。真值表如表 3-3 所示。

表 3-3 合取联结词及其真值表

P	Q	$P \vee Q$	P	Q	$P \vee Q$
0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1

例 3.3 将下列命题形式化。

(1) 李燕学过 C 语言或 Python 语言, $P \vee Q$, 其中, P : 李燕学过 C 语言, Q : 李燕学过 Python 语言。李燕可能只学过 C 语言, 也可能只学过 Python 语言, 还可能 C 语言和 Python 语言都学过。

(2) 今天是晴天或者阴天, $P \vee Q$, 其中, P : 今天是晴天, Q : 今天是阴天。

(3) 今天有离散课或数据库课, $P \vee Q$, 其中, P : 今天有离散数学课, Q : 今天有数据库课。

(4) 他是这次离散数学考试的第一名或第二名, $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$, 其中, P : 他这次考试得第一名, Q : 他这次考试得第二名, 不会既是第一名又是第二名。

3.2.4 蕴涵联结词 “ $\rightarrow$ ”

定义 3-5 设 P 、 Q 是任意两个命题, 复合命题“如果 P 则 Q ”称为 P 和 Q 的蕴涵式, 记作 $P \rightarrow Q$, 读作“ P 蕴涵 Q ”。 Q 是 P 的必要条件, P 是蕴涵式的前件, Q 是蕴涵式的后件。真值表如表 3-4 所示。

表 3-4 蕴涵联结词及其真值表

P	Q	$P \rightarrow Q$	P	Q	$P \rightarrow Q$
0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1

从表 3-4 中可以看出, 只有当 P 为真, Q 为假, 蕴涵式 $P \rightarrow Q$ 为假, 其余为真。蕴涵式 $P \rightarrow Q$ 真值的判断, 是命题逻辑的精髓之一。若命题 P 为假, 不论 Q 是真还是假, $P \rightarrow Q$ 永远为真; 若命题 Q 为真, 不论 P 是真还是假, $P \rightarrow Q$ 永远为真。

例 3.4 将下列命题形式化,

P : 他步行上班, Q : 天下雨。

- (1) 除非天下雨, 否则他步行上班。 $\neg P \rightarrow Q$, 也可以表示为 $\neg Q \rightarrow P$ 。
- (2) 只要天不下雨, 他就步行上班, $\neg Q \rightarrow P$ 。
- (3) 只有天不下雨, 他才步行上班, $P \rightarrow \neg Q$ 。

特别注意在(2)和(3)中“只要……就……”与“只有……才……”的区别。

3.2.5 等价联结词 “ $\leftrightarrow$ ”

定义 3-6 设 P 、 Q 是任意两个命题, 复合命题“ P 当且仅当 Q ”称为 P 和 Q 的等价式, 记作 $P \leftrightarrow Q$, 读作“ P 等价 Q ”。等价联结词也称为双条件联结词, 当 P 和 Q 的真值相同时, $P \leftrightarrow Q$ 的真值为 1; 当 P 和 Q 的真值不同时, $P \leftrightarrow Q$ 的真值为 0。真值表如表 3-5 所示。

从表 3-5 中可以看出, 当且仅当 P 和 Q 同为真或同为假, $P \leftrightarrow Q$ 的真值为真。 $P \leftrightarrow Q$ 逻辑上是 P 和 Q 互为充分必要条件, 等价于 $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$ 。

表 3-5 等价联结词及其真值表

P	Q	$P \leftrightarrow Q$	P	Q	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1

例 3.5 将下列命题形式化,

(1) 当且仅当天下雪的时候,我打车上班。

P : 我打车上班, Q : 天下雪,

$P \leftrightarrow Q$, P 、 Q 无内在联系。

(2) 雪是白色的当且仅当悉尼是澳大利亚首都。

P : 雪是白色的, Q : 悉尼是澳大利亚首都,

$P \leftrightarrow Q$, 由于 P 为真, Q 为假, 因此 $P \leftrightarrow Q$ 的真值 0, P 、 Q 两者无内在联系。

(3) 两个圆的周长相等, 则它们的半径相等; 若两个圆的半径相等, 则它们的周长相等。

P : O_1 与 O_2 周长相等,

Q : O_1 与 O_2 半径相等,

$P \leftrightarrow Q$, 真值为 1, P 、 Q 真值始终相同, 两者有内在联系。

(4) 角 A 和角 B 是对顶角, 则角 A 等于角 B ; 若角 A 和角 B 相等, 则它们是对顶角。

P : 角 A 和角 B 是对顶角,

Q : 角 A 等于角 B ,

$P \leftrightarrow Q$, 也可以表示为 $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$, 由于 $P \rightarrow Q$ 为真, $Q \rightarrow P$ 不一定为真(相等的角不一定是对顶角), 因此 $P \leftrightarrow Q$ 为假, 两者有内在联系。

以上定义了 5 种最基本的联结词, 它们构成了一个联结词集合 $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, 其中, $\neg$ 是一元联结词, 其余 4 个为二元联结词。

特别说明如下:

(1) 使用一个联结词联结一个或两个原子命题, 组成的复合命题称为基本复合命题。

(2) 多次使用联结词, 可以组成更复杂的复合命题, 在计算复合命题的真值时, 需要注意联结词的优先级, 一般规定优先顺序为: $()$ 、 $\neg$ 、 $\wedge$ 、 $\vee$ 、 $\rightarrow$ 、 $\leftrightarrow$, 同一优先级的联结词, 从左向右顺序计算。

(3) 数理逻辑中, 我们关注复合命题之间的真值关系, 不关心命题本身的含义。

例 3.6 命题 P 、 Q 、 R 定义如下, 求下列复合命题的真值。

$P: 2+4=6,$
 $Q: \text{北京人口大于福州人口},$
 $R: 2 \text{ 整除 } 7.$
(1) $(P \wedge \neg Q) \rightarrow R,$
(2) $(\neg P \vee R) \leftrightarrow (Q \wedge \neg R).$

解: $P、Q、R$ 的真值分别为 1、1、0, 因此, 复合命题(1)的真值 $= 1 \wedge 0 \rightarrow 0 = 0 \rightarrow 0 = 1,$ 复合命题(2)的真值 $= 0 \vee 0 \leftrightarrow (1 \wedge 1) = 0 \leftrightarrow 1 = 0.$

3.2.6 其他联结词

除了上述 5 个基本联结词外, 命题逻辑中还有 3 个联结词: 异或($\oplus$)、与非($\uparrow$)、或非($\downarrow$)联结词。真值表如表 3-6 所示。

(1) 任意命题 $P、Q$, 复合命题“ P 等价 Q 的否定”称为 $P、Q$ 的异或, 记作 $P \oplus Q$ 。当 $P、Q$ 一个为真一个为假, 则 $P \oplus Q$ 为真; $P、Q$ 同真或同假, 则 $P \oplus Q$ 为假。异或也称为“不可兼或”“排斥或”。

$$P \oplus Q = \neg (P \leftrightarrow Q)$$

(2) 任意命题 $P、Q$, 复合命题“ P 与 Q 的否定”称为 $P、Q$ 的与非, 记作 $P \uparrow Q$ 。 $P \uparrow Q$ 为真当且仅当 P 与 Q 不同时为真。

$$P \uparrow Q = \neg (P \wedge Q), P \uparrow P = \neg (P \wedge P) = \neg P$$

(3) 任意命题 $P、Q$, 复合命题“ P 或 Q 的否定”称为 $P、Q$ 的或非, 记作 $P \downarrow Q$ 。 $P \downarrow Q$ 为真当且仅当 P 与 Q 同时为假。

$$P \downarrow Q = \neg (P \vee Q), P \downarrow P = \neg (P \vee P) = \neg P$$

表 3-6 其他联结词及其真值表

P	Q	$P \oplus Q$	$P \uparrow Q$	$P \downarrow Q$
0	0	0	1	1
0	1	1	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0

特别注意: 与非、或非不满足结合律。

3.3 命题公式

上两节讨论了简单命题(原子命题)和复合命题,简单命题是命题逻辑的基本单位。对于命题 P ,我们只关心命题的真假。本节开始,进一步对命题抽象,真值可以变化的命题称为命题变项或命题变元,用 $P、Q、R \cdots$ 表示,它们是取值为 0 或 1 的变项,命题变元需要通过上下文来确定它们的真值。

定义 3-7 命题公式也称为合式公式,递归方式定义如下:

- (1) 单个命题变元和命题常量是一个命题公式;
- (2) P 是命题公式, $\neg P$ 也是命题公式;
- (3) P 和 Q 是命题公式, $P \wedge Q、P \vee Q、P \rightarrow Q、P \leftrightarrow Q$ 也是命题公式;
- (4) 有限次应用上述(1)~(3)条规则得到的符号串也是命题公式。

定义 3-8 如果命题公式 G 中含有 n 个命题变元 $P_1、P_2、\cdots、P_n$,称 G 为 n 元命题公式,可以表示为 $G(P_1、P_2 \cdots P_n)$ 。给 $P_1、P_2 \cdots P_n$ 分别指定相应的真值,称为对公式 G 的一种指派或解释。若指定的一组值使得 G 真值为 1,则称这组值为 G 的成真指派,若使得 G 的真值为 0,则称这组值为 G 的成假指派。

显然,命题公式在一种指派下有确定的真值,若公式 G 有 2 个命题变元 $P、Q$,那么 G 就有 4 种不同的指派(00、01、10、11),也就是 $P、Q$ 取 0 或 1 的组合数。若公式有 n 个命题变元,那么它就有 2^n 种指派。

定义 3-9 命题公式 G 在一种指派下,必有确定的真值,若将所有指派下的真值列成表格,称为该命题公式 G 的真值表。构造真值表的方法如下:

- (1) 找出公式中所有命题变元 $P、Q、R、\cdots$,或下角标 $P_1、P_2、\cdots、P_n$,指派从 00 $\cdots$ 0 开始(第一个指派),然后按照二进制加 1 依次写出。
- (2) 按照命题公式的层次(联结词的优先级),列出复合公式。
- (3) 计算各复合公式的真值,直到最后计算出公式的真值。

例 3.7 求下列公式的真值表:

- (1) $G_1 = (P \vee Q) \rightarrow P$,
- (2) $G_2 = (\neg P \wedge Q) \leftrightarrow Q$,
- (3) $G_3 = \neg(P \rightarrow Q) \wedge Q$ 。

解: 按照真值表的构造方法,列出真值表。

- (1) 命题变元 $P、Q$,列出指派组合为 00、01、10、11,计算 $(P \vee Q)$ 的真值,最后计算

公式 G_1 的真值,真值表如表 3-7 所示。

表 3-7 G_1 的真值表

P	Q	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \rightarrow P$	P	Q	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \rightarrow P$
0	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1

(2) 命题变元 P 、 Q ,列出指派组合为 00、01、10、11,计算 $\neg P \wedge Q$ 的真值,真值表如表 3-8 所示。

表 3-8 G_2 的真值表

P	Q	$\neg P \wedge Q$	$(\neg P \wedge Q) \leftrightarrow Q$	P	Q	$\neg P \wedge Q$	$(\neg P \wedge Q) \leftrightarrow Q$
0	0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	1	0	1	1	1

(3) 命题变元 P 、 Q ,列出指派组合为 00、01、10、11。分别计算 $P \rightarrow Q$ 、 $\neg (P \rightarrow Q)$ 的真值,真值表如表 3-9 所示。

表 3-9 G_3 的真值表

P	Q	$P \rightarrow Q$	$\neg (P \rightarrow Q)$	$\neg (P \rightarrow Q) \wedge Q$
0	0	1	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	0	0

上例中,公式 G_1 的成假指派是 01,公式 G_2 全部是成真指派,公式 G_3 全部是成假指派。依据公式在不同指派下真值的不同,可以对公式进行分类。

定义 3-10 命题公式 G , P_1 、 P_2 、 $\cdots$ 是 G 中的所有命题变元,那么:

- (1) 如果命题公式 G 在所有指派下真值为 1,称公式 G 为永真式或重言式。
- (2) 如果命题公式 G 在所有指派下真值为 0,称公式 G 为永假式或矛盾式。
- (3) 如果命题公式 G 在有些指派下真值为 1,有些指派下真值为 0,称公式 G 为可满足式。

从定义可以看出,重言式一定是可满足式;命题公式不是永真式,它不一定是永假

式;命题公式不是永假式,它一定是可满足式。

例 3.8 构造下列公式的真值表:

$$(1) G_1 = (P \wedge Q) \rightarrow R,$$

$$(2) G_2 = (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q),$$

$$(3) G_3 = \neg(P \rightarrow Q) \wedge Q.$$

解:

(1) G_1 的真值表如表 3-10 所示。

表 3-10 G_1 的真值表

P	Q	R	$P \wedge Q$	G_1	P	Q	R	$P \wedge Q$	G_1
0	0	0	0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	0	1	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	1	0	1	0
0	1	1	0	1	1	1	1	1	1

(2) G_2 的真值表如表 3-11 所示。

表 3-11 G_2 的真值表

P	Q	$\neg P \wedge Q$	$P \wedge \neg Q$	G_2
0	0	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	0	0	0

(3) G_3 的真值表如表 3-12 所示。

表 3-12 G_3 的真值表

P	Q	$(P \rightarrow Q)$	$\neg(P \rightarrow Q)$	G_3
0	0	1	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	0	0

可以看出, G_1 、 G_2 两个公式是可满足式,公式 G_3 是矛盾式(永假式)。

3.4 命题逻辑等值演算

3.4.1 等值式与等值演算

命题公式 G 、 H 含有相同的命题变元,并且这两个公式在所有指派下真值相同,称这两个公式是等价的,记作 $G=H$ 。

定理 3-1 命题公式 G 和 H , $G=H$ 的充要条件是公式 $G\leftrightarrow H$ 是重言式。

证明: 充分性, $G\leftrightarrow H$ 是重言式, I 是公式的任意指派,使得 $G\leftrightarrow H$ 为真,因此公式 G 和 H 同真,或同假,由于 I 的任意性,因此, $G=H$ 。

必要性, $G=H$, G 和 H 在任意指派下,同真或同假,依据等价联结词的定义, $G\leftrightarrow H$ 在任意指派下都为真,因此, $G\leftrightarrow H$ 为永真式(重言式)。

例 3.9 判断下列各组公式是否等值,

- (1) $P\rightarrow(Q\rightarrow R)$ 与 $P\wedge Q\rightarrow R$,
- (2) $(P\rightarrow Q)\rightarrow R$ 与 $P\wedge Q\rightarrow R$ 。

解: 构造真值表如表 3-13 和表 3-14 所示,可以看出(1)小题的两个命题公式等值,(2)小题的两个命题公式不等值。

表 3-13 $P\rightarrow(Q\rightarrow R)$ 与 $P\wedge Q\rightarrow R$ 的真值表

P	Q	R	$Q\rightarrow R$	$P\rightarrow(Q\rightarrow R)$	$P\wedge Q$	$P\wedge Q\rightarrow R$	是否等值
0	0	0	1	1	0	1	✓
0	0	1	1	1	0	1	✓
0	1	0	0	1	0	1	✓
0	1	1	1	1	0	1	✓
1	0	0	1	1	0	1	✓
1	0	1	1	1	0	1	✓
1	1	0	0	0	1	0	✓
1	1	1	1	1	1	1	✓

表 3-14 $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$ 与 $P \wedge Q \rightarrow R$ 的真值表

P	Q	R	$P \rightarrow Q$	$(P \rightarrow Q) \rightarrow R$	$P \wedge Q$	$P \wedge Q \rightarrow R$	是否等值
0	0	0	1	0	0	1	×
0	0	1	1	1	0	1	✓
0	1	0	1	0	0	1	×
0	1	1	1	1	0	1	✓
1	0	0	0	1	0	1	✓
1	0	1	0	1	0	1	✓
1	1	0	1	0	1	0	✓
1	1	1	1	1	1	1	✓

利用真值表判定等值公式,当变元较多时就显得烦琐。利用公式的等价性,根据等值式推演出与原命题等值的新公式,这个过程称为等值演算,或命题演算。

定理 3-2 命题公式 G 、 H 和 S ,下列基本等价式成立。

- (1) 双重否定律: $\neg \neg G = G$ 。
- (2) 幂等律: $G = G \vee G, G = G \wedge G$ 。
- (3) 交换律: $G \vee H = H \vee G, G \wedge H = H \wedge G$ 。
- (4) 结合律: $(G \vee H) \vee S = G \vee (H \vee S), (G \wedge H) \wedge S = G \wedge (H \wedge S)$ 。
- (5) 分配律: $G \wedge (H \vee S) = (G \wedge H) \vee (G \wedge S), G \vee (H \wedge S) = (G \vee H) \wedge (G \vee S)$ 。
- (6) 德摩根律: $\neg (G \wedge H) = \neg G \vee \neg H, \neg (G \vee H) = \neg G \wedge \neg H$ 。
- (7) 吸收律: $G \wedge (G \vee H) = G, G \vee (G \wedge H) = G$ 。
- (8) 零律: $G \vee 1 = 1, G \wedge 0 = 0$ 。
- (9) 同一律: $G \vee 0 = G, G \wedge 1 = G$ 。
- (10) 排中律: $G \vee \neg G = 1$ 。
- (11) 矛盾律: $G \wedge \neg G = 0$ 。
- (12) 蕴涵等值式: $G \rightarrow H = \neg G \vee H$ 。
- (13) 等价等值式: $G \leftrightarrow H = (G \rightarrow H) \wedge (H \rightarrow G)$ 。
- (14) 假言移位: $G \rightarrow H = \neg H \rightarrow \neg G$ 。
- (15) 归谬律: $(G \rightarrow H) \wedge (G \rightarrow \neg H) = \neg G$ 。

例 3.10 上述例 3.9,使用等值演算法证明:

(1) $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ 与 $P \wedge Q \rightarrow R$ 。

证明:

$$\begin{aligned}
 \text{左式} &= \neg P \vee (Q \rightarrow R) && // \text{蕴涵等值式} \\
 &= \neg P \vee (\neg Q \vee R) && // \text{蕴涵等值式} \\
 &= (\neg P \vee \neg Q) \vee R && // \text{结合律} \\
 &= \neg (P \wedge Q) \vee R && // \text{德摩根律} \\
 &= P \wedge Q \rightarrow R && // \text{蕴涵等值式} \\
 &= \text{右式}
 \end{aligned}$$

(2) $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$ 与 $P \wedge Q \rightarrow R$ 。

证明:

$$\begin{aligned}
 \text{左式} &= \neg (P \rightarrow Q) \vee R && // \text{蕴涵等值式} \\
 &= \neg (\neg P \vee Q) \vee R \\
 &= (P \wedge \neg Q) \vee R \\
 \text{右式} &= \neg (P \wedge Q) \vee R \\
 &= (\neg P \vee \neg Q) \vee R
 \end{aligned}$$

显然,左、右两边不完全等值。

例 3.11 证明: $(P \vee Q) \rightarrow R = (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)$ 。

证明:

$$\begin{aligned}
 \text{左式} &= \neg (P \vee Q) \vee R && // \text{蕴涵等值式} \\
 &= (\neg P \wedge \neg Q) \vee R && // \text{德摩根律} \\
 &= (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R) && // \text{分配律} \\
 &= (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) && // \text{蕴涵等值式} \\
 &= \text{右式}
 \end{aligned}$$

定理 3-3 (置换定理)命题 G 中包含子公式 H , 将 H 置换为公式 S , 得到新公式 G' , 若 $H=S$, 则 G 与 G' 等价, 记作 $G=G'$ 。

命题公式 G 是永真式(或永假式), $P_1, P_2, \dots$ 是公式中的命题变元, 将其中的一个命题变元用另一命题公式 H 代入, 得到的新命题公式还是永真式(或永假式)。

命题公式 $(\neg P \wedge Q) \leftrightarrow Q$ 是永真式, 将命题变元 Q , 用 $P \vee Q$ 置换, 得到新公式 $(\neg P \wedge (P \vee Q)) \leftrightarrow (P \vee Q)$, 依然是永真式。

命题公式 $G = (P \rightarrow Q) \rightarrow R$, 其中, 子公式 $P \rightarrow Q$ 等价于 $\neg P \vee Q$, 置换后得到的新公式 $G' = (\neg P \vee Q) \rightarrow R$, 新公式 $G' = G$ 。

例 3.12 等值演算验证下列公式类型。

$$(1) P \rightarrow (P \wedge Q)。$$

$$(2) \neg(P \rightarrow Q) \wedge (\neg Q \rightarrow \neg P)。$$

证明(略),读者自己演算,(1)为可满足式,(2)为永假式。

例 3.13 使用等值演算法证明: $(P \vee Q) \rightarrow R = (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)。$

证明:

$$\begin{aligned} \text{左边} &= (P \vee Q) \rightarrow R \\ &= \neg(P \vee Q) \vee R && // \text{蕴涵等值式} \\ &= (\neg P \wedge \neg Q) \vee R && // \text{德摩根律} \\ &= (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R) && // \text{分配律} \\ &= (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) && // \text{蕴涵等值式} \\ &= \text{右边} \end{aligned}$$

也可以从右边向左边证明。

例 3.14 证明: $(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (P \wedge Q) = P \vee Q。$

证明:

$$\begin{aligned} \text{左边} &= (P \leftrightarrow Q) \rightarrow (P \wedge Q) \\ &= \neg(P \leftrightarrow Q) \vee (P \wedge Q) && // \text{蕴涵等值式} \\ &= \neg((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)) \vee (P \wedge Q) && // \text{双条件等价} \\ &= \neg((\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)) \vee (P \wedge Q) && // \text{蕴涵等值式} \\ &= \neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee P) \vee (P \wedge Q) && // \text{德摩根律} \\ &= (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg P) \vee (P \wedge Q) && // \text{德摩根律} \\ &= (P \wedge \neg Q) \vee ((Q \wedge \neg P) \vee (P \wedge Q)) && // \text{结合律} \\ &= (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge (\neg P \vee P)) && // \text{分配律} \\ &= (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge 1) && // \text{排中律, } \neg P \vee P = 1 \\ &= (P \wedge \neg Q) \vee Q && // \text{同一律, } Q \wedge 1 = Q \\ &= (P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee Q) && // \text{分配律} \\ &= (P \vee Q) && // \text{排中律、同一律} \\ &= \text{右边} \end{aligned}$$

3.4.2 联结词完备集

前面介绍了常用的命题联结词集合 $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ 。联结词本质上是一个函数,

联结词可以构造不同的命题公式,任意的输入将得到唯一的真值。那么,为了构造任意命题公式,这个联结词集合是否完备?也就是说,为了构造任意命题公式,是否还需要定义其他新的联结词?

1. 真值函数

定义 3-11 函数 $F: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ 为 n 元真值函数。

函数 F 有 n 个自变项,定义域为 $\{0,1\}^n = \{00\dots 0, 00\dots 1, \dots, 11\dots 1\}$,也就是长度为 n ,由 0 或 1 组成的符号串,值域为 $\{0,1\}$,即函数 F 的值只有是 0 或 1。 n 个自变项总共可构造 2^n 个不同的真值函数。例如,一元真值函数共有 4 个,当 $P=0, F(P)=0$ 或 1,分别表示为 $F_0(00)、F_1(01)$,当 $P=1, F(P)=0$ 或 1,分别表示为 $F_2(10)、F_3(11)$,如表 3-15 所示。同样,二元真值函数共有 16 个,如表 3-16 所示,三元真值函数共有 256 个。

表 3-15 一元真值函数

P	F_0	F_1	F_2	F_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

表 3-16 二元真值函数

P	Q	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

在二元真值函数中, $n=2$,定义域自变项数是 4,即长度为 2 的 0 与 1 组成的符号串,分别为 00、01、10、11。

从命题公式的构造看,2 个命题变元有 4 种指派,在每一种指派下,公式的真值为 0 或 1,因此,2 个命题变元可以构成 $16(2^4)$ 个不等价的命题公式。从二元真值函数表 3-16 中,所有 16 个命题公式可以表示如下:

$$\begin{aligned}
 F_0 &= P \wedge \neg P, F_1 = P \wedge Q, F_2 = P \wedge \neg Q, F_3 = P, F_4 = \neg P \wedge Q, F_5 = Q, \\
 F_6 &= (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q), F_7 = P \vee Q, F_8 = \neg(P \vee Q), F_9 = P \leftrightarrow Q, \\
 F_{10} &= \neg Q, F_{11} = Q \rightarrow P, F_{12} = \neg P, F_{13} = P \rightarrow Q, F_{14} = \neg(P \wedge Q), F_{15} = \neg P \vee P,
 \end{aligned}$$

在这 16 个不同的命题公式中, $F_9 = P \leftrightarrow Q = (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) = (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)$, $F_{11} = Q \rightarrow P = \neg Q \vee P$, $F_{13} = P \rightarrow Q = \neg P \vee Q$ 。这样, 任意一个命题公式, 都可以用联结词 $\{\neg, \wedge, \vee\}$ 来等价表示。不同的联结词, 相互之间还可以转换, 例如, F_0 也可以表示为 $Q \wedge \neg Q$, 或者表示为 $\neg(\neg Q \vee Q)$ 。这就导致一个问题, 所有联结词是否必须? 最少需要多少个联结词? 这就是联结词的完备集问题。

2. 联结词完备集

定义 3-12 设 S 是一个联结词集合, 任意给定的命题公式, 都可以找到一个仅含 S 集合中的联结词构成的命题公式与之等价, 则称 S 是一个联结词的完备集。

例 3.15 公式 $P \wedge (Q \leftrightarrow R)$ 转化为只含有联结词 $\{\neg, \wedge\}$ 的公式形式。

解:

$$\begin{aligned} P \wedge (Q \leftrightarrow R) &= P \wedge ((Q \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow Q)) && // \text{等价等值式} \\ &= P \wedge (\neg Q \vee R) \wedge (\neg R \vee Q) && // \text{蕴涵等值式} \\ &= P \wedge \neg \neg (\neg Q \vee R) \wedge \neg \neg (\neg R \vee Q) && // \text{双重否定} \\ &= P \wedge \neg (Q \wedge \neg R) \wedge \neg (R \wedge \neg Q) && // \text{德摩根律} \end{aligned}$$

从定义可以看出, 以下集合都是联结词完备集:

$$S_1 = \{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$$

$$S_2 = \{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow\}$$

$$S_3 = \{\neg, \wedge, \vee\}$$

$$S_4 = \{\neg, \wedge\}$$

$$S_5 = \{\neg, \vee\}$$

在这些联结词的完备集中, 很明显, $S_1 = \{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ 中联结词蕴涵“ $\rightarrow$ ”和等价“ $\leftrightarrow$ ”, 可以用 $S_3 = \{\neg, \wedge, \vee\}$ 来表示, 同样 S_3 中的析取“ $\vee$ ”可以用 $S_4 = \{\neg, \wedge\}$ 来表示。因此, S_4 是 S_3 、 S_1 的真子集。那么, 是否存在更小的联结词完备集, 该集合可以表示所有其他的联结词?

定义 3-13 联结词完备集 S , 若 S 中的任意一个联结词都不能用 S 中的其他联结词等价表示, 则称 S 为极小联结词完备集。也就是说, 极小联结词完备集满足下列条件:

- (1) S 中的联结词可以表示所有联结词;
- (2) 从 S 中删除任意一个联结词, 至少存在一个联结词, 不能用剩余的联结词表示。

例 3.16 对于 5 个基本联结词, 可以进行如下转换:

$$\begin{aligned}
 P \rightarrow Q &= \neg P \vee Q \\
 P \wedge Q &= \neg(\neg P \vee \neg Q) \\
 P \leftrightarrow Q &= (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) \\
 &= (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P) \\
 &= \neg(\neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee P))
 \end{aligned}$$

上面讨论了 $\{\neg, \wedge, \vee\}$ 是一个联结词完备集,那么,它是否是一个极小联结词完备集呢? 由于蕴涵、合取、等价可以用否定和析取表示,因此, $\{\neg, \vee\}$ 是一个极小联结词完备集,同样 $\{\neg, \wedge\}$ 也是一个极小联结词完备集。

例 3.17 证明 $\{\neg, \wedge\}$ 是一个极小联结词完备集。

证明: 对于 5 个基本联结词,若能证明 $\{\neg, \wedge\}$ 可以表示其他 3 个联结词 $\{\vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$,那么 $\{\neg, \wedge\}$ 就是一个极小完备集。

设命题 P, Q ,

$$\begin{aligned}
 P \vee Q &= \neg(\neg P \wedge \neg Q) \\
 P \rightarrow Q &= \neg P \vee Q = \neg(P \wedge \neg Q) \\
 P \leftrightarrow Q &= (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) = \neg(P \wedge \neg Q) \wedge \neg(Q \wedge \neg P)
 \end{aligned}$$

并且,联结词 $\neg, \wedge$ 不能互为表示,也就是删除其中一个联结词,就不能表示其他联结词了。因此, $\{\neg, \wedge\}$ 是联结词的一个极小完备集。

例 3.18 证明: $\{\uparrow\}, \{\downarrow\}$ 都是极小联结词完备集。

证明: 由于 $\{\neg, \wedge\}$ 为联结词的完备集,因此,只需要证明 $\neg, \wedge$ 可以有“与非 $\uparrow$ ”表示。

$$\begin{aligned}
 \neg P &= \neg(P \wedge P) = P \uparrow P \\
 P \wedge Q &= \neg \neg(P \wedge Q) = \neg(P \uparrow Q) = (P \uparrow Q) \uparrow (P \uparrow Q)
 \end{aligned}$$

因此, $\{\uparrow\}$ 是联结词的一个极小完备集。

同理, $\{\downarrow\}$ 是联结词的一个极小完备集。

3.5 对偶与范式

3.5.1 公式的对偶

3.4 节介绍了联结词的完备集,比较多的情况是命题公式仅含有联结词 $\{\neg, \wedge, \vee\}$,常用的基本等价式是成对出现,不同的是 $\wedge$ 和 $\vee$ 的互换,以及 0 和 1 的互换,这种现象具

有对偶规律。

定义 3-14 设 G 是一个仅含有联结词 $\{\neg, \wedge, \vee\}$ 的命题公式, 其中用 $\vee$ 替代 $\wedge$, 用 $\wedge$ 替代 $\vee$, 用 1 替代 0, 用 0 替代 1, 所得的新公式称为原公式 G 的对偶式, 记为 G^* 。显然

$$(G^*)^* = G$$

例如, 公式 $\neg(P \wedge Q)$ 与 $\neg(P \vee Q)$ 互为对偶式, $(P \vee Q) \wedge R$ 与 $(P \wedge Q) \vee R$ 互为对偶式, $P \wedge 0$ 与 $P \vee 1$ 互为对偶式。

特别注意, 求公式的对偶式, 首先要消去公式中除 $\{\neg, \wedge, \vee\}$ 以外的联结词。

定理 3-4 设 G 是一个仅含有 $\{\neg, \wedge, \vee\}$ 的命题公式, $P_1, P_2, \dots, P_n$ 是出现在公式中的全部命题变元, 则:

$$\neg G(P_1, P_2, \dots, P_n) = G^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n)$$

$$G(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n) = \neg G^*(P_1, P_2, \dots, P_n)$$

证明: 略。

对公式 $\neg G(P_1, P_2, \dots, P_n)$ 反复运用德摩根律, 将 $\neg$ 移到命题变元或其否定前为止, 这过程中 $\wedge$ 和 $\vee$ 互换, 0 和 1 互换, P_i 变成 $\neg P_i$ 。

定理 3-5 (对偶原理) 设 G 和 H 是两个仅含有 $\{\neg, \wedge, \vee\}$ 的命题公式, 如果 $G = H$, 则 $G^* = H^*$ 。

例如, 德摩根律就是对偶原理的运用, $\neg(P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q$ 。在某些情况下, 对偶原理也可以用来证明两个公式等价。

3.5.2 析取范式与合取范式

通过命题公式的演算, 一个命题公式可以存在多种等价的形式。那么, 如何判定命题公式是否等价? 这就需要找到公式的标准形式或规范形式, 在不写出真值表的情况下, 确定命题公式在相应指派下的真假, 进而判定公式是否等价, 这就是命题公式的范式问题。

定义 3-15 命题变元及其否定称为文字, 有限个文字构成的析取式称为简单析取式, 有限个文字构成的合取式称为简单合取式。

例如, $P, \neg Q$ 均为 1 个文字构成的简单析取式, 或简单合取式。 $P \vee \neg Q, \neg P \vee \neg Q$ 均为 2 个文字构成的简单析取式。 $P \wedge \neg Q, \neg P \wedge \neg Q$ 均为 2 个文字构成的简单合取式。

注意:

(1) 一个文字既是简单合取式, 又是简单析取式。

(2) 合取式 $P \wedge \neg Q$, 也可以看作 1 个简单合取式构成的析取范式。析取式 $P \vee \neg Q$, 也可以看作 1 个简单析取式构成的合取范式。

定义 3-16 有限个简单合取式构成的析取式称为**析取范式**, 有限个简单析取式构成的合取式称为**合取范式**。析取范式和合取范式统称为**范式**。

设命题变元 P, Q, R , 那么:

$G_1 = (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg R) \vee Q$, 是一个析取范式。

$G_2 = (P \vee \neg Q) \wedge \neg R \wedge (\neg P \vee Q)$, 是一个合取范式。

定理 3-6 (1) 一个析取范式是矛盾式, 当且仅当它的每个简单合取式都是矛盾式;
(2) 一个合取范式是重言式, 当且仅当它的每个简单析取式都是重言式。

定理 3-7 (范式存在定理) 任意命题公式都存在与之等值的析取范式和合取范式。

下面给出任意命题公式转化为合取范式和析取范式的步骤:

- (1) 消去蕴涵($\rightarrow$)、等价($\leftrightarrow$)联结词;
- (2) 使用德摩根定律, 将否定移至命题变元的前端;
- (3) 运行分配律、结合律、吸收律等, 将公式转化为等价的合取范式、析取范式。

例 3.19 求下面公式的析取范式和合取范式:

$$(P \rightarrow Q) \wedge \neg R$$

解:

$$\text{原式} = (P \rightarrow Q) \wedge \neg R$$

$$= (\neg P \vee Q) \wedge \neg R \quad // \text{合取范式, 消去蕴涵, 2 个简单析取式的合取范式}$$

$$= (\neg P \wedge \neg R) \vee (Q \wedge \neg R) // \text{析取范式, 分配律, 2 个简单合取式的析取范式}$$

任意公式可以转化为等价的合取范式和析取范式, 但是, 析取范式和合取范式不是唯一。例如, P 可以看作一个简单析取式, 还可以如下转化, 得到等价的析取范式:

$$P = P \wedge (Q \vee \neg Q) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \quad // P \text{ 的析取范式}$$

$$= P \vee (P \wedge Q) \quad // P \text{ 的析取范式, 吸收律}$$

因此, 求解合取、析取范式时, 需要制定更加严格的标准, 确保任意公式转化成的析取范式、合取范式具有唯一性, 这就是主范式的求解, 包括了主析取范式和主合取范式。

3.5.3 主析取范式与主合取范式

1. 主析取范式

定义 3-17 给定 n 个命题变元, 由命题变元或其否定构成的合取式, 满足(1)命题变

元或其否定只出现其中之一,且不能重复出现,(2)出现的次序与命题变元的次序相同(字典顺序),下标从小到大的顺序出现,这样的合取式称为命题变元的最小项或极小项。

例如,两个命题 P, Q , 最小项为:

$\neg P \wedge \neg Q, \neg P \wedge Q, P \wedge \neg Q, P \wedge Q$ //字典序 P 在先,二进制顺序为 00、01、10、11

这样每个最小项,只有一种指派使其为 1,其余为 0,例如指派 10,只有 $P \wedge \neg Q$ 为 1,其余为 0,如表 3-17 所示。对最小项编码,用 m_i 表示,下标 i 是成真指派对应的二进制数或十进制数,通常用十进制数表示下标。

表 3-17 两个命题变元 P, Q 的最小项

最小项	成真指派	最小项符号表示	备注
$\neg P \wedge \neg Q$	00	m_0	
$\neg P \wedge Q$	01	m_1	
$P \wedge \neg Q$	10	m_2	
$P \wedge Q$	11	m_3	

定义 3-18 给定命题公式 G , G 等值于 G 中所有命题变元产生的若干最小项的析取,则称该析取式为公式 G 的主析取范式。

求任意公式的主析取范式,一般有两种方法:

(1) 等值演算法: 先求出 G 的析取范式,然后扩充每个合取式中所缺少的命题变元,最后利用分配律展开。

$P \vee \neg P = 1$ //缺少命题变元,用于最小项的扩充

$Q = Q \wedge 1 = Q \wedge (P \vee \neg P) = (Q \wedge P) \vee (Q \wedge \neg P)$

例 3.20 求 $G = (P \rightarrow Q) \wedge \neg R$ 的主析取范式。

解:

原式 $= (P \rightarrow Q) \wedge \neg R$

$= (\neg P \vee Q) \wedge \neg R$ //合取范式

$= (\neg P \wedge \neg R) \vee (Q \wedge \neg R)$ //第一个合取式缺少变元 Q ,第二个合取式缺少变元 P

$= (\neg P \wedge \neg R \wedge 1) \vee (Q \wedge \neg R \wedge 1)$ //扩充最小项

$= (\neg P \wedge \neg R \wedge (Q \vee \neg Q)) \vee (Q \wedge \neg R \wedge (P \vee \neg P))$ //扩充缺少的命题变元

$= (\neg P \wedge \neg R \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg R \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg R \wedge P) \vee (Q \wedge \neg R \wedge \neg P)$

$= (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R)$ //排序