

第3章 傅里叶变换

【本章导读】

本章讨论连续时间信号与系统的傅里叶分析方法,从正交函数出发,得出三角函数形式和复指数形式的傅里叶级数展开式,引出傅里叶变换并建立信号频谱概念。通过典型信号频谱以及傅里叶变换性质的研究,初步掌握连续信号的频域分析方法。在此基础上延伸至周期信号与抽样信号的傅里叶变换。在最后介绍傅里叶变换最主要的应用——滤波、调制和抽样。

【学习要点】

- (1) 掌握傅里叶级数(三角函数形式与指数形式)的定义、性质及将周期信号展开为傅里叶级数的方法。
- (2) 掌握傅里叶正变换和逆变换的定义、性质及计算方法。
- (3) 掌握信号的频域分析的概念以及各种信号(周期信号、非周期信号、抽样信号、调幅信号)频谱的特点及绘制频谱图的方法,了解信号的频域特性与时域特性的关系,深刻理解信号的频带宽度与信号脉冲宽度之间的关系。
- (4) 了解时域抽样与频域抽样的方法及应用,掌握时域抽样定理与频域抽样定理的内容,深刻理解其物理意义。

3.1 引言

傅里叶变换是以正交函数集为理论基础,对连续时间函数进行的积分变换。利用周期信号取极限变成非周期信号的方法,可以由周期信号的傅里叶级数推导出傅里叶变换。对于周期信号而言,在进行频谱分析时可以利用傅里叶级数,也可以利用傅里叶变换,傅里叶级数相当于傅里叶变换的一种特殊表达形式。而对非周期信号而言,则不存在傅里叶级数,此时就要用傅里叶变换求出它的频谱。

傅里叶分析方法从建立到应用经历了一段漫长的历史,1822年法国数学家傅里叶(J. Fourier, 1768—1830)在《热的分析理论》一书中提出并证明了周期函数展开成谐波关系的正弦级数的原理,奠定了傅里叶级数的理论基础。此后傅里叶扩展了其研究成果,提出非周期函数也可以表示为正弦函数的加权积分,从而使傅里叶级数推广到傅里叶积分。在傅里叶之后,1829年狄里克雷(P. L. Dirichlet)给出了严格的傅里叶级数收敛条件,让傅里叶级数和傅里叶积分在许多领域得到了广泛的应用,如热学问题、机械振动等。其后,泊松(Poisson)、高斯(Gauss)等人又把三角函数、指数函数以及傅里叶分析等数学工具应用于电力、通信和自动化控制等实际的工程问题中。迄今,傅里叶分析方法在力学、光学、量子物理和各种线性系统分析中得到了广泛的应用,已成为系统分析不可缺少的重要工具。

3.2 周期信号的频谱分析——傅里叶级数

3.2.1 傅里叶级数的三角形式

给定一个实周期信号 $f(t)$, 设其周期为 T_1 , 角频率为 $\omega_1 = 2\pi/T_1$, 若满足下列狄里克雷条件(通常遇到的周期信号都能满足狄里克雷条件, 因此, 以后除非特殊说明, 一般都认为周期信号满足此条件):

- (1) 在 $f(t)$ 的任意一个周期内, $f(t)$ 是绝对可积的;
- (2) 在 $f(t)$ 的任意一个周期内, $f(t)$ 仅有有限个极大值点和极小值点;
- (3) 在 $f(t)$ 的任意一个周期内, $f(t)$ 仅有有限个不连续点。

若周期信号 $f(t)$ (周期为 T_1 , 角频率 $\omega_1 = 2\pi/T_1 = 2\pi f_1$) 满足狄里克雷条件, 则它便可以展开成如式(3-1)所示的傅里叶级数三角形式, 即:

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + a_1 \cos(\omega_1 t) + b_1 \sin(\omega_1 t) + a_2 \cos(2\omega_1 t) + b_2 \sin(2\omega_1 t) \\ &\quad + \cdots a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t) + \cdots \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t)] \end{aligned} \quad (3-1)$$

其中, 系数 a_n 和 b_n 称为傅里叶级数的系数, 简称为傅里叶系数, 有直流分量

$$a_0 = \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t) dt \quad (3-2)$$

余弦分量的幅度

$$a_n = \frac{2}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t) \cos(n\omega_1 t) dt \quad (3-3)$$

正弦分量的幅度

$$b_n = \frac{2}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t) \sin(n\omega_1 t) dt \quad (3-4)$$

其中, $n=1, 2, \dots$ 。

通常, 公式中的积分区间取 $(0, T_1)$ 或 $\left(-\frac{T_2}{2}, +\frac{T_2}{2}\right)$ 。式(3-2)~式(3-4)表明, a_n 和 b_n 都是 $n\omega_1$ 的函数, 其中 a_n 是 $n\omega_1$ 的偶函数, b_n 是 $n\omega_1$ 的奇函数。

若将式(3-1)中同频率项进行合并, 可以得到另一种余弦形式的傅里叶级数, 即

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\omega_1 t + \phi_n) \quad (3-5)$$

或

$$f(t) = d_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} d_n \sin(n\omega_1 t + \theta_n)$$

式(3-5)也是傅里叶级数的三角函数展开形式。式中 n 为正整数, c_0 和 d_0 称为周期函数 $f(t)$ 直流分量, $c_1 \cos(n\omega_1 t + \phi_1)$, $d_1 \sin(n\omega_1 t + \theta_1)$ 称为基波分量, ω_1 称为基波角频率, 其余各项 ($n>1$ 的项) 统称为高次谐波分量。高次谐波分量的频率是基波频率的整数倍。当 $n=2$ 时称为二次谐波分量, $n=3$ 时称为三次谐波分量, 等等。 c_n 和 d_n 为第 n 次谐波的幅

度, ϕ_n 和 θ_n 为第 n 次谐波的相位。

比较式(3-1)和式(3-5), 各参数之间的关系如式(3-6)所示

$$\begin{cases} a_0 = c_0 = d_0 \\ a_n = c_n \cos \phi_n = d_n \sin \theta_n \\ d_n = c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ b_n = -c_n \sin \phi_n = d_n \cos \theta_n \\ \phi_n = \arctan\left(-\frac{b_n}{a_n}\right) \\ \theta_n = \arctan\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \end{cases} \quad (3-6)$$

从以上各式可以发现, 展开式中各分量的幅度 a_n 、 b_n 、 c_n 及相位 ϕ_n 都是 $n\omega_1$ 的函数。 c_n 和 $n\omega_1$ 的曲线关系称为信号的幅度频谱, 通常简称为幅度谱, 如图 3-1(a) 所示。相位 ϕ_n 与 $n\omega_1$ 的曲线关系称为相位频谱, 通常简称为相位谱, 如图 3-1(b) 所示。

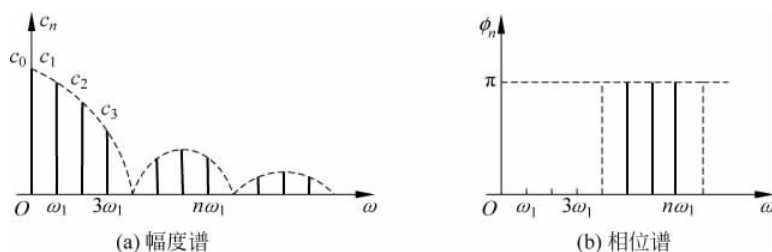


图 3-1 周期信号的频谱

从图 3-1(a) 中, 可以清楚、直观地看出各频率分量的相对大小, 每条实线称为谱线, 它代表在该频率分量下的幅度大小。 ω_1 称为基波角频率。由于 n 为整数, 使得周期信号的频谱只会出现在 $0, \omega_1, 2\omega_1$ 等离散频率点上, 即频谱是离散的, 故称此频谱为离散谱, 所以周期信号的频谱是离散谱。

3.2.2 傅里叶级数的复指数形式

由上述内容可知, 周期信号 $f(t)$ 可以展开为:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t)] \quad (3-7)$$

根据欧拉公式:

$$\cos(n\omega_1 t) = \frac{1}{2}(e^{jn\omega_1 t} + e^{-jn\omega_1 t})$$

$$\sin(n\omega_1 t) = \frac{1}{2j}(e^{jn\omega_1 t} - e^{-jn\omega_1 t})$$

代入式(3-7), 整理可得

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\omega_1 t} + \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-jn\omega_1 t} \right) \quad (3-8)$$

由式(3-3)和式(3-4)知, a_n 是 n 的偶函数, b_n 是 n 的奇函数, 可设

$$\begin{aligned} F(0) &= a_0 \\ F(n\omega_1) &= \frac{1}{2}(a_n - jb_n) \end{aligned} \quad (3-9)$$

则

$$F(-n\omega_1) = \frac{1}{2}(a_n + jb_n), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

把式(3-9)代入式(3-8),整理可得指数形式的傅里叶级数展开式为

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t} \quad (3-10)$$

令 $F_n = F(n\omega_1)$, 上式可以写成

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_1 t} \quad (3-11)$$

其中, F_n 为指数形式的傅里叶级数的系数。将式(3-3)和式(3-4)代入到式(3-9), 得到 F_n 的表达式为:

$$F_n = \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \quad (3-12)$$

其中 n 为整数。

不同形式的傅里叶级数展开式系数间的关系如下

$$\left\{ \begin{aligned} F_0 &= c_0 = d_0 = a_0 \\ |F_n| &= |F_{-n}| = \frac{1}{2}c_n = \frac{1}{2}d_n = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ F_n &= |F_n| e^{j\phi_n} = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) \\ |F_n| + |F_{-n}| &= c_n \\ F_{-n} &= |F_{-n}| e^{-j\phi_n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n) \\ F_n + F_{-n} &= a_n \\ b_n &= j(F_n - F_{-n}) \\ c_n^2 &= d_n^2 = a_n^2 + b_n^2 = 4F_n F_{-n} \end{aligned} \right. \quad (3-13)$$

其中, $n=1, 2, 3, \dots$ 。

周期信号的频谱不仅可以由傅里叶级数的三角函数形式绘出, 还可以绘出指数形式表示的信号频谱。已知 F_n 一般都是复函数, 所以 F_n 与 ω 间的关系称为周期信号的复数频谱。又已知道 $F_n = |F_n| e^{j\phi_n}$, 则 $|F_n| \rightarrow \omega$ 的关系表示复数幅度谱, $\phi_n \rightarrow \omega$ 的关系表示复数相位谱。图 3-2(a)、图 3-2(b)分别画出 $|F_n|$ 对 ω 的关系和相位 ϕ_n 对 ω 的关系, 即周期信号的复数幅度谱和复数相位谱。如图 3-2(c)所示, 是当 F_n 为实函数时的情况, 此时可用 F_n 的正负来表示 ϕ_n 的 0 或 π , 因此通常把幅度谱和相位谱画在一张图上。由公式 $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t}$ 知, 不仅有正频率项 $n\omega_1$, 还有负频率项 $-n\omega_1$, 所以复指数幅度频谱相对

于纵轴是左右对称的, 即为双边频谱。由上可知, 图 3-2(c)中每条谱线长度为 $F_n = \frac{1}{2}c_n$ 。

通过介绍傅里叶级数的三角形式和指数形式, 可以发现周期信号的两种频谱的表示方

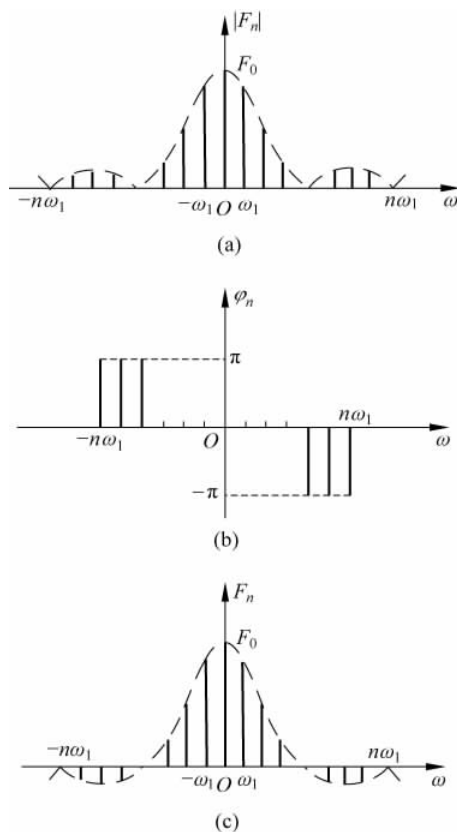


图 3-2 周期信号的复数频谱

法实质上是一样的,只是复数频谱图中的每个分量的幅度一分为二,并且对称地分布在正负频率的位置上。接下来通过研究周期信号的功率特性来了解其功率在各次谐波中的分布情况,即研究周期信号的功率频谱,简称功率谱。

对周期信号的傅里叶级数三角形式表示式或指数形式表示式进行数学处理,可以得到周期信号 $f(t)$ 的平均功率 P 与傅里叶系数有下列关系:

$$\begin{aligned}
 P = \overline{f^2(t)} &= \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f^2(t) dt \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |F_n|^2
 \end{aligned} \quad (3-14)$$

此式表明,周期信号的平均功率等于傅里叶级数展开各谐波分量幅度的平方和,也即时域和频域的能量守恒。式(3-14)称为帕塞瓦尔定理(或帕塞瓦尔方程)。

3.2.3 具有对称性的周期信号的频谱

当周期信号的波形具有某种对称性时,其相应的傅里叶级数的系数会呈现出一定的特征。周期信号的对称性大致分两类,一类是对整个周期对称,如奇函数或偶函数,这种对称性决定了展开式中是否含有正弦项或余弦项;另一类对称性是关于波形前半周期与后半周期是否相同或成镜像的关系,如奇谐波信号。这种对称性决定了展开式中是否含有偶次项或

奇次项。下面分别讨论不同的对称情况下傅里叶系数的性质。

1. 偶对称信号

如果以 T_0 为周期的实值周期信号 $f(t)$ 具有 $f(t) = f(-t)$ 的关系,则表示周期信号 $f(t)$ 为 t 的偶函数,其信号波形对于纵轴是左右对称的,故也称为纵轴对称信号。图 3-3 是偶对称信号的一个实例。

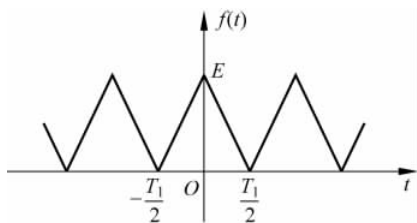


图 3-3 偶对称信号

用式(3-3)和式(3-4)求傅里叶系数时,因为 $f(t)\cos(n\omega_1 t)$ 为偶函数,而 $f(t)\sin(n\omega_1 t)$ 为奇函数,故有

$$\begin{cases} a_n = \frac{4}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos(n\omega_1 t) dt \\ b_n = 0 \end{cases} \quad (3-15)$$

此时不同展开式各系数的关系如下

$$c_n = d_n = a_n = 2F_n$$

$$F_n = F_{-n} = \frac{a_n}{2}$$

$$\phi_n = 0$$

$$\theta_n = \frac{\pi}{2}$$

可知,实偶信号的傅里叶系数 F_n 是实函数,并是 n 的偶函数,实偶信号的傅里叶系数中不会含正弦项,只可能含有直流项和余弦项。

2. 奇对称信号

如果以 T_0 为周期的实值周期信号 $f(t)$ 具有 $f(t) = -f(-t)$ 这种关系,则表示周期信号 $f(t)$ 为奇函数,其信号波形对于原点对称的,故称为原点对称信号。图 3-4 是奇对称信号的一个实例。

用式(3-3)和式(3-4)求傅里叶系数时,此时 $f(t)\cos(n\omega_1 t)$ 为奇函数,而 $f(t)\sin(n\omega_1 t)$ 为偶函数,即

$$\begin{cases} a_0 = 0, & a_n = 0 \\ b_n = \frac{4}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t) \sin(n\omega_1 t) dt \end{cases} \quad (3-16)$$

此时不同展开式各系数的关系如下

$$c_n = d_n = b_n = 2jF_n$$

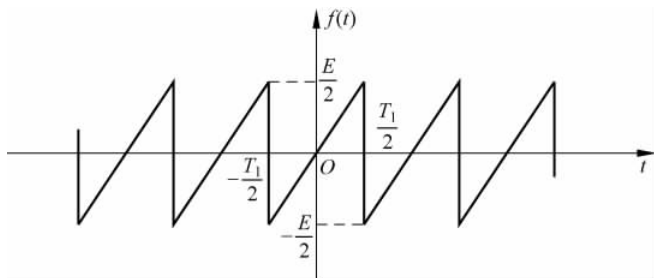


图 3-4 奇对称信号

$$F_n = -F_{-n} = -\frac{1}{2}jb_n$$

$$\phi_n = -\frac{\pi}{2}$$

$$\theta_n = 0$$

可知,实奇信号的傅里叶系数 F_n 是虚函数,并是 n 的奇函数,实奇信号的傅里叶系数中不包含余弦项,只可能含有正弦项。有的信号是由一奇信号和一直流成分构成,它不再是奇函数,但在其级数展开式中仍然不会含有余弦项。

3. 奇谐信号

如果以 T_0 为周期的周期信号 $f(t)$ 具有的关系为 $f(t) = -f\left(t \pm \frac{T_1}{2}\right)$,则表示周期信号 $f(t)$ 信号波形平移半个周期后,将与原波形上下镜像对称,故也称为半波镜像信号。函数 $f(t)$ 称为半波对称函数或奇谐函数,图 3-5 是奇谐函数的一个实例。

图 3-5 中实线都表示半波对称函数 $f(t)$,而图 3-5(b)~图 3-5(e)中的虚线分别可以表示 $\cos(\omega_1 t)$, $\sin(\omega_1 t)$, $\cos(2\omega_1 t)$, $\sin(2\omega_1 t)$ 的波形。从奇谐函数的实例图 3-5(a)中可以明显地发现直流分量 a_0 一定等于零。从图 3-2(b)和图 3-2(c)可以看出 $f(t)\cos(\omega_1 t)$, $f(t)\sin(\omega_1 t)$ 的积分存在,而从图 3-2(d)和图 3-2(e)可以看出 $f(t)\cos(2\omega_1 t)$, $f(t)\sin(2\omega_1 t)$ 积分为零。所以可以定性地看出式(3-3)、式(3-4)中被积函数 $f(t)\cos(n\omega_1 t)$, $f(t)\sin(n\omega_1 t)$ 的形状,这样以此类推,可以得到

$$\begin{cases} a_0 = 0 & a_n = b_n = 0, & n = 2k \\ a_n = \frac{4}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos(n\omega_1 t) dt, & n = 2k - 1 \\ b_n = \frac{4}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t) \sin(n\omega_1 t) dt, & n = 2k - 1 \end{cases} \quad (3-17)$$

其中, $k=1,2,3,\dots$ 。

因此,在半波镜像信号函数的傅里叶级数中,只会含有基波和奇次谐波的正弦、余弦项,而不会包含偶次谐波项。同时,要注意奇函数和奇谐函数的不同之处,在于奇函数只可能含有正弦项,而奇谐函数只可能包含奇次谐波的正弦、余弦项。

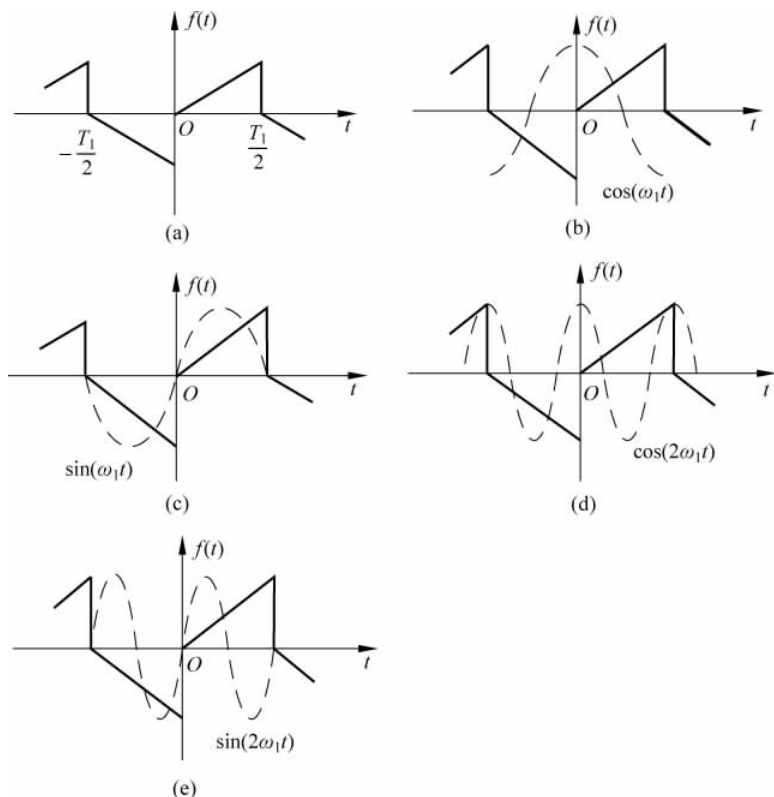


图 3-5 奇谐信号

3.3 非周期信号的频谱——傅里叶变换

之前章节讨论了有关周期信号的傅里叶级数,同时得到了其离散频谱。然而对于非周期信号来说,则是另一类重要的信号,但由于它的波形在有限长的时间段内不能重复出现,因此不能以一个周期内的傅里叶展开式来代表整个信号,这就需要采用不同的分析方法来求解非周期信号的频域特性,这种研究方法称为傅里叶变换方法。

3.3.1 傅里叶变换的导出

傅里叶变换,表示能将满足一定条件的某个函数表示成三角函数(正弦或余弦函数)或者它们的积分的线性组合。在不同的研究领域,傅里叶变换具有多种不同的变化形式,如连续傅里叶变换和离散傅里叶变换。傅里叶变换的导出主要是根据将对周期信号的傅里叶分析方法推广到非周期信号中去,即将周期信号的周期无限增大时,其谱线间隔减小,从而离散频谱变成连续频谱,谱线的长度趋向于零。此时,若再按 3.2 节来表示信号的频谱,频谱将会化为乌有,这就失去了应有的意义。下面将讨论如何实现对非周期信号进行频谱分析。

对于周期矩形脉冲信号 $f(t)$ 而言,它的频谱为 $F(n\omega_1)$,如图 3-6 所示。

从图 3-6 可以看出当周期信号转化为非周期信号时,谱线间隔趋向于零;离散谱转化

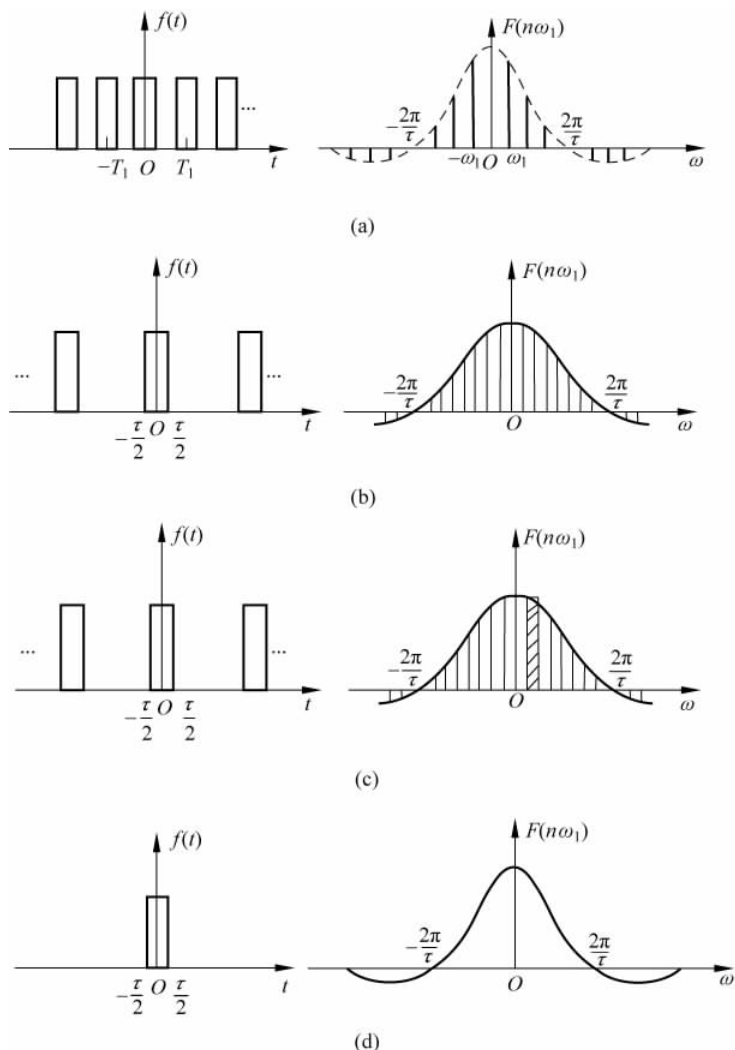


图 3-6 从周期信号的离散频谱到非周期信号的连续频谱

为连续谱。

此时,若再用 $F(n\omega_1)$ 表示频谱已不再合适,也就是说这样就会失去应有的意义。然而,从物理上分析,信号的产生必然含有一定的能量,不管信号如何分解,其所含的能量是维持不变的。或者从数学上分析,在极限情况下,无限多个无穷小量之和,仍可能等于一个有限数值。因此,对于非周期信号的表示方法,必须要引入一个新的量,称之为“频谱密度函数”,从而可由周期信号的傅里叶级数推导出非周期信号的傅里叶变换。

将该周期信号展开成指数形式的傅里叶级数,如下:

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} F(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t}$$

其频谱为:

$$\Rightarrow F(n\omega_1) T_1 = \frac{2\pi F(n\omega_1)}{\omega_1} = \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \quad (3-18)$$

对于非周期信号,当 $T_1 \rightarrow +\infty$ 时, $\omega_1 \rightarrow 0$, $\Delta(n\omega_1) = \omega_1 \rightarrow d\omega$, $n\omega_1 \rightarrow \omega$, 则:

$$F(n\omega_1) \rightarrow 0$$

但 $\frac{2\pi F(n\omega_1)}{\omega_1} \rightarrow$ 有限值, 为连续函数, 记为 $F(\omega)$ 或 $F(j\omega)$ 。在此式中 $\frac{F(n\omega_1)}{\omega_1}$ 表示频谱密度函数, 即频谱密度。因此 $F(\omega)$ 称为频谱密度函数, 简称频谱函数。若以 $\frac{F(n\omega_1)}{\omega_1}$ 的幅度为高, 以间隔 ω_1 为宽画一个小矩形 (如图 3-6(c) 所示), 则该小矩形的面积等于 $\omega = n\omega_1$ 频谱值 $F(n\omega_1)$ 。

式(3-18)在非周期信号下变成

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t} = \sum_{n\omega_1=-\infty}^{+\infty} \frac{F(n\omega_1)}{\omega_1} e^{jn\omega_1 t} \cdot \omega_1$$

即

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3-19)$$

式(3-19)称为傅里叶正变换。

而

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t} = \sum_{n\omega_1=-\infty}^{+\infty} \frac{F(n\omega_1)}{\omega_1} e^{jn\omega_1 t} \cdot \omega_1$$

当 $T_1 \rightarrow +\infty$ 时

$$\omega_1 \rightarrow d\omega, \quad n\omega_1 \rightarrow \omega$$

从而有

$$\frac{F(n\omega_1)}{\omega_1} \rightarrow \frac{F(\omega)}{2\pi}, \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}$$

可得

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3-20)$$

式(3-20)称为傅里叶逆变换。

3.3.2 傅里叶变换存在的条件

之前推导傅里叶变换时并未遵循数学上的严格步骤。从理论上讲, 傅里叶变换也应该满足一定的条件才能存在。

严格意义上讲, 傅里叶变换存在的充分条件是: $f(t)$ 在无限区间内满足绝对可积, 即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty$$

可见, 所有的能量信号均满足此条件。当引入奇异函数的概念后, 傅里叶变换的函数类型将会大大扩展。

3.4 傅里叶变换的基本性质

傅里叶变换建立了信号时域和频域的一一对应关系。信号在时域中所具有的特性, 必然在频域中有其相对应的特性存在, 当在某个域中分析发生困难时, 利用傅里叶变换的性质

可以转到另一个域中进行分析计算；另外，根据定义来求取傅里叶正、反变换时，不可避免地会遇到繁杂的积分或不满足绝对可积而可能出现广义函数的麻烦，而傅里叶变换的性质是一种来求取傅里叶正、反变换的简洁方法。

1. 线性(叠加性)

傅里叶变换是一种线性运算。若

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega), \quad f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$$

则

$$af_1(t) + bf_2(t) \leftrightarrow aF_1(\omega) + bF_2(\omega) \quad (3-21)$$

其中 a 和 b 都是常数。这个性质可由傅里叶变换的定义式即可得出。

【例 3-1】 求 $f(t) = \delta(t+2) + 2\delta(t) + \delta(t-2)$ 的傅里叶变换。

解：

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} [\delta(t+2) + 2\delta(t) + \delta(t-2)] e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t+2) e^{-j\omega t} dt + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-2) e^{-j\omega t} dt \\ &= e^{j2\omega} + 2 + e^{-j2\omega} \\ &= 2 + 2\cos 2\omega \\ &= 4 + \cos^2 \omega \end{aligned}$$

【例 3-2】 求图 3-7(a) 所示信号的频谱。

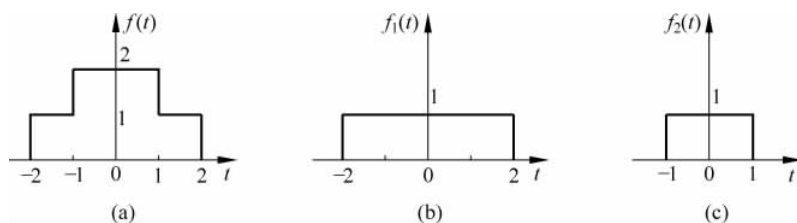


图 3-7 由线性特性得到傅里叶变换

解：因为

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t)$$

$$g_{\tau}(t) \leftrightarrow \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$f_1(t) \leftrightarrow 4\text{Sa}(2\omega)$$

$$f_2(t) \leftrightarrow 2\text{Sa}(\omega)$$

所以

$$F(\omega) \leftrightarrow 4\text{Sa}(2\omega) + 2\text{Sa}(\omega)$$

显然傅里叶变换是一种线性运算，它满足齐次性和可加性。此结论表明两个含义：一是当某个信号乘以一常数，其频谱函数将乘以同一常数；二是相加信号的频谱等于各个单独信号的频谱之和。

2. 时移特性

若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ ，则

$$f(t-t_0) \leftrightarrow F(\omega)e^{-j\omega t_0} \quad (3-22)$$

证明 因为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

在该式中以 $t-t_0$ 代替 t , 有

$$f(t-t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega(t-t_0)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [e^{-j\omega t_0} F(\omega)] e^{j\omega t} d\omega$$

所以可得到

$$f(t-t_0) \leftrightarrow F(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

这个性质表明: 信号 $f(t)$ 在时域中沿时间轴右移 t_0 等效于在频域中频谱乘以因子 $e^{-j\omega t_0}$ 。换句话说, 也就是信号在时间上移位, 并不改变傅里叶变换的模, 只是在其变换中引入了相移, 即 $-\omega t_0$, 与频率 ω 呈线性关系, 所要研究的无失真传输系统对信号的作用正是基于此特性。

【例 3-3】信号如图 3-8(a) 所示, 求其傅里叶变换。

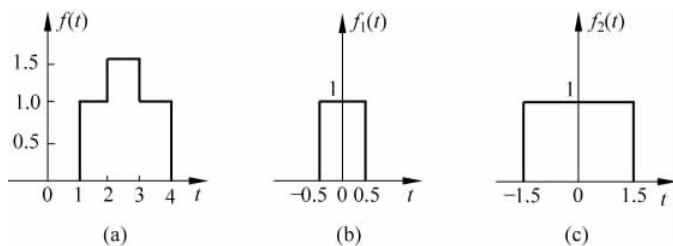


图 3-8 例 3-3 的信号图

解: 先将 $f(t)$ 分解成 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的线性组合, $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 分别如图 3-8(b) 和图 3-8(c) 所示,

$$f(t) = \frac{1}{2}f_1(t-2.5) + f_2(t-2.5)$$

分别求出 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的傅里叶变换为

$$F_1(\omega) = \int_{-0.5}^{0.5} e^{-j\omega t} dt = \frac{2\sin(\omega/2)}{\omega}$$

$$F_2(\omega) = \int_{-1.5}^{1.5} e^{-j\omega t} dt = \frac{2\sin(3\omega/2)}{\omega}$$

利用傅里叶变换的时移特性有

$$f_1(t-2.5) \leftrightarrow e^{-j5\omega/2} F_1(\omega)$$

$$f_2(t-2.5) \leftrightarrow e^{-j5\omega/2} F_2(\omega)$$

利用傅里叶变换的线性性质有

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega) = e^{-j5\omega/2} \left[\frac{\sin(\omega/2)}{\omega} + 2\sin(3\omega/2) \right]$$

3. 频移特性

若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, 则

$$f(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow F(\omega - \omega_0) \quad (3-23)$$

证明 因为

$$\begin{aligned} f(t)e^{j\omega_0 t} &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{j\omega_0 t} \cdot e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt \end{aligned}$$

所以

$$f(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow F(\omega - \omega_0)$$

同理

$$f(t)e^{-j\omega_0 t} \leftrightarrow F(\omega + \omega_0)$$

其中 ω_0 为实常数。

频域特性表明：若时间信号 $f(t)$ 乘以 $e^{j\omega_0 t}$ ，等效于 $f(t)$ 的频谱 $F(\omega)$ 沿频率轴右移 ω_0 。基于频域特性的频谱搬移技术，在通信和信号处理中得到了广泛的应用，如在载波幅度调制、同步调制、变频和混频等技术中的应用。

【例 3-4】 已知矩形调幅信号 $f(t) = g_\tau(t) \cos \omega_0 t$ ，试求其频谱函数。

解：因为

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2} g_\tau(t) (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) \\ g_\tau(t) &\leftrightarrow \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \end{aligned}$$

根据频移特性，可得

$$f(t) \leftrightarrow \frac{1}{2} \tau \text{Sa}\left[\left(\frac{\omega - \omega_0}{2}\right)\tau\right] + \frac{1}{2} \tau \text{Sa}\left[\frac{(\omega + \omega_0)}{2}\tau\right]$$

其波形及频谱如图 3-9 所示。

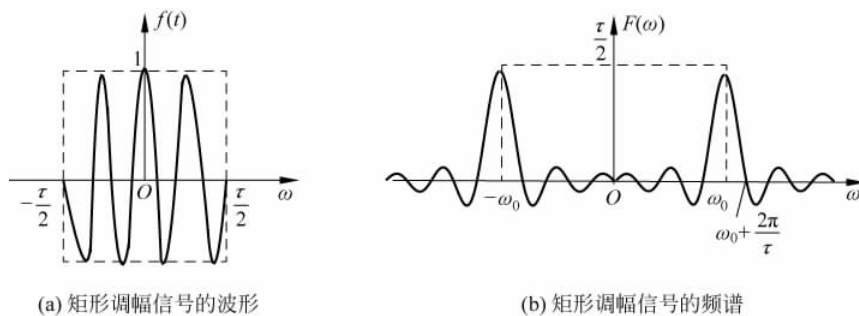


图 3-9 矩形调幅信号的波形及频谱图

可见，调幅信号的频谱等于将 $g_\tau(t)$ 频谱一分为二，各向左、右移载频 ω_0 ，进行了频谱搬移。

4. 尺度变换特性

若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ ，则

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (3-24)$$

这里 a 是非零实常数。

证明:

$$f(at) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(at) e^{-j\omega t} dt$$

令 $at = \tau$, 则当 $a > 0$,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(at) e^{-j\omega t} dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-j\omega \frac{\tau}{a}} \frac{1}{a} d\tau \\ &= \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \end{aligned}$$

当 $a < 0$,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(at) e^{-j\omega t} dt &= \int_{+\infty}^{-\infty} f(\tau) e^{-j\omega \frac{\tau}{a}} \frac{1}{a} d\tau \\ &= -\frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \end{aligned}$$

综合上述两种情况,便可得到尺度变换特性表达式为

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

特例,当 $a = -1$ 时,有

$$f(-t) \leftrightarrow F(-\omega)$$

尺度变换性质表明:除因子 $1/|a|$ 以外,信号在时域中有尺度变换因子 a ,则其频谱在频域中有因子 $1/a$ 。这就意味着,对一个脉冲信号,如果脉冲宽度越宽,它的频带越窄;脉宽减小 a 倍,其带宽就相应地增加 a 倍,因此脉宽与带宽之乘积是一个常数。在数字通信技术中,必须压缩矩形脉冲的宽度以提高通信速率,这时必须展宽信道的频带。

图 3-10(a)和图 3-10(b)分别表示了单位矩形脉冲信号尺度变换前后的时域波形及其频谱。

【例 3-5】 求偶对称和奇对称双边指数函数的频谱。

解: 由于

$$F(e^{-at}u(t)) = \frac{1}{a + j\omega}, \quad a > 0$$

$$F(e^{-at}u(-t)) = \frac{1}{a - j\omega}, \quad a < 0$$

据此可得偶对称双边指数函数的频谱为

$$\begin{aligned} F[e^{-a|t|}u(t)] &= F[e^{-at}u(t) + e^{-at}u(-t)] \\ &= \frac{1}{a + j\omega} + \frac{1}{a - j\omega} \\ &= \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

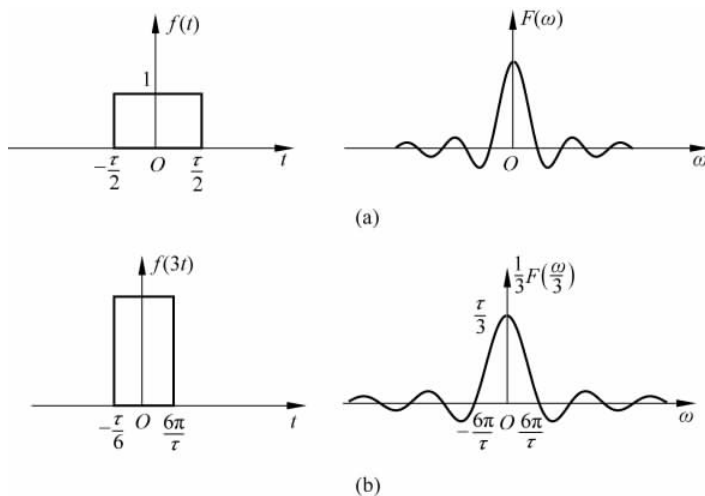


图 3-10 单位矩形脉冲信号的尺度变换

奇对称双边指数函数的频谱为

$$\begin{aligned} F[e^{-a|t|}u(t) - e^{at}u(-t)] &= \frac{1}{a + j\omega} - \frac{1}{a - j\omega} \\ &= \frac{-2j\omega}{a^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

【例 3-6】 已知图 3-11(a)所示的函数是宽度为 2 的门信号,即 $f_1(t) = g_2(t)$,其傅里叶变换 $F_1(\omega) = 2\text{Sa}(\omega) = \frac{2\sin\omega}{\omega}$,求图 3-11(b)和图 3-11(c)中函数 $f_2(t)$, $f_3(t)$ 的傅里叶变换。

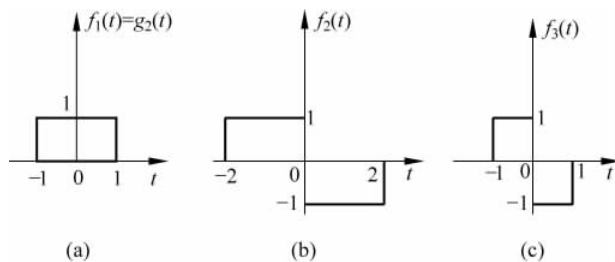


图 3-11 例 3-6 中的函数波形图

解:

(1) 图 3-11(b)中函数 $f_2(t)$ 可写为时移信号 $f_1(t+1)$ 与 $f_1(t-1)$ 之差,即由傅里叶变换的线性和时移特性可得 $f_2(t)$ 的傅里叶变换

$$F_2(\omega) = F_1(\omega)e^{j\omega} - F_1(\omega)e^{-j\omega} = \frac{2\sin\omega}{\omega}(e^{j\omega} - e^{-j\omega}) = j4 \frac{\sin^2(\omega)}{\omega}$$

(2) 图 3-11(c)中的函数 $f_3(t)$ 是 $f_2(t)$ 的压缩,可写为

$$f_3(t) = f_2(2t)$$

由尺度变换特性可得

$$F_3(\omega) = \frac{1}{2}F_2\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{2}j4 \frac{\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\frac{\omega}{2}} = j4 \frac{\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\omega}$$

【例 3-7】 已知 $f(t) \leftrightarrow F(\omega) = E\tau \cdot \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$, 求 $f(2t-5)$ 频谱密度函数。

解: 由已知条件和尺度变换特性得

$$f(2t) \leftrightarrow \frac{1}{2}F\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{2}E\tau \cdot \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

再根据时移特性得

$$f(2t-5) \leftrightarrow \frac{E\tau}{2} \cdot \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{4}\right) e^{-j\frac{5}{2}\omega}$$

【例 3-8】 如果信号 $f(t)$ 的频谱为 $F(\omega)$, 试求信号 $e^{j4t}f(3-2t)$ 的频谱。

解: 由傅里叶变换的时移特性得

$$f(t+3) \leftrightarrow F(\omega) e^{j3\omega}$$

利用尺度变换, 令 $a=-2$, 则

$$f(-2t+3) \leftrightarrow \frac{1}{|-2|} F\left(\frac{\omega}{-2}\right) e^{j3\left(\frac{\omega}{-2}\right)} = \frac{1}{2} F\left(\frac{\omega}{-2}\right) e^{-j\frac{3\omega}{2}}$$

最后, 由频移特性得

$$e^{j4t}f(3-2t) \leftrightarrow \frac{1}{2} F\left(\frac{\omega-4}{-2}\right) e^{j\left(\frac{3(\omega-4)}{2}\right)}$$

5. 对称性

若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, 则

$$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega) \quad (3-25)$$

该式表明, 如果时间函数 $f(t)$ 的频谱函数是 $F(\omega)$, 那么时间函数 $F(t)$ 的频谱函数是 $2\pi f(-\omega)$ 。

证明 由傅里叶反变换式

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

将上式中自变量 t 更换为 $-t$, 得

$$f(-t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{-j\omega t} d\omega$$

将上式中自变量 t 更换为 ω , 而把 ω 换为 t , 得

$$2\pi f(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{-j\omega t} dt$$

上式表明, 时间函数 $F(t)$ 的傅里叶变换为 $2\pi f(-\omega)$, 所以

$$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$

当 $f(t)$ 为偶函数时, 就有 $F(t) \leftrightarrow 2\pi f(\omega)$ 。

【例 3-9】 求 $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ 的傅里叶变换。

解: 因为 $e^{-|t|} \leftrightarrow \frac{2}{1+\omega^2}$, 从而由傅里叶变换的对称特性得

$$\frac{2}{1+t^2} \leftrightarrow 2\pi e^{-|\omega|}$$

所以

$$\frac{1}{1+t^2} \leftrightarrow \pi e^{-|\omega|}$$

【例 3-10】 求取样函数 $\text{Sa}(t) = \frac{\sin t}{t}$ 的傅里叶变换。

解: 由傅里叶变换公式 $F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$ 知宽度为 τ , 幅度为 E 的矩形脉冲信号 $g(t)$ 的傅里叶变换为

$$g(t) \leftrightarrow E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

若取 $E = \frac{1}{2}, \tau = 2$, 则 $g(t) \leftrightarrow \text{Sa}(\omega)$ 。

由对称特性, 以及已知矩形脉冲信号 $g(t)$ 是偶函数

$$\text{Sa}(t) = 2\pi g(\omega) = \begin{cases} \pi & |\omega| < 1 \\ 0 & |\omega| > 1 \end{cases}$$

其波形如图 3-12 所示。其中, 图 3-12(a) 表示 $E = 1/2, \tau = 2$ 的矩形脉冲信号 $g(t)$ 及其频谱密度函数 $\text{Sa}(\omega)$, 图 3-12(b) 表示抽样函数 $\text{Sa}(t)$ 及其频谱密度函数 $2\pi g(\omega)$, 这里已明显地表示了它们之间的对称关系, 并表达了这一性质给某些信号的傅里叶变换的求取带来极大的方便。

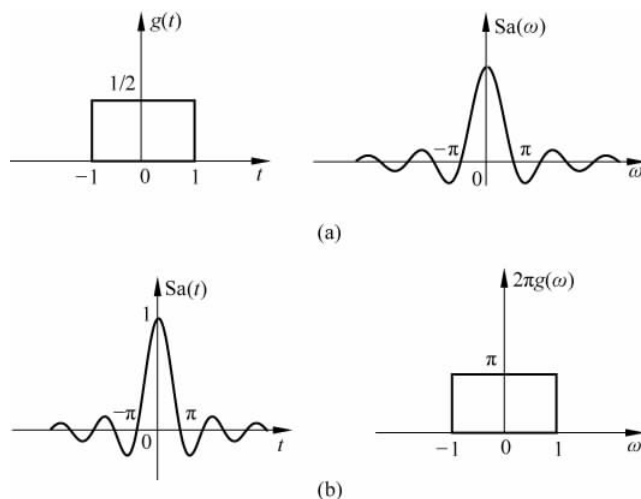


图 3-12 由对称性求取取样函数 $\text{Sa}(t)$ 的频谱

6. 奇偶虚实性

根据傅里叶变换的定义, 信号 $f(t)$ 的傅里叶变换为

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$F(\omega)$ 在一般情况下是频率 ω 的复函数,它可以表示成实部 $R(\omega)$ 和虚部 $X(\omega)$ 的形式,即有

$$f(\omega) = |F(\omega)| e^{j\varphi(\omega)} = R(\omega) + jX(\omega)$$

且有

$$\begin{cases} \varphi(\omega) = \arctan \frac{X(\omega)}{R(\omega)} \\ |F(\omega)| = \sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)} \end{cases} \quad (3-26)$$

讨论:

(1) 当 $f(t)$ 是实函数时,那么 $F(\omega)$ 的实部 $R(\omega)$ 是偶函数,虚部 $X(\omega)$ 是奇函数。

证明

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(\omega t) dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(\omega t) dt$$

显然频谱函数的实部和虚部分别为

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(\omega t) dt$$

$$X(\omega) = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(\omega t) dt$$

$R(\omega)$ 是偶函数, $X(\omega)$ 是奇函数,满足

$$R(\omega) = R(-\omega)$$

$$X(\omega) = -X(-\omega)$$

$$F(-\omega) = F^*(\omega)$$

再利用式(3-26)可证得 $|F(\omega)|$ 是偶函数, $\varphi(\omega)$ 是奇函数。通过验证已求得各种实函数的频谱都应满足这一结论:实函数傅里叶变换的幅度谱和相位谱分别得偶、奇函数。这一特性在信号频谱分析中具有广泛的应用。

当 $f(t)$ 是实偶函数时,有

$$X(\omega) = 0$$

$$F(\omega) = R(\omega) = 2 \int_0^{+\infty} f(t) \cos(\omega t) dt$$

可见,实偶函数的频谱函数也是实偶函数。

当 $f(t)$ 是实奇函数时,有

$$R(\omega) = 0$$

$$F(\omega) = jX(\omega) = -2j \int_0^{+\infty} f(t) \sin(\omega t) dt$$

(2) 若 $f(t)$ 是虚函数,则 $F(\omega)$ 的实部 $R(\omega)$ 是奇函数,虚部 $X(\omega)$ 是偶函数。

证明 令 $f(t) = jg(t)$,则

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \sin(\omega t) dt$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \cos(\omega t) dt$$

显然, $R(\omega)$ 为奇函数, $X(\omega)$ 为偶函数, 即满足

$$R(\omega) = -R(-\omega)$$

$$X(\omega) = X(-\omega)$$

当 $f(t)$ 是虚函数时, 由式(3-26)可知, 其幅度频谱 $|F(\omega)|$ 仍为偶函数, 相位频谱 $\varphi(\omega)$ 仍为奇函数。

显然 $F(\omega)$ 是由三项构成, 它们都是矩形脉冲的频谱, 只是有两项沿频率轴左、右平移了 $\omega = \frac{\pi}{\tau}$ 。把上式化简, 则可以得到

$$F(\omega) = \frac{E \sin(\omega\tau)}{\omega \left[1 - \left(\frac{\omega\tau}{\pi} \right)^2 \right]} = \frac{E\tau \text{Sa}(\omega\tau)}{1 - \left(\frac{\omega\tau}{\pi} \right)^2} \quad (3-27)$$

其频谱如图 3-13 所示。

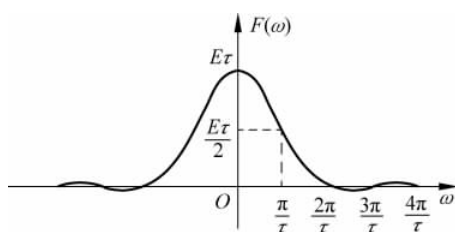


图 3-13 升余弦脉冲信号频谱

由上可见, 升余弦脉冲信号的频谱比矩形脉冲的频谱更加集中。对于半幅度宽度为 τ 的升余弦脉冲信号, 它的绝大部分能量集中在 $\omega = 0 \sim \frac{2\pi}{\tau}$ (即 $f = 0 \sim \frac{1}{\tau}$) 范围内。

7. 卷积特性

1) 时域卷积定理

若给定两个时间函数 $f_1(t)$ 、 $f_2(t)$, 并且已知

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega)$$

$$f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$$

则

$$f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(\omega) F_2(\omega)$$

证明: 根据卷积的定义, 可得

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \quad (3-28)$$

因此

$$\begin{aligned} F[f_1(t) * f_2(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t - \tau) e^{-j\omega t} dt \right] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) F_2(\omega) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= F_2(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \end{aligned}$$

所以

$$F[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(\omega)F_2(\omega) \quad (3-29)$$

时域卷积定理表明,两个时间函数卷积的频谱等于各时间函数频谱的乘积,即在时域中两函数的卷积对应于频域中两函数频谱的乘积。

2) 频域卷积定理

类似于时域卷积定理,由频域卷积定理可知,若

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega)$$

$$f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$$

则

$$f_1(t) \cdot f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega) \quad (3-30)$$

证明方法同时域卷积定理,读者可自行证明,这里不再重复。式(3-30)称为频域卷积定理,它表明两时间函数乘积的频谱等于各个函数频谱的卷积乘以 $\frac{1}{2\pi}$,即在时域中两函数的乘积对应于频域中两函数频谱的卷积。

【例 3-11】 若 $f(t)$ 的频谱 $F(\omega)$ 如题图 3-14 所示,利用卷积定理粗略画出 $f(t)\cos(\omega_0 t)$ 、 $f(t)e^{j\omega_0 t}$ 、 $f(t)\cos(\omega_1 t)$ 的频谱(注明频谱的边界频率)。

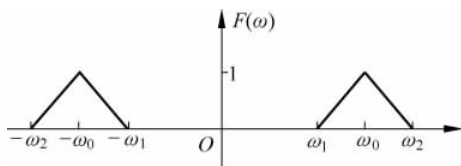


图 3-14 例 3-11 的频谱图

解:

$$\begin{aligned} F_1(\omega) &= F[f(t) \cdot \cos(\omega_0 t)] \\ &= \frac{1}{2} [F(\omega + \omega_0) + F(\omega - \omega_0)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_2(\omega) &= F[f(t)e^{j\omega_0 t}] \\ &= F(\omega - \omega_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_3(\omega) &= F[f(t)\cos(\omega_1 t)] \\ &= \frac{1}{2} [F(\omega + \omega_1) + F(\omega - \omega_1)] \end{aligned}$$

$F_1(\omega)$ 、 $F_2(\omega)$ 、 $F_3(\omega)$ 的频谱图如 3-15 所示。

卷积定理揭示了时域与频域的运算关系,在通信系统和信号处理研究领域得到了广泛应用。这一定理对拉普拉斯变换、双边拉普拉斯变换、 z 变换、Hartley 变换等各种傅里叶变换的变体同样成立。在调和分析中还可以推广到在局部紧致的阿贝尔群上定义的傅里叶变换,实现有效的计算,节省运算代价。

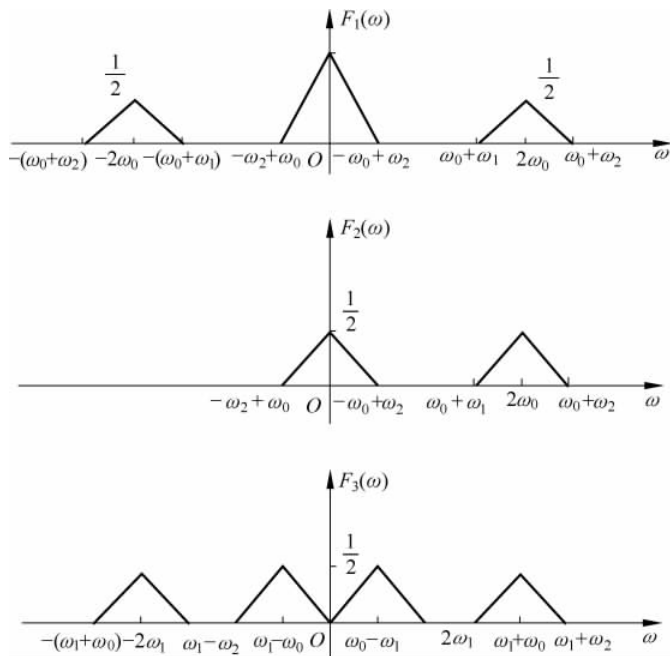


图 3-15 不同函数表达式的频谱图

8. 微分与积分

1) 时域微分

若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, 则

$$\frac{df(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega F(\omega) \quad (3-31)$$

证明 因为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

两边对 t 求导数, 得

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [j\omega F(\omega) e^{j\omega t}] d\omega$$

同理

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n F(\omega)$$

时域的微分特性说明在时域中 $f(t)$ 对 t 去 n 阶导数等效于在频域中 $f(t)$ 的频谱 $F(\omega)$ 乘以 $(j\omega)^n$ 。

【例 3-12】 求信号 $f(t) = \frac{1}{t^2}$ 的傅里叶变换。

解: 由于 $\frac{1}{t} \leftrightarrow -j\pi \operatorname{sgn}(\omega)$, 根据时域微分定理可得

$$-\frac{1}{t^2} \leftrightarrow -j\pi \operatorname{sgn}(\omega) \cdot j\omega = \pi\omega \operatorname{sgn}(\omega)$$

即

$$\frac{1}{t^2} \leftrightarrow -\pi\omega \operatorname{sgn}(\omega) = -\pi|\omega|$$

【例 3-13】 求信号 $f(t) = \operatorname{sgn}(t+1)$ 的傅里叶变换。

解：信号也可以写为

$$f(t) = \operatorname{sgn}(t+1) = 2u(t+1) - 1$$

则有

$$f'(t) = 2\delta(t+1)$$

利用时移特性可得

$$f'(t) \leftrightarrow 2\delta(t+1) = 2e^{j\omega}$$

根据时域的微分特性有 $f'(t) \leftrightarrow j\omega F(\omega)$, 故得信号的傅里叶变换为

$$F(\omega) = \frac{2}{j\omega} e^{j\omega}$$

2) 时域积分

若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, 则时域积分特性为

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \pi F(0)\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} F(\omega) \quad (3-32)$$

证明 按定义有

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau &\leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) u(t-\tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt \end{aligned}$$

变换积分次序, 利用阶跃信号 $u(t-\tau)$ 的频谱函数

$$u(t-\tau) \leftrightarrow \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] e^{-j\omega\tau}$$

可得

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau &\leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} u(t-\tau) e^{-j\omega t} dt \right] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \pi\delta(\omega) e^{-j\omega\tau} d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \frac{1}{j\omega} e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \pi\delta(\omega) F(\omega) + \frac{1}{j\omega} F(\omega) \\ &= \pi F(0)\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} F(\omega) \end{aligned}$$

式中 $F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ 即为 $f(t)$ 曲线下的面积。

若 $F(0)=0$, 则有

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} F(\omega)$$

【例 3-14】 试求平顶斜变信号 $y(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$ 的频谱函数 $Y(\omega)$, 其中 $f(t)$ 是如图 3-16 所示的矩形波。

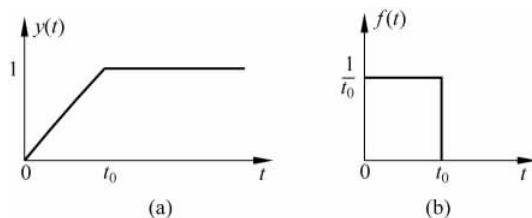


图 3-16 平顶斜变信号

解: $f(t)$ 是矩形脉冲函数 $\frac{1}{t_0}G_{t_0}(t)$ 右移 $\frac{t_0}{2}$ 所得, 其频谱为

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega) = \text{Sa}\left(\frac{\omega t_0}{2}\right) e^{-j\omega t_0/2}$$

因为 $F(0)=1$, 由式(3-12)的时域积分特性, 得

$$\begin{aligned} y(t) &\leftrightarrow Y(\omega) \\ &= \pi F(0)\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}F(\omega) \\ &= \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\text{Sa}\left(\frac{\omega t_0}{2}\right) e^{-j\omega t_0/2} \end{aligned}$$

例 3-14 的计算过程表明, 利用矩形脉冲函数的傅里叶变换及时域微分特性, 使平顶斜变信号的傅里叶变换的计算过程大大简化。

3) 频域微分特性

若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, 则

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3-33)$$

证明 因为

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

将上式两边对 ω 求导数, 得

$$\frac{dF(\omega)}{d\omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} (-jt) f(t) e^{-j\omega t} dt$$

根据傅里叶变换的定义可得

$$(-jt) f(t) \leftrightarrow \frac{dF(\omega)}{d\omega}$$

类似推广可得

$$(-jt)^n f(t) \leftrightarrow \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$$

【例 3-15】 求斜升函数 $f(t) = tu(t)$ 的频谱。

解: 因为

$$u(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

由频域微分特性可得

$$-jtu(t) \leftrightarrow \frac{d}{d\omega} \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] = \pi\delta'(\omega) - \frac{1}{j\omega^2}$$

再由线性特性得信号的傅里叶变换为

$$F(\omega) = \frac{1}{-j} \left(\pi\delta'(\omega) - \frac{1}{j\omega^2} \right) = j\pi\delta'(\omega) - \frac{1}{\omega^2}$$

【例 3-16】 求信号 $f(t)=t^n$ 的频谱。

解：因为

$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

由频域微分特性可得

$$f(t) = t^n \leftrightarrow j^n \frac{d^n}{d\omega^n} [2\pi\delta(\omega)] = 2\pi j^n \frac{d^n}{d\omega^n} \delta^{(n)}(\omega)$$

由上述例子可以看出,利用频域微分特性可以方便求出通常意义下不方便进行傅里叶变换的信号的频谱。

4) 频域积分

若 $F[f(t)] = F(j\omega)$, 则

$$F^{-1} \left[\int_{-\infty}^{\Omega} F(j\mu) d\mu \right] = \frac{f(t)}{-jt} + \pi f(0)\delta(t)$$

证明: 根据卷积性质可得

$$\int_{-\infty}^{\Omega} F(j\mu) d\mu = F(j\Omega) * u(\Omega)$$

再利用频域卷积定理可知:

$$F^{-1} \left[\int_{-\infty}^{\Omega} F(j\mu) d\mu \right] = F^{-1} [F(j\Omega) * u(\Omega)] = 2\pi f(t) F^{-1} [u(\Omega)]$$

由于

$$F[u(t)] = \frac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega)$$

利用对偶性可得

$$\begin{aligned} F^{-1}[u(\Omega)] &= \frac{1}{2\pi} F[u(t)] \Big|_{\Omega=-t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega) \right] \Big|_{\Omega=-t} \\ &= \frac{1}{2}\delta(t) - \frac{1}{2\pi} \times \frac{1}{jt} \end{aligned}$$

将上式代入可得

$$\begin{aligned} F^{-1} \left[\int_{-\infty}^{\Omega} F(j\mu) d\mu \right] &= 2\pi f(t) \left[\frac{1}{2}\delta(t) - \frac{1}{2\pi} \times \frac{1}{jt} \right] \\ &= \frac{f(t)}{-jt} + \pi f(0)\delta(t) \end{aligned}$$

其中, $f(0)$ 是 $f(t)$ 在 $t=0$ 的值。

3.5 典型非周期信号的频谱

3.5.1 单边指数信号

单边指数信号表达式为

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad a > 0$$

将 $f(t)$ 代入傅里叶变换定义式, 即可得

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt \\ &= \frac{1}{a+j\omega} \end{aligned}$$

其幅度特性和相位特性分别为

$$\begin{cases} |F(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \\ \varphi(\omega) = -\arctan \frac{\omega}{a} \end{cases} \quad (3-34)$$

单边指数信号的波形 $f(t)$ 、幅度频谱 $|F(\omega)|$ 和相位频谱 $\varphi(\omega)$ 如图 3-17 所示。

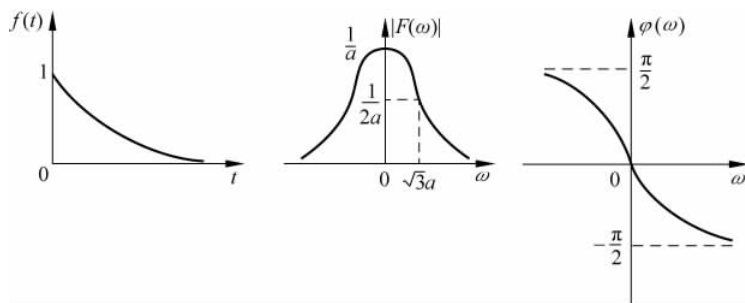


图 3-17 单边指数信号的波形及频谱

3.5.2 双边指数信号

双边指数信号的表达式为

$$f(t) = e^{-a|t|} \quad (-\infty < t < +\infty)$$

式中 $a > 0$ 。它的傅里叶变换为

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{a - j\omega} + \frac{1}{a + j\omega} \\
 &= \frac{2a}{a^2 + \omega^2}
 \end{aligned}$$

其幅度频谱和相位频谱分别为

$$\begin{cases} |F(j\omega)| = \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \\ \phi(\omega) = 0 \end{cases} \quad (3-35)$$

双边指数信号的波形 $f(t)$ 、幅度谱 $|F(\omega)|$ 如图 3-18 所示。

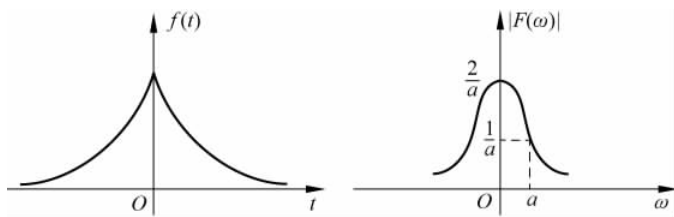


图 3-18 双边指数信号的波形及频谱

3.5.3 矩形脉冲信号

矩形脉冲信号的表达式为

$$f(t) = E \left[u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right]$$

式中, E 为脉冲幅度, τ 为脉冲宽度。它的傅里叶变换为

$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} E e^{-j\omega t} dt = \frac{E}{-j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \\
 &= \frac{E\tau}{\omega \frac{\tau}{2}} \cdot \frac{e^{j\omega \frac{\tau}{2}} - e^{-j\omega \frac{\tau}{2}}}{2j} = E\tau \frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\omega\tau}{2}} \\
 &= E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)
 \end{aligned} \quad (3-36)$$

这样, 矩形脉冲信号的幅度谱和相位谱分别为

$$\begin{aligned}
 |F(\omega)| &= E\tau \left| \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \right| \\
 \varphi(\omega) &= \begin{cases} 0 & \left[\frac{4n\pi}{\tau} < |\omega| < \frac{2(2n+1)\pi}{\tau} \right] \\ \pi & \left[\frac{2(2n+1)\pi}{\tau} < |\omega| < \frac{4(n+1)\pi}{\tau} \right] \end{cases}, \quad n = 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

因为 $F(\omega)$ 在这里是实函数, 通常用一条 $F(\omega)$ 曲线同时表示幅度谱 $F(\omega)$ 和相位谱 $\varphi(\omega)$, 如图 3-19 所示。

由上可见, 非周期矩形单脉冲的频谱函数曲线与周期矩形脉冲离散频谱的包络线形状相同, 都具有抽样函数的形状。和周期矩形脉冲的频谱一样, 矩形单脉冲频谱也具有收敛

性,信号的绝大部分能量集中在 $f=0\sim\frac{1}{\tau}$ 频率范围内。因而,通常认为这种信号占有的频率范围(即频带宽度)为

$$B \approx \frac{1}{\tau} \quad (3-37)$$

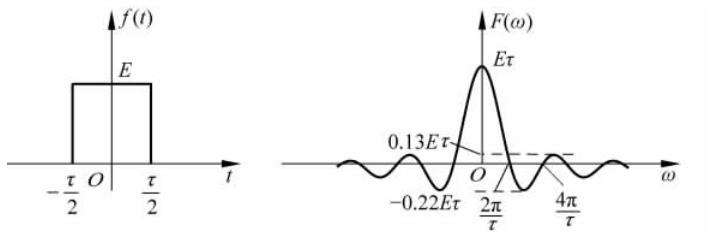


图 3-19 矩形脉冲信号的波形及频谱

3.5.4 钟形脉冲信号

钟形脉冲信号又称高斯脉冲信号,定义为

$$f(t) = E e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2} \quad (-\infty < t < +\infty) \quad (3-38)$$

其中 E, τ 均为正实数

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} E e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2} e^{-j\omega t} dt \\ &= E \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2} [\cos(\omega t) - j\sin(\omega t)] dt \\ &= 2E \int_0^{+\infty} e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2} \cos(\omega t) dt \end{aligned}$$

积分后可得

$$F(\omega) = \sqrt{\pi} E \tau \cdot e^{-\left(\frac{\omega \tau}{2}\right)^2} \quad (3-39)$$

其相位频谱为零,频谱图如图 3-20 所示。可见,钟形脉冲信号的波形和其频谱具有相同的形状,均为钟形脉冲信号。

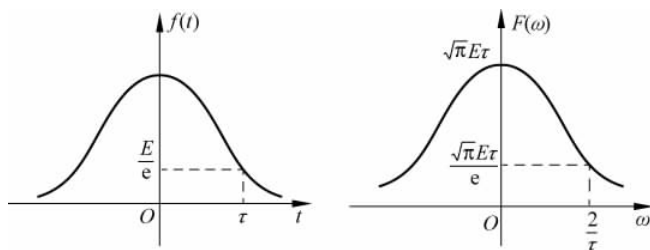


图 3-20 钟形脉冲信号的波形及频谱

3.5.5 符号函数

符号函数的表达式为

$$f(t) = \operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} +1, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases} \quad (3-40)$$

显然,符号函数不满足绝对可积的条件,但它存在傅里叶变换,可以借助于符号函数与双边指数函数 $f(t)$ 相乘,先求出此乘积信号 $f(t)$ 的频谱,然后取极限,从而得出符号函数 $\operatorname{sgn}(t)$ 的频谱。下面先求乘积信号 $f_1(t)$ 的频谱 $F_1(\omega)$ 。因为

$$F_1(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) e^{-j\omega t} dt$$

所以

$$F_1(\omega) = \int_{-\infty}^0 (-e^{at}) e^{-j\omega t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-at} \cdot e^{-j\omega t} dt$$

式中, $a > 0$ 。

积分并化简,可得其傅里叶变换为

$$\begin{cases} F_1(\omega) = \frac{-2j\omega}{a^2 + \omega^2} \\ |F_1(\omega)| = \frac{2|\omega|}{a^2 + \omega^2} \\ \varphi_1(\omega) = \begin{cases} +\frac{\pi}{2}, & \omega < 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \omega > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (3-41)$$

其波形和幅度谱如图 3-21 所示。

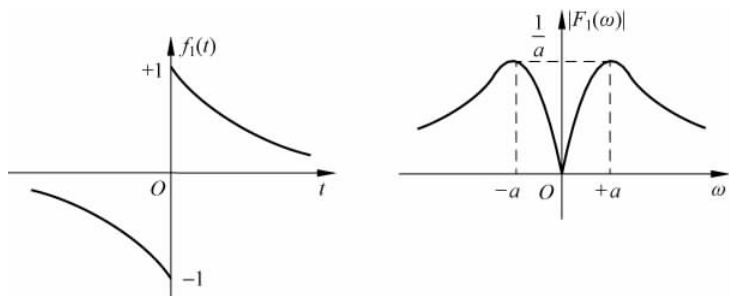


图 3-21 指数信号 $f_1(t)$ 的波形和频谱

符号函数可看做是当 a 趋于 0 时 $f_1(t)$ 的极限。因此,它的频谱函数也是 $f_1(t)$ 的频谱函数 $F_1(\omega)$ 在 a 趋于 0 时的极限。所以

$$F(\omega) = \lim_{a \rightarrow 0} F_1(\omega) = \lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{-j2\omega}{a^2 + \omega^2} \right)$$

从而

$$\begin{cases} F(\omega) = \frac{2}{j\omega} \\ |F(\omega)| = \frac{2}{|\omega|} \\ \varphi(\omega) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & \omega > 0 \\ +\frac{\pi}{2}, & \omega < 0 \end{cases} \end{cases} \quad (3-42)$$

其波形和频谱如图 3-22 所示。

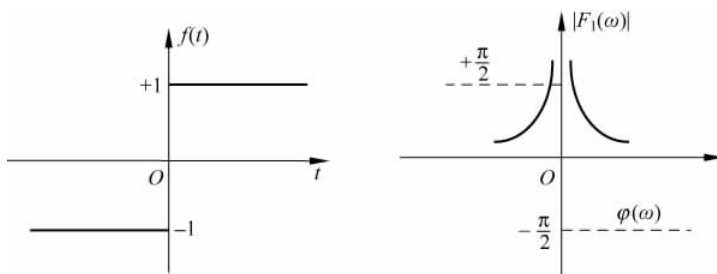


图 3-22 符号函数的波形和频谱

3.5.6 升余弦脉冲信号

升余弦脉冲信号的表达式为

$$f(t) = \frac{E}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right) \right], \quad 0 \leq |t| \leq \tau \quad (3-43)$$

其波形如图 3-23 所示。

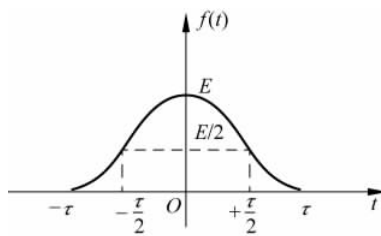


图 3-23 升余弦脉冲信号的波形

因为

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\tau}^{\tau} \frac{E}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right) \right] e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{E}{2} \int_{-\tau}^{\tau} e^{-j\omega t} dt + \frac{E}{4} \int_{-\tau}^{\tau} e^{j\frac{\pi t}{\tau}} \cdot e^{-j\omega t} dt + \frac{E}{4} \int_{-\tau}^{\tau} e^{-j\frac{\pi t}{\tau}} \cdot e^{-j\omega t} dt \\ &= E\tau \text{Sa}(\omega\tau) + \frac{E\tau}{2} \text{Sa}\left[\left(\omega - \frac{\pi}{\tau}\right)\tau\right] + \frac{E\tau}{2} \text{Sa}\left[\left(\omega + \frac{\pi}{\tau}\right)\tau\right] \end{aligned}$$

显然 $F(\omega)$ 是由三项构成, 它们都是矩形脉冲的频谱, 只是有两项沿频率轴左、右平移了 $\omega = \frac{\pi}{\tau}$ 。把上式化简, 则可以得到

$$F(\omega) = \frac{E \sin(\omega\tau)}{\omega \left[1 - \left(\frac{\omega\tau}{\pi} \right)^2 \right]} = \frac{E\tau \text{Sa}(\omega\tau)}{1 - \left(\frac{\omega\tau}{\pi} \right)^2} \quad (3-44)$$

其频谱如图 3-24 所示。

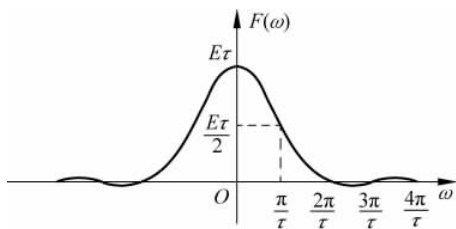


图 3-24 升余弦脉冲信号频谱

由上可见, 升余弦脉冲信号的频谱比矩形脉冲的频谱更加集中。对于半幅度宽度为 τ 的升余弦脉冲信号, 它的绝大部分能量集中在 $\omega = 0 \sim \frac{2\pi}{\tau}$ (即 $f = 0 \sim \frac{1}{\tau}$) 范围内。

3.6 周期信号的傅里叶变换

由周期信号傅里叶级数及非周期信号傅里叶变换, 得到了周期信号的频谱为离散的振幅谱, 而非周期信号的频谱是连续的密度谱。现在研究周期信号傅里叶变换的特点以及它与傅里叶级数之间的联系。目的是力图把周期信号与非周期信号的分析方法统一起来, 使傅里叶变换这一工具得到更广泛的应用, 对它的理解更加深入、全面。前已指出, 虽然周期信号不满足绝对可积条件, 但是在允许冲激函数存在并认为它是有意义的前提下, 绝对可积条件就成为不必要的限制了, 在这种意义上说周期信号的傅里叶变换是存在的。

本节借助频移特性导出指数、余弦、正弦信号的频谱, 然后研究一般周期信号的傅里叶变换。

3.6.1 正弦、余弦信号的傅里叶变换

若

$$F[f_0(t)] = F_0(\omega)$$

由频移特性知

$$F[f_0(t)e^{j\omega_1 t}] = F_0(\omega - \omega_1) \quad (3-45)$$

在式(3-45)中, 令

$$f_0(t) = 1$$

由式前面可知 $f_0(t)$ 的傅里叶变换为

$$F_0(\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

这样式(3-44)变成

$$F[e^{j\omega_1 t}] = 2\pi\delta(\omega - \omega_1) \quad (3-46)$$

同理

$$F[e^{-j\omega_1 t}] = 2\pi\delta(\omega + \omega_1) \quad (3-47)$$

由式(3-46)、式(3-47)以及欧拉公式,可以得到

$$\begin{cases} F[\cos(\omega_1 t)] = \pi[\delta(\omega + \omega_1) + \delta(\omega - \omega_1)] \\ F[\sin(\omega_1 t)] = j\pi[\delta(\omega + \omega_1) - \delta(\omega - \omega_1)] \end{cases} \quad (t \text{ 为任意值})$$

式(3-46)、式(3-47)表示指数、余弦和正弦函数的傅里叶变换。这类信号的频谱值包含于 $\pm\omega_1$ 处的冲激函数,如图3-25所示。

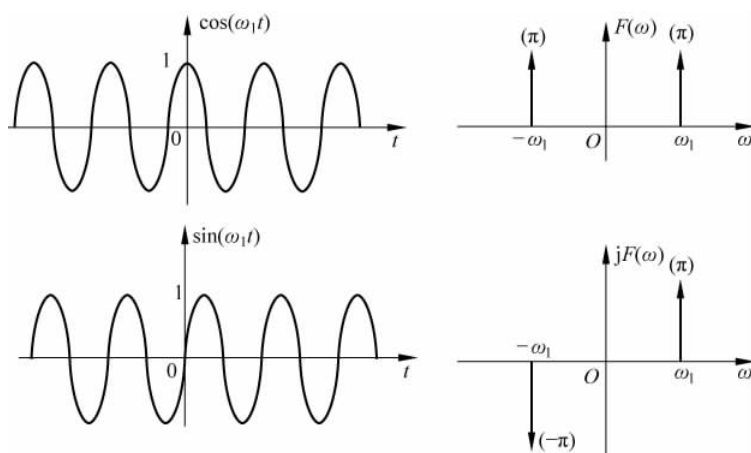


图 3-25 余弦和正弦信号的频谱

另外,还可以用极限的方法求正弦信号 $\sin(\omega_1 t)$, 余弦信号 $\cos(\omega_1 t)$ 及指数信号 $e^{j\omega_1 t}$ 的傅里叶变换。

先令 $f_0(t)$ 为有限长的余弦信号, 它只存在于 $-\frac{\tau}{2}$ 到 $+\frac{\tau}{2}$ 的区间, 即把有限长的余弦信号看成矩形脉冲 $G(t)$ 与余弦信号 $\cos(\omega_1 t)$ 的乘积。

$$f_0(t) = G(t)\cos(\omega_1 t)$$

因为

$$G(\omega) = F[G(t)]$$

根据频移特性, 可知图3-25的频谱为

$$F_0(\omega) = \frac{1}{2}[G(\omega + \omega_1) + G(\omega - \omega_1)]$$

如图3-26所示。

显然, 余弦信号 $\cos(\omega_1 t)$ 的傅里叶变换为

$$F[\cos(\omega_1 t)] = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} F_0(\omega)$$

可知余弦信号的傅里叶变换为

$$F[\cos(\omega_1 t)] = \pi[\delta(\omega + \omega_1) + \delta(\omega - \omega_1)]$$

同理可求得 $\sin(\omega_1 t)$, $e^{j\omega_1 t}$ 的频谱。

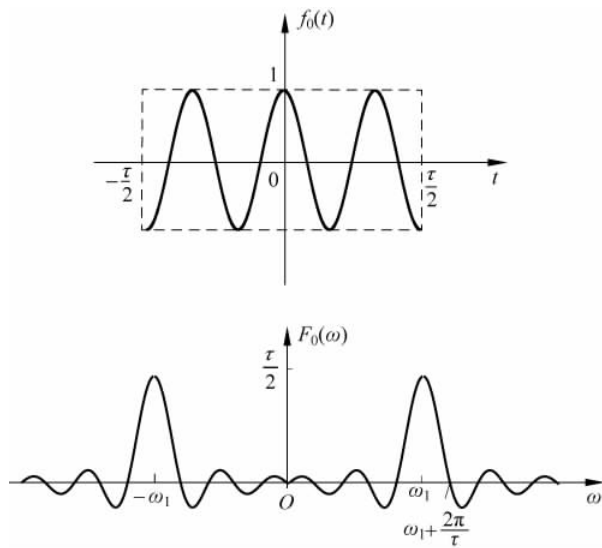


图 3-26 有限长余弦信号的频谱

3.6.2 一般周期信号的傅里叶变换

令周期信号 $f(t)$ 的周期 T_1 , 角频率为 ω_1 , 可以将 $f(t)$ 展开成傅里叶级数, 它是

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}$$

将上式两边取傅里叶变换得

$$\begin{aligned} F[f(t)] &= F \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_1 t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n F[e^{jn\omega_1 t}] \end{aligned} \quad (3-48)$$

由式(3-46)可知

$$F[e^{jn\omega_1 t}] = 2\pi\delta(\omega - n\omega_1)$$

代入到(3-48)中可得

$$F[f(t)] = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_1) \quad (3-49)$$

其中, F_n 是 $f(t)$ 的傅里叶级数的系数

$$F_n = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \quad (3-50)$$

式(3-50)表明: 周期信号的频谱由无限多个冲激函数组成, 各冲激函数位于周期信号 $f(t)$ 的各次谐波 $n\omega_0$ 处, 每个冲激的强度等于傅里叶级数相应系数 F_n 的 2π 倍。显然, 周期信号的频谱是离散的。然而, 由于傅里叶变换是反映频谱密度的概念, 因此周期信号的傅里叶变换不同于傅里叶级数, 这里不是有限值, 而是冲激函数, 它表明在无穷小的频带范围内取得了无限大的频谱值。

下面再来分析非周期信号的傅里叶变换与周期信号的傅里叶系数之间的关系。周期信

号 $f(t)$ 的傅里叶级数是

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}$$

其中,傅里叶级数为

$$F_n = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \quad (3-51)$$

从周期性脉冲序列 $f(t)$ 中截取一个周期,得到所谓单脉冲信号。它的傅里叶变换 $F_0(\omega)$ 等于

$$F_0(\omega) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \quad (3-52)$$

比较式(3-51)和式(3-52),显然可以得到

$$F_n = \frac{1}{T_1} F_0(\omega) \big|_{\omega=n\omega_1} \quad (3-53)$$

周期信号的傅里叶级数的系数 F_n 等于单脉冲信号的傅里叶变换 $F_0(\omega)$ 在 $n\omega_1$ 频率点的值乘以 $\frac{1}{T_1}$ 。所以利用单脉冲的傅里叶变换式可以很方便地求出周期性脉冲序列的傅里叶级数。

【例 3-17】 已知三角脉冲信号 $f_1(t)$ 如图 3-27(a) 所示。试利用有关性质求图 3-27(b) 的 $f_2(t) = f_1\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \cos(\omega_0 t)$ 的傅里叶变换 $F_2(\omega)$ 。

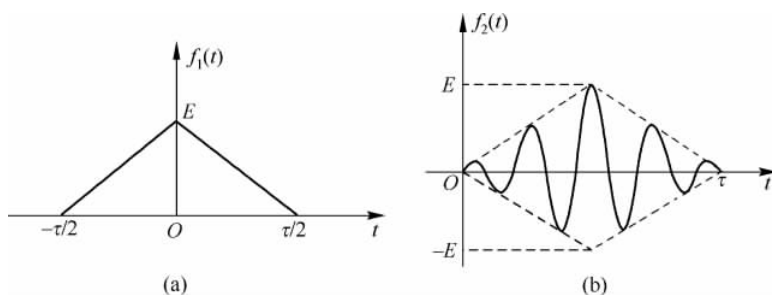


图 3-27 三角脉冲信号的波形

解: 由

$$F[f_1(t)] = F_1(\omega) = \frac{E\tau}{2} \text{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

得

$$F\left[f_1\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right] = F_1(\omega) e^{-j\frac{\omega\tau}{2}} = \frac{E\tau}{2} \text{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right) e^{-j\frac{\omega\tau}{2}}$$

由周期信号傅里叶变换可得:

$$F[\cos(\omega_0 t)] = \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$$

因此

$$F[f(t) \cos(\omega_0 t)] = \frac{1}{2} [F(\omega + \omega_0) + F(\omega - \omega_0)]$$

所以

$$\begin{aligned}
 F[f_2(t)] &= F\left[f_1\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\cos(\omega_0 t)\right] \\
 &= \frac{E\tau}{4}\left[\text{Sa}^2\left(\frac{\omega + \omega_0}{4}\tau\right)e^{-j\frac{\omega + \omega_0}{2}\tau} + \text{Sa}^2\left(\frac{\omega - \omega_0}{4}\tau\right)e^{-j\frac{\omega - \omega_0}{2}\tau}\right]
 \end{aligned}$$

3.7 抽样定理

抽样定理在数字式遥测系统、时分制遥测系统、信息处理、数字通信和采样控制理论等领域中得到了广泛的应用。所谓抽样,就是对时间连续的信号隔一定的时间间隔抽取一个瞬时幅度值,抽样是由抽样门完成的。抽样定理在通信、信息传输、数字信号处理等领域占有十分重要的地位,许多近代通信方式(如数字通信系统)都以此定理作为理论基础。该定理在连续信号与系统、离散信号与系统和数字信号与系统之间架起了一座桥梁,用理论回答了为什么可以用数字信号处理手段解决连续信号与系统在实际应用中遇到的难题。

3.7.1 时域抽样定理

若连续信号 $f(t)$ 的频谱为 $F(\omega) = F[f(t)]$, 抽样脉冲 $p(t)$ 的频谱为 $P(\omega) = F[p(t)]$, 抽样信号的频谱为 $F_s(\omega) = F[f_s(t)]$, 均匀抽样周期为 T_s , 抽样角频率为 ω_s , 则:

$$T_s = \frac{2\pi}{\omega_s} = \frac{1}{f_s}$$

时域抽样过程是通过抽样脉冲信号 $p(t)$ 与连续信号 $f(t)$ 相乘得到的, 即:

$$f_s(t) = f(t) \times p(t) \quad (3-54)$$

根据频域卷积定理, 可得

$$F_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * P(\omega) \quad (3-55)$$

由于抽样脉冲信号 $p(t)$ 为一周期信号, 其频谱 $P(\omega)$ 可写为

$$P(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n \delta(\omega - n\omega_s) \quad (3-56)$$

其中, P_n 为 $p(t)$ 的傅里叶级数的系数, 有:

$$P_n = \frac{1}{T_s} \int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} p(t) e^{-jn\omega_s t} dt$$

将式(3-56)代入式(3-55), 可得抽样信号 $f_s(t)$ 的频谱为

$$F_s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n F(\omega - n\omega_s) \quad (3-57)$$

上式表明, 抽样信号的频谱 $F_s(\omega)$ 是原始信号频谱 $F(\omega)$ 以抽样频率 ω_s 为间隔周期地重复而得到, 其幅度被 $p(t)$ 的傅里叶系数 P_n 所加权, 而 $F(\omega)$ 形状不变, 傅里叶系数 P_n 随抽样脉冲而变化。

连续信号被抽样后, 抽样信号是否保留了原信号 $f(t)$ 的全部信息, 在什么样的条件下才能保留了原信号的全部信息, 带限信号时域抽样定理给出了答案, 下面介绍该定理。

一个频谱受限的信号 $f(t)$, 如果频谱只占据 $-\omega_m \sim +\omega_m$ 的范围, 则信号 $f(t)$ 可以用等间隔的抽样值唯一地确定, 而抽样间隔必须不大于 $\frac{1}{2f_m}$ (其中 $\omega_m = 2\pi f_m$), 或者说, 最低抽样

频率为 $2f_m$ 。参看图 3-28 来证明此定理,若以间隔 T_s (或重复频率 $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$) 对 $f(t)$ 进行抽样,抽样后信号 $f_s(t)$ 的频谱 $F_s(\omega)$ 是 $F(\omega)$ 以 ω_s 为周期重复。若抽样过程满足时域抽样定理,则 $F(\omega)$ 频谱在重复过程中是不产生失真的。在此情况下,只有满足 $\omega_m \geq 2\omega_s$ 的条件, $F_s(\omega)$ 才不会产生频谱的混叠。这样,抽样信号 $f_s(t)$ 保留原连续信号 $f(t)$ 的全部信息,完全可以用 $f_s(t)$ 唯一表示 $f(t)$,或者说,完全可以用 $f_s(t)$ 恢复出 $f(t)$ 。图 3-28 画出了当抽样率不混叠时及混叠时两种情况下冲激抽样信号的频谱。

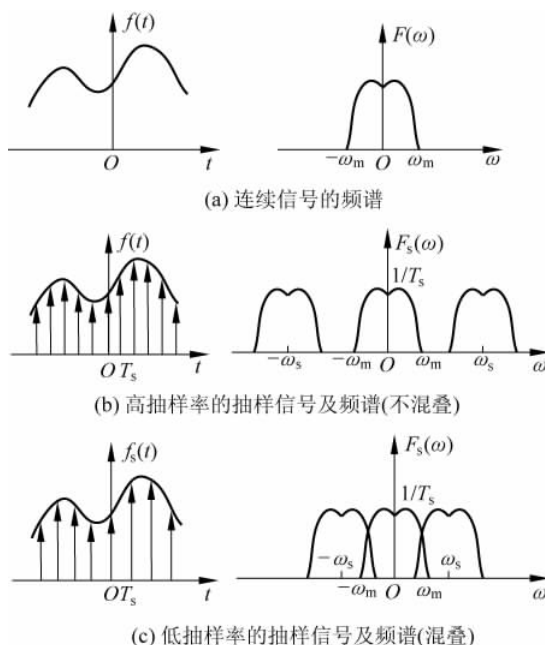


图 3-28 冲激抽样信号的频谱

用物理概念对带限信号时域抽样定理做如下解释: 由于一个频带受限的信号波形绝不可能在很短的时间内产生独立的、实质的变化,它的最高变化速度受最高频率分量 ω_m 的限制。因此为了保留这一频率分量的全部信息,一个周期的间隔内至少抽样两次,即必须满足 $f_s \geq 2f_m$ 。最大允许间隔 $T_s = \frac{\pi}{\omega_m} = \frac{1}{2f_m}$ 称为奈奎斯特间隔。或者说,抽样的最低允许频率 $f_s = 2f_m$ 称为奈奎斯特频率。如果抽样采用最小频率,那么为了恢复原信号 $f(t)$,所采用的低通滤波器在截止频率处必须具有很陡直的频率特性,这对于滤波器的设计要求太高,实际上是做不到的,所以抽样频率通常采取大于奈奎斯特抽样频率。从图 3-28 可以看出,在满足抽样定理的条件下,为了从频谱 $F_s(\omega)$ 中无失真地选出 $F(\omega)$,可以用如下的矩形函数 $H(\omega)$ 与 $F_s(\omega)$ 相乘,即

$$F(\omega) = F_s(\omega) H(\omega)$$

其中

$$H(\omega) = \begin{cases} T_s, & |\omega| < \omega_m \\ 0, & |\omega| > \omega_m \end{cases}$$

带限信号时域抽样定理也广泛应用于理想低通滤波器。设滤波器的传输函数为 $H(\omega)$, 抽样信号为 $f_s(t)$, 将 $F_s(\omega)$ 与 $H(\omega)$ 相乘, 等价于将抽样信号 $f_s(t)$ 施加于“理想低通滤波器”, 这样, 在滤波器的输出端就可以得到频谱为 $F(\omega)$ 的连续信号 $f(t)$ 。这相当于从图 3-28 无混叠情况下的 $F_s(\omega)$ 频谱中只取出 $|\omega| = \omega_m$ 的成分, 这就恢复了 $F(\omega)$, 也即恢复了 $f(t)$ 。以上从频域解释了由抽样信号的频谱恢复连续信号频谱的原理, 也可从时域直接说明由 $f_s(t)$ 经理想低通滤波器产生的 $f(t)$ 原理。

3.7.2 频域抽样定理

若原始信号 $f(t)$ 的频谱为 $F(\omega)$, $F(\omega)$ 在频域中被间隔为 ω_1 的周期冲激序列 $\delta_\omega(\omega)$ 进行抽样, 得到:

$$F_1(\omega) = F(\omega) \times \delta_\omega(\omega) \quad (3-58)$$

其中,

$$\delta_\omega(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_1)$$

按照时域卷积定理, 由式(3-30)可得:

$$F^{-1}[F_1(\omega)] = f_1(t) = F^{-1}[F(\omega)] * F^{-1}[\delta_\omega(\omega)] \quad (3-59)$$

而

$$F[\delta_T(t)] = \omega_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_1)$$

因此

$$F^{-1}[\delta_\omega(\omega)] = \frac{1}{\omega_1} \delta_T(t)$$

故可得:

$$f_1(t) = f(t) * \frac{1}{\omega_1} \delta_T(t) = f(t) * \frac{1}{\omega_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_1)$$

于是, 便得到频域抽样后 $F_1(\omega)$ 所对应的信号为:

$$f_1(t) = \frac{1}{\omega_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t - nT_1) \quad (3-60)$$

式(3-60)表明: 若 $f(t)$ 频谱 $F(\omega)$ 被间隔为 ω_1 的周期冲激序列 $\delta_\omega(\omega)$ 在频域中抽样, 得到抽样频谱 $F_1(\omega)$, 则在时域中等效于 $f(t)$ 以 T_1 为周期 $(T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1})$ 进行重复。

信号 $f(t)$ 是时间受限信号, 它集中在 $(-t_m, +t_m)$ 的时间范围内, 其频谱函数 $F(j\omega)$ 可以由其在均匀频率间隔 f_s 上的样点值 $F_s(jn\omega_s)$ 唯一确定, 只要它的频率间隔 f_s 小于或等于 $\frac{1}{2t_m}$ 。

此定理的证明类似于时域抽样定理, 这里不再推导。下面从物理概念上对此进行简单的说明。因为在频域中对 $F(\omega)$ 进行抽样, 等效于 $f(t)$ 在时域中重复形成周期信号 $f_1(t)$ 。只要抽样间隔不大于 $\frac{1}{2t_m}$, 则在时域中波形不会产生混叠, 利用矩形脉冲作为选通信号从周期信号 $f_1(t)$ 中选出单个脉冲就可以无失真地恢复出原信号 $f(t)$ 。值得指出的是, 实际工

程中要做到完全不失真地恢复原信号 $f(t)$ 是不可能的。原因一, 在有限时间内存在的实际信号, 其频谱是无限宽的, 故所谓的最高频率 f_m 近似满足抽样定理第一条件。原因二, 要完全恢复就要使用理想低通滤波器, 而理想低通滤波器在物理上是不可实现的, 工程上使用的实际低通滤波器只能做到大致接近理想的低通特性。

3.8 无失真传输

在设计一个系统时, 往往要求系统无失真地传输信号。因为在实际工程中常常需要实现信号的无失真传输。例如, 高保真系统要求喇叭高保真地重现磁带或光碟上录制的音乐; 示波器应尽可能无失真地显示信号波形等。下面将简单地讨论什么是无失真传输、无失真传输的条件以及无失真传输在理想低通滤波器中的应用。

3.8.1 什么是无失真传输

所谓无失真是指响应信号与激励信号相比, 只是大小与出现的时间不同, 而无波形上的变化。设激励信号为 $e(t)$, 响应信号为 $r(t)$, 则无失真传输的条件是

$$r(t) = Ke(t - t_0) \tag{3-61}$$

其中, K 是一常数, t_0 为滞后时间。满足此条件时, $r(t)$ 波形是 $e(t)$ 波形经 t_0 时间的滞后, 虽然幅度方面有系统 K 倍的变化, 但波形形状不变, 示意图如图 3-29 所示。

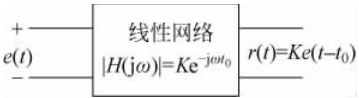


图 3-29 线性网络的无失真传输

通常把失真分为两大类: 一类为线性失真; 另一类为非线性失真。

信号通过线性系统所产生的失真称线性失真。其特点是在响应 $r(t)$ 中不会产生新频率。也就是说, 组成响应 $r(t)$ 的各频率分量在激励信号 $e(t)$ 中都含有, 只不过各频率分量的幅度、相位不同而已。反之, $e(t)$ 中的某些频率分量在 $r(t)$ 中可能不存在。如图 3-30 所示的失真就是线性失真。对 $r(t)$ 和 $e(t)$ 求傅里叶变换可知, $r(t)$ 中绝不会有 $e(t)$ 中不含有的频率分量。

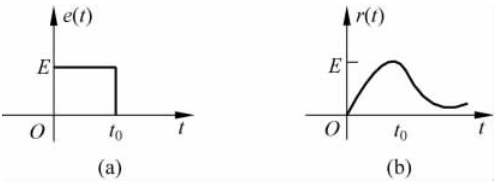


图 3-30 线性失真

信号通过非线性电路所产生的失真称非线性失真。其特点是在响应 $r(t)$ 中产生信号 $e(t)$ 中所没有的新的频率成分。如图 3-31 所示, 输入信号为单一正弦波, $e(t)$ 中只含有 $e_0(t)$ 的频率分量。而经过非线性元件二极管后得到的半波整流信号, 在波形上产生了失

真,而在频谱上产生了由无穷多个 $e_0(t)$ 的谐波分量构成的新频率,这就是非线性失真。

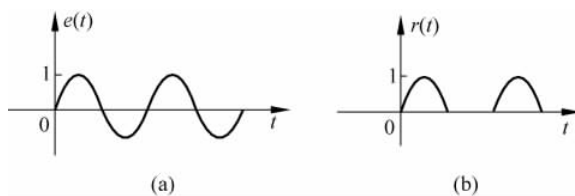


图 3-31 非线性失真

信号通过系统的冲激响应发生波形的改变和频谱的改变,直接取决于系统本身的传输特性,即取决于系统的冲激响应 $h(t)$ 或其系统函数 $H(j\omega)$ 。必须指出线性系统的幅度失真和相位失真都不产生新的频率分量,这与非线性系统有着本质的差别。

3.8.2 无失真传输系统的条件

为了实现无失真传输,就必须研究传输系统应具备的条件。

设

$$e(t) \leftrightarrow E(j\omega), \quad r(t) \leftrightarrow R(j\omega)$$

对式(3-61)两端同时取傅里叶变换,并利用傅里叶变换的时移性质,可得

$$R(j\omega) = KE(j\omega)e^{-j\omega t_0}$$

由于

$$R(j\omega) = E(j\omega) \cdot H(j\omega)$$

从而可得无失真传输系统的系统函数为

$$H(j\omega) = \frac{R(j\omega)}{E(j\omega)} = Ke^{-j\omega t_0} \quad (3-62)$$

式(3-62)即无失真传输系统的条件。由于 $H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$, 可得幅度无失真条件为

$$|H(j\omega)| = H(j\omega) = K$$

相位无失真条件为

$$\varphi(\omega) = -\omega t_0$$

说明:

- (1) 系统的幅频特性在整个频率范围内为一常数;
- (2) 系统的相频特性应是经过原点的直线。

无失真传输系统的频谱函数如图 3-32 所示。

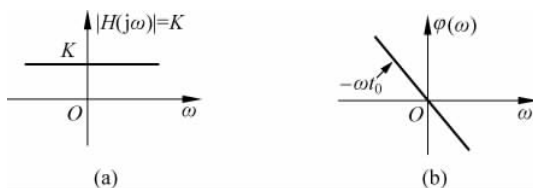


图 3-32 无失真传输系统的频谱函数

由图 3-32 可知,若使幅度无失真,要求系统函数的幅度对一切频率均为常数 K 。实际上这种条件就是要求传输系统的通频带无限宽。而若使相位无失真,必须使系统函数的相频特性是一条过原点的直线,使信号中一切频率分量的相移均与频率成正比。

而对于实际信号而言,其能量或功率主要集中在低频率分量上,所以实际系统中只要有足够的带宽,就可以认为是一个无失真系统。

【例 3-18】 电路如图 3-33 所示为示波器衰减器,其中 $R_1 C_1 = R_2 C_2$,试证明该系统为无失真传输系统。

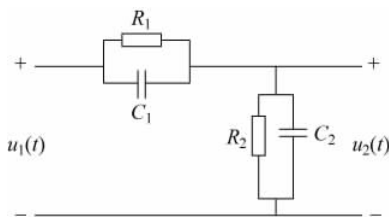


图 3-33 例 3-20 电路图

证明 示波器输入衰减器频率特性为

$$H(j\omega) = \frac{u_2(j\omega)}{u_1(j\omega)} = \frac{\frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C_2}}{\frac{R_1}{1 + j\omega R_1 C_1} + \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C_2}}$$

因

$$R_1 C_1 = R_2 C_2$$

所以

$$H(j\omega) = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

即 $H(j\omega) = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$ 是常数, $\varphi(\omega) = 0$, 满足无失真传输条件, 从而证明了该衰减器是无失真传输系统。

3.9 理想低通滤波器

3.9.1 理想低通滤波器的频率特性和冲激响应

理想低通滤波器就是具有如图 3-34 所示的幅频特性与相频特性的系统。这种低通滤波器对于低于某一角频率 ω_c 的频率成分不失真地全部通过, 而将频率高于 ω_c 的信号完全抑制, 其中 ω_c 称为截止频率。能使信号通过的频率范围称为通带, 抑制信号通过的频率范围称为阻带。则理想低通滤波器的通带为 $0 \sim \omega_c$ 。理想低通滤波器的相频特性是通过原点的一条直线, 同样满足无失真传输信号的特性。理想低通滤波器的这些特性说明理想低通滤波器具有频率截断的功能。

由图 3-34 可以得到理想低通滤波器的频响特性的表示式为

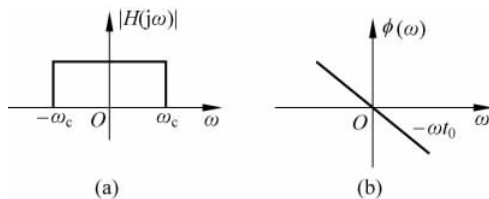


图 3-34 理想低通滤波器的特性

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\phi(\omega)} = \begin{cases} e^{-j\omega t_0}, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad (3-63)$$

其中

$$|H(j\omega)| = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

$$\phi(\omega) = -\omega t_0$$

将 $H(j\omega)$ 进行傅里叶逆变换, 就可以求得理想低通滤波器的冲激响应, 计算过程如下

$$\begin{aligned} h(t) &= F^{-1}[H(j\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{+\omega_c} e^{-j\omega t_0} e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \left. \frac{e^{j\omega(t-t_0)}}{j(t-t_0)} \right|_{-\omega_c}^{\omega_c} \\ &= \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin[\omega_c(t-t_0)]}{\omega_c(t-t_0)} \\ &= \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}[\omega_c(t-t_0)] \end{aligned} \quad (3-64)$$

这是一个峰值位于 t_0 时刻的 Sa 函数, 如图 3-35(b) 所示。为了与激励信号作比较画出了激励信号 $\delta(t)$ 的波形, 如图 3-35(a) 所示。

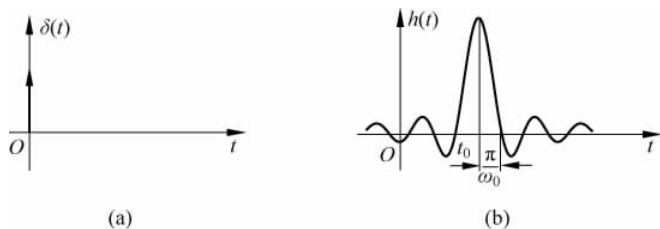


图 3-35 理想低通滤波器的冲激响应

由图 3-35 可见, 冲激响应的波形不同于冲激信号的波形, 产生了很大的失真。这是因为理想低通滤波器是一个带限系统, 而冲激信号的频带是无限宽的。此外, 按照冲激响应的定义, 激励信号在零时刻加入, 而响应在 t 为负值时就已经出现, 所以实际上构成具有这种理想特性的系统是不可能的, 只能做到相当接近于理想滤波的特性。但研究理想低通滤波

器不能因为无法实现就认为没有价值,恰恰需要这种理想滤波器的理论指导实际滤波器的分析与设计。

3.9.2 理想低通滤波器的阶跃响应

下面讨论理想低通滤波器的频率截断效应对信号波形的影响。先看理想低通滤波器的阶跃响应。

已知阶跃信号的频谱为

$$E(j\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

于是

$$R(j\omega) = H(j\omega)E(j\omega) = \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right]e^{-j\omega_c t} \quad (-\omega_c < \omega < \omega_c)$$

可以利用卷积定理或取傅里叶逆变换的方法求得阶跃响应,按逆变换定义可知

$$\begin{aligned} r(t) &= F^{-1}[R(j\omega)] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right] e^{-j\omega t_0} e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{e^{j\omega(t-t_0)}}{j\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{\cos[\omega(t-t_0)]}{j\omega} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{\sin[\omega(t-t_0)]}{j\omega} d\omega \end{aligned}$$

从式中可以看出前面一项积分的被积函数 $\frac{\cos[\omega(t-t_0)]}{\omega}$ 是 ω 的奇函数,所以它的积分为零,后面一项积分的被积函数是 ω 的偶函数,所以有

$$r(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_c} \frac{\sin[\omega(t-t_0)]}{\omega} d\omega = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_c(t-t_0)} \frac{\sin x}{x} dx \quad (3-65)$$

这里使用了积分变量代换 $x = \omega(t-t_0)$ 。而函数 $\frac{\sin x}{x}$ 的积分称为正弦积分。通常用符号 $Si(y)$ 表示

$$Si(y) = \int_0^y \frac{\sin x}{x} dx$$

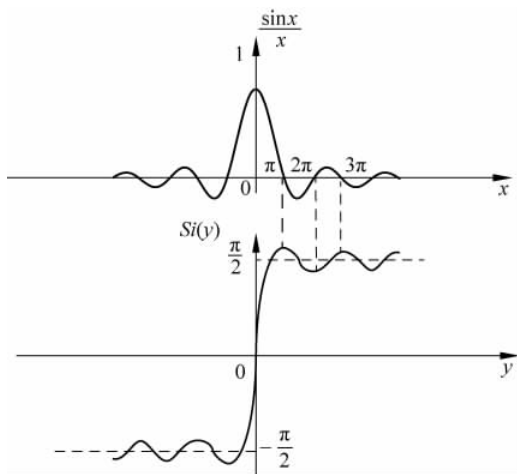
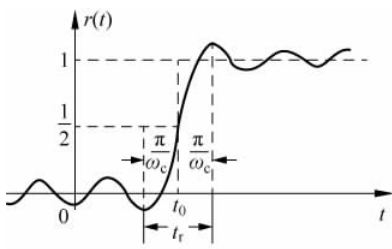
可在数学手册中查到它的积分值。函数 $\frac{\sin x}{x}$ 和 $Si(y)$ 曲线同时画于图 3-36 中。

从它们的曲线图中可以看出, $Si(y)$ 函数是 y 的奇函数,随着 y 的增加, $Si(y)$ 从 0 增长,以后围绕 $\frac{\pi}{2}$ 起伏,起伏逐渐衰减而趋于 $\frac{\pi}{2}$,各极值点与 $\frac{\sin x}{x}$ 函数的零点对应。引用以上有关的数学结论,响应 $r(t)$ 最终可以写作

$$r(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} Si[\omega_c(t-t_0)] \quad (3-66)$$

其波形图如图 3-37 所示。

由图 3-37 可见,理想低通滤波器的截止频率 ω_c 越低,输出 $r(t)$ 上升越慢。如果定义输出由最小值到最大值所需时间为上升时间 t_r ,则由图 3-37 可以得到

图 3-36 $\frac{\sin x}{x}$ 函数与 $Si(y)$ 函数图 3-37 $r(t)$ 的波形图

$$t_r = 2 \frac{\pi}{\omega_c} = \frac{1}{B}$$

这里, $B = \frac{\omega_c}{2\pi}$, 是将角频率折合为频率的滤波器带宽(截止频率)。于是得到重要的结论: 阶跃响应的上升时间与系统的截止频率(带宽)成反比。

总之, 低通滤波器对信号的作用是对信号的频谱进行频域加窗, 频窗有限将引起时域的吉布斯波纹。另外, 由于傅里叶变换的对称性, 当对信号的波形进行时域截断时, 其频谱也会相应地出现吉布斯波纹。

3.10 调制与解调

在通信系统中, 调制与解调的概念起着十分重要的作用, 并有着广泛的应用。当某一信号从发射端传输到接收端, 为实现信号的传输, 往往需要进行调制和解调。所谓调制就是指将各种基带信号转换成适合信道传输的数字调制信号(已调信号或频带信号), 而解调则是指在接收端将收到的频带信号还原成基带信号。在时域上, 调制就是用基带信号去控制载波信号的某个或几个参量的变化, 将信息荷载在其上形成已调信号传输, 而解调是调制的反

过程,通过具体的方法从已调信号的参量变化中将恢复原始的基带信号。在频域上,调制就是将基带信号的频谱搬移到信道通带中或者其中的某个频段上的过程,而解调是将信道中来的频带信号恢复为基带信号的反过程。

调制是一种非线性过程。载波被调制后产生新的频率分量,通常它们分布在载频的两边,占有一定的频带,分别叫作上边带和下边带。这些新频率分量与调制信号有关,是携带着消息的有用信号。调制的目的是实现频谱搬移,即把欲传送消息的频谱,变换到载波附近的频带,使消息更便于传输或处理。调制的主要性能指标是频谱宽度和抗干扰性。调制方式不同,这些指标也不一样。一般说,调制频谱越宽,抗干扰性能越好;反之,抗干扰性能较差。

本节将通过傅里叶变换的性质来说明搬移信号频谱的原理,用信号与系统的理论和方法来介绍幅度调制和解调的基本定理。

下面应用傅里叶变换的性质说明搬移信号频谱的原理。设载波信号为 $\cos(\omega_0 t)$ 它的傅里叶变换是 $F[\cos(\omega_0 t)] = \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$ 调制信号 $g(t)$ 也称为基带信号,若 $g(t)$ 的频谱为 $G(\omega)$, 占据 $-\omega_m$ 至 ω_m 的有限频带,将 $g(t)$ 与 $\cos(\omega_0 t)$ 进行时域相乘,即可得到已调信号 $f(t)$, 根据卷积定理,容易求得已调信号的频谱 $F(\omega)$, 如图 3-38 所示。

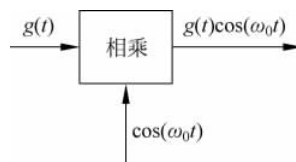


图 3-38 搬移信号频谱的原理图

因为

$$f(t) = g(t)\cos(\omega_0 t)$$

所以

$$\begin{aligned} F[f(t)] &= F(\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} G(\omega) * [\pi\delta(\omega + \omega_0) + \pi\delta(\omega - \omega_0)] \\ &= \frac{1}{2} [G(\omega + \omega_0) + G(\omega - \omega_0)] \end{aligned} \quad (3-67)$$

由此可见,信号的频谱被搬移到载频 ω_0 附近。

解调的过程即为由已调信号 $f(t)$ 恢复基带信号 $g(t)$ 。图 3-39(a)所示的是实现解调的一种原理方框图,这里, $\cos(\omega_0 t)$ 信号是接收端的本地载波信号,它与发送端的载波同频同相。 $f(t)$ 与 $\cos(\omega_0 t)$ 相乘的结果是频谱 $F(\omega)$ 向左、右分别移动 $\pm\omega_0$ (并乘以系数 $1/2$), 得到如图 3-39(b)所示的频谱 $G_0(\omega)$, 此图形也可从时域的相乘关系得到解释。

$$\begin{aligned} g_0(t) &= [g(t)\cos(\omega_0 t)]\cos(\omega_0 t) \\ &= \frac{1}{2} g(t) [1 + \cos(2\omega_0 t)] \\ &= \frac{1}{2} g(t) + \frac{1}{2} g(t)\cos(2\omega_0 t) \\ F[g_0(t)] &= G_0(\omega) = \frac{1}{2} G(\omega) + \frac{1}{4} [G(\omega + 2\omega_0) + G(\omega - 2\omega_0)] \end{aligned} \quad (3-68)$$

再利用一个带宽大于 ω_m , 小于 $2\omega_0 - \omega_m$ 的低通滤波器,滤除在频率为 $2\omega_0$ 附近的分量,即可取出 $g(t)$, 完成解调。

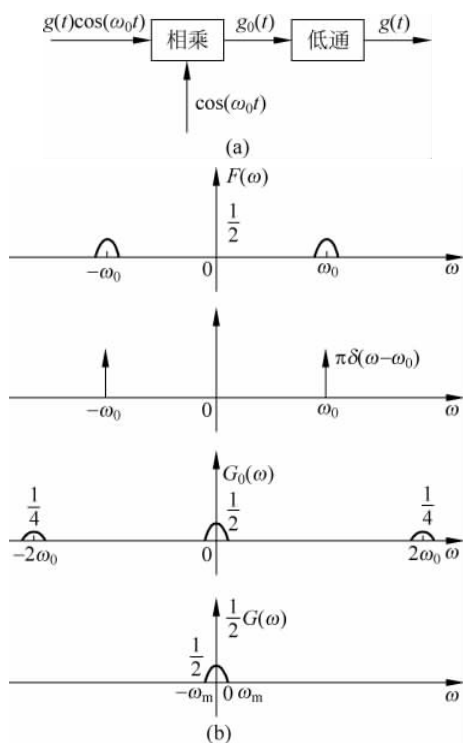


图 3-39 同步解调原理方框图及其频谱

这种解调器称为乘积解调(或同步解调),由于系统结构简单,可节省大功率的发射设备,适应于定点之间的通信。但需要在接收端产生与发送端频率相同的本地载波,这将使接收机复杂化。为了在接收端省去本地载波,可采用如下方法。在发射信号中加入一定强度的载波信号 $A\cos(\omega_0 t)$,这是发送端的合成信号为 $[A+g(t)]\cos(\omega_0 t)$,如果 A 足够大,对于全部 t ,有 $A+g(t)>0$,于是,已调信号的包络就是 $A+g(t)$ 。这时,利用简单的包络检波器(由二极管、电阻、电容组成)即可从图 3-39 相应的波形中提取包络,恢复 $g(t)$,不需要本地载波。此方法常用于民用通信设备(例如广播接收机),在那里需要降低接收机成本,但付出的代价是要用价格昂贵的发射机,因为需要提供足够强的信号 $A\cos(\omega_0 t)$ 附加功率。显然,这是合算的,对于大批接收机只有一个发射机。由于波形不难发现,在这种调制方法中,载波的振幅随信号 $g(t)$ 成比例地改变,因而称为振幅调制或调幅,前述不传送载波的方案则称为抑制载波振幅调制。此外,还有单边带调制、留边带调制等。通过控制载波的频率或相位,使它们随信号 $g(t)$ 成比例地变化,这两种调制方法分别称为调频或调相。它们的原理也使 $g(t)$ 的频谱 $G(\omega)$ 搬移,但搬移以后的频谱不再与原始频谱相似。

调制与解调技术在通信系统中不断地被广泛应用,对于一般的通信系统而言,它由以下几个环节组成,如图 3-40 所示。

- (1) 变换器: 转换消息为可处理的信号。
- (2) 发送系统: 调制信号至某频率段再发送。
- (3) 信道: 同时传送多路不同频率段的信号。
- (4) 接收系统: 解调传送的信号恢复出原频段的信号。

(5) 变换器：转换接收信号恢复出原信号。

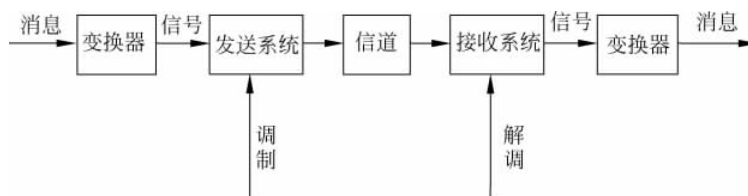


图 3-40 通信系统的组成框图

通常,按调制信号的形式可以分为模拟调制和数字调制两种方式。在模拟调制中,调制信号的取值是连续的。而在数字调制中,调制信号的取值是离散的。总的说来,数字调制比模拟调制具有较强的抗调制失真的能力。按被调信号的种类可分为脉冲调制、正弦波调制和强度调制(如对非相干光调制)等。调制的载波分别是脉冲、正弦波和光波等。正弦波调制有幅度调制、频率调制和相位调制三种基本方式,后两者合称为角度调制。此外还有一些变异的调制,如单边带调制、残留边带调制等。脉冲调制也可以按类似的方法分类。此外还有复合调制和多重调制等。不同的调制方式有不同的特点和性能。通过调制,不仅可以进行频谱搬移,把调制信号的频谱搬移到所希望的位置上,从而将调制信号转换成适合于信道传输或便于信道多路复用的已调信号,而且它对系统的传输有效性和传输可靠性有着很大的影响。在通信系统的发射端通常需要有调制过程,而在接收端则需要有反调制过程(解调),即从已调信号中恢复出原调制信号。调制方式不同,解调方法也不一样。与调制的分类相对应,解调可分为正弦波解调(有时也称为连续波解调)和脉冲波解调。正弦波解调还可再分为幅度解调、频率解调和相位解调,此外还有一些如单边带信号解调、残留边带信号解调等。同样,脉冲波解调也可分为脉冲幅度解调、脉冲相位解调、脉冲宽度解调和脉冲编码解调等。对于多重调制需要配以多重解调。

从另一方面讲,如果不进行调制而是把被传送的信号直接辐射出去,那么各电台所发出的信号频率就会相同,它们混在一起,收信者将无法选择所要接收的信号。调制作用的实质是把各种信号的频谱搬移,也即信号分别调制在不同的频率载波上,接收机可以分离出所需要的频率信号。此问题的解决为在一个信道中传输多对通话提供了依据,这就是利用调制原理实现多路复用。在简单的通信系统中,每个电台只允许有一对通话者使用,而多路复用技术可以用同一部电台将各路信号的频谱分别搬移到不同的频率区段,从而完成在一个信道内传送多路信号的“多路通信”。

调制解调技术的发展历史由来已久,从模拟调制到数字调制,从二进制调制发展到多进制调制。虽然调制形式多种多样,但都朝着一个方向发展,使通信更高速更可靠。未来十年将是电信史上技术发展最活跃的时期,技术的发展是如此之惊人以至于谁都无法准确描述未来通信技术发展,但有一点是肯定的,那就是信息化正以前所未有的速度渗透到人类社会的各个方面,深刻改变着人类的生存环境。

3.11 傅里叶变换的 MATLAB 实现

傅里叶变换是建立以时间为自变量的“信号”与以频率为自变量的“频谱函数”之间的某种变换关系,所以当自变量“时间”和“频率”取连续值或离散值时,就形成了几种不同形式的

傅里叶变换。MATLAB 实现信号傅里叶变换的常用方法有：① MATLAB 提供了符号函数 `fourier` 和 `ifourier` 实现傅里叶变换和逆变换；② 数值计算方法。工程应用中经常需要对抽样数据进行傅里叶分析，这种情况下往往无法得到信号的解析表达式，因而数值计算方法是应用傅里叶变换的主要途径。数值计算方法实现傅里叶变换的途径有：① 直接计算法（循环法）；② 矢量计算法；③ 矩阵计算法。由于 MATLAB 对矩阵运算作了很大优化，所以采用矩阵计算法可以优化程序，提高运行效率。

【例 3-19】 已知周期矩形脉冲 $f(t)$ 如图 3-40 所示，设脉冲幅度为 $A=2$ ，宽度为 τ ，重复周期为 T_1 （角频率 $\omega_1=2\pi/T_1$ ）。试将其展开为复指数形式傅里叶级数，并说明周期矩形脉冲的宽度 τ 和周期 T_1 变化时对其频谱的影响。

解：根据傅里叶级数理论知道，周期矩形脉冲信号的傅里叶级数为

$$f(t) = \frac{A\tau}{T_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n2\pi}{T_1} \cdot \frac{\tau}{2}\right) e^{jn\omega_1 t} = \frac{A\tau}{T_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\pi\tau}{T_1}\right) e^{jn\omega_1 t} = \frac{A\tau}{T_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{n\tau}{T_1}\right) e^{jn\omega_1 t}$$

该信号第 n 次谐波的振幅为

$$F_n = \frac{A\tau}{T_1} \text{Sa}\left(\frac{n\pi\tau}{T_1}\right) = \frac{A\tau}{T_1} \text{sinc}\left(\frac{n\tau}{T_1}\right)$$

各谱线之间间隔为 $2\pi/T_1$ 。下面的 MATLAB 程序给出了三种情况下的振幅频谱：

① $\tau=1, T_1=10$ ② $\tau=1, T_1=3$ ③ $\tau=2, T_1=10$ 。

[MATLAB 程序]

```
n = -50:50; A = 2;
tao = 1; T1 = 10; w1 = 2 * pi / T1;           % 定义 T1 = 10 时的基波频率
x = n * tao / T1; Fn = A * tao / T1 * sinc(x); % 定义第 n 次谐波的振幅 Fn
subplot(3,1,1), stem(n * w1, Fn)              % 画出 T1 = 10, tao = 1 时的振幅谱
title('tao = 1, T1 = 10')

n = -50:50;                                   % 定义 T1 = 3 时的基波频率
tao = 1; T1 = 3; w2 = 2 * pi / T1;           % 定义第 n 次谐波的振幅 Fn
x = n * tao / T1; Fn = A * tao / T1 * sinc(x);
n2 = round(50 * w1 / w2);
n = -n2:n2;
Fn = Fn(50 - n2 + 1:50 + n2 + 1);
subplot(3,1,2), stem(n * w2, Fn)             % 画出 T1 = 10, tao = 1 时的振幅谱
title('tao = 1, T1 = 3')

n = -50:50;
tao = 2; T1 = 10; w3 = 2 * pi / T1;          % 定义 T1 = 10 时的基波频率
x = n * tao / T1; Fn = 2 * A * tao / T1 * sinc(x); % 定义第 n 次谐波的振幅 Fn
subplot(3,1,3), stem(n * w3, Fn)            % 画出 T1 = 10, tao = 2 时的振幅谱
title('tao = 2, T1 = 10')
```

[程序运行结果]

运行得到的周期矩形脉冲信号的振幅谱线如图 3-41 所示。

【例 3-20】 设 $f(t) = \varepsilon(t+1) - \varepsilon(t-1)$ ，试用 MATLAB 编程画出 $f(t) = f(t)e^{-j20t}$ 的频谱 $F_1(j\omega)$ 及 $f_2(t) = f(t)e^{j20t}$ 的频谱 $F_2(j\omega)$ ，并将它们与 $f(t)$ 的频谱 $F(j\omega)$ 进行比较。

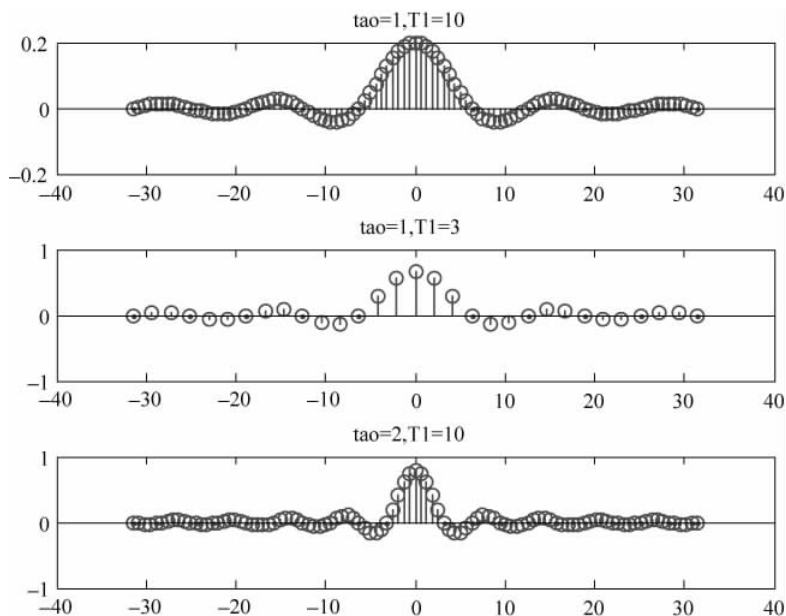


图 3-41 周期矩形脉冲信号的振幅谱线

解：

[MATLAB 程序]

```
R = 0.02; t = -2:R:2;
f = (t >= -1) - (t >= 1);
f1 = f. * exp(-j * 20 * t);
f2 = f. * exp(j * 20 * t);
W1 = 2 * pi * 5;
N = 500; k = -N:N; W = k * W1/N;
F1 = f1 * exp(-j * t' * W) * R;           % 求 f1(t) 的傅里叶变换 F1(jw)
F2 = f2 * exp(-j * t' * W) * R;           % 求 f2(t) 的傅里叶变换 F2(jw)
F1 = real(F1);
F2 = real(F2);
subplot(1,2,1)
plot(W,F1)
xlabel('w')
ylabel('F1(jw)')
title('F(jw)左移到 w = 20 处频谱 F1(jw)')
subplot(1,2,2)
plot(W,F2)
xlabel('w')
ylabel('F2(jw)')
title('F(jw)右移到 w = 20 处的频谱 F2(jw)')
```

[程序运行结果]

运行后得到的波形如图 3-42 所示。

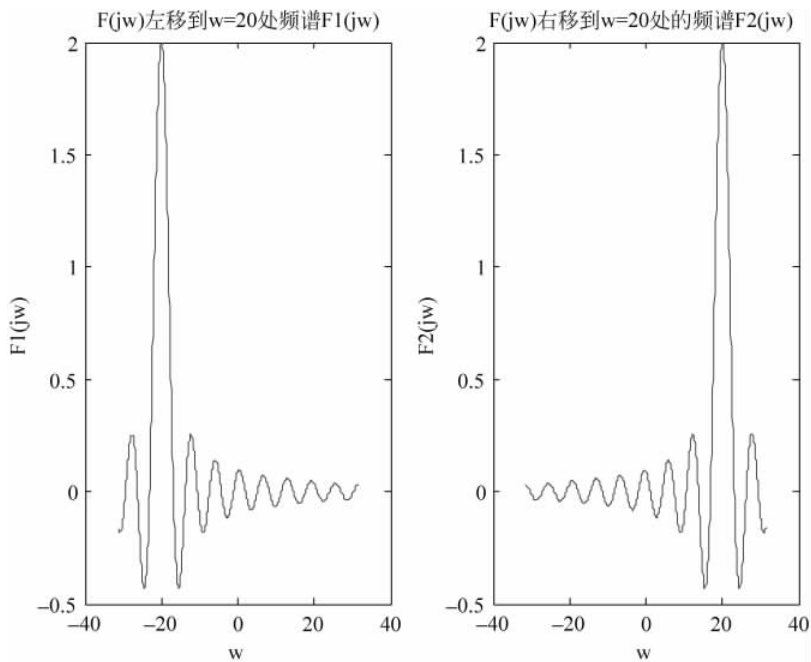


图 3-42 频谱波形

【例 3-21】 设时域信号 $f(t) = \text{Sa}(\pi t)$, 现用采样频率 $\Omega_1 = 1.5\pi \text{ rad/s}$ 和 $\Omega_2 = 2.5\pi \text{ rad/s}$ 对其进行采样, 用 MATLAB 绘制其时域采样信号及对应的频域信号的幅度谱。

解: 信号 $f(t) = \text{Sa}(\pi t)$ 的最高频率分量为 π , 根据采样定理可知, 其奈奎斯特采样频率为 2π , 故采样频率 Ω_1 小于 2π , $T_1 = 2\pi/\Omega_1 = (4/3)\text{s}$, 会发生频谱混叠; 采样频率 Ω_2 大于 2π , $T_2 = 2\pi/\Omega_2 = (4/5)\text{s}$, 不会发生混叠。用 MATLAB 绘制的信号序列和信号幅度谱的程序如下, 波形和频谱如图 3-43 所示。

[MATLAB 程序]

```
n1 = -8:4/3:8;
f1 = sinc(n1);
subplot(2,2,1);
stem(n1,f1);hold on;
t1 = -8:0.1:8;
f2 = sinc(t1);
plot(t1,f2,':'); % 绘制 Sa 函数包络
title('采样频率小于奈奎斯特频率');
axis([-8 8 -0.25 1]);

n2 = -8:4/5:8;
f3 = sinc(n2);
subplot(2,2,2);
stem(n2,f3);hold on;
t2 = -8:0.1:8;
f4 = sinc(t2);
plot(t2,f4,':');
```

```

title('采样频率大于奈奎斯特频率');
axis([-8 8 -0.25 1]);

x1 = [-4.5 * pi:0.001:4.5 * pi];
d1 = [-4.5 * pi:1.5 * pi:4.5 * pi];
subplot(2,2,3);
y1 = pulstran(x1 + 0.75 * pi, d1, 'rectpuls', 0.5 * pi); % 产生脉冲串
plot(x1/pi, y1 + 1);
axis([-4.5 4.5 0 2.1]);
title('频谱产生混淆');
xlabel('\Omega/\pi');

x2 = [-5 * pi:0.001:5 * pi];
d2 = [-5 * pi:2.5 * pi:5 * pi];
subplot(2,2,4);
y2 = pulstran(x2, d2, 'rectpuls', 2 * pi); % 产生脉冲串
plot(x2/pi, y2);
axis([-5 5 0 1.1]);
title('频谱没有混淆');
xlabel('\Omega/\pi');

```

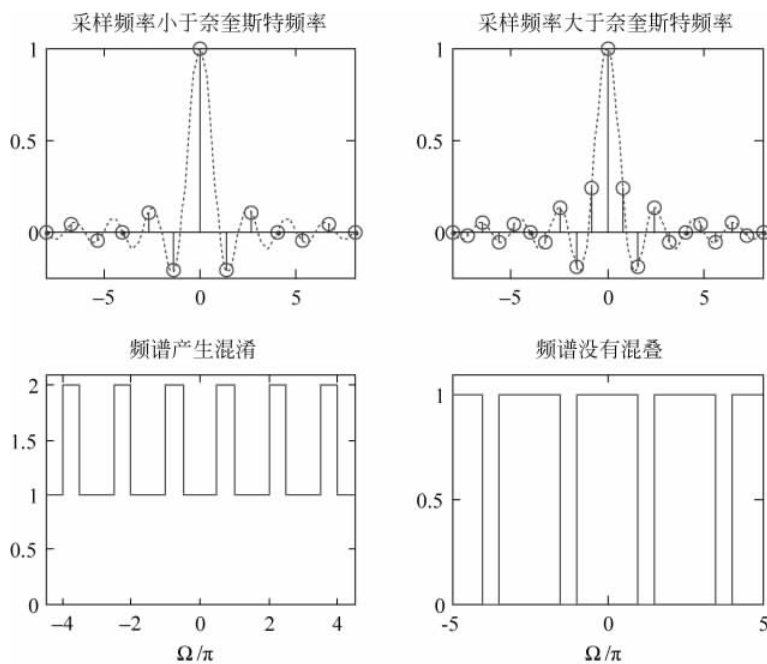


图 3-43 不同采样频率下的采样信号波形及频谱

【本章小结】 本章首先从傅里叶级数的正交函数展开问题并进行讨论,接着对周期信号的傅里叶级数进行分析并得到它们的离散频谱,最后将此傅里叶分析方法推广到非周期信号中去,导出傅里叶变换。通过对典型信号频谱以及傅里叶变换性质的分析与研究,初步掌握傅里叶分析方法的应用。对于周期信号来说,在进行频谱分析的时候可以利用傅里叶级数,也可以利用傅里叶变换的方法,傅里叶级数相当于傅里叶变换的一种特殊的表达方

法。在 3.6 节中专门研究周期信号的傅里叶变换。3.6 节与 3.7 节对比研究周期信号与抽样信号的傅里叶变换,这将有助于读者从连续时间信号分析逐步过渡到离散时间信号的分析。利用 MATLAB 软件实现了傅里叶变换,对课程理论知识点及应用实例进行仿真。今后还将看到,作为信息科学研究领域中广泛应用的有力工具,傅里叶变换在很多后续课程以及研究工作中将不断地发挥着至关重要的作用。

习 题

3-1 将图 3-44 中所示的方波信号展开成三角级数。

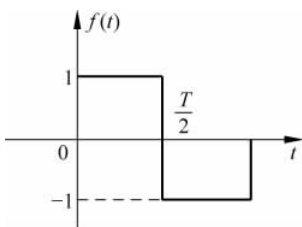


图 3-44 题 3-1 图

3-2 求如图 3-45 所示的周期锯齿波函数的三角函数形式的傅里叶级数展开式。

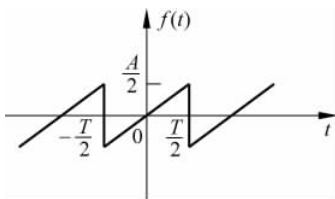


图 3-45 题 3-2 图

3-3 已知 $f(t) = 1 + \sin(\omega_1 t) + 2\cos(\omega_1 t) = \cos\left(2\omega_1 t + \frac{\pi}{4}\right)$, 画出幅度谱和相位谱。

3-4 如图 3-46, 已知 $f(t) = f_1(t) - g_2(t)$, 求 $f(t)$ 的傅里叶变换 $F(\omega)$ 。

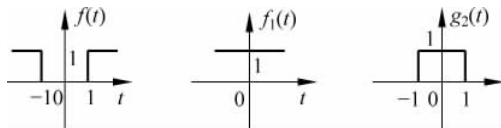


图 3-46 题 3-4 图

3-5 求移位冲激函数 $\delta(t - t_0)$ 的频谱函数。

3-6 求正弦信号 $\sin(\omega_0 t)$ 和余弦信号 $\cos(\omega_0 t)$ 的频谱。

3-7 求高频矩形调幅信号 $f(t) = E g_\tau(t) \cos(\omega_0 t)$ 的频谱函数 $F(\omega)$ 。

3-8 已知 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, 求 $f(at - b)$ 对应的傅里叶变换。

3-9 求 $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ 的频谱函数 $F(\omega)$ 。

3-10 求如图 3-47 所示的三角脉冲 $f(t)$ 的傅里叶变换级数 $F(\omega)$ 。

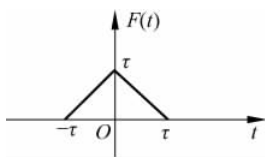


图 3-47 题 3-10 图

3-11 已知 $f(t)$ 如图 3-48 所示, 求 $f(t)$ 的频谱函数 $F(\omega)$ 。

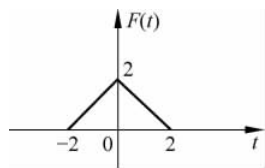


图 3-48 题 3-11 图

3-12 已知 $f(t) = t\varepsilon(t)$, 求 $f(t)$ 的频谱函数 $F(\omega)$ 。

3-13 试求 $f(t) = \cos 4t + \sin 8t$ 的傅里叶级数表达式。

3-14 已知 $f_1(t) \leftrightarrow E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$, 求 $f(t) = f_1(t) * f_1(t)$ 的频谱密度函数 $F(\omega)$ 。

3-15 已知 $f(t)$ 的傅里叶变换 $F(\omega)$, 求下列信号 $f(t) = tf(-3t)$ 的傅里叶变换。

3-16 求如图 3-49 所示的信号的傅里叶变换。

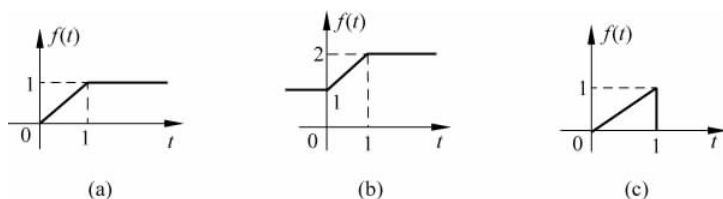


图 3-49 题 3-16 图

3-17 图 3-50(a) 所示的系统由三个子系统构成, 已知各子系统的冲激响应 $h_1(t)$, $h_2(t)$ 如图 3-50(b) 所示。求复合系统的冲激响应 $h(t)$, 并画出它的波形。

3-18 若已知 $F[f(t)] = F(\omega)$, 利用傅里叶变换的性质确定下列信号的傅里叶变换。

- | | |
|---------------------|----------------------------|
| (1) $tf(2t)$; | (2) $(t-2)f(t)$; |
| (3) $(t-2)f(-2t)$; | (4) $t \frac{df(t)}{dt}$; |
| (5) $f(1-t)$; | (6) $(1-t)f(1-t)$ |

3-19 一频谱包含有直流至 100Hz 分量的连续时间信号持续 2min, 为便于计算机处理, 对其抽样以构成离散信号, 求最小的理想抽样点数。

3-20 已知单个梯形脉冲和单个余弦脉冲的傅里叶变换, 如图 3-51 所示周期梯形信号和周期全波余弦信号的傅里叶变换和傅里叶级数。

3-21 确定下列信号的最低抽样率与奈奎斯特间隔。

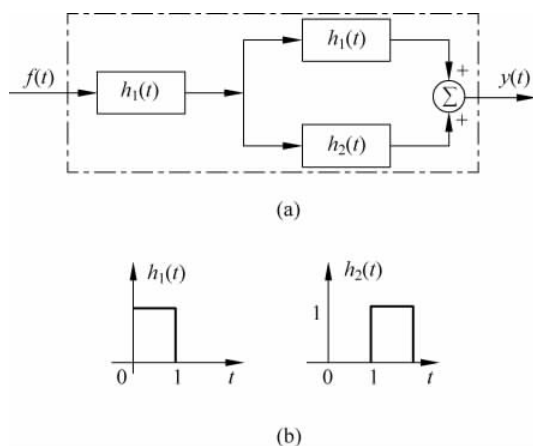


图 3-50 题 3-17 图

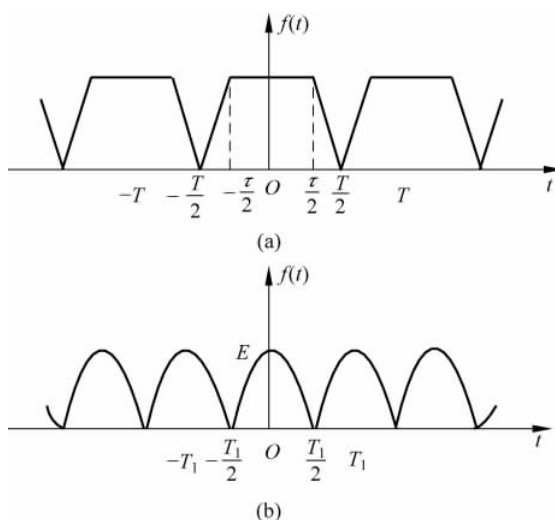


图 3-51 题 3-20 图

(1) $\text{Sa}(100t)$; (2) $\text{Sa}^2(100t)$; (3) $\text{Sa}(100t) + \text{Sa}(50t)$; (4) $\text{Sa}(100t) + \text{Sa}^2(60t)$

3-22 已知 $f(t)$ 的频谱函数 $F(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < 2 \text{ rad/s} \\ 0, & |\omega| > 2 \text{ rad/s} \end{cases}$, 求 $f^2(t)$ 理想抽样的奈奎斯特

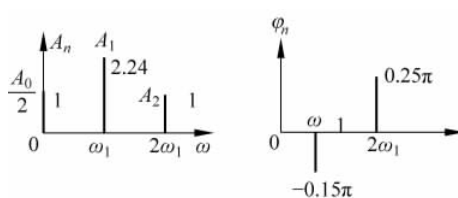
抽样间隔。

习题答案

3-1 $f(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin \Omega t + \frac{1}{3} \sin 3\Omega t + \frac{1}{5} \sin 5\Omega t + \dots \right)$

3-2 $f(t) = 0 + \frac{A}{\pi} \sin \Omega t - \frac{A}{2\pi} \sin 2\Omega t - \dots$

3-3



3-4 $F(\omega) = 2\pi\delta(\omega) - 2\text{Sa}(\omega)$

3-5 $\delta(t-t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0} \times 1 = e^{-j\omega t_0}$

3-6 $\cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2} [2\pi\delta(\omega - \omega_0) + 2\pi\delta(\omega + \omega_0)]$
 $\sin(\omega_0 t) \leftrightarrow j\pi\delta(\omega - \omega_0) - j\pi\delta(\omega + \omega_0)$

3-7 $\frac{E\tau}{2} \text{Sa}\left[\frac{(\omega - \omega_0)\tau}{2}\right] + \frac{E\tau}{2} \text{Sa}\left[\frac{(\omega + \omega_0)\tau}{2}\right]$

3-8 $\frac{1}{|a|} e^{-j\frac{b}{a}\omega} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$

3-9 $\pi e^{-|\omega|}$

3-10 $\tau^2 \left[\text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \right]^2$

3-11 $4\text{Sa}^2(\omega)$

3-12 $j\pi\delta'(\omega) - \frac{1}{\omega^2}$

3-13 $f(t) = \frac{1}{2} e^{j4t} + \frac{1}{2} e^{-j4t} + \frac{1}{2j} e^{j8t} - \frac{1}{2j} e^{-j8t}$

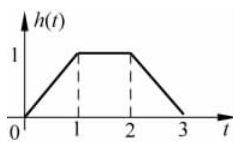
3-14 $E^2 \tau^2 \text{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$

3-15 $j \frac{1}{3} \frac{d}{d\omega} F\left(-j \frac{\omega}{3}\right)$

3-16 (a) $\frac{1}{j\omega} \text{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right) e^{-j\frac{\omega}{2}} + \pi\delta(\omega)$ (b) $\frac{1}{j\omega} \text{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right) e^{-j\frac{\omega}{2}} + 3\pi\delta(\omega)$

(c) $\frac{1}{j\omega} \left[\text{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right) e^{-j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\omega} \right]$

3-17 $h(t) = h_1(t) * [h_1(t) + h_2(t)]$



3-18 (1) $\frac{1}{2} j \frac{dF\left(\frac{\omega}{2}\right)}{d\omega}$

(2) $j \frac{dF(\omega)}{d\omega} - 2F(\omega)$

$$(3) -F\left(-\frac{\omega}{2}\right) + \frac{j}{2}g \frac{dF\left(-\frac{\omega}{2}\right)}{d\omega}$$

$$(4) -F(\omega) - \omega \frac{dF(\omega)}{d\omega}$$

$$(5) F(-\omega)e^{-j\omega}$$

$$(6) -j \frac{dF(-\omega)}{d\omega} e^{-j\omega}$$

$$\mathbf{3-19} \quad 24000$$

$$\mathbf{3-20} \quad (a) F(\omega) = 2\pi \sum_{-\infty}^{+\infty} F_m \sigma\left(\omega - \frac{2n\pi}{T}\right)$$

$$(b) F_m = \frac{1}{T} F_b(\omega) \Big|_{\omega=n\omega_1} = \frac{2E}{\pi} \cdot \frac{\cos(n\pi)}{1-4n^2} = (-1)^2 \frac{2E}{\pi(1-4n^2)}$$

$$\mathbf{3-21} \quad (1) f_s = 2 \times \frac{\omega_c}{4\pi} = \frac{100}{\pi} \text{Hz}, T_s = \frac{\pi}{100} \text{s}$$

$$(2) f_s = \frac{200}{\pi} \text{Hz}, T_s = \frac{\pi}{200} \text{s}$$

$$(3) f_s = \frac{100}{\pi} \text{Hz}, T_s = \frac{\pi}{100} \text{s}$$

$$(4) f_s = \frac{120}{\pi} \text{Hz}, T_s = \frac{\pi}{120} \text{s}$$

$$\mathbf{3-22} \quad T_s = \frac{\pi}{4} \text{s}$$