第3章

马尔可夫链

3.1 基本概念

本章首先考察取有限个值或者可数个可能值的随机过程$\{X_n, n=0,1,2,\cdots\}$($n\in T$)。一般将这种随机过程的可能值的集合也记为$\{0,1,2,\cdots\}$(即状态空间也是非负整数集)。如果$X_n=i$,那么称随机过程在时刻n处在状态i。只要过程处在状态i,就有一个固定的概率p_{ij},使它在下一时刻处在状态j。由此有如下定义:若对于一切状态$\{i_0,i_1,\cdots,i_{n-1}\}$、$i$、$j$与一切$n\geqslant 0$均有

$$\begin{aligned}&P\{X_{n+1}=j \mid X_n=i,X_{n-1}=i_{n-1},\cdots,X_1=i_1,X_0=i_0\}\\&=P\{X_{n+1}=j \mid X_n=i\}=p_{ij}\end{aligned}\tag{3-1}$$

则称这样的随机过程为马尔可夫链。并称由此式刻画的马尔可夫链的特性为马尔可夫性,也称无后效性。

上面的定义说明:要确定过程将来的状态,知道它此刻的状态就足够了,并不需要对它以往状况的认识。也就是说对于一个马尔可夫链,在给定过去的状态$X_0,X_1,\cdots X_{n-1}$和现在的状态X_n时,将来的状态X_{n+1}的条件分布独立于过去的状态,而只依赖于现在的状态。p_{ij}表示过程处在状态i时下一次转移到状态j的概率。由于概率值非负且过程必须转移到某个状态,所以有如下性质(状态空间$I=\{1,2,\cdots\}$):

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_{ij}\geqslant 0, i.j>0(\text{即 } i,j\in I)$$

$$\sum_{j\in T} p_{ij}=1, i=0,1,2,\cdots(\text{即 } i\in I)$$

称$P\{X_{n+1}=j\mid X_n=i\}=p_{ij}$为马尔可夫链$\{X_n,n=0,1,2,\cdots\}$的一步转移概率,简称转移概率。

由马尔可夫链定义知

$$\begin{aligned}&P\{X_0=i_0,X_1=i_1,\cdots,X_n=i_n\}\\&=P\{X_n=i_n \mid X_0=i_0,X_1=i_1,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1}\}P\{X_0=i_0,X_1=i_1,\cdots,X_n=i_n\}\\&=P\{X_n=i_n \mid X_{n-1}=i_{n-1}\}P\{X_0=i_0,X_1=i_1,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1}\}\\&\cdots\\&=P\{X_n=i_n \mid X_{n-1}=i_{n-1}\}P\{X_{n-1}=i_{n-1} \mid X_{n-2}=i_{n-2}\}\\&\cdots\\&=P\{X_1=i_1 \mid X_0=i_0\}P\{X_0=i_0\}\end{aligned}$$

可见，一旦马尔可夫链的初始分布 $P\{X_0=i_0\}$ 给定，其统计特性就完全由条件概率所决定：

$$P\{X_n=i_n \mid X_{n-1}=i_{n-1}\}$$

如何确定这个条件概率是马尔可夫链理论和应用中的重要问题之一。一般情况下，转移概率 p_{ij} 与状态 i、j 和时间 n 有关。当马尔可夫链的转移概率 $P\{X_{n+1}=j \mid X_n=j\}$ 只与状态 i、j 有关而与 n 无关时，称马尔可夫链为齐次的；否则，称其为非齐次的。本章只讨论齐次马尔可夫链，并将其简称为马尔可夫链。

当马尔可夫链的状态为有限个时，称为有限链；否则称为无限链。但无论状态是有限的还是无限的，都可以将 $p_{ij}(i,j\in\{0,1,2,\cdots\})$ 排成一个矩阵的形式。记为 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})$，它等于

马尔可夫链基本概念

$$\begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots & p_{0j} \\ p_{10} & p_{11} & \cdots & p_{1j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{i0} & p_{i1} & \cdots & p_{ij} \end{bmatrix}$$

称 $\boldsymbol{P}$ 为转移概率矩阵，一般简称为转移矩阵。转移概率矩阵具有前述性质。称具有此性质的矩阵为随机矩阵(随机矩阵是非负实数矩阵且每一行元素的和为 1)。

例 3-1　将一个过程转变为马尔可夫链。假设今天是否下雨依赖于前两天的天气条件。如果前两天都下雨，那么明天下雨的概率为 0.7；如果今天下雨但昨天没下雨，那么明天下雨的概率为 0.5；如果昨天下雨但今天没下雨，那么明天下雨的概率为 0.4；如果昨天、今天都没下雨，那么明天下雨的概率为 0.2。假设在时间 n 的状态只依赖于在时间 $n-1$ 的状态，那么上面的模型就不是一个马尔可夫链。但是，当假定在任意时间的状态仅由今天与昨天两者的天气条件决定时，上面的模型就可以转变为一个马尔可夫链。换言之，可以假定过程处在以下 4 种状态：

- 状态 0，如果昨天和今天都下雨。
- 状态 1，如果昨天没下雨但今天下雨。
- 状态 2，如果昨天下雨但今天没下雨。
- 状态 3，如果昨天和今天都没下雨。

这就将本例所给的过程转变成一个具有 4 个状态的马尔可夫链，其转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} 0.7 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.8 \end{bmatrix}$$

3.2　C-K 方程

3.2.1　n 步转移概率

下面给出 n 步转移概率的概念。

$$p_{ij}^{(n)}=P\{X_{m+n}=j \mid X_m=i\}, i,j\in I, m\geqslant 0, n\geqslant 1 \tag{3-2}$$

为马尔可夫链的 n 步转移概率，并称 $\boldsymbol{P}^{(n)}=(p_{ij}^{(n)})$ 为马尔可夫链的 n 步转移概率矩阵。其中 $p_{ij}^{(n)}\geqslant 0,\sum\limits_{j\in T}p_{ij}^{(n)}=1$。

当 $n=1$ 时，$P_{ij}^{(1)}=P_{ij}$。

当 $n=0$ 时，$p_{ij}^{(0)}=\begin{cases}0, & i\neq j\\ 1, & i=j\end{cases}$，即 $\boldsymbol{P}^{(0)}$ 为单位矩阵。

3.2.2 矩阵的四则运算

定理 3-1 设 $\{X_n,n\geqslant 0\}$ 为马尔可夫链，则对任意正整数 $n,0\leqslant 1\leqslant n$，和状态 $i,j\in T$，n 步转移概率具有下列性质：

(1) C-K 方程。$p_{ij}^{(n)}=\sum\limits_{k\in I}p_{ik}^{(l)}p_{kj}^{(n-l)}$。

(2) $p_{ij}^{(n)}=\sum\limits_{k_1\in I}\cdots\sum\limits_{k_{n-1}\in I}p_{ik_1}p_{k_1k_2}\cdots p_{k_{n-1}j}$。

(3) $\boldsymbol{P}^{(n)}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{(n-1)}$。

(4) $\boldsymbol{P}^{(n)}=\boldsymbol{P}^{n}$。

C-K 方程的全称是 Chapman-Kolmogorov 方程(切普曼-柯尔莫哥洛夫方程)

证：利用全概率公式和马尔可夫性，有

$$
\begin{aligned}
p_{ij}^{(n)}&=P\{X_{m+n}=j\mid X_m=i\}=P\{Y_{k\in I}(X_{m+l}=k),X_{m+n}=j\mid X_m=i\}\\
&=\sum_{k\in I}P\{X_{m+l}=k,X_{m+n}=j\mid X_m=i\}\\
&=\sum_{k\in I}\frac{P\{X_m=i,X_{m+l}=k,X_{m+n}=j\}}{P\{X_m=i\}}\\
&=\sum_{k\in I}\frac{P\{X_m=i\}P\{X_{m+l}=k\mid X_m=i\}P\{X_{m+n}=j\mid X_m=i,X_{m+l}=k\}}{P\{X_m=i\}}\\
&=\sum_{k\in I}P\{X_{m+l}=k\mid X_m=i\}P\{X_{m+n}=j\mid X_{m+l}=k\}\\
&=\sum_{k\in I}P_{ik}^{(l)}(m)P_{kj}^{(n-l)}(m+l)=\sum_{k\in I}P_{ik}^{(l)}P_{kj}^{(n-l)}
\end{aligned}
$$

(1) 式得证。这是关于转移概率的一个重要结果。C-K 方程直观上可以作如下解释：马尔可夫链 $\{X_n,n\geqslant 0\}$ 在时刻 m 处于状态 i，经过 n 步，即在时刻 $n+m$ 转移到状态 j 的过程可以视为它在时刻 m 处于状态 i，先经过 l 步，即在时刻 $m+l$ 遍历所有状态 $k(k=1,2,3,\cdots)$，然后再经过 $n-l$ 步，即在时刻 $n+m$ 转移到状态 j 的过程，如图 3-1 所示。

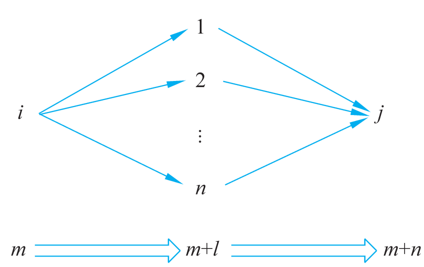

图 3-1

C-K 方程的矩阵形式为 $\boldsymbol{P}^{(n)}=\boldsymbol{P}^{(l)}\boldsymbol{P}^{(n-l)}$，当 $l=1$ 时，即为 $\boldsymbol{P}^{(n)}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{(n-l)}$，(3) 式得证。再利用归纳法可证(4)。

在(1)式中令 $l=1,k=k_1$，得 $p_{ij}^{(n)}=\sum\limits_{k\in I}p_{ik_1}p_{k_1j}^{(n-1)}$，这是一个递推公式，逐步递推可得(2)式。

例 3-2 随机游动。设质点在线段上做随机游动，如图 3-2 所示。每隔 1s 移动一步。当质点处于“0”点时，必然以概率 1 向右移动一步至“1”点；当质点处于“4”点时，下一步必然以概率 1 向左移动一步至“3”点；当质点处于其他点时，下一步便均分别以概率 1/3 向左、向右移动一步或停留在原地不动。

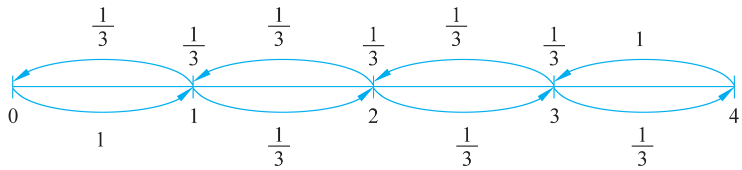

图 3-2

令 X_n 表示 n 次移动后质点所处的位置。显然，$\{X_n, n\geqslant 0\}$ 为一个齐次马尔可夫链，其状态空间为 $I=\{0,1,2,3,4\}$。试求 $\{X_n, n\geqslant 0\}$ 的一步和二步转移概率矩阵。

解：按题意可知

$$p_{00}=P(X_{m+1}=0 \mid X_m=0)=0$$
$$p_{01}=P(X_{m+1}=1 \mid X_m=0)=1$$
$$p_{02}=P(X_{m+1}=2 \mid X_m=0)=0$$

同样可求得其他转移概率：

$$p_{03}=0, p_{04}=0, p_{11}=\frac{1}{3}, p_{12}=\frac{1}{3}, p_{13}=\frac{1}{3}, p_{14}=0, \cdots。$$

于是便得到一步转移概率矩阵：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

二步转移概率矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{5}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{3}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{5}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

3.3 马尔可夫链的状态分类

3.3.1 互达性和周期性

定义 3-1 设 i 和 j 是齐次马尔可夫链的两个状态。如果存在 $n \geqslant 0$，使得 $P_{ij}^{(n)} > 0$，则称从状态 i **可达**状态 j，记作 $i \to j$；而如果对一切 $n \geqslant 0$，有 $P_{ij}^{(n)} = 0$，则称从状态 i **不可达**状态 j。若 $i \to j$ 且 $j \to i$，则称状态 i 和 j 互达(相通)，记作 $i \leftrightarrow j$。引入互达性概念是为了对状态进行分类。

命题 3-1 互达性是等价关系，即它满足以下性质：

(1) 自反性：$i \leftrightarrow j$。

(2) 对称性：若 $i \leftrightarrow j$，则 $j \leftrightarrow i$。

(3) 传递性：若 $i \leftrightarrow k$ 且 $k \leftrightarrow j$，则 $i \leftrightarrow j$。

证：只证明(3)。若 $i \leftrightarrow k$ 且 $k \leftrightarrow j$，则存在整数 n 和 m 使得

$$P_{ik}^{(n)} > 0, P_{kj}^{(m)} > 0$$

由 C-K 方程得

$$P_{ij}^{(n+m)} = \sum_r P_{ir}^{(n)} P_{rj}^{(m)} \geqslant P_{ik}^{(n)} P_{kj}^{(m)} > 0$$

即 $i \to j$。类似可证 $j \to i$。

在数学上，等价关系可以用于对集合进行分割。因此，也可以利用互达性对状态空间进行分类，并且这些类在互达关系下是等价类。

定义 3-2 一个马尔可夫链的状态空间，如果在互达性这一等价关系下都居于同一类，那么就称这个马尔可夫链是不可约的；否则，这个马尔可夫链就被称为是可约的。引入可约和不可约概念是为了以后研究状态的周期，进一步是为了研究转移概率的极限性质。

例 3-3 若马尔可夫链有转移概率矩阵

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 1 & 0.4 \end{bmatrix}$$

给出这个马尔可夫链状态的等价类，并且试给出其 n 步转移概率矩阵。

解：等价类为$\{1,4\}$、$\{2,5\}$和$\{3\}$。其中 3 为吸收态。

$$\begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \dfrac{1+0.2^n}{2} & \dfrac{1-0.2^n}{2} \\ \dfrac{1-0.2^n}{2} & \dfrac{1+0.2^n}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \dfrac{1+(-0.2)^n}{2} & \dfrac{1-(-0.2)^n}{2} \\ \dfrac{1-(-0.2)^n}{2} & \dfrac{1+(-0.2)^n}{2} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}^{(n)}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1+0.2^n & 0 & 0 & 1-0.2^n & 0\\ 0 & 1+(-0.2)^n & 0 & 0 & 1-(-0.2)^n\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 1-0.2^n & 0 & 0 & 1+0.2^n & 0\\ 0 & 1-(-0.2)^n & 0 & 1 & 1+(-0.2)^n\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0\\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0\\ 0 & 0.5 & 0 & 1 & 0.5\end{bmatrix},n\to\infty$$

定义 3-3　设 i 为马尔可夫链的一个状态，使 $p_{ii}^{(n)}>0$ 的所有正整数 $n(n\geqslant 1)$ 的最大公约数称为状态 i 的周期，记作 $d(i)$ 或 d_i。如果对所有 $n\geqslant 1$ 都有 $p_{ii}^{(n)}=0$，则约定周期为 ∞，称 $d(i)=1$ 的状态 i 为非周期性的。当状态 i 的周期为 d 时，$p_{ii}^{(d)}>0$ 不一定成立。

推论　如果 n 不能被周期 $d(i)$ 整除，则必有 $p_{ii}^{(n)}=0$。

例 3-4　若马尔可夫链有状态 0、1、2、3 和转移概率矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0\end{bmatrix}$$

试求状态 0 的周期。

解：状态转移可以用图 3-3 和图 3-4 表示。

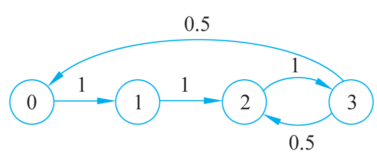

图　3-3

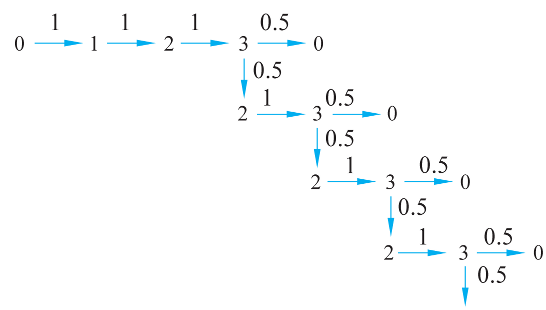

图　3-4

$$P_{00}^{(2n)}=\frac{1}{2^{n-1}},n\geqslant 2$$

$$P_{00}^{(2)}=0,P_{00}^{(2n-1)}=0,n\geqslant 1$$

所以 $d(0)=2$。

命题 3-2　如果 $i\leftrightarrow j$，则 $d_i=d_j$。

证：设 $m\geqslant 1,n\geqslant 1$，使得 $P_{ij}^{(m)}>0,P_{ji}^{(n)}>0$，则

$$P_{ii}^{(m+n)}\geqslant P_{ij}^{(m)}P_{ji}^{(n)}>0,P_{jj}^{(m+n)}\geqslant P_{ij}^{(m)}P_{ji}^{(n)}>0$$

因此，$m+n$ 同时能被 d_i 及 d_j 整除。若 $P_{ii}^{(s)}>0$，则对于任意的 $s\geqslant 1$ 满足 $P_{ii}^{(s)}>0$，因此

$$P_{jj}^{(m+s+n)} \geqslant P_{ji}^{(m)} P_{ii}^{(s)} P_{ij}^{(n)} > 0$$

即 $m+s+n$ 也能被 d_j 整除。因此,s 能被 d_j 整除。从而 d_j 整除 $\{m \geqslant 1: P_{ii}^{(m)} > 0\}$ 的最大公因子 d_i。根据对称性,d_i 也整除 d_j。所以 $d_i = d_j$。

引入状态周期概念的目的是为了研究状态转移矩阵的极限性质,即当 n 取不同值时 $P(n)$ 的极限,这个矩阵可以反映马尔可夫链在平稳状态时的特征。因此,下面将讨论周期的基本性质,为此先给出数论中的一个结论。

引理 3-1 设 $s \geqslant 2$,正整数 $s_1, s_2, \cdots, s_m$ 的最大公因子为 d,则存在正整数 N,使得 $n > N$ 时必有非负整数 $c_1, c_2, \cdots, c_m$ 使 $nd = \sum_{i=1}^{m} c_i s_i$。

命题 3-3 如果状态 i 有周期 d,则存在整数 N,使得对所有 $n \geqslant N$ 恒有 $P_{ii}^{(nd)} > 0$。

证:这时存在正整数 $s_1, s_2, \cdots, s_m$,使得它们的最大公因子为 d,

$$P_{ii}^{(s_k)} > 0, k = 1, 2, \cdots, m$$

由引理 3-1,存在正整数 N,使得 $n > N$ 时,必有非负整数 $c_1, c_2, \cdots, c_m$ 使

$$nd = \sum_{i=1}^{m} c_i s_i$$

从而

$$P_{ii}^{(nd)} \geqslant (P_{ii}^{(s_1)})^{c_1} (P_{ii}^{(s_2)})^{c_2} \cdots (P_{ii}^{(s_m)})^{c_m} > 0$$

推论 3-1 设状态 i 的周期为 d_i。如果 $P_{ji}^{(m)} > 0$,则存在整数 N,使得对所有 $n \geqslant N$ 恒有 $P_{ji}^{(m+nd_i)} > 0$。

命题 3-4 设 $\boldsymbol{P}$ 为一个不可约、非周期、有限状态马尔可夫链的转移矩阵,则必存在 N,使得当 $n \geqslant N$ 时,$\boldsymbol{P}^{(n)}$ 的所有元素都大于 0。

证:由于马尔可夫链是不可约的,过程的任两个状态 i 和 j 都是互达的,于是 m(与 i 和 j 有关)使得 $P_{ii}^{(m)} > 0$。由推论 3-1 和马尔可夫链的非周期性知,存在 N,使得当 $n \geqslant N$ 时,$P_{ij}^{(m+n-1)} > 0$,因为状态空间有限,对全部的状态对 (i, j),求出 $N(i, j)$。并取 $N = \max\limits_{(i,j)} \{m(i, j) + N(i, j)\}$,则显然对所有状态 i 和 j,当 $n > N$ 时有 $P_{ij}^{(n)} > 0$。

例 3-5 若马尔可夫链有转移概率矩阵

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

显然这是一个不可约、非周期、有限状态的马尔可夫链,其 n 步转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P}^{(n)} = \begin{bmatrix} \dfrac{1+0.2^n}{2} & \dfrac{1-0.2^n}{2} \\ \dfrac{1-0.2^n}{2} & \dfrac{1+0.2^n}{2} \end{bmatrix}$$

3.3.2 常返与瞬过

定义 3-4 $f_{ij}^{(0)} = 0, f_{ij}^{(n)} = P\{X_n = j, X_k \neq j, k = 1, 2, \cdots, n-1 \mid X_0 = i\}(n \geqslant 2)$,则 $f_{ij}^{(n)}$ 表示从状态 i 出发在第 n 次转移时首次到达状态 j 的概率。

定义 3-5 $f_{ii}^{(0)} = 0, f_{ii}^{(n)} = P\{X_n = i, X_k \neq i, k = 1, 2, \cdots, n-1 \mid X_0 = i\}(n \geqslant 2)$,则 $f_{ii}^{(n)}$ 表示从状态 i 出发在第 n 次转移时首次回到状态 i 的概率。

定义 3-6　$\sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}=f_{ij}$,则 f_{ij} 表示从状态 i 出发最终到达状态 j 的概率。

性质:当 $i\neq j$ 时,$i\rightarrow j\leftrightarrow f_{ij}>0$。

定义 3-7　如果 $f_{ii}=1$,称状态 i 是常返的;如果 $f_{ii}<1$,称状态 i 为非常返的或瞬过的。注意,如果状态 i 是常返的,那么从状态 i 出发经过有限步转移后又回到 i 的概率为 1。

定义 3-8　τ_{ij} 表示在 0 时刻从状态 i 出发首次到达状态 j 所需的转移步数,即

$$\tau_{ij}=\inf\{n\geqslant 1: X_n=j \mid X_0=i\}$$

如果 $\{n\geqslant 1: X_n=j \mid X_0=i\}=\varnothing$,则 $\tau_{ij}=+\infty$。此时有

$$P\{\tau_{ij}=n\}=f_{ij}^{(n)}$$

因此

$$P\{\tau_{ij}<\infty\}=\sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}=f_{ij}^{n}$$

上式说明了为什么 $f_{ii}=1$ 表示常返。

定理 3-2　状态 i 是常返的 $\leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)}=\infty$。状态 i 是瞬过的 $\leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)}<\infty$。

由过程的马尔可夫性,一旦回到 I,过程以后的发展只依赖于当前的状态,因此从 i 出发至少回到 i 两次的概率是 f_{ii}^{2},依此类推。用随机变量 K 表示过程返回 i 的次数,则

$$P\{K\geqslant k \mid X_0=i\}=f_{ii}^{k},\quad k=1,2,3,\cdots$$

于是 K 的条件期望为

$$E(K \mid X_0=i)=\sum_{K=1}^{\infty} P\{K\geqslant k \mid X_0=i\}=\sum_{K=1}^{\infty} f_{ii}^{K}=\frac{f_{ii}}{1-f_{ii}},f_{ii}<1$$

显然,$E(K \mid X_0=i)<\infty$。

下面将证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)}=E(K \mid X_0=i)$$

令

$$I_n=\begin{cases}1, & 若\ X_n=i\\ 0, & 若\ X_n\neq i\end{cases}$$

则

$$K=\sum_{n=1}^{\infty} I_n$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)}&=\sum_{n=1}^{\infty} P\{X_n=i \mid X_0=i\}=\sum_{n=1}^{\infty} E\{I_n \mid X_0=i\}=E\{\sum_{n=1}^{\infty} I_n \mid X_0=i\}\\&=E\{K \mid X_0=i\}\end{aligned}$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)}=\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{n}$$

由于状态 i 是瞬过的$\leftrightarrow f_{ii}<1$,故状态 i 是瞬过的$\leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)}<\infty$。

推论 3-2　如果 i 是常返的,且 $i\leftrightarrow j$,则 j 也是常返的。由 $i\leftrightarrow j$ 知,存在 m、n,使 $P_{ji}^{(m)}>0$ 且 $P_{ij}^{(n)}>0$。于是,对任何正整数 $s>0$,有

$$P_{jj}^{(m+s+n)}\geqslant P_{ji}^{(m)}P_{ii}^{(s)}P_{ij}^{(n)}$$

因此 $$\sum_{n=1}^{\infty} P_{jj}^{(k)} \geqslant \sum_{s=1}^{\infty} P_{jj}^{(m+s+n)} \geqslant P_{ji}^{(m)} P_{ij}^{(n)} \sum_{s=1}^{\infty} P_{ii}^{(s)} = \infty$$

例 3-6 考虑在整数点上的随机游动。向右移动一格的概率为 p,向左移动一格的概率为 $q=1-p$。从原点 0 出发,则一步转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} & M & M & M & M & M & \\ \cdots & 0 & p & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & q & 0 & p & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & q & 0 & p & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & q & 0 & p & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & q & 0 & \cdots \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}$$

因此 $$P_{00}^{(2n-1)} = 0, \quad P_{00}^{(2n)} = \mathrm{C}_{2n}^{n} P^{n} q^{n}, \quad n=1,2,3,\cdots$$

由斯特林(Stirling)公式知,当 n 充分大时,

$$n! \sim \sqrt{2\pi}\,\mathrm{e}^{-n} n^{n+\frac{1}{2}}$$

于是

$$P_{00}^{(2n)} \sim \frac{(4pq)^{n}}{\sqrt{n\pi}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{n\pi}}, & p=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{c^{n}}{\sqrt{n\pi}}, & p \neq \dfrac{1}{2} \end{cases}, \quad c<1$$

因此,当 $p=0.5$ 时,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P_{00}^{(n)} = \infty$$

当 $p \neq 0.5$ 时,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P_{00}^{(n)} < \infty$$

即,当 $p=0.5$ 时状态 0 是常返的,当 $p \neq 0.5$ 时状态 0 是瞬过的。

定义 3-9 对常返状态 i 定义 T_i 为首次返回状态 i 的时刻,即

$$T_i = \inf\{n \geqslant 1: X_n = i, X_k \neq i, k=1,2,\cdots,n-1 \mid X_0 = i\}$$

称为常返时。

记 $\mu_i = E(T_i)$,则有 $\mu_i = \sum_{n=i}^{\infty} n f_{ii}^{n}$,所以 μ_i 是首次返回 i 的期望步数,称为状态 i 的平均常返时。

定义 3-10 一个常返状态 i 当且仅当 $\mu_i = \infty$ 时称为零常返的,当且仅当 $\mu_i < \infty$ 时称为正常返的。

3.4 极限定理及平稳分布

例 3-7 设马尔可夫链的转移矩阵为

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix}, 0<p, q<1$$

（1）试求状态 1、2 的 n 步首达概率并求 $\mu_i, i=1,2$。

（2）求 $\boldsymbol{P}^{(n)}$ 并考虑当 $n\to\infty$ 的情况。

解：

（1）$f_{11}^{(1)}=1-p, f_{11}^{(2)}=P(X_2=1, X_1\neq 1\mid X_0=1)=pq,\cdots$

$$f_{11}^{(n)}=p\ (1-q)^{n-2}q, n=2,3,4,\cdots$$

因此

$$\mu_i=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{11}^{(n)}=1-p+\sum_{n=2}^{\infty}np\ (1-q)^{n-2}q=\frac{p+q}{q}$$

同理

$$f_{22}^{(1)}=1-q, f_{22}^{(n)}=q\ (1-p)^{n-2}p, n=2,3,4,\cdots$$

因此

$$\mu_2=\frac{p+q}{p}$$

$$f_{12}^{(n)}=(1-p)^{n-1}p, n=1,2,3,\cdots$$

$$f_{21}^{(n)}=q(1-q)^{n-1}, n=1,2,3,\cdots$$

（2）$(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})=\boldsymbol{0}\Rightarrow\lambda=1,\lambda=1-p-q$，取

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}1 & -p\\ 1 & Q\end{bmatrix}, \boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1-p-q\end{bmatrix}, \boldsymbol{Q}^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{q}{p+q} & \dfrac{p}{p+q}\\ -\dfrac{1}{p+q} & \dfrac{1}{p+q}\end{bmatrix}$$

从而

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1-p & P\\ q & 1-q\end{bmatrix}=\boldsymbol{QDQ}^{-1}$$

$$\boldsymbol{P}^{(n)}=\boldsymbol{QD}^{(n)}\boldsymbol{Q}^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{q+p(1-p-q)^n}{p+q} & \dfrac{p-p(1-p-q)^n}{p+q}\\ \dfrac{q-q(1-p-q)^n}{p+q} & \dfrac{p+q(1-p-q)^n}{p+q}\end{bmatrix}$$

$$\lim_{n\to\infty}P_{ii}^{(n)}=\begin{bmatrix}\dfrac{q}{p+q} & \dfrac{p}{p+q}\\ \dfrac{q}{p+q} & \dfrac{p}{p+q}\end{bmatrix}$$

表明

$$\lim_{n\to\infty}P_{i1}^{(n)}=\frac{q}{p+q}=\frac{1}{\mu_1}$$

$$\lim_{n\to\infty}P_{i2}^{(n)}=\frac{q}{p+q}=\frac{1}{\mu_2}$$

3.4.1　极限定理

定理 3-3　若状态 j 是周期为 d 的常返态，则

$$\lim_{n\to\infty}P_{jj}^{(nd)}=\frac{d}{\mu_j}$$

定理 3-3

推论 3-3　若状态 j 是常返态，则

$$j\text{ 是零常返态}\Leftrightarrow P_{jj}^{(n)}\to 0$$

定理 3-4 若 j 是瞬过态或零常返态,则对任意 $i\in S$,有

$$\lim_{n\to\infty}P_{ij}^{(n)}=0$$

定理 3-5 若 j 是正常返态且周期为 d,则对任意 i 及 $0\leqslant r\leqslant d-1$,有

$$\lim_{n\to\infty}P_{ij}^{(nd+r)}=f_{ij}^{(r)}\frac{d}{\mu_j}$$

推论 3-4 设$\{X_n\}$是不可约遍历链,则 $\forall\, i,j\in E$,有

$$\lim_{n\to\infty}P_{ij}^{(n)}=\frac{1}{\mu_j}>0$$

3.4.2 平稳分布与极限分布

定义 3-11 对于马尔可夫链$\{X_n,n\geqslant 0\}$,若

$$\pi_j=\sum_{i\in S}\pi_i p_{ij}$$

$$\sum_{j\in S}\pi_j=1,\pi_j\geqslant 0$$

称概率分布$\{\pi_j,j\in S\}$是平稳的。

定理 3-6 不可约马尔可夫链是遍历链$\Leftrightarrow$对任意 $i,j\in S$,存在仅依赖于 j 的常数 π_j,使得

$$\lim_{n\to\infty}P_{ij}^{(n)}=\pi_j$$

π_j 称为马尔可夫链的极限分布,且有

$$\pi_j=\sum_{i\in S}\pi_i p_{ij}\tag{3-3}$$

例 3-8 设有 6 个车站,车站之间的公路连接情况如图 3-5 所示。汽车每天凌晨可以从一个车站驶向与之直接相邻的车站,并在夜晚到达车站留宿,次日凌晨重复相同的活动。设每天凌晨汽车开往直接相邻的任一车站是等可能的。试说明很长时间后各车站每晚留宿的汽车比例趋于稳定。求出这个比例,以便正确地设置各车站的服务规模。

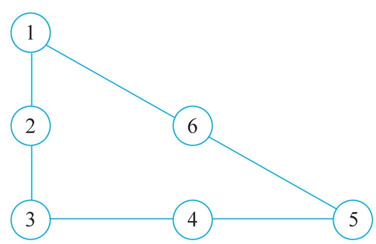

图 3-5

解:以$\{X_n,n=0,1,2,\cdots\}$记第 n 天某辆汽车留宿的车站号,这是一个马尔可夫链,转移概率矩阵通过解以下方程组得到:

$$\begin{cases}\boldsymbol{\pi P}=\boldsymbol{\pi}\\ \sum_{i=1}^{6}\pi_i=1\end{cases}$$

其中,$\boldsymbol{\pi}=(\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4,\pi_5,\pi_6)$。

$\boldsymbol{\pi P}=\boldsymbol{\pi}$ 是 6 个方程的方程组,记 P_i 为 $\boldsymbol{P}$ 的列元素,则它们是

$$P_i=\pi_i,i=1,2,\cdots,6$$

$$\boldsymbol{\pi}=\left(\frac{1}{8},\frac{3}{16},\frac{1}{8},\frac{3}{16},\frac{1}{8},\frac{1}{4}\right)$$

$$
\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3}\\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0\end{bmatrix}
$$

可见，无论开始时汽车从哪一个车站出发，在很长时间后，它在任何一个车站留宿的概率都是稳定的，从而可知所有的汽车都将以一个稳定的比例在各车站留宿。

3.5　隐马尔可夫过程

本节要研究的隐马尔可夫过程（HMM）的本质是基于一种动态的情况进行推理，或者说是根据历史进行推理。假设要为一个高血压病人提供治疗方案，医生每天为他量一次血压，并根据血压的测量值调配用药剂量。显然，一个人当前的血压情况是跟他过去一段时间的身体情况、治疗方案、饮食起居等多种因素息息相关的，而当前的血压测量值相当于对他当时身体情况的一个估计，而医生当天开的处方应该是基于当前血压测量值及过往一段时间病人的多种情况综合考虑后的结果。为了根据历史情况评价当前状态，并且预测治疗方案的结果，就必须对这些动态因素建立数学模型。而隐马尔可夫模型就是解决这类问题时最常用的一种数学模型。简单来说，隐马尔可夫模型是用单一离散随机变量描述过程状态的时序概率模型。下面用一个简单的例子说明。

假设一个人手里有 3 个不同的骰子。第一个骰子是普通的立方体骰子（称这个骰子为 D6），有 6 个面，每个面（1～6）出现的概率是 1/6；第二个骰子是四面体（称这个骰子为 D4），每个面（1～4）出现的概率是 1/4；第三个骰子有 8 个面（称这个骰子为 D8），每个面（1～8）出现的概率是 1/8。这 3 个骰子如图 3-6 所示。

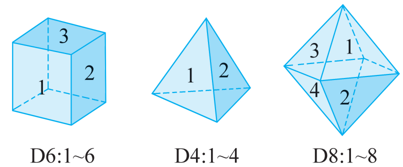

图　3-6

此人开始掷骰子，他先从 3 个骰子里挑一个，挑到每一个骰子的概率都是 1/3。然后掷骰子，得到一个数字，为 1～8 中的一个。不停地重复上述过程，就会得到一串数字，每个数字都是 1～8 中的一个。例如，可能得到这样的一串数字（掷骰子 10 次）：

1 6 3 5 2 7 3 5 2 4

这串数字称为可见状态链。但是在隐马尔可夫模型中，并非仅有一串可见状态链，还有一串隐含状态链。在这个例子里，这串隐含状态链就是该人使用的骰子的序列。例如，隐含状态链有可能是

D6 D8 D8 D6 D4 D8 D6 D6 D4 D8

如图 3-7 所示。

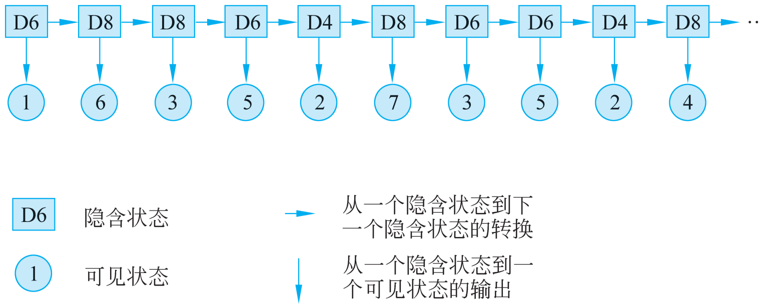

图 3-7

一般来说,隐马尔可夫链中的马尔可夫链其实是指隐含状态链,因为隐含状态之间存在转换概率(transition probability)。在上面的例子里,D6 的下一个状态是 D4、D6 和 D8,转换概率都是 1/3,D4 和 D8 的下一个状态也是 D4、D6 和 D8,转换概率也都是 1/3(见图 3-8)。这样设定是为了最开始容易说清楚,但是转换概率其实是可以随意设定的。例如,可以这样定义:D6 后面不能接 D4,D6 后面是 D6 的概率是 0.9,是 D8 的概率是 0.1。这样就是一个新的隐马尔可夫链。

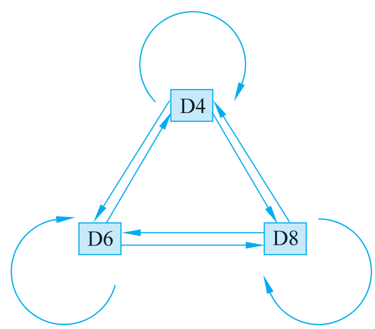

图 3-8

同样,尽管可见状态之间没有转换概率,但是隐含状态和可见状态之间有一个概率,称为输出概率(emission probability)。就上面的例子来说,六面骰子(D6)产生 1 的输出概率是 1/6,产生 2~6 的输出概率也都是 1/6。同样可以对输出概率作其他定义。例如,某人有一个被赌场动过手脚的六面骰子,掷出来是 1 的概率是 1/2,掷出来是 2~6 的概率都是 1/10。其实对于隐马尔可夫链来说,如果提前知道所有隐含状态之间的转换概率和所有隐含状态到所有可见状态之间的输出概率,进行模拟是相当容易的。但是应用隐马尔可夫链模型时往往是缺失了一部分信息。有时候知道骰子有几种,每种骰子是什么,但是不知道掷出来的骰子序列;有时候只是看到了很多次掷骰子的结果,此外什么都不知道。如果应用算法估计这些缺失的信息,就成了一个很重要的问题。

例 3-9

题目背景

从前有个村子,村里的人的身体情况只有两种可能:健康或者发烧。假设这个村的人没有体温计(或者百度这种神奇的东西),人唯一能判断自己身体状况的途径就是到村头甲开设的诊所询问。甲通过村民的描述判断病情。再假设村民只会说正常、头晕或冷。村里的乙连续 3 天去甲的诊所询问。乙第一天告诉甲,感觉正常;第二天告诉甲,感觉冷;第三天告诉甲,感觉头晕。那么,甲如何根据乙的描述推断出这 3 天中乙的身体状况呢?甲通过如下已知情况便可以推断乙的身体状况。

已知情况和算法

隐含的身体状况为{健康,发烧}。

可观察的感觉状态为{正常,冷,头晕}。

甲预判的乙身体状况的概率分布为{健康：0.6,发烧：0.4}。

甲认为的乙身体状况的转换概率分布为{健康→健康：0.7,健康→发烧：0.3,发烧→健康：0.4,发烧→发烧：0.6}。

甲认为的在相应健康状况条件下乙的感觉的概率分布为{健康,正常：0.5,冷：0.4,晕：0.1;发烧,正常：0.1,冷：0.3,头晕：0.6}。

乙连续 3 天的身体感觉依次是正常、冷、头晕。

问题

乙这 3 天的身体状况变化的过程是怎样的?

过程

根据维特比理论,后一天的状态会依赖前一天的状态和当前的可观察的状态。那么只要根据第一天的正常状态依次推算出到第三天头晕状态的最大概率,就可以知道这 3 天的身体状况变化情况。

(1) 初始情况：P(健康)$=0.6$,P(发烧)$=0.4$。

(2) 求第一天的身体状况,即计算在感觉正常的情况下最可能的身体状况。

$$P(\text{今天健康})=P(\text{健康}\mid\text{正常})P(\text{健康}\mid\text{初始情况})=0.5\times0.6=0.3$$

$$P(\text{今天发烧})=P(\text{发烧}\mid\text{正常})P(\text{发烧}\mid\text{初始情况})=0.1\times0.4=0.04$$

那么就可以认为第一天最可能的身体状况是健康。

(3) 求第二天的身体状况。

由第一天的发烧或者健康转换到第二天的发烧或者健康有 4 种可能：

$$\begin{aligned}P(\text{前一天发烧,今天发烧})&=P(\text{发烧}\mid\text{前一天})P(\text{发烧}\rightarrow\text{发烧})P(\text{冷}\mid\text{发烧})\\&=0.04\times0.6\times0.3=0.0072\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(\text{前一天发烧,今天健康})&=P(\text{健康}\mid\text{前一天})P(\text{发烧}\rightarrow\text{健康})P(\text{冷}\mid\text{健康})\\&=0.04\times0.4\times0.4=0.0064\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(\text{前一天健康,今天健康})&=P(\text{发烧}\mid\text{前一天})P(\text{健康}\rightarrow\text{健康})P(\text{冷}\mid\text{健康})\\&=0.3\times0.7\times0.4=0.084\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(\text{前一天健康,今天发烧})&=P(\text{健康}\mid\text{前一天})P(\text{健康}\rightarrow\text{发烧})P(\text{冷}\mid\text{发烧})\\&=0.3\times0.3\times0.3=0.027\end{aligned}$$

可以认为,第二天最可能的状况是健康。

(4) 求第三天的身体状况。

$$\begin{aligned}P(\text{前一天发烧,今天发烧})&=P(\text{发烧}\mid\text{前一天})P(\text{发烧}\rightarrow\text{发烧})P(\text{头晕}\mid\text{发烧})\\&=0.027\times0.6\times0.6=0.00972\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(\text{前一天发烧,今天健康})&=P(\text{健康}\mid\text{前一天})P(\text{发烧}\rightarrow\text{健康})P(\text{头晕}\mid\text{健康})\\&=0.027\times0.4\times0.1=0.00108\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(\text{前一天健康,今天健康})&=P(\text{发烧}\mid\text{前一天})P(\text{健康}\rightarrow\text{健康})P(\text{头晕}\mid\text{健康})\\&=0.084\times0.7\times0.1=0.00588\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(\text{前一天健康,今天发烧})&=P(\text{健康}\mid\text{前一天})P(\text{健康}\rightarrow\text{发烧})P(\text{头晕}\mid\text{发烧})\\&=0.084\times0.3\times0.6=0.01512\end{aligned}$$

可以认为,第三天最可能的状况是发烧。

结论

根据如上计算,可以推断,乙这 3 天身体变化的序列是健康→健康→发烧。

3.6 马尔可夫链的应用

3.6.1 群体消失模型

考虑一个从单个祖先开始的群体。每个个体生命结束时以概率 $p_j(j=0,1,2,\cdots)$产生 j 个新的后代,与其他的个体产生的后代个数相互独立。初始的个体总数以 X_0 表示,称为第零代的总数;第零代的后代构成第一代,其总数记为 X_1;第一代的每个个体以同样的分布产生第二代……一般地,以 X_n 记第 n 代的总数。此马尔可夫链$\{X_n, n=0,1,2,\cdots\}$称为离散分支过程。

现在假设群体是从单个祖先开始的,即 $X_0=1$,则有

$$X_n=\sum_{i=1}^{X_{n-1}} Z_{n,i} \tag{3-4}$$

其中 $Z_{n,i}$表示第 n 代的第 i 个成员的后代个数。

首先考虑第 n 代的平均个体数 $E[X_n]$,对 X_n 取条件期望,有

$$E[X_n]=E[E[X_n \mid X_{n-1}]]=\mu E[X_{n-1}]=\cdots=\mu^n \tag{3-5}$$

其中,$\mu=\sum_{i=0}^{\infty} i p_i$ 为每个个体的后代个数的均值。

- 若 $\mu<1$,平均个体数单调下降并趋于 0。
- 若 $\mu=1$,各代平均个体数相同。
- 若 $\mu>1$,平均个体数按照指数阶上升至无穷。

下面就考虑群体最终会消亡的概率 π_0。对第一代个体数取条件概率,则

$$\pi_0=P\{群体消亡\}=\sum_{j=0}^{\infty} P\{群体消亡 \mid X_1=j\} p_j=\sum_{j=0}^{\infty} \pi_0^j p_j$$

上面的公式意为:若群体最终灭绝,则以第一代为祖先的 j 个家族将全部消亡,而各家族已经假定为独立的,每一家族灭绝的概率均为 π_0。

定理 3-7

定理 3-7 设 $p_0>0, p_0+p_1<1$,则(不考虑 $p_0=0$ 和 $p_0=1$)平凡情况如下:

(1) π_0 是满足 $\pi_0=\sum_{j=0}^{\infty} \pi_0^j p_j$ 的最小正数。

(2) $\pi_0=1 \Leftrightarrow \mu \leqslant 1$。

证:为了证明 π_0 是(1)中等式的最小解,设 $\pi \geqslant 0$ 满足该等式。用归纳法证明,对一切 $n, \pi \geqslant P\{X_n=0\}$,现有

$$\pi=\sum_{j=0}^{\infty} \pi_0^j p_j \geqslant \pi^0 p_0=p_0=P\{X_1=0\}$$

假定

$$\pi \geqslant P\{X_n=0\}$$

则 $P\{X_{n+1}=0\}=\sum_{j=0}^{\infty} P\{X_{n+1}=0 \mid X_1=j\} p_j=\sum_{j=0}^{\infty}(P\{X_n=0\})^j p_j \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} \pi_0^j p_j=\pi$

因此,对一切 $n, \pi \geqslant P\{X_n=0\}$。令 $n \rightarrow \infty, \pi \geqslant \lim_{n \rightarrow \infty} P\{X_n=0\}=P\{群体消亡\}=\pi_0$。(1)得证。

下面证明(2)。首先定义母函数：

$$\Phi(s)=\sum_{j=0}^{\infty}s^{j}p_{j}$$

因此 $p_0+p_1<1$。所以，对一切 $s\in(0,1)$，有

$$\Phi''(s)=\sum_{j=0}^{\infty}j(j-1)s^{j-2}p_{j}>0$$

因此 $\Phi(s)$在开区间$(0,1)$中是严格单调递增的凸函数，分两种情况：

第一种情况：对一切 $s\in(0,1)$，$\Phi(s)>s$。

第二种情况：对某个 $s\in(0,1)$，$\Phi(s)=s$，于是

$$\Phi'(\pi_0)\leqslant\pi_0,\pi_0=1\Leftrightarrow\Phi'(1)\leqslant1,\Phi'(1)=\mu$$

故(2)得证。

在实际应用中，考虑一个群体的真实增长时，离散分支过程的假定在群体达到无限之前就不成立了(比如独立同分布性)。但另一方面，利用离散分支过程研究消亡现象是有意义的，因为一般灭绝常常发生在过程的早期。

3.6.2　人口结构变化的马尔可夫链模型

考虑社会的教育水平与文化程度的发展变化，可以建立如下模型：将全国所有 16 岁以上的人口分为文盲、初中、高中(含中专)、大学(含大专)、中级技术人才、高级技术人才、特级专家 7 类，结构的变化为升级、退化(例如初中文化者会重新变为文盲)、进入(例如年龄达到 16 岁或移民进入)、迁出(例如死亡或移民到国外)。用$(n_1(t),n_2(t),\cdots,n_3(t))$表示在 t 年各等级的人数。

$$N(t)=\sum_{i=1}^{7}n_i(t)\tag{3-6}$$

为全社会 16 岁以上人口总数(简称为总人数)，以 q_{ij} 记为每年从 i 级转为 j 级的人数占 i 级人数的百分百，则

$$\boldsymbol{Q}=(q_{ij})_{7\times7}$$

是一个准转移矩阵(每行所有元素之和不超过 1)。

考虑进入与迁出。记 w_i 为每年从 i 级迁出的人数占 i 级人数的比例，r_i 为每年进入 i 级的人数占总进入人数的比例，则

$$\sum_{i=1}^{7}q_{ij}+w_i=1,\quad r_i\geqslant0,\quad\sum_{i=1}^{7}r_i=1$$

记 $R(t)$为总进入人数，$W(t)$为总迁出人数，则

$$N(t+1)=N(t)+R(t)-W(t)$$

$$n_j(t+1)=\sum_{i=1}^{7}n_i(t)q_{ij}+r_jR(t)-n_j(t)w_j$$

令

$$M(t)=N(t+1)-N(t)=R(t)-W(t)$$

设总人数以常数百分比 α 增长(可以为负增长)，即

$$M(t)=\alpha N(t),\alpha=\frac{N(t+1)}{N(t)}-1$$

记 $\alpha_j(t)=\dfrac{n_j(t)}{N(t)}$,则 $\alpha_j(t+1)=\dfrac{1}{1+\alpha}\left[\sum_{i=1}^{7}\alpha_j(t)(q_{ij}+r_jw_i)-w_j\alpha_j(t)+\alpha r_j\right]$

特别地,当 $\alpha=0$ 时,

$$\alpha_j(t+1)=\sum_{i=1}^{7}\alpha_j(t)(q_{ij}+r_jw_i)-w_j\alpha_j(t)$$

记 $\alpha(t)=(\alpha_1(t),\alpha_2(t),\cdots,\alpha_7(t))$,$\boldsymbol{P}=(p_{ij})$,其中

$$p_{ij}=\begin{cases}q_{ij}+r_jw_i, & i\neq j\\ q_{ij}+r_jw_i-w_j, & i=j\end{cases}$$

则上式变为 $\alpha(t+1)=\alpha(t)\boldsymbol{P}$。这是一个以 $\boldsymbol{P}$ 为转移矩阵的马尔可夫链在 $t+1$ 时刻的分布所满足的方程。

在实际中,总是希望人口结构维持一个合理的稳定水平 α^*,文盲越少越好,而专家也无须太多,并且从现在的 $\alpha(0)$ 出发,通过控制人口进入各级的比例 $r=(r_1,r_2,\cdots,r_7)$ 尽快地达到这个稳定水平。为此,接下来讨论在不同的 r 下全部可能的稳定结构。

由于 $\alpha=\alpha\boldsymbol{P}$(因为 α 是稳定的),即

$$\alpha=\alpha(\boldsymbol{Q}+(r_jw_i)-(w_j\delta_{ij}))=\alpha\boldsymbol{Q}+(\alpha w')r-(\alpha_1w_1,\alpha_2w_2,\cdots,\alpha_7w_7)$$

其中,$w=(w_1,w_2,\cdots,w_7)$,$r=(r_1,r_2,\cdots,r_7)$。当 $\alpha w'\neq 0$ 时,

$$r=\alpha[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q}+(w_j\delta_{ij})](\alpha w')^{-1}$$

即 $\alpha=(\alpha w')r\,[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q}+(w_j\delta_{ij})]^{-1}$

又因为要求 $r_i\geqslant 0$,

$$\alpha_j\geqslant\sum_{i=1}^{7}\alpha_iq_{ij}-\alpha_jw_j(\forall j)$$

可以找出 r,使得

$$\alpha=\alpha\boldsymbol{Q}+\alpha w'r-\alpha(w_j\delta_{ij})=\alpha\boldsymbol{P}$$

从而对于此 r,α 是一个稳定的结构。

3.6.3 数据压缩与熵

信息存储和恢复的数学理论基础是由香农建立的。作为马尔可夫过程的应用,本节讨论这一理论的一个方面。假定文字是由有限字母集 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$ 中的符号构成的。术语“文字”不是仅仅指人类语言中的文字,还可以有更广泛的意义,例如 DNA 的基因序列、计算机中的数据、音乐等。

加密编码规则是一个变换。它将一个文字序列用另一个文字序列代替并且能够唯一地再现原来的文字序列(解码)。为了简单起见,本节只考虑加密编码。

一个符号序列代表一个单字,符号的个数是它的长度。一个长度为 t 的单字通过加密算法被加密成长度为 s 的代码。为了压缩文字,就要用短的代码代表使用频率高的序列,而用长的代码代表很少使用的序列。在这种关系中,文字的统计结构(字频)将扮演重要角色。

现在考虑符号在序列中出现的频率服从一个具有平稳性的、其转移概率矩阵为$(p_{ij}:i,j=1,2,\cdots,M)$的马尔可夫链。

香农提出了英文的马尔可夫逼近方法。

打开一本英文书,随机地选取一个字母,比如 T;跳过几行以后再读,直到再次遇到 T,

选取其后的第一个字母，例如 H；跳过更多行后继续读，直到再次遇到 H，选取其后的第一个字母，例如 A……继续这样的步骤，得到一个文字样本，这一文字比按照英语语法组成的文字更接近马尔可夫链。

不仅如此，我们还希望这种做法能够使得文字表现得比随机选择的字母更加接近英语语法结构。因此，也可以考虑以更高阶的马尔可夫链逼近英语语法结构，例如选择后面的两个字母。

令过程 $X_1,X_2,X_3,\cdots$ 具有状态空间 S、平稳的转移概率矩阵 (p_{ij}) 和唯一的不变初始分布 $\pi=\pi_1$，则 X_n 是一个平稳过程，并且长度为 t 的单字 $a=\{a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{it}\}$ 出现的概率为 $\pi_{i1}p_{i1,i2}p_{i2,i3}\cdots p_{it-1,it}$。

假定在编码变换下，单字 $a=\{a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{it}\}$ 加密为一个长度为 $s=\{a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{it}\}$ 的单字。令

$$\mu_t=\frac{E[c(a=\{a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{it}\})]}{t}$$

μ_t 代表文字长度 t 的压缩率。

给定一种类型的文字，它能够被一种编码压缩的最佳范围由压缩系数确定：

$$\mu=\lim_{t\to\infty}\sup\mu_t$$

在这里考虑的问题是用给定文字的马尔可夫结构的参数计算压缩系数和构造最佳的压缩编码。下面将证明最佳的压缩系数（最佳的意义是，虽然有些编码的压缩系数会任意接近，但是绝不会超过 μ）为

$$\mu=\frac{H}{\log_2 M}=\frac{\sum_i \pi_i H_i}{\log_2 M}=-\frac{\sum_i \pi_i\left(\sum_j p_{ij}\log_2 p_{ij}\right)}{\log_2 M} \tag{3-7}$$

$H_i=\sum_j p_{ij}\log_2 p_{ij}$ 代表状态 i 转移分布的熵，它测量的是当马尔可夫链从状态 i 向前移动一步时所得的信息。

$H=\sum_i \pi_i H_i$ 称为马尔可夫链的熵。容易看出，对给定的马尔可夫链的转移概率，一旦不变初始分布确定，则最佳压缩系数可根据式(3-7)计算。

对于一个长度为 t 的单字 a，令 $P_t(a)=P\{(X_0,X_1,\cdots,X_{t-1})=a\}$，则

$$-\log_2 p_t(X_0,X_1,\cdots,X_{t-1})=-\log_2\pi(X_0)+\sum_i(-\log_2 p_{X_i,X_{i+1}})=Y_0+\sum_i Y_i \tag{3-8}$$

这里 $Y_1,Y_2,Y_3,\cdots$ 是一个平稳的有界随机变量序列。应用大数定理于这一平稳序列，可以得到

$$\lim_{t\to\infty}\frac{-\log_2 p_t(X_0,X_1,\cdots,X_{t-1})}{t}=\mathrm{E}Y_1=H \tag{3-9}$$

式(3-9)的一个重要而且有用的推论是：为了减小概率，将所有字长为 t 的 M^t 个单字排列为 $a_{(1)},a_{(2)},\cdots,a_{(M_t)}$。对任何正数 $\varepsilon<1$，令

$$N_t(\varepsilon)=\min\left\{N:\sum_{i=1}^{N}p_t(a_{(i)})\geqslant\varepsilon\right\} \tag{3-10}$$

于是有下面的命题：对 $0<\varepsilon<1$，有

$$\lim_{t\to\infty}\frac{N_t(\varepsilon)}{t}=H$$

3.7 小　　结

本章介绍了马尔可夫链的相关知识,包括基本概念、隐马尔可夫模型、C-K 方程、马尔可夫链的状态分类、极限定理及平稳分布、转移概率与柯尔莫哥洛夫微分方程以及马尔可夫链的应用。

3.8 习　　题

1. 设有独立重复试验序列$\{X_n, n\geqslant 1\}$。以 $X_n=1$ 记第 n 次试验时事件 A 发生,且$P\{X_n=1\}=\theta$;以 $X_n=0$ 记第 n 次试验时事件 A 不发生,且$P\{X_n=0\}=\lambda=1-\theta$。求 k 步转移概率矩阵。

2. 若顾客的购买是无记忆的。现在市场上供应 A、B、C 3 个不同厂家生产的 50g 袋装味精。用 $X_n=1, X_n=2, X_n=3$ 分别表示事件顾客第 n 次购买 A 厂、B 厂、C 厂的味精,则$\{X_n\}$是一个马尔可夫链。已知顾客第一次购买 A 厂、B 厂、C 厂味精的概率依次为 0.4,0.4,0.2,又已知一般顾客购买的倾向表如下:

$$\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.5 & 0.1 & 0.4 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}$$

(1) 求顾客第二次购买 A 厂、B 厂、C 厂味精的概率。

(2) 求顾客 3 次购买后的倾向表。

(3) 长时间的购买活动后,A、B、C 三厂的市场占有率如何?

3. 天气预报问题。设明天是否有雨仅与今天的天气有关,而与过去的天气无关。又设今天下雨而明天下雨的概率为 α,而今天无雨明天有雨的概率为 β。规定有雨天气为状态 0,无雨天气为状态 1,因此本问题是有两个状态的马尔可夫链。设 $\alpha=0.4, \beta=0.7$。求今天有雨且第四天仍有雨的概率。

4. 设马尔可夫链的状态空间为 $I=\{0,1,2\}$,一步转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.5 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}$$

求其相应的极限分布。

5. 设马尔可夫链的转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

讨论此马尔可夫链的遍历性。

6. 设马尔可夫链$\{X_n, n\geqslant 1\}$的转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0\\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4}\\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}$$

求其平稳分布。

7. 在计算机系统中，每一轮循环有误差的概率取决于前一轮循环是否有误差。以 0 表示有误差状态，1 表示无误差状态。设转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0.25 & 0.75\\ 0.5 & 0.5\end{bmatrix}$$

讨论相应的齐次马尔可夫链的遍历性，并求其平稳(极限)分布。