第 5 章

关　　系

5.1　关系的定义

定义 5-1　设 A 和 B 为集合，笛卡儿积 $A\times B$ 的任意一个子集称为集合 A 到集合 B 的二元关系，简称关系，用大写字母 R 表示，如果 $<x,y>\in R$，记作 xRy。如果 $A=B$，则称 R 为集合 A 上的关系。

例 5.1　设 $A=\{a,b\}$，$B=\{0,1,2\}$，则：

$$A\times B=\{<a,0>,<a,1>,<a,2>,<b,0>,<b,1>,<b,2>\}$$

由于关系 R 是 $A\times B$ 的子集，因此：

$$R_1=\{<a,0>,<b,0>,<b,2>\}$$

$$R_2=\{<a,0>,<a,1>,<a,2>,<b,0>\}$$

$$R_3=\{<a,2>\}$$

$$R_4=\varnothing$$

其中 R_1、R_2、R_3、R_4 都是集合 A 到集合 B 的关系。

例 5.2　设集合 $A=\{2,3,4\}$，试计算该集合上的整除关系。

解：根据整除关系的定义，得知 $<x,y>\in R$ 当且仅当 $x\mid y$。因此可得到该集合上的整除关系，如下所示：

$$R=\{<2,2>,<3,3>,<4,4>,<2,4>\}$$

集合 A 上的二元关系的数目依赖于 A 中的元素。如果 $|A|=n$，那么 $|A\times A|=n^2$，$A\times A$ 的子集就有 2^{n^2} 个，每一个子集代表一个 A 上的二元关系，所以 A 上有 2^{n^2} 个不同的二元关系。例如，$A=\{2,3,4\}$，$|A|=3$，则 A 上有 $2^9=512$ 个不同的二元关系。

例 5.3　设 $|A|=m$，$|B|=n$，计算从 A 到 B 有多少个不同的关系？

解：$|A|=m$，$|B|=n$，则 $|A\times B|=mn$，$A\times B$ 的子集就有 2^{mn} 个，所以 $A\times B$ 上有

2^{mn} 个不同的关系。

对于任意集合 A，存在以下三个特殊关系：

(1) $\varnothing$ 是 $A\times A$ 的子集，所以 $\varnothing$ 是 A 上的关系，称为空关系；

(2) 全域关系：$E_A=\{<a,b>|a\in A\wedge b\in A\}=A\times A$；

(3) 恒等关系：$I_A=\{<a,a>|a\in A\}$。

例 5.4　若集合 $A=\{a,b\}$，求 E_A 和 I_A。

解：

$E_A=A\times A=\{<a,a>,<a,b>,<b,b>,<b,a>\}$，$I_A=\{<a,a>,<b,b>\}$。

除了以上三种特殊关系以外，还有一些常用的关系，定义如下：

(1) 小于等于关系：$L_A=\{<a,b>|a,b\in A\wedge a\leqslant b\}$；

(2) 整除关系：$D_A=\{<a,b>|a,b\in A\wedge a\,|b\}$；

(3) 集合上的包含关系：$R_{\subseteq}=\{<x,y>|x,y\in P(A)\wedge x\subseteq y\}$。

定义 5-2　设二元关系 $R\subseteq A\times B$，则 R 中所有有序对的第一元素构成的集合称为 R 的定义域，记作 dom$R$，表示为：

$$\mathrm{dom}R=\{a\mid\exists b\in B\rightarrow<a,b>\in R\}$$

R 中所有有序对的第二元素构成的集合称为 R 的值域，记作 ran$R$，表示为：

$$\mathrm{ran}R=\{b\mid\exists a\in A\rightarrow<a,b>\in R\}$$

显然，因为 $R\subseteq A\times B$，所以 dom$R\subseteq A$，ran$R\subseteq B$。

例 5.5　设集合 $A=\{1,2,3\}$，R 是 A 上的关系，定义如下：

$$R=\{<a,b>|a,b\in A\wedge(b-a)/2\text{ 是整数}\}$$

试求出 R、dom$R$ 及 ran$R$。

解：由已知，有 $R=\{<1,1>,<1,3>,<2,2>,<3,3>,<3,1>\}$，进一步得到 dom$R=\{1,2,3\}$，ran$R=\{1,2,3\}$。

5.2　关系的表示

关系实际上就是集合，关系常见的表示方法有 3 种，除了集合表示方法外，还可以用关系矩阵和关系图表示。

5.2.1　关系的矩阵表示

定义 5-3　设集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$，集合 $B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$，集合 A 到集合 B

的关系 R 可以用矩阵 $M_R=(r_{ij})_{m\times n}$ 来表示，其中：

$$r_{ij}=\begin{cases}1 & <a_i,b_j>\in R\\ 0 & <a_i,b_j>\notin R\end{cases}\quad (i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n)$$

关系矩阵适合表示从 A 到 B 的关系或 A 上的关系，其中 A 和 B 均为有限集合。

例 5.6 设集合 $A=\{1,2,3\}$，集合 $B=\{2,3,4\}$，计算集合 A 到集合 B 上的大于等于关系和集合 A 上的小于等于关系，并用关系矩阵表示。

解：

$$R_{A\geqslant B}=\{<a,b>|a\in A,b\in B,a\geqslant b\}=\{<2,2>,<3,2>,<3,3>\}$$

$$R_{A\leqslant A}=\{<a,b>|a\in A,b\in A,a\leqslant b\}$$

$$=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,2>,<2,3>,<3,3>\}$$

运用关系矩阵表示，如下所示：

$$M_{R_{A\geqslant B}}=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{bmatrix},\quad M_{R_{A\leqslant A}}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

5.2.2 关系的关系图表示

定义 5-4 设关系 R 是集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$ 到集合 $B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$ 的关系，用关系图表示：将集合 A 和集合 B 中的每一个元素 a_i 和 b_j 分别用小圆圈表示，集合 A 画在左边，集合 B 画在右边，如果 $<a_i,b_j>\in R$，则从表示 a_i 的小圆圈向表示 b_j 的小圆圈画一条有向弧。

如果关系 R 是集合 A 上的关系，则通常只将集合 A 中所有的元素用小圆圈表示，画到一块，点与点之间没有顺序关系，若 $<a_i,a_j>\in R$，则从表示 a_i 的小圆圈向表示 a_j 的小圆圈画一条有向弧，如果 $<a_i,a_i>\in R$，则从 a_i 画一条指向自己的环。

例 5.7 画出例 5.6 所求出关系的关系图。

解：关系图如图 5-1 和图 5-2 所示。

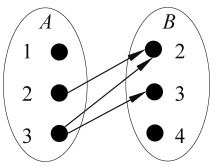

图 5-1 $G_{R_{A\geqslant B}}$

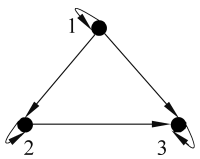

图 5-2 $G_{R_{A\leqslant A}}$

在画关系图时，集合 A 和集合 B 中所有的元素都要用一个点表示，如图 5-1 中集合 A 的元素 1 也要用一个点表示。只要$<a,b>\in R$ 中，则都要从元素 a 到元素 b 画一条有向边，这意味着关系 R 中有多少个序偶，则在关系图G_R中就有多少条有向边，特别要注意的是图 5-2 中元素 1 到 1 的一条有向边，它又称为 1 到 1 的一个环(或自环)。

5.3　关系的运算

5.3.1　关系的集合运算

根据关系的定义可知，关系的本质是由序偶构成的集合，因此，集合上的交集、并集、差集和补集等运算同样适合关系。

定义 5-5　设关系 R 和 S 是集合 A 到集合 B 的关系，即 R、$S\subseteq A\times B$，则关系的并、交、差、补及对称差运算如下：

$$R\cup S=\{<x,y>|<x,y>\in R\vee<x,y>\in S\}$$
$$R\cap S=\{<x,y>|<x,y>\in R\wedge<x,y>\in S\}$$
$$R-S=\{<x,y>|<x,y>\in R\wedge<x,y>\notin S\}$$
$$\overline{R}=\{<x,y>|<x,y>\in A\times B\wedge<x,y>\notin R\}$$
$$R\oplus S=\{<x,y>|(<x,y>\in R\wedge<x,y>\notin S)\vee(<x,y>\notin R\wedge<x,y>\in S)\}$$

例 5.8　设集合 $A=\{2,3,4\}$，R 为 A 上的整除关系，S 为 A 上的小于关系，分别计算：$R\cup S$、$R\cap S$、$\overline{R}$、$R-S$。

解：先求出关系 R 和 S：

$$R=\{<2,2>,<2,4>,<3,3>,<4,4>\}$$
$$S=\{<2,3>,<2,4>,<3,4>\}$$

再计算 $R\cup S$、$R\cap S$、$\overline{R}$、$R-S$：

$$R\cup S=\{<2,2>,<2,4>,<3,3>,<4,4>,<2,3>,<3,4>\}$$
$$R\cap S=\{<2,4>\}$$

因为 R 为 A 上的关系，所以 R 对应的全集：

$U=A\times A=\{<2,2>,<2,3>,<2,4>,<3,2><3,3>,<3,4>,<4,2>,<4,3>,<4,4>\}$

$\overline{R}=U-R=\{<2,3><3,2>,<4,2>,<3,4>,<4,3>\}$

$R-S=\{<2,2>,<3,3>,<4,4>\}$

5.3.2 关系的复合运算

定义 5-6 设 R 是集合 A 到集合 B 的关系，S 是集合 B 到集合 C 的关系，则 R 和 S 的复合关系 $R\circ S$ 是集合 A 到集合 C 的关系，定义为：

$$R\circ S=\{<a,c>\mid \exists b\in B,<a,b>\in R,<b,c>\in S\}$$

注意：如果关系 R 和 S 中有一个是空关系，复合的结果仍然是空关系，即：

$$R\circ\varnothing=\varnothing\circ R=\varnothing$$

关系复合运算的一些例子：若 x 是 y 的母亲，y 是 z 的妻子，则 x 是 z 的岳母；若 a 是 b 的父亲，b 是 c 的父亲，则 a 是 c 的祖父。

例 5.9 设集合 $A=\{a,b,c,d\}$，$B=\{1,2,3,4\}$，$C=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$，$A$ 到 B 的关系 R 为：

$$R=\{(a,1),(a,2),(b,2),(d,3),(c,4)\},$$

B 到 C 的关系 S 为：

$$S=\{(1,\alpha),(2,\beta),(2,\delta),(3,\beta)\},$$

试计算 $R\circ S$。

解：根据复合运算的定义，求出所有满足条件的序偶：

(1) $<a,\alpha>\in R\circ S$，因为存在 $b=1\in B$，使得 $<a,1>\in R$，$<1,\alpha>\in S$；

(2) $<a,\beta>\in R\circ S$，因为存在 $b=2\in B$，使得 $<a,2>\in R$，$<2,\beta>\in S$；

(3) $<a,\delta>\in R\circ S$，因为存在 $b=2\in B$，使得 $<a,2>\in R$，$<2,\delta>\in S$；

(4) $<b,\beta>\in R\circ S$，因为存在 $b=2\in B$，使得 $<b,2>\in R$，$<2,\beta>\in S$；

(5) $<b,\delta>\in R\circ S$，因为存在 $b=2\in B$，使得 $<b,2>\in R$，$<2,\delta>\in S$；

(6) $<d,\beta>\in R\circ S$，因为存在 $b=3\in B$，使得 $<d,3>\in R$，$<3,\beta>\in S$。

于是：$R\circ S=\{(a,\alpha),(a,\beta),(a,\delta),(b,\beta),(b,\delta),(d,\beta)\}$。

借助关系图，可以用图 5-3 来理解上面所给出的例子。

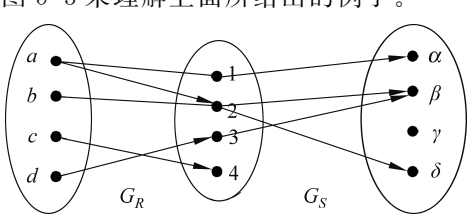

图 5-3 $R\circ S$ 的关系表示

例 5.10 设 R 和 S 均为集合 $A=\{1,2,3\}$ 上的关系，其中

$$R=\{<1,2>,<1,3>,<2,3>,<3,3>\}$$

$$S=\{<1,3>,<2,1>,<2,2>,<3,3>\}$$

计算 $R\circ S$、$S\circ R$、$R\circ R$。

解：由复合关系定义可得：

$$R\circ S=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,3>,<3,3>\}$$

$$R\circ R=\{<1,3>,<2,3>\}$$

$$S\circ R=\{<1,3>,<2,2><2,3>,<3,3>\}$$

由上述例子可知关系的复合运算不满足交换律，即一般来说 $R\circ S\neq S\circ R$。

定理 5-1 设 R、S、T 是集合 A 上的关系，则有：

(1) $R\circ(S\cup T)=(R\circ S)\cup(R\circ T)$；

(2) $R\circ(S\cap T)\subseteq(R\circ S)\cap(R\circ T)$；

(3) $(R\cup S)\circ T=(R\circ T)\cup(S\circ T)$；

(4) $(R\cap S)\circ T\subseteq(R\circ T)\cap(S\circ T)$。

分析：关系本质上是由序偶构成的集合，关系的集合运算以及关系的复合运算的结果都仍然是一个集合。因此，上述式子本质上是证明两个集合相等，即只需证明左右两者互为子集。

证明：

(1) 对任意序偶 $<a,b>\in R\circ(S\cup T)$，根据复合关系定义可知，存在元素 $c\in A$，使得：

$$<a,c>\in R\wedge<c,b>\in S\cup T$$

$$\Rightarrow<a,c>\in R\wedge(<c,b>\in S\vee<c,b>\in T)$$

$$\Rightarrow(<a,c>\in R\wedge<c,b>\in S)\vee(<a,c>\in R\wedge<c,b>\in T)$$

$$\Rightarrow<a,b>\in R\circ S\vee<a,b>\in R\circ T$$

$$\Rightarrow<a,b>\in(R\circ S)\cup(R\circ T)$$

因此有 $R\circ(S\cup T)\subseteq(R\circ S)\cup(R\circ T)$。

同理，对任意序偶 $<a,b>\in(R\circ S)\cup(R\circ T)$，根据并集的定义有：

$$<a,b>\in R\circ S\vee<a,b>\in R\circ T$$

根据复合关系的定义可知，存在元素 c_1、$c_2\in A$，使得：

$$(<a,c_1>\in R\wedge<c_1,b>\in S)\vee(<a,c_2>\in R\wedge<c_2,b>\in T)$$

$$\Rightarrow(<a,c_1>\in R\wedge<c_1,b>\in S\cup T)\vee(<a,c_2>\in R\wedge<c_2,b>\in S\cup T)$$

$\Rightarrow <a,b> \in R \circ (S \cup T)$

因此有：$(R \circ S) \cup (R \circ T) \subseteq R \circ (S \cup T)$。

综上可得：$R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)$。

类似的方法，可以证明(2)、(3)和(4)。

定理 5-2 设 R 是集合 A 到集合 B 的关系，S 是集合 B 到集合 C 的关系，T 是集合 C 到集合 D 的关系，则有

$$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$$

证明：

第一步：证明$(R \circ S) \circ T \subseteq R \circ (S \circ T)$。

$$\begin{aligned}\forall (x,w) \in (R \circ S) \circ T &\Rightarrow \exists z \in C : (x,z) \in R \circ S, (z,w) \in T \\ &\Rightarrow \exists z \in C \, \exists y \in B : (x,y) \in R, (y,z) \in S, (z,w) \in T \\ &\Rightarrow (x,y) \in R, (y,w) \in S \circ T \\ &\Rightarrow (x,w) \in R \circ (S \circ T)\end{aligned}$$

第二步：类似的可证明$(R \circ S) \circ T \supseteq R \circ (S \circ T)$。实际上，上述过程可倒推回去。

所以有：

$$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$$

5.3.3 关系的幂运算

定义 5-7 在关系 R 和 S 的复合运算 $R \circ S$ 中，如果 $R = S$，将 $R \circ R$ 表示为 R^2，称为 R 的幂。类似地，如果 R 是集合 A 上的运算，则可以定义关系 R 的 n 次幂：

(1) $R^0 = I_A = \{<a,a> \mid a \in A\}$；

(2) $R^{m+n} = R^m \circ R^n$。

由以上定义可知，对于 A 上的任何关系R_1 和R_2 都有：

$$R_1^0 = R_2^0 = I_A$$

也就是 A 上任何关系的 0 次幂都等于 A 上的恒等关系I_A。此外对 A 上的任何关系 R 都有$R^1 = R^0 \circ R = I_A \circ R = R$。

例 5.11 设集合 $A = \{a,b,c,d,e\}$，定义该集合上的关系 R 如下：

$$R = \{<a,a>, <a,b>, <b,c>, <b,d>, <c,e>, <d,e>\}$$

则有：

$$R^2 = \{<a,a>, <a,b>, <a,c>, <a,d>, <b,e>\}$$

$$R^3 = \{<a,a>, <a,b>, <a,c>, <a,d>, <a,e>\}$$

$$R^4=\{<a,a>,<a,b>,<a,c>,<a,d>,<a,e>\}=R^3$$

$$R^5=R^4\circ R=R^3\circ R=R^3$$

定理 5-3　设 A 是有限集合，且 $|A|=n$，R 是 A 上的关系，则有：

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i=\bigcup_{i=1}^{n}R^i$$

分析：关系的复合仍然是关系，关系本质上讲是集合，因此上述等式左右两边都是集合。证明两个集合相等，只需要证明两者互为子集。上述等式中，左边是无穷多个集合的并集，右边是 n 个集合的并集，且右边的集合也都在左边的等式内，即右边集合是左边的子集，所以只需证明左边集合也是右边集合的子集即可。

证明：

(1) 显然有 $\bigcup_{i=1}^{n}R^i\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i$；

(2) $\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i=\bigcup_{i=1}^{n}R^i\cup\bigcup_{i=n+1}^{\infty}R^i$，显然 $\bigcup_{i=1}^{n}R^i\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}R^i$，因此只需证明 $\bigcup_{i=n+1}^{\infty}R^i\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}R^i$。对任意的 $<a,b>\in R^k(k\geqslant n+1)$，由复合运算定义可知，存在 $a_1,a_2,\cdots,a_{k-1}\in A$，使得：

$$<a,a_1>,<a_1,a_2>,\cdots,<a_{k-1},b>\in R$$

又 $|A|=n$，$k\geqslant n+1\geqslant n$，因此根据鸽笼原理 $a,a_1,a_2,\cdots,a_{k-1},b$，这 $k+1$ 个元素中至少有两个元素相同。假设 $a_i=a_j\ (i<j)$，则上式可写成：

$$<a,a_1>,\cdots,<a_{i-1},a_i>,<a_i,a_{i+1}>,\cdots,<a_{j-1},a_j>,<a_j,a_{j+1}>\cdots,<a_{k-1},b>\in R$$

由于 $a_i=a_j$，上述关系中可以删除如下部分：

$$<a_i,a_{i+1}>,\cdots,<a_{j-1},a_j>$$

变成：

$$<a,a_1>,\cdots,<a_{i-1},a_i>,<a_j,a_{j+1}>\cdots,<a_{k-1},b>\in R$$

成立，即 $<a,b>\in R^{k'}=R^{k-(j-i)}$。如果 $k-(j-i)\geqslant n+1$，则可以继续上述过程，直到 $<a,b>\in R^{k'}(k'\leqslant n)$。又 $R^{k'}\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}R^i$，得到 $<a,b>\in\bigcup_{i=1}^{n}R^i$，即 $R^k\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}R^i$。

由 k 的任意性可知：$\bigcup_{i=n+1}^{\infty}R^i\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}R^i$，进一步得到：$\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}R^i$。

综上：$\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i=\bigcup_{i=1}^{n}R^i$。

5.3.4　关系的逆运算

定义 5-8　设 R 是集合 A 到集合 B 的关系，则 R 的逆关系表示为 R^{-1}，定义为：

$$R^{-1}=\{<b,a>|<a,b>\in R\}$$

实际意义：若 x 是 y 的老师，则 y 是 x 的学生。

实数集合上的“大于等于”关系和“小于等于”关系，整数集合上的“整除”关系和“被整除”关系，幂集合上的“包含”关系和“被包含”关系，均互为逆关系。有些关系的逆关系是它自己，例如整数集合上的模 k 同余关系和幂集上集合的补关系的逆关系都是它自己。

定理 5-4 设 R 和 S 是集合 A 上的关系，则：

$$(R\circ S)^{-1}=S^{-1}\circ R^{-1}$$

分析：关系的逆运算后还是关系，关系从本质上讲是集合。因此该定理实际上是证明左右两个集合相等，可以通过证明两者互为子集即可。

证明：$\forall <a,b>\in (R\circ S)^{-1}$，则有：

$$\begin{aligned}
&<a,b>\in (R\circ S)^{-1}\\
\Leftrightarrow &<b,a>\in R\circ S\\
\Leftrightarrow &\exists c(<b,c>\in R\wedge <c,a>\in S)\\
\Leftrightarrow &\exists c(<a,c>\in S^{-1}\wedge <c,b>\in R^{-1})\\
\Leftrightarrow &<a,b>\in S^{-1}\circ R^{-1}
\end{aligned}$$

所以 $(R\circ S)^{-1}=S^{-1}\circ R^{-1}$。

5.4 关系的性质

5.4.1 自反性与反自反性

定义 5-9 设关系 R 是集合 A 上的关系，如果对集合中的任意元素 $a\in A$，都有 $<a,a>\in R$，称关系 R 满足自反性；如果对集合中的任意元素 a，都有 $<a,a>\notin R$，称关系满足反自反性。形式化如下：

(1) $\forall a\in A$，都有 $<a,a>\in R$，则 R 在 A 上是自反的；

(2) $\forall a\in A$，都有 $<a,a>\notin R$，则 R 在 A 上是反自反的。

例如，A 上的全域关系 E_A、恒等关系 I_A 都是 A 上的自反关系。小于等于关系、整除关系和包含关系都是给定集合上的自反关系。而小于关系和真包含关系都是给定集合上的反自反关系。

例 5.12 设集合 $A=\{a,b,c,d\}$，在该集合上定义如下关系：

$$R = \{(a, a), (a, b), (b, b), (c, c), (c, a), (d, d)\}$$

试判断该关系是否满足自反性。

解：R 关系图如图 5-4 所示。

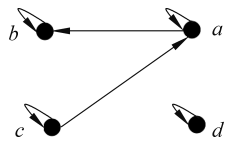

图 5-4　R 的关系图

从关系图上看，如果每个元素都有指向自身的回路，则关系满足自反性；如果每个元素都没有指向自身的回路，则关系满足反自反性。显然，上述关系 R 每个元素都有指向自身的回路，因此 R 满足自反性。

R 矩阵表示如下：

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

从矩阵上看，如果对角线全为 1，则关系满足自反性，显然 R 满足自反性。

例 5.13　设集合 $A = \{a, b, c, d\}$，在该集合上定义如下关系：

$$R = \{(b, a), (a, b), (b, c), (c, d), (c, a)\}$$

试判断该关系是否满足自反性。

解：关系图如图 5-5 所示。

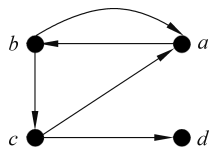

图 5-5　R 的关系图

如果每个元素都没有指向自身的回路，则关系满足反自反性。显然，上述关系 R 每个元素都没有指向自身的回路，因此 R 满足反自反性。

R 的矩阵图如下：