

# 第3章

## 波导里的微波

### 3.1 为什么要学这一章?

通过第2章的学习,我们知道了常用的几种双导体结构的传输线。面对这种类型的传输线,使用的分析方法都是电路基础中学到的,也就是“路”的方法,虽然学的过程也有点小辛苦,但是相比于电磁场相关课程中学过的那些知识,上一章的打开方式已经是相当友好了。然而,也希望大家不要抱有一种不切实际的幻想,以为微波这门课只搞“路”,不搞“场”。作为“电磁场”课程的后续,这门课就是为了解决微波应用中的实际问题,而很多微波结构的分析,光有“路”的方法还是远远不够的,肯定要一手抓“路”,一手抓“场”,坚持两手都要抓,两手都要硬(图3-1)。

关于“场”和“路”两种分析方法的区别和联系:

①“场”的方法基于麦克斯韦方程,更接近物理本质,可对三维空间场分布进行分析,能够给出的信息也更丰富,涵盖“路”的方法可以提供的全部信息;而“路”的方法基于基尔霍夫定律,处理的问题是一维的,能提供的信息较为有限,例如阻抗是由电压电流比值定义的,而电压和电流则来源于电场和磁场的积分;

②秉承“万物负阴而抱阳”的原则,一种东西肯定是两面的,“场”的分析方法缺点就是过程烦琐,计算量大,反观“路”的方法则较为简洁,对于一些简单工程实际问题更适用。

话说到这份上,也就不再装了,本章就要开始用“场”的方法来分析一些问题了。分析什么问题呢?先从给第2章学过的双导体传输线“找碴儿”开始。比如平行双导线,结构的确相当简单,但是封闭性较差,容易造成辐射损耗,相当于一小部分能量在传输的过程中泄漏到周围空间了,传输线成天线了,其他的平行波导板、带状线以及微带线都有这么个毛病,封闭性不太好,遇到阴天下雨的户外场合,甚至都容易进水。再比如同轴线,密封性很不错,几乎没有辐射损耗,结构也算轻便,但是它最大的一个缺点就是可传输的功率比较小,平时整点功率比较弱的信号还行,但如果信号功率搞到几百上千瓦时,传输线一点点的损耗就会造成热量迅速提升,轻则击穿,重则原地自焚。有人可能觉得夸张了,觉得功率不至于这么大,但如果了解一些大型雷达或者微波武器之后,就知道达到这样的功率简直就是分分钟的事情,甚至连微波炉的功率都可以达到这个量级。此外,同轴线、微带线之类的传输线一般必须在两个导体之间填充介质起到支撑的作用,因此损耗也比较大,特别是随着频率的升高,介质带来的损耗会急剧变大。

那么问题来了,既要传输功率特别大,又要损耗特别小时,该用什么传输设备呢?其实前面说这么多,就是为了硬推本章的主角——波导,它大概长什么样子呢?先上图(图3-2),形成一个直观印象。

波导的造型说白了就是金属管子,横截面是矩形的就叫矩形波导,横截面是圆形的就叫圆波导,这两种相对来说最为常见,当然还有椭圆波导、脊形波导以及扭波导等一些形状比较怪异的,一般专用于特殊场合或者纯粹是学术时尚,较为非主流,不在我们小菜鸟的考虑范围之内。在矩形波导和圆波导之间,本章要重点对付的是矩形波导,原因有



图3-1 微波工程师必备两大法宝



视频

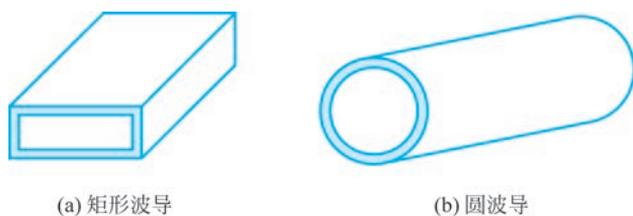


图 3-2 两种常见波导

二：应用更广泛，结构更简单。波导这种憨厚的传输结构，一看就是能承受大功率的，而且封闭性也很好，虽然略显笨重，但是在有些场合还真的没它不行。此外，波导不填充介质，直接做成中空的，因此只有金属损耗。而就算这点儿金属损耗，人类也没打算放过，甚至会在波导的内壁镀上一层铜甚至金来进一步降低金属损耗。这么说来，波导还真有点“憨厚多金”的气质了。

### 3.2 波导的故事

现在我们拿波导来传输电磁波感觉司空见惯，但在一开始这种想法是很前卫的。1885年，英国物理学家赫维赛德考虑过电磁波在封闭的空管中传播的可能性，就是上面

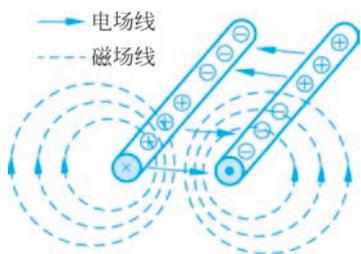


图 3-3 双导体传输线 TEM 模电磁场分布示意图

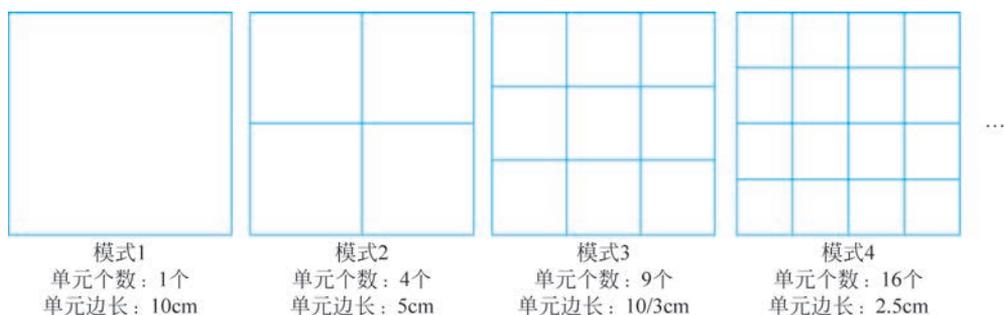
提到过的简化麦克斯韦方程组表达式的那位大佬，但他很快放弃了，因为他认为必须用两根导体来传输电磁能量。这也难怪，毕竟当时的思维定式已经形成，电流在两个导体内纵向流动，电压在两个导体间形成，波在传输线中是横电磁(TEM)模式，即电场、磁场以及传播方向三者相互垂直，构成右手螺旋定则，在横截面上，电场从一个导体垂直指向另一个导体，磁场则是分别包围着两个导体与电场相互垂直，如图 3-3 所示。

从场的角度来看，这种传输模式的场分布和自由空间中的 TEM 模没什么本质区别，通过对电场、磁场进行积分也可以得出与第 2 章中同样的电压、电流以及阻抗等参数。

#### ※ 如何理解模式？

一说到模式(mode)的概念，好多同学都又开始慌了，这在数学上倒是很好说，就是麦克斯韦方程在特定的边界条件下的解，但这样说可能会使大部分人陷入更加懵圈的状态。为了更好地理解模式的概念，可以先思考一个简单的问题：有一个大的正方形，边长是 10cm，如果我们知道这个正方形是由一定数量的相同的正方形单元拼接而成的，那么这个大正方形应该是什么样子的呢？但凡上过幼儿园，基本上也可以猜到，可能的情况如下，这里的每种情况都可以称为一种模式。

在这个问题中，我们还要考虑一系列条件：不能越过 10cm×10cm 的边界，单元之间又不能重叠，还必须是尺寸相等的正方形单元，等等，最终得出结论：实际可能存在的构成模式可以是模式 1(单元个数：1 个，单元边长：10cm)，或者模式 2(单元个数：4 个，单



元边长: 5cm),抑或是模式 3(单元个数: 9 个,单元边长: 10/3 cm)等。每个模式都对应着一种可能性,或者说这是这个问题的一个解,至于到底采用哪种模式,就取决于很多实际因素了,比如我们手头有哪种尺寸的正方形单元,或者单元尺寸不能小于多少,或者我们更喜欢什么样的单元数目,等等。

其实吧,上述这样一个问题实在简单到令人发指,但是为什么我们还要煞有其事地扯这么多呢,就是为了让大家更好地理解什么叫模式。这里的模式和波导中的模式在本质上都是一回事,就是一个特定问题的不同可能性答案,或者叫解决方案。不同的是,一个是往大方块中填充小方块,另外一个是在金属管子中填充电磁波,所运用的知识种类及复杂度不同而已。

※

※

要想用一个金属管子来传输电磁波,首先就需要在理论上证明其可行性,奥利弗·赫维赛德(图 3-4)当时直接拿着 TEM 模式的场分布就开始往管子里塞,然而,脑补完管子中的场分布之后,他很快就发现了一个比较尴尬的矛盾闭环:①由于 TEM 模式是横电磁,因此电场和磁场必须都在横截面上,没有磁单极子的情况下磁场又必须打圈圈,这样一来,横截面上就必须存在一个磁场小漩涡;②产生磁场小漩涡的方法有二(参见图 1-15),要么有一个传导电流,要么有一个位移电流;③既然管子是空心或者介质填充的,传导电流就别想了,位移电流则要求有和小漩涡所在横截面垂直的时变电场,也就是说要有纵向电场分量,显然又不是 TEM 模式了。一圈矛盾论证下来,赫维赛德直接放弃了,认为用管子传点自来水还行,用来传输电磁波实在有点无厘头。这倒真不是赫老哥能力不行,大概是时间和精力实在有限,跑去思考别的人生命题了。



图 3-4 奥利弗·赫维赛德(英国,1850—1925)

李宗盛大哥曾经说过,感情说穿了,一人挣脱的,另一人去捡。就像感情一样,波导被赫维赛德放弃了之后,转头就被另一个人捡了起来。1897年,瑞利爵士(本名: John William Strutt, 爵位是家族继承的男爵,图 3-5)从数学上证明了电磁波在波导中传播是可能的,不过要用到高次模式:横电(TE)和横磁(TM)模式,他同时指出,有无穷多个 TE、TM 模式,且存在截止频率。这里的 TE 模式和 TM 模式就是往波导中塞电磁波时可能存在的两类场分布情况,本质上就是麦克斯韦方程在金属管子中的解。至于截止频率的概念先往后放一放,人生初见,记着这个名词就好。



图 3-5 瑞利爵士(英国,1842—1919)

被瑞利爵士把玩了几天之后,波导在接下来将近 40 年(1897—1936)中,基本被人们逐渐遗忘了。这个也难怪,虽然其间爆发了第一次世界大战,但那场战争基本上还属于拼火力、拼人头的状态,与信息化、电子化完全不沾边,波导自然没什么用武之地。一般来说,这种新潮科技,如果在军事上都用不上,民用就更没戏了,因此被遗忘也属实正常。

故事的下一个转机发生在 1936 年,纽约 AT&T 公司的 George C. Southworth 在一次会议上宣读了关于波导的论文,同一次会议上,MIT 的 W. L. Barrow 宣读了关于圆波导的论文,并提供了波传播的实验验证。至此,波导这样一个简单的金属管子可以用于传输电磁波的事情算是得到 AT&T 和 MIT 两大巨头的双重官方认证了(图 3-6)。大家可以留意一下这个时间点,正是二战打得热火朝天时,而雷达首次应用于战争则是在 1935 年。

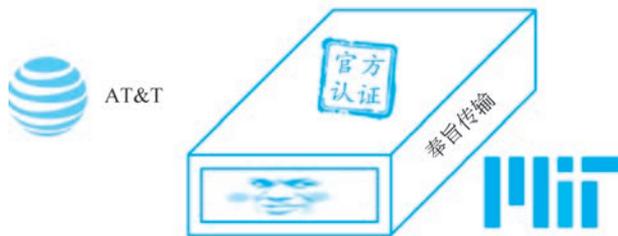


图 3-6 来自 AT&T 和 MIT 两大巨头的双重背书

至此,在经历了被放弃、被捡起、被遗忘、被证实以及被重用等不同境遇之后,波导终于在整个微波传输领域牢牢占据了一席之地。特别是在大功率微波传输场合,结构简单、憨厚老实的波导简直就是不二之选。

### 3.3 如何拿捏波导?

听完波导的故事,就要开始考虑如何对其进行深入研究了。为什么像赫维赛德这样的大佬级人物都会在一开始就否定波导传输微波的可行性?主要就是因为和第2章中学过的传输线结构相比,波导的结构实在是大不相同了,从双导体结构直接变成单导体,搁谁一时间都有点受不了。

好在瑞利爵士对其不抛弃、不放弃,硬生生从数学上给波导找了一条活路。既然TEM这种模式在封闭的波导中肯定不能存在,那就看看有没有别的模式。本着“往前一步是黄昏,退后一步是人生”的信念,TEM不行,TE行不行?TM行不行?别误会,后面一句真不是骂人啊,意思是允许电场或磁场含有沿着传播方向的分量。这样一来,格局马上就打开了。其中,TE就是横电(transverse-electric)模式,没有纵向电场,但是允许有纵向磁场;TM是横磁(transverse-magnetic)模式,没有纵向磁场,但允许有纵向电场。接下来就可以顺着这个思路开展对波导的分析了。

#### 3.3.1 波导分析——纵向场量法

在本章开头就已经铺垫过,分析波导时要用“场”的方法,毕竟对于这样一个单导体结构,连确定的电压和电流都找不到,基尔霍夫的那两条定律也就只能原地退下了。从几何角度来说,波导本质上是一个封闭的规则管状结构,我们要研究的内容就是搞清楚在这个管子中传输微波时其电场磁场是如何分布的。第一次分析波导,与之前的风格一样,弱水三千,只取一瓢,而且一定是最简单、最常用的那一“瓢”——矩形波导(图3-7)。

假定波导沿着 $x$ 轴的边为长边,沿着 $y$ 轴的边为短边,纵向沿着 $z$ 轴方向,为传播方向。我们的目标就是找出波导内部传输微波时其电场和磁场的分布:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_x(x, y, z)\mathbf{a}_x + E_y(x, y, z)\mathbf{a}_y + E_z(x, y, z)\mathbf{a}_z = \mathbf{E}_t + E_z\mathbf{a}_z \\ \mathbf{H} &= H_x(x, y, z)\mathbf{a}_x + H_y(x, y, z)\mathbf{a}_y + H_z(x, y, z)\mathbf{a}_z = \mathbf{H}_t + H_z\mathbf{a}_z \end{aligned} \quad (3.1)$$

其中, $\mathbf{E}_t$ 和 $\mathbf{H}_t$ 是横向场分量, $E_z$ 和 $H_z$ 是纵向场分量。注意,这里仍旧通过假定波随时间作简谐变化来分离时间和空间,因此只考虑波在空间上的分布变化。

求波导内场分布的过程其实就是在一个封闭的矩形管子中求解麦克斯韦方程组的过程,对于这样一个管状的空间,我们通常采用的方法称为纵向场量法<sup>[7]</sup>。为啥叫这个名字呢,因为这种方法是纵向场分量( $E_z$ 和 $H_z$ )为突破口,通过一系列数学操作来搞定整个场分布的表达式。具体的过程如下:

为保证推导过程的简洁性和整体思绪的连贯性,这里先直接上一个数学结论:在正交坐标系中,电场的纵向分量和磁场的纵向分量满足标量亥姆霍兹方程,即

$$\begin{aligned} \nabla^2 E_z + k^2 E_z &= 0 \quad (\text{a}) \\ \nabla^2 H_z + k^2 H_z &= 0 \quad (\text{b}) \end{aligned} \quad (3.2)$$

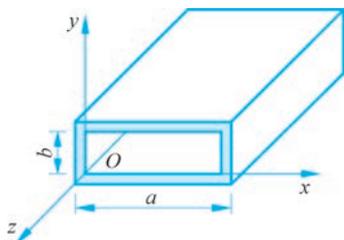


图 3-7 矩形波导结构示意图



视频

其中,  $k = \omega \sqrt{\mu\epsilon}$ 。

至于说为什么会有这个结论,大概是先无脑盲猜矩形波导中的电磁场是波,既然是波,那就归亥姆霍兹管,后来通过推导和实验发现在数学和物理上都说得通,那这事儿就这么定了。解这样一个方程,需要用到分离变量法,令

$$\begin{aligned} E_z(x, y, z) &= E_z(x, y)Z(z) = E_z(T)Z(z) & (a) \\ H_z(x, y, z) &= H_z(x, y)Z(z) = H_z(T)Z(z) & (b) \end{aligned} \quad (3.3)$$

将式(3.3a)代入式(3.2a)后,可得

$$\frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = -\frac{1}{E_z(T)} (\nabla_t^2 + k^2) E_z(T) \quad (3.4)$$

观察式(3.4),左右两边函数的变量完全不一样居然还能保持相等,因此二者只能同时等于某一常数,假设此常数为  $\gamma^2$ ,则有

$$\nabla_t^2 E_z(T) + (k^2 + \gamma^2) E_z(T) = 0 \quad (3.5)$$

$$\frac{d^2 Z(z)}{dz^2} - \gamma^2 Z(z) = 0 \quad (3.6)$$

看着  $\gamma$  是不是有点眼熟? 别怀疑,这就是第2章中那个传播常数  $\gamma$ ,反映波在传播过程中幅度和相位的变化,我们只是从场的角度又把它给推导出来了,再次证明了“路”和“场”的殊途同归。

使用同样的手法,可以得到磁场横向分量满足的表达式,

$$\nabla_t^2 H_z(T) + (k^2 + \gamma^2) H_z(T) = 0 \quad (3.7)$$

式(3.6)是一个二阶齐次常微分方程,通解很简单,就是一个波沿着  $z$  轴传播的形式,

$$Z(z) = A^+ e^{-\gamma z} + A^- e^{\gamma z} \quad (3.8)$$

这个通解形式也并不陌生,波导中传输的是沿着  $+z$  轴和  $-z$  轴两个方向传输的波。鉴于后续整个电磁场表达式的复杂性,我们先主动给自己减负,只考虑沿着  $+z$  轴传播的分量,并且假定波导是无耗的,则有

$$Z(z) = A^+ e^{-j\beta z} \quad (3.9)$$

式(3.5)和式(3.7)则为二维标量亥姆霍兹方程,可以通过再一次分离变量并结合具体的边界条件来求得  $E_z(T)$  和  $H_z(T)$ 。

随时间作简谐变化的场其空间表达式满足微分形式麦克斯韦方程,

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E}(x, y, z) &= -j\omega\mu\mathbf{H}(x, y, z) & (a) \\ \nabla \times \mathbf{H}(x, y, z) &= j\omega\epsilon\mathbf{E}(x, y, z) & (b) \\ \nabla \cdot \mathbf{H}(x, y, z) &= 0 & (c) \\ \nabla \cdot \mathbf{E}(x, y, z) &= 0 & (d) \end{aligned} \quad (3.10)$$

将式(3.1)代入式(3.10),整理后可得

$$E_x = -\frac{1}{k_c^2} \left( j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial y} + j\beta \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \quad (a)$$

$$E_y = \frac{1}{k_c^2} \left( j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial x} - j\beta \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) \quad (\text{b})$$

$$H_x = \frac{1}{k_c^2} \left( j\omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} - j\beta \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \quad (\text{c}) \quad (3.11)$$

$$H_y = -\frac{1}{k_c^2} \left( j\omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} + j\beta \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) \quad (\text{d})$$

其中,  $k_c^2 = k^2 + \gamma^2$ 。

这表明,所有的横向场分量( $E_x, E_y$  以及  $H_x, H_y$ )都可以由纵向场分量( $E_z, H_z$ )通过式(3.11)求出来,而在前述的推导中,我们已经知道了如何求得  $E_z, H_z$ ,因此也可以顺势求出波导中完整的电磁场表达式。

上述纵向场量法的推导过程可以总结为一个流程图,更便于理顺整体逻辑关系,如图3-8所示。

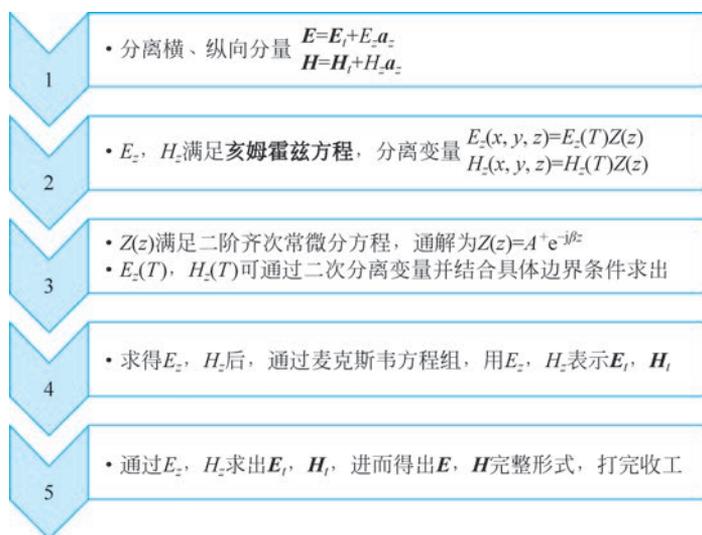


图 3-8 纵向场量法流程图

接下来,就可以根据这个纵向场量法流程图的操作手法,对矩形波导进行进一步剖析了。

### 3.3.2 矩形波导的 TM 模和 TE 模

如前所述,虽然 TEM 模式很简单,电场、磁场和传播方向两两垂直,但在矩形波导这样一个封闭的管子中实在是难以容身,因此我们尝试考虑 TM 或者 TE 的模式,也就是允许在传播方向上出现电场分量或者磁场分量<sup>[8]</sup>。接下来就要对纵向场量法进行实操了。

参照式(3.5)和式(3.7),纵向电磁场分量的横向函数  $E_z(T)$ 和  $H_z(T)$ 满足亥姆霍兹方程,

$$\nabla_t^2 \begin{Bmatrix} E_z(T) \\ H_z(T) \end{Bmatrix} + k_c^2 \begin{Bmatrix} E_z(T) \\ H_z(T) \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.12)$$

对于直角坐标系,在无耗情况下,可展开为

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \begin{Bmatrix} E_z(x,y) \\ H_z(x,y) \end{Bmatrix} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \begin{Bmatrix} E_z(x,y) \\ H_z(x,y) \end{Bmatrix} + k_c^2 \begin{Bmatrix} E_z(x,y) \\ H_z(x,y) \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.13)$$

对  $E_z(x,y)$  采取分离变量法,

$$E_z(x,y) = X(x)Y(y) \quad (3.14)$$

则有

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -k_c^2 \quad (3.15)$$

欲使式(3.15)恒等,左边两项应各等于一个常数,则有

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -k_x^2, \quad \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -k_y^2 \quad (3.16)$$

由此得出

$$X(x) = A_1 e^{-jk_x x} + A_2 e^{jk_x x} \quad (3.17)$$

$$Y(y) = B_1 e^{-jk_y y} + B_2 e^{jk_y y} \quad (3.18)$$

加入纵向电磁场分量的纵向函数  $Z(z)$ ,

$$E_z(T,z) = E_z(T)Z(z) = E_z(x,y)Z(z) \quad (3.19)$$

由此可得电磁场的纵向分量完整形式:

$$E_z = E_z(x,y,z) = (A_1 e^{-jk_x x} + A_2 e^{jk_x x})(B_1 e^{-jk_y y} + B_2 e^{jk_y y})C_1 e^{-j\beta z} \quad (3.20)$$

$$H_z = H_z(x,y,z) = (A_3 e^{-jk_x x} + A_4 e^{jk_x x})(B_3 e^{-jk_y y} + B_4 e^{jk_y y})C_2 e^{-j\beta z} \quad (3.21)$$

其中,  $A_1, B_1, C_1$  等以及  $k_x, k_y$  均为待定的系数,由具体的边界条件和信号的大小决定。

有了  $E_z, H_z$ , 就可以通过式(3.11)来求得完整形式的电磁场表达式了。

以上步骤对于 TM 和 TE 模式都是通用的,接下来就开始要分头行动了,先说 TM 模式。

### 1. TM 模式

TM 模式顾名思义就是横磁(Transverse Magnetic)模,磁场一定要在横截面上,电场的话,其分量可以在横截面上,也可以沿着信号传播的方向。即,  $E_z \neq 0, H_z = 0$ 。这样就可以通过边界条件来确定系数了。对于电场来说,所谓的边界条件,就是金属内壁上,不能有切向的电场分量,即

$$(a_n \times \mathbf{E})|_s = 0 \quad (3.22)$$

具体来说,一共 4 个内壁,全用上,

$$E_z|_{x=0,a} = 0, \quad E_z|_{y=0,b} = 0 \quad (3.23)$$

将式(3.20)代入式(3.23),可得

$$E_z = -4A_2 B_2 C_1 \sin k_x x \sin k_y y e^{-j\beta z} = E_0 \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y e^{-j\beta z} \quad (3.24)$$

其中,  $m=1,2,3,\dots$ ,  $n=1,2,3,\dots$ ,  $E_0 = -4A_2B_2C_1$ 。  $E_0$  为某种模式的幅度, 由 TM 模式的激励信号来决定。

因为  $H_z=0$ , 将式(3.24)代入式(3.11)可以求得电磁场的横向分量,

$$\mathbf{E}_t = \frac{-j\beta}{k_c^2} \left( \frac{\partial E_z}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial E_z}{\partial y} \mathbf{a}_y \right) = E_x \mathbf{a}_x + E_y \mathbf{a}_y \quad (3.25)$$

$$= \frac{-j\beta}{k_c^2} E_0 \left( \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \mathbf{a}_x + \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \mathbf{a}_y \right) e^{-j\beta z}$$

$$\mathbf{H}_t = \frac{-j\omega\epsilon}{k_c^2} \left( -\frac{\partial E_z}{\partial y} \mathbf{a}_x + \frac{\partial E_z}{\partial x} \mathbf{a}_y \right) = H_x \mathbf{a}_x + H_y \mathbf{a}_y \quad (3.26)$$

$$= \frac{j\omega\epsilon}{k_c^2} E_0 \left( \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \mathbf{a}_x - \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \mathbf{a}_y \right) e^{-j\beta z}$$

至此, TM 模式下电磁场的所有场分量都已经到齐了, 就是式(3.24)、式(3.25)和式(3.26)所示的那样。不用多说, 大家肯定已经开始头皮发麻了, 所以也就不再把它们写在一起了, 不然看着更难受。

尽管形式上很复杂, 但是我们还是硬着头皮看一下, 最起码要先有一个整体的感性了解。

首先我们要建立一个认知, TM 模并不是一个模式, 而是一类模式, 说明在这个波导空间中不但可以传输电磁波, 而且还用无数种模式花样传输电磁波, 每个数字  $m$  和  $n$  的组合就代表了一种 TM 模式, 所以要具体指出哪种模式时, 需要加一个脚标,  $\text{TM}_{mn}$ 。想用哪种模式传输, 只要搞清了该种模式的场分布, 然后在合适的位置给出一个合适的电场激励或者磁场激励即可。

通过式(3.24)、式(3.25)和式(3.26)可知,  $m$  和  $n$  只要有一个是 0, 三个式子都会直接归 0, 因此,  $\text{TM}_{mn}$  最低次模就是  $\text{TM}_{11}$ 。

$E_z$  和  $\mathbf{H}_t$  二者叉乘后对应的传播方向在横截面上, 且并不能产生实的功率密度, 因此沿着  $x$  轴或者  $y$  轴, 电磁场呈驻波分布, 也就是有的位置振幅可以很大, 有的位置振幅就小到 0, 电场或磁场振幅从 0 到最大再到 0 的变化过程为一个半波变化。 $m$  代表沿着  $x$  轴的半波变化个数,  $n$  代表沿着  $y$  轴的半波变化个数。

横截面中的电场  $\mathbf{E}_t$  和磁场  $\mathbf{H}_t$  倒是很般配, 二者可以直接叉乘出一个沿着  $z$  轴方向传播的行波, 且对应的功率密度是实的, 这也正是电磁波可以在波导中传播的部分。

## 2. TE 模式

TE 模式顾名思义就是横电(Transverse Electric)模, 电场一定要在横截面上, 磁场的话, 可以在横截面上, 也可以沿着信号传播的方向, 即  $H_z \neq 0, E_z = 0$ 。对于 TE 模, 直接通过边界条件确定系数时稍显尴尬, 因为对于磁场来说, 导体内壁上的边界条件要求的是法向磁场为 0, 而  $H_z$  对于内壁来说是切向磁场, 本身就可以不为 0。为此, 我们采取的策略就是: 脸皮一厚, 硬往上凑。既然法向磁场要求是 0, 对于波导内壁短边来说,  $H_x$  就是法向分量, 对于内壁长边来说,  $H_y$  也是法向分量, 用  $H_z$  通过式(3.11c,d)把  $H_x$  和  $H_y$  硬凑出来, 再套入边界条件即可。

$$H_x = -j \frac{\beta}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{\beta k_x}{k_c^2} (-A_3 e^{-jk_x x} + A_4 e^{jk_x x}) (B_3 e^{-jk_y y} + B_4 e^{jk_y y}) C_3 e^{-j\beta z} \quad (3.27)$$

$$H_y = -j \frac{\beta}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} = \frac{\beta k_y}{k_c^2} (A_3 e^{-jk_x x} + A_4 e^{jk_x x}) (-B_3 e^{-jk_y y} + B_4 e^{jk_y y}) C_3 e^{-j\beta z} \quad (3.28)$$

这时再利用边界条件就丝滑多了

$$H_x |_{x=0,a} = 0, \quad H_y |_{y=0,b} = 0 \quad (3.29)$$

将式(3.27)和式(3.28)代入式(3.29)可得

$$A_3 = A_4, \quad B_3 = B_4, \quad k_x = \frac{m\pi}{a}, \quad k_y = \frac{n\pi}{b} \quad (3.30)$$

其中,  $m=0,1,2,3,\dots$ ,  $n=0,1,2,3,\dots$ 。由此可得到

$$H_z = 4A_3 B_3 C_3 \cos k_x x \cos k_y y e^{-j\beta z} = H_0 \cos \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y e^{-j\beta z} \quad (3.31)$$

其中,  $H_0 = 4A_3 B_3 C_3$ , 由 TE 模式的激励信号决定。

有了  $H_z$ , 就可以通过式(3.11)来求出横向场分量的表达式了,

$$\mathbf{E}_t = \frac{j\omega\mu}{k_c^2} \left( -\frac{\partial H_z}{\partial y} \mathbf{a}_x + \frac{\partial H_z}{\partial x} \mathbf{a}_y \right) = E_x \mathbf{a}_x + E_y \mathbf{a}_y \quad (3.32)$$

$$= \frac{j\omega\mu}{k_c^2} H_0 \left( \frac{n\pi}{b} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \mathbf{a}_x - \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \mathbf{a}_y \right) e^{-j\beta z}$$

$$\mathbf{H}_t = \frac{-j\beta}{k_c^2} \left( \frac{\partial H_z}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial H_z}{\partial y} \mathbf{a}_y \right) = H_x \mathbf{a}_x + H_y \mathbf{a}_y \quad (3.33)$$

$$= \frac{j\beta}{k_c^2} H_0 \left( \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \mathbf{a}_x + \frac{n\pi}{b} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \mathbf{a}_y \right) e^{-j\beta z}$$

与 TM 模式相类似, TE 模也不是一个单一的模式, 而是一类模式, 要唯一地指出某一个具体的 TE 模, 也要加上脚标,  $\text{TE}_{mn}$ 。与 TM 模式不同的是, TE 模的脚标可以从 0 开始, 也就是可以有  $\text{TE}_{10}$  或者  $\text{TE}_{01}$  模式的存在。当然,  $m$  和  $n$  也不能同时为 0, 否则式(3.31)~式(3.33)还是会瞬间归零。

### 3.3.3 矩形波导的高通特性

说完 TM 和 TE 模式, 用矩形波导这么一个封闭的管子来传微波这件事儿在数学上算是有了定论。不仅能传, 还能用无数种花样来传, 对应着无数个模式。是不是已经按捺不住激动的心和颤抖的手, 准备拿着微波就往波导里面灌了? 事情往往没这么简单, 当你真正用波导传输微波时, 就会发现一个很奇特的现象, 对于某一种传输模式来说, 只有信号频率够高, 才能传, 频率低于某个值时, 波导是拒绝的, 这个值称为截止频率, 前面介绍过。也就是说, 波导对于电磁波有高通的特性(图 3-9), 是不是很离谱?

至于为什么会产生这种高通的现象呢, 这就要从  $k_c$ 、 $k$  和  $\gamma$  这几个物理量说起了。

(1) 先说  $k$ , 就是前面说过的波数(wave number), 是由波的频率和传输媒质的属性所决定的, 即

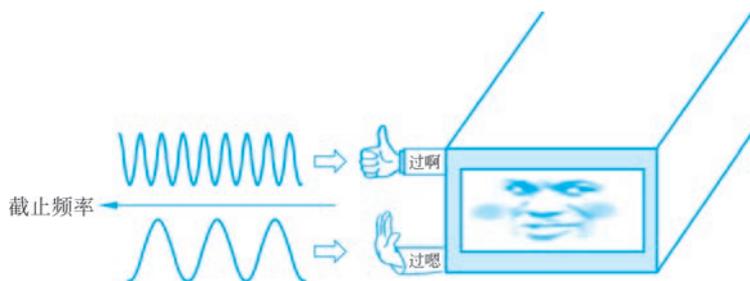


图 3-9 波导的高通特性

$$k = \omega \sqrt{\mu\epsilon} \quad (3.34)$$

这个量从麦克斯韦方程时空分离时就跟着了,在亥姆霍兹方程中更是各种露脸。

(2) 接着说  $\gamma$ , 这就是传播常数, 其虚部  $\beta$  称为相位常数。从式(3.8)可以看出其实部和虚部分别代表波沿着  $z$  轴传播时, 幅度和相位随空间位置的变化快慢。无耗的情况下,  $\gamma = j\beta$ 。

(3) 最后说  $k_c$ ,

$$k_c^2 = k^2 + \gamma^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \quad (3.35)$$

这个值叫截止波数(cutoff wave number), 不同的模式对应着不同的  $k_c$ 。之前在 TEM 模式中是见不到  $k_c$  的, 因为在 TEM 模式下,  $k = \beta$ , 即  $k_c = 0$ 。然而, 在 TE 和 TM 模式下,  $k_c$  就不能再是 0 了, 不然的话, 纵向场量法中的式(3.11)从一开始就要出问题了, 因为  $k_c$  直接出现在了分母的位置。此外, 通过式(3.35)还可以看出,  $k_c$  主要由 TE 和 TM 模式的编号  $m, n$  以及波导的尺寸  $a, b$  来决定。

把式(3.35)改成另外一种形式会更容易解释接下来的问题, 即

$$\beta^2 = k^2 - k_c^2 \quad (3.36)$$

这个式子给出了一个重要的信息:  $k$  一定要大于  $k_c$  才行。为什么呢? 假设  $k < k_c$ , 那么  $\beta$  就变成了虚数, 而式(3.9)中就会出现随着  $z$  的变化, 原本是相位的变化, 结果现在成了幅度的变化, 而且无源情况下幅度肯定是迅速衰减的(此时  $\beta$  是一个负的虚数), 肯定是不能传输的, 这就是截止(cutoff)的含义。模式  $(m, n)$  和波导尺寸  $(a, b)$  定下来了,  $k_c$  就定下来了, 那对应的门槛就定下来了,  $k$  要高于这个门槛, 即频率  $f$  要高于某一个值 ( $\omega = 2\pi f$ ), 这个值就称为截止频率  $f_c$ 。

$$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{k_c}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \quad (3.37)$$

可见, 一旦确定了波导尺寸  $(a, b)$ , 波导内填充媒质  $(\mu, \epsilon)$  和具体模式  $(m, n)$ , 截止频率就确定下来了, 信号只有高于这个频率才能够进入波导进行传输。此处请注意,  $TE_{mn}$  和  $TM_{mn}$  模式的截止频率计算公式是一样的, 只要脚标编号相同就具有同样的截止频率。

有截止频率就有截止波长, 可以通过下式求出,

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{k_c} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}} \quad (3.38)$$

所以下次微波信号再想进入波导,至少得先扪心自问一下,频率够高么?波长够短吗?这里可以通过一个具体的例子将波导“嫌低爱高,嫌长爱短”的特性好好展现一下。

由于在微波传输中的重要地位,波导也是有国标的,不同的型号对应着不同的尺寸和适用频率范围。在工程应用中,考虑到传输损耗、传输功率等实际因素,一般波导的长边和短边的大小关系为  $a > 2b$ ,略大于,这个是常识,需要记住。以型号为 BJ-32 的标准波导为例,其尺寸  $a \times b = (72.14 \times 34.04) \text{mm}^2$ ,空气填充,由式(3.38)可求出其不同模式下的截止波长  $\lambda_{\text{cmm}}$ ,以波长为横轴,可以画出一个不同模式下截止波长的分布图,由此可以非常直观地看出 BJ-32 波导对于不同传输模式、不同信号波长的态度。

由图 3-10 可以看出,对于波长大于  $2a = 14.28 \text{cm}$ (频率低于  $2.1 \text{GHz}$ )的微波信号, BJ-32 波导是彻底拒绝的,用啥模式都不好使,这个叫截止区;当波长在  $a$  和  $2a$  之间时,只有  $\text{TE}_{10}$  模式可以传输,其他的模式不可以,这个叫单模传输区,在实际工程应用中,波导绝大部分情况下都是工作在这个区域,因为这个区域的模式很确定,肯定是  $\text{TE}_{10}$ ,不会有其他高次模式的出现;当信号的波长小于  $a$  时,各种高次模式就可能逐个出现了,显然,  $m, n$  的值越大,所对应的截止波长就越短,截止频率就越高。不难看出,各种模式都算在内,  $\text{TE}_{10}$  模式是最低次的,也是最特殊的,我们把它称为矩形波导的基模或主模。鉴于  $\text{TE}_{10}$  模在理论和实际中的重要性,我们将在后续用一个小节来细细品它。

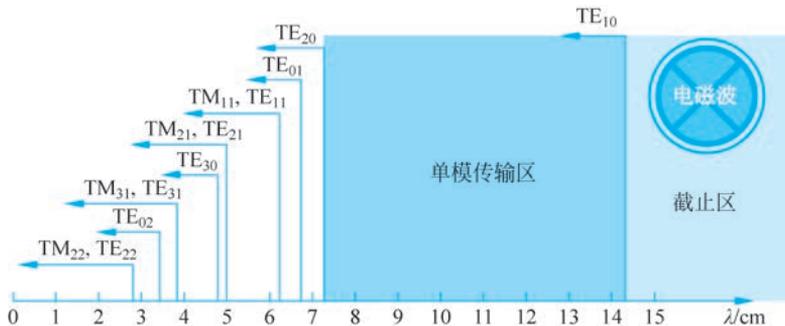


图 3-10 BJ-32 波导不同模式截止波长分布图



视频

### 3.3.4 矩形波导的传输参量

微波信号的频率达到准入门槛之后,就可以开心地进入波导进行传输了,这时就不免要关心一下在波导中传输时,速度是多少?波长怎么算?这些问题在传输线时没有深入探究,是因为“路”的分析方法中,默认波就是 TEM 模式,速度和波长计算起来和空间波没什么差别。然而,涉及波导中,情况就稍显复杂了。

#### 1. 相速度 $v_p$ 和群速度 $v_g$

沿着  $z$  轴传输的导行波其等相位面移动的速度就称为相速度(phase velocity),根据

式(3.36)可以算出微波在波导中传输时的相速度为

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\sqrt{k^2 - k_c^2}} = \frac{v}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}} \quad (3.39)$$

这个速度由于只是单一频点波的某一相位的传播速度,并不携带能量,因此可以大于媒质中的光速  $v$ 。

而真正可以表征电磁波能量传输速度的则是群速度(group velocity),其代表了频率和相位都很接近的一群波的传播速度,其计算式为

$$v_g = v\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2} \quad (3.40)$$

显然,群速度是小于媒质中的光速的。需要注意的是,在 TE 和 TM 模式下,无论相速度还是群速度,都是随着信号的波长(或频率)的变化而变化的,因此是色散波。而对于 TEM 模式来说,等相位面的传播和能量的传播是同步的,截止波长  $\lambda_c$  无穷大,其传输速度就是光速,与频率无关,是非色散波。

关于相速度和群速度的概念,可以观察调幅波的动图(别往下找,没有,直接上网搜),盯着某一个波峰或者波谷看,其移动的速度就是相速度;盯着一个包络看,包络移动的速度就是群速度。如果还是觉得不够直观,那就类比一下搬砖,一堆砖你要从 A 点全搬到 B 点,单个砖块移动的速度大概就是相速度,整个砖堆移动的速度就类似于群速度。如果还是不明白,那就安心搬砖,没必要跟这个较劲。

## 2. 波导波长 $\lambda_g$

波导波长定义为波导中的波在一个周期的时间内沿  $z$  轴传输的距离,记为  $\lambda_g$ ,其计算式为

$$\lambda_g = v_p T = \frac{v_p}{f} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}} \quad (3.41)$$

可以看出,TE 和 TM 模式的波导波长计算式是相同的,相比于自由媒质中传输的 TEM 波的波长  $\lambda$  要长一些的,毕竟相速度高于光速,在一个周期内的传播距离也会更远。

## 3. 波阻抗

阻抗的概念是电压和电流的比值,在第 2 章中很是常见,但是由于波导是用“场”的方法来分析的,且波导内部的电磁场并不均匀,无法通过积分找到确定的电压或者电流,因此这里采用波阻抗的概念,是横向的电场  $E_t$  和磁场  $H_t$  的比值。

$$Z_{\text{TM}} = \frac{E_t}{H_t} = \frac{\beta}{k} Z_{\text{TEM}} \quad (3.42)$$

$$Z_{\text{TE}} = \frac{E_t}{H_t} = \frac{k}{\beta} Z_{\text{TEM}} \quad (3.43)$$

其中,  $Z_{\text{TEM}}$  是 TEM 模式下的波阻抗,在真空中为  $120\pi$ 。对于 TM 模来说,由于磁场都集中在横截面上,导致电场比磁场时,分母更大一些,因此 TM 模的波阻抗  $Z_{\text{TM}}$  相比于  $Z_{\text{TEM}}$  更小;对于 TE 模式来说,由于电场都集中在横截面上,因此 TE 模的波阻抗  $Z_{\text{TE}}$  相比于  $Z_{\text{TEM}}$  更大。



视频

### 3.3.5 矩形波导的基模: $TE_{10}$

前面说到过,所有模式中最靓的那个仔就是  $TE_{10}$  模式,也是矩形波导的主模(图 3-11)。这个倒也不是硬捧, $TE_{10}$  模式之于矩形波导就是最重要的,没有之一。原因主要有以下几个:

(1)  $TE_{10}$  是唯一可以实现单模传输的模式,通俗点讲就是“我能传你们不一定能传,我不能传你们都别想传”。不要小看单模传输,每个模式都有不同的场分布,越高次场分布就越复杂,因此微波工程师是很不待见高次模的,根据图 3-10 适当地选择一个波导的工作频段范围,使得其中只有最简单的  $TE_{10}$  模式难道不香吗?

(2)  $TE_{10}$  模式下波导的尺寸可以最小。根据式(3.37)可知,如果工作频率确定了,那么截止频率就要低于这个工作频率以保证可以传输,此时,模次越高, $m$ 、 $n$  就越大,那么就相应地要求  $a$  和  $b$  也要变大才能使得截止频率足够低,因此,越高次模就越需要越大的波导尺寸。作为最低次模的  $TE_{10}$  则可以在相对更小的波导中传播,又省空间又省材料难道不香吗?



图 3-11 矩形波导的主模—— $TE_{10}$  模

稍微努力思考一下就可以脑补出场分布的情形,难道不香吗?

了解了  $TE_{10}$  的江湖地位之后,就可以按照 3.3.4 节的结果对其进行全方位拿捏了。

#### 1. 截止频率和截止波长及其他传输参量

$$\text{截止频率: } f_{c10} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{0}{b}\right)^2} = \frac{v}{2a} \quad (3.44)$$

$$\text{截止波长: } \lambda_{c10} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{0}{b}\right)^2}} = 2a \quad (3.45)$$

$$\text{相速度和群速度: } v_{p10} = \frac{v}{\sqrt{1 - (\lambda/2a)^2}}, \quad v_{g10} = v\sqrt{1 - (\lambda/2a)^2} \quad (3.46)$$

$$\text{波导波长: } \lambda_{g10} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (\lambda/2a)^2}} \quad (3.47)$$

$$\text{波阻抗: } Z_{TE10} = \frac{Z_{TEM}}{\sqrt{1 - (\lambda/2a)^2}} \quad (3.48)$$

#### 2. 场结构

将  $m=1, n=0$  代入式(3.31)~式(3.33),可得  $TE_{10}$  模的各个场分量表达式为

$$\left. \begin{aligned} H_x &= j \frac{\beta a}{\pi} H_0 \sin \frac{\pi}{a} x e^{-j\beta z} \\ H_z &= H_0 \cos \frac{\pi}{a} x e^{-j\beta z} \\ E_y &= -j \frac{\omega \mu a}{\pi} H_0 \sin \frac{\pi}{a} x e^{-j\beta z} \end{aligned} \right\} \quad (3.49)$$

将时间的信息加入进去的话,就变成

$$\left. \begin{aligned} H_x &= j \frac{\beta a}{\pi} H_0 \sin \frac{\pi}{a} x \sin(\omega t - \beta z) \\ H_z &= H_0 \cos \frac{\pi}{a} x \cos(\omega t - \beta z) \\ E_y &= -j \frac{\omega \mu a}{\pi} H_0 \sin \frac{\pi}{a} x \sin(\omega t - \beta z) \end{aligned} \right\} \quad (3.50)$$

上面的式子虽然已经尽量简洁,但终究还是有点抽象,需要和更形象的图 3-12 和图 3-13 配合使用。

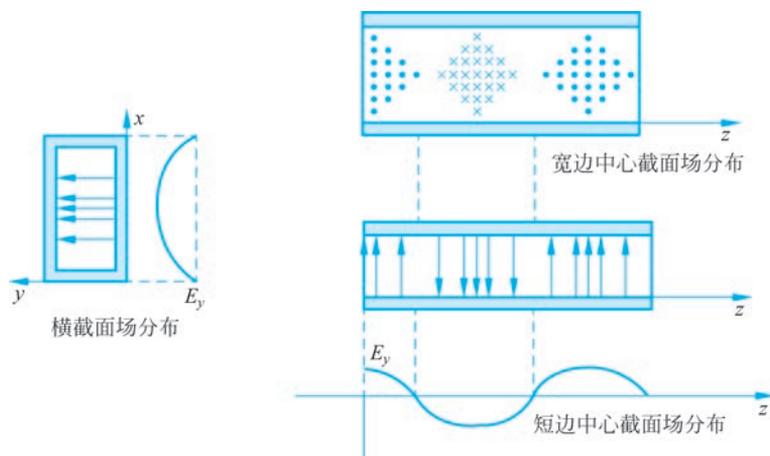


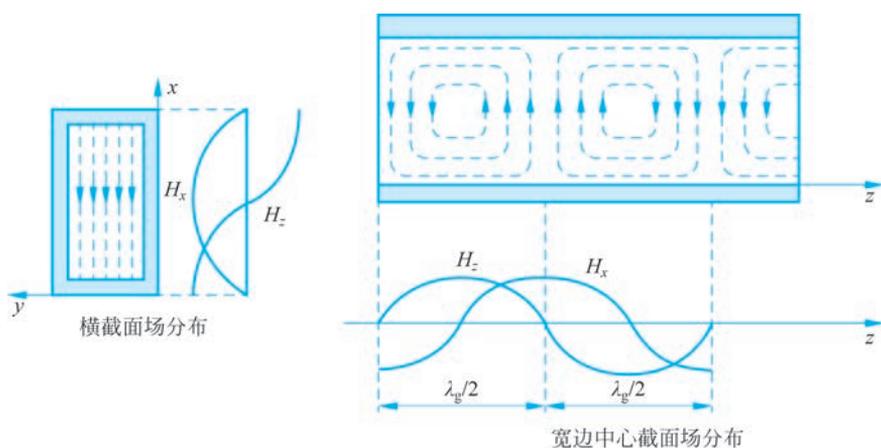
图 3-12 矩形波导  $TE_{10}$  模的电场分布( $E_y$ )

根据式(3.49)可以看出,  $TE_{10}$  模电场只有  $E_y$  分量, 磁场则有  $H_x$  和  $H_z$  分量, 因为  $n=0$ , 因此电磁场沿着  $y$  轴是均匀的, 没有变化。如图 3-12 所示, 电场分量  $E_y$  沿着  $x$  轴呈正弦变化, 且从  $x=0$  到  $x=a$  呈现从 0 到最大值再到 0 的一个半波变化( $m=1$ )。此外, 电场分量  $E_y$  沿着  $z$  轴也呈正弦分布, 其分布周期就是我们之前提到的波导波长  $\lambda_g$ 。

如图 3-13 所示, 磁场分量  $H_x$  沿着  $x$  轴呈正弦分布, 和  $E_y$  有点像, 也是两头为 0, 中间最大, 经历一个半波变化( $m=1$ )。  $H_x$  沿着  $z$  轴也呈正弦分布, 其分布周期也是波导波长  $\lambda_g$ 。

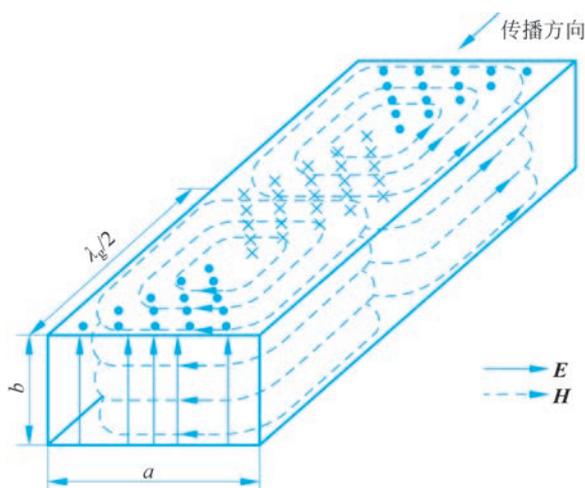
磁场分量  $H_z$  沿着  $x$  轴呈余弦分布, 两头最大, 中间为 0, 沿着  $z$  轴也呈余弦分布, 分布周期为波导波长  $\lambda_g$ 。

磁场的两个分量  $H_x$  和  $H_z$ , 一个是正弦分布, 另一个是余弦分布, 因此表现出“你大我小, 你小我大”的对应规律, 叠加之后, 就会形成打圈圈的磁场, 相邻的两个圈圈旋转的

图 3-13 矩形波导  $TE_{10}$  模的磁场分布 ( $H_y$  和  $H_z$ )

方向相反,构成一个波导波长  $\lambda_g$ ,因此在波导中,电场像沿着短边的一根根柱子,顶天立地;磁场则像一个个轮子,旋转前行。两个磁场“轮子”构成一个波导波长  $\lambda_g$ ，“轮子”之间的交界处电场最强。

将电场和磁场画到一起,就形成了图 3-14 所示的透视图,电磁波以  $TE_{10}$  模式进入波导之后,电场沿着  $y$  轴方向时上时下,磁场则打着圈圈,电场和磁场就这样相互激励着一路前行。

图 3-14 矩形波导  $TE_{10}$  模电磁场分布透视图

注意,图 3-12~图 3-14 相当于给电磁场拍的一幅照片,是定格在某一个时间点的,至于场随着时间是如何变化的,可以根据式(3.50)自行脑补,如果实在脑补不能,也可以自学一下 HFSS、CST 等电磁仿真软件,软件中可以生成动画,看着还挺带劲的。

为什么要花这么大力气来了解波导内部  $TE_{10}$  模式的场分布呢? 因为只有了解了场的分布,很多实际的工作才可以开展,比如怎样激励出  $TE_{10}$  模式的波? 波导和其他类型传输线之间的转接如何设计? 等等。这些在实际工程中经常会遇到的问题都要以充分

了解波导内部电磁场的分布为基础来解决。以  $TE_{10}$  模的激励为例,如果知道了电场在某个地方应该是什么样子的,我们就可以用一个小探针放在相应的位置去激励这样一个电场,然后电场带动磁场,磁场带动电场,相应的模式就形成了。当然也可以用小磁环或者孔缝等结构在合适地方激励出相应的磁场,进而形成我们需要的模式。

### 3. $TE_{10}$ 模式的面电流分布

之前提到过波导内部没有唯一确定的电压和电流,但并不代表完全没有电压和电流,只是因为场结构较为复杂,在一个区域去对电场或者磁场进行积分,处处都能积出不同的电压或者电流。由于趋肤效应,波导内壁上感应出的高频电流只在其内壁表面上流动,接下来将对波导内壁上的面电流分布进行介绍。面电流的分布取决于波导内壁表面附近的磁场分布,因此面电流密度  $\mathbf{J}_s$  可以这样计算:

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{a}_n \times \mathbf{H}_\tau \quad (3.51)$$

其中,  $\mathbf{a}_n$  为内壁表面法向方向的单位矢量,  $\mathbf{H}_\tau$  是内壁表面出的切向磁场分量。

在  $y=0, y=b, x=0, x=a$  的各个内壁上,均可以通过式(3.51)来计算相应的表面电流,结果如下,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{J}_s |_{y=0} &= (\mathbf{a}_y \times \mathbf{H}) |_{y=0} = \left( H_0 \cos \frac{\pi}{a} x \mathbf{a}_x - j \frac{\beta a}{\pi} H_0 \sin \frac{\pi}{a} x \mathbf{a}_z \right) e^{-j\beta z} \\ \mathbf{J}_s |_{y=b} &= -\mathbf{J}_s |_{y=0} = \left( -H_0 \cos \frac{\pi}{a} x \mathbf{a}_x + j \frac{\beta a}{\pi} H_0 \sin \frac{\pi}{a} x \mathbf{a}_z \right) e^{-j\beta z} \\ \mathbf{J}_s |_{x=0} &= (\mathbf{a}_x \times \mathbf{H}) |_{x=0} = -H_0 e^{-j\beta z} \mathbf{a}_y \\ \mathbf{J}_s |_{x=a} &= \mathbf{J}_s |_{x=0} = -H_0 e^{-j\beta z} \mathbf{a}_y \end{aligned} \right\} \quad (3.52)$$

由式(3.52)可知,波导宽壁上下内表面上的电流由两个分量构成,两个壁上的电流图案相同,方向相反。窄壁上的电流分布都是沿着  $y$  轴方向,两个壁上的电流方向是完全相同的。

更直观的面电流分布可以看图 3-15,在宽壁上,有的位置就像“泉眼”,电流咕嘟嘟往

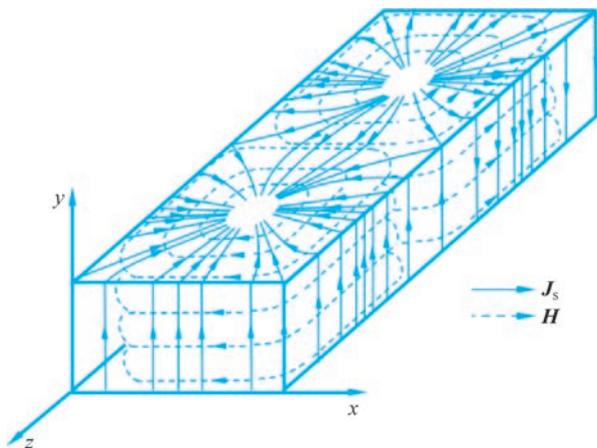


图 3-15 矩形波导  $TE_{10}$  模磁场及内壁面电流分布

外冒,有的地方就像“黑洞”,电流都往里流。上面宽壁是“泉眼”的位置,正下方的宽壁上就是“黑洞”,电流或者通过宽壁的面从一个“泉眼”流向相邻的“黑洞”,或者通过窄壁的面从一个“泉眼”流向正下方的“黑洞”。

了解了面电流的分布,有一个非常直观的好处,就是可以给波导进行开缝操作了。开缝?这在实际工程应用中还真的是一个常规操作。给波导开缝就好像给人开刀,医生必须深入了解人体的结构,不然的话一不小心割破了血管,后果很严重。面对波导也是如此,我们有时会希望在不影响场结构的情况下,给波导开个缝,然后把探针放进去,探测一下里面的场强,从而可以得到驻波比之类的参数,这时就要沿着电流的方向去开一条细细的缝,这样既不影响波导内的信号传输,又不造成波的泄漏,比如波导驻波测量线就是利用这种办法,在宽壁的中心线上开缝。当然,对于工程师来说,有不想让信号泄漏出来的,就有想让信号泄漏出来的,比如搞天线的工程师,做梦都想让信号更多地泄漏出去,只不过这时不叫泄漏,叫辐射。因此拿到波导之后,天线工程师的开缝原则就是哪里电流强切哪里,横着切,一定要把电流切断的那种,这就是波导缝隙天线,也是目前天线大家族中比较拉风的一类。两种切法,如图 3-16 所示,充分体现了同一个波导的两种妙用,颇有些庄子“齐物”的妙处,东西还是同一个东西,成为什么样的“器”完全就是人为决定了。

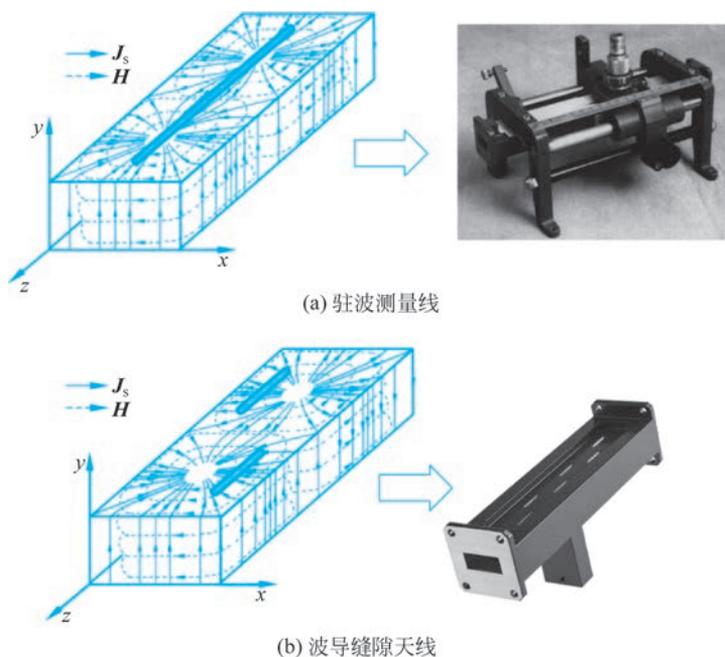


图 3-16 同一个波导的两种妙用

以上基本就把矩形波导的相关内容介绍得差不多了,当然,圆波导在实际中也有一定的应用,鉴于其大体套路和矩形波导没有本质区别,同时鉴于其数学推导的烦琐更甚于矩形波导,因此本书决定避其锋芒,仅作简单介绍,不再过多赘述。

### 3.3.6 圆波导的浅尝辄止

了解了矩形波导,对于波导的整体认知也就建立起来了,实际中矩形波导的应用也是最为广泛的。当然,既然都讲波导了,不提一下圆波导终归感觉有点儿不太好意思,但是如果讲得太深入也有点儿力不从心,因此本小节对圆波导浅尝辄止,顺着矩形波导的思路,大概了解一下圆波导的特点即可。

既然是圆波导,那么横截面上的场分布再用直角坐标系就不太合适了,不过传播方向上的确还是要用  $z$  轴的,因此,分析圆波导一般就用柱坐标系,如图 3-17 所示,对于圆波导的数学分析也没什么新的东西,本质上也是在柱坐标系中去解亥姆霍兹方程,遵循上面说过的纵向量法的流程,最终解出的圆波导中传播的模式有两种,分别称为  $TE_{mn}$  模(H模)以及  $TM_{mn}$  模(E模),因为横截面也是二维的,且沿着  $R$  或者  $\varphi$  的方向都有可能变化,因此脚标也是两个数,  $m$  和  $n$ 。这里略去推导过程,直接给出结果。

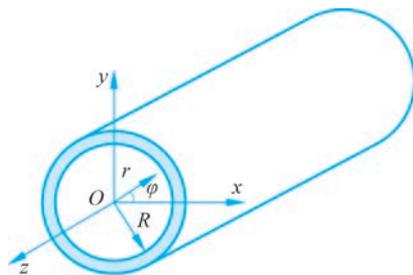


图 3-17 柱坐标系中的圆波导

#### 1. 模式的场表达式与截止波长

对于圆波导中  $TM$  模(E模),  $H_z = 0, E_z \neq 0$ , 其场的横向分量表达式为

$$\begin{aligned} E_t &= -\frac{j\beta}{k_c^2} \nabla_t E_z = -\frac{j\beta}{k_c^2} \left( \frac{\partial E_z}{\partial r} \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} \mathbf{a}_\varphi \right) = E_r \mathbf{a}_r + E_\varphi \mathbf{a}_\varphi \\ &= -\frac{j\beta}{k_c} E_0 J'_m(k_c r) \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases} e^{-j\beta z} \mathbf{a}_r \pm \frac{j\beta m}{k_c^2 r} E_0 J_m(k_c r) \begin{cases} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{cases} e^{-j\beta z} \mathbf{a}_\varphi \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} H_t &= -\frac{j\omega\epsilon}{k_c^2} \mathbf{a}_z \times \nabla_t E_z = -\frac{j\omega\epsilon}{k_c^2} \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} \mathbf{a}_r + \frac{\partial E_z}{\partial r} \mathbf{a}_\varphi \right) = H_r \mathbf{a}_r + H_\varphi \mathbf{a}_\varphi \\ &= \mp \frac{j\omega\epsilon m}{k_c^2 r} E_0 J_m(k_c r) \begin{cases} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{cases} e^{-j\beta z} \mathbf{a}_r - \frac{j\omega\epsilon}{k_c} E_0 J'_m(k_c r) \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases} e^{-j\beta z} \mathbf{a}_\varphi \end{aligned} \quad (3.54)$$

其中,  $J_m(k_c R) = 0$  为第一类  $m$  阶贝塞尔函数,  $k_c$  是截止波数, 由边界条件决定, 这里的边界条件是指圆波导的内壁上, 切向电场为零这类已知条件, 即  $r = R$  时,  $E_z = 0, E_\varphi = 0$ , 根据截止波数可得截止波长为

$$(\lambda_c)_{TM_{mn}} = \frac{2\pi R}{\nu_{mn}} \quad (3.55)$$

其中,  $\nu_{mn} = k_c R$ , 是  $m$  阶贝塞尔函数的第  $n$  个根, 这种函数虽然工科学生看着复杂, 但是理学院的那帮学数学的学生已经贴心地把表都给制好了, 可通过查表得到  $\nu_{mn}$  的值, 如表 3-1 所示。

表 3-1 部分  $\nu_{mn}$  的值

$m$	$n$		
	1	2	3
0	2.405	5.520	8.654
1	3.832	7.016	10.173
2	5.135	8.417	11.620
3	6.379	9.761	12.015

同样地,对于圆波导中 TE 模(E 模), $E_z = 0, H_z \neq 0$ ,其场的横向分量表达式为

$$E_t = \frac{j\omega\mu}{k_c^2} \mathbf{a}_z \times \nabla_t H_z = \frac{j\omega\mu}{k_c^2} \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \mathbf{a}_r + \frac{\partial H_z}{\partial r} \mathbf{a}_\varphi \right) = E_r \mathbf{a}_r + E_\varphi \mathbf{a}_\varphi \quad (3.56)$$

$$= \pm \frac{j\omega\mu m}{k_c^2 r} H_0 J_m(k_c r) \begin{Bmatrix} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{Bmatrix} e^{-j\beta z} \mathbf{a}_r + \frac{j\omega\mu}{k_c} E_0 J'_m(k_c r) \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix} e^{-j\beta z} \mathbf{a}_\varphi$$

$$H_t = -\frac{j\beta}{k_c^2} \nabla_t H_z = -\frac{j\beta}{k_c^2} \left( \frac{\partial H_z}{\partial r} \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \mathbf{a}_\varphi \right) = H_r \mathbf{a}_r + H_\varphi \mathbf{a}_\varphi \quad (3.57)$$

$$= -\frac{j\beta}{k_c} H_0 J'_m(k_c r) \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix} e^{-j\beta z} \mathbf{a}_r \pm \frac{j\beta m}{k_c^2 r} H_0 J_m(k_c r) \begin{Bmatrix} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{Bmatrix} e^{-j\beta z} \mathbf{a}_\varphi$$

截止波长为

$$(\lambda_c)_{\text{TE}_{mn}} = \frac{2\pi R}{\mu_{mn}} \quad (3.58)$$

其中, $\mu_{mn} = k_c R$ ,是  $m$  阶贝塞尔函数导数的第  $n$  个根,其值同样可通过查表得到,如表 3-2 所示。

表 3-2 部分  $\mu_{mn}$  的值

$m$	$n$		
	1	2	3
0	3.832	7.016	10.173
1	1.841	5.332	8.536
2	3.054	6.705	9.969
3	4.201	8.015	11.346

## 2. 最低次模 $\text{TE}_{11}$ 的场结构

既然有截止波长,说明圆波导也有高通特性,根据式(3.55)和式(3.58)可算出不同模式的截止波长,如图 3-18 所示。当然,通过截止波长还是以一溜烟儿算出截止频率  $f_c$ 、相移常数  $\beta$ 、相速度  $v_p$ 、群速度  $v_g$ 、波导波长  $\lambda_g$ 、波阻抗  $Z$  等参数,这里不再赘述。

可见,按照截止波长来看,在所有模式中, $\text{TE}_{11}$  模式是最低次模,其截止波长最长,但是和矩形波导不同的是,我们一般不太情愿将圆波导  $\text{TE}_{11}$  模式称为主模,这是因为就算在实际应用中, $\text{TE}_{11}$  模也不能算是最常用的,在  $\text{TE}_{11}$  之外,大家反而还会选择用  $\text{TM}_{01}$  和  $\text{TE}_{01}$  两种,这就和矩形波导的情况非常不一样了,毕竟在矩形波导中, $\text{TE}_{10}$  模简直就像神一样的存在,如果工程师不是为了博出位或者脑子被夹了,一般不会用  $\text{TE}_{10}$

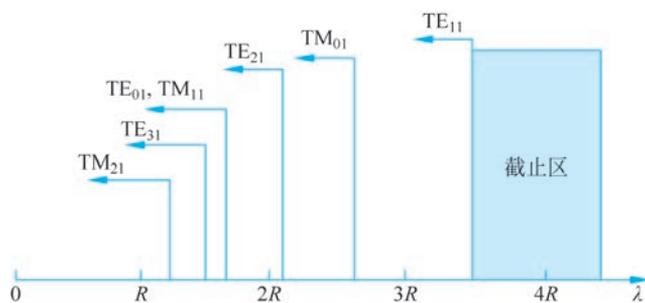
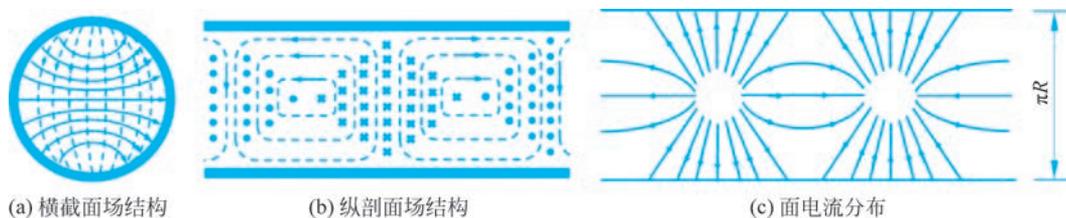


图 3-18 圆波导中不同模式截止波长的分布情况

之外的其他模式。既然这样,为什么到了圆波导,最低次模  $TE_{11}$  就不太受待见了呢,可以通过其场分布一探究竟,如图 3-19 所示,注意其中图 3-19(c)相当于把波导沿着轴线劈成两半,然后把上半部分铺平了画出其内壁上的面电流分布。

图 3-19 圆波导中  $TE_{11}$  模场结构图与面电流分布图

从图 3-19(a)可以看出,无论是沿着  $R$  的方向,还是  $\varphi$  的方向,场分布都不是均匀的,问题就出在这儿了。可以看出穿过圆心那条电场线,是水平方向的,其他电场线虽然弯曲,但是也大体和这条电场线保持一致。学过电磁场的同学应该知道,电场线末端划过的方向就是极化方向,也就是说,图 3-19(a)中极化方向是水平的,然而,在圆波导中,这种极化方向是相当不稳定的,激励时手法稍微有点偏差,或者传播过程中波导结构稍微有点不均匀性,都会导致这个极化发生偏转,虽然整体场结构看上去都还是一样的  $TE_{11}$  模,但是极化方向已经不一样了,可能变成斜的,甚至是垂直的,这种情况称为极化简并,如图 3-20 所示。

图 3-20 圆波导中  $TE_{11}$  模极化的旋转

也就是说,实际中真要拿圆波导来传输  $TE_{11}$  模式,可能传了一段距离之后,横截面上的极化方向到底指哪都不能确定了,这也是为什么在介绍图 3-18 时,压根就没有提单

模传输区,因为在  $TE_{11}$  和  $TM_{01}$  的截止波长所包夹的区域中,虽然都是  $TE_{11}$  模,但极化方向却是不确定的,并不能看成严格意义上的单模传输,或者说,圆波导就没有所谓的单模工作区。这就是人们不待见圆波导中  $TE_{11}$  模的原因,虽然它的确是实实在在的最低次模。

### 3. $TM_{01}$ 及 $TE_{01}$ 场结构

不喜欢圆波导  $TE_{11}$  模的原因,也正是人们会常用圆波导  $TE_{01}$  或者  $TM_{01}$  模的原因,光看角标就知道,  $m=0$  意味着这两种模式下横截面上沿着  $\varphi$  的方向,场分布是均匀的。也就是说,没有极化简并的现象,极化方向爱怎么转就怎么转,怎么转都是一样的,这就是相比于圆波导中  $TE_{11}$  模的好处。图 3-21 和图 3-22 分别绘出了  $TM_{01}$  和  $TE_{01}$  模式的场结构图,以及内壁上的场分布。注意其中的图(c)相当于把波导整体铺平了画出了其内壁上的面电流分布。

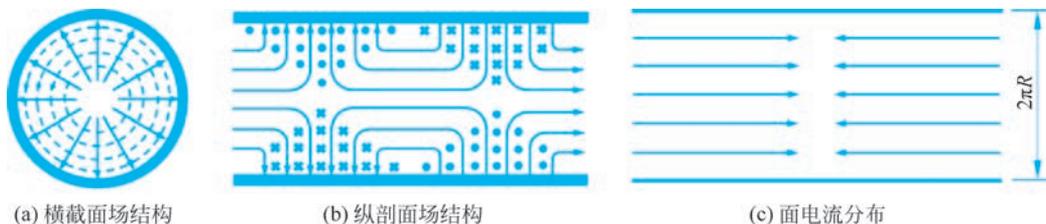


图 3-21 圆波导中  $TM_{01}$  模场结构图与面电流分布图

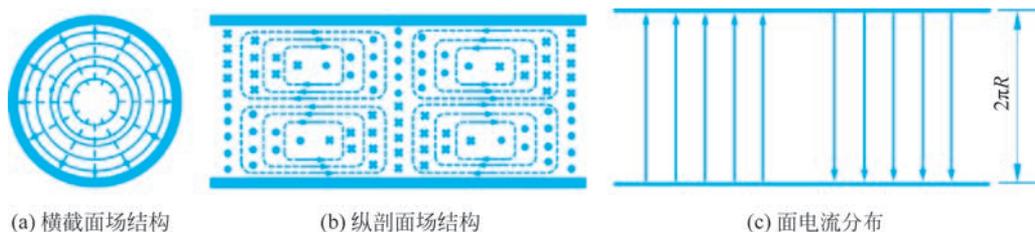


图 3-22 圆波导中  $TE_{01}$  模场结构图与面电流分布图

由此可以看到圆波导一个比较尴尬的事实,最低次模存在极化简并,不存在极化简并的模式又不是最低次模,单模传输是不要再想了,因此客户体验相比矩形波导还是差了一点点。但这也并不是说圆波导就一无是处了,周星驰曾经说过,哪怕是一张卫生纸,都有它的用处。圆波导在某些场合还真是矩形波导无法取代的,比如雷达系统中,波导某些部分需要能够  $360^\circ$  旋转的活动关节,那么这种关节必须得用圆波导,而且需要使用  $TM_{01}$  或者  $TE_{01}$  模式,这种情况下矩形波导还真就不灵了。

### 3.3.7 “场”的角度回望微波传输线

前面说到过“场”的方法是最本质的,相比于“路”的方法,不仅可以提供更加丰富的信息,其适用的对象也更广泛。即便对于双导体的传输线,也可以完全用“场”的方法进行分析,不过会更复杂。这一小节我们只是通过一些图片和文字来从“场”的角度回望一下第 2 章学过的几种典型传输线,看看它们内部的场分布是如何的,不涉及公式推导。



视频

首先建立一个常识性的认知,对于双导体的传输线,其基模一般都是 TEM 模(微带线除外),但这并不代表它们不可以传输高次模,相反,双导体传输线都是可以传输更高次的 TE 或者 TM 模的,只要频率足够高,激励手法到位,没什么高次模是不能传的。

接下来以几种典型的传输线结构为例介绍场分布。

### 1. 同轴线

同轴线柱坐标结构图如图 3-23 所示。

同轴线的主模为 TEM 模式,柱坐标系下,其电磁场的表达式为

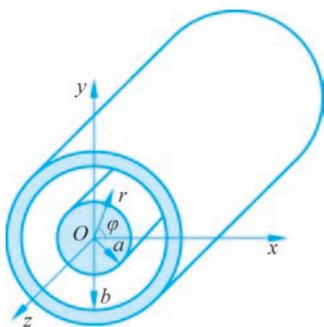


图 3-23 同轴线柱坐标结构图

$$\mathbf{E} = -\nabla_t \phi e^{-jkz} = \frac{d\phi}{dr} e^{-jkz} \mathbf{a}_r = \frac{V_0}{r \ln(b/a)} e^{-jkz} \mathbf{a}_r \quad (3.59)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{Z_{\text{TEM}}} \mathbf{a}_z \times \mathbf{E} = \frac{V_0}{r \ln(b/a) Z_{\text{TEM}}} e^{-jkz} \mathbf{a}_\phi \quad (3.60)$$

式(3.59)以及式(3.60)描绘出来就是图 3-24。

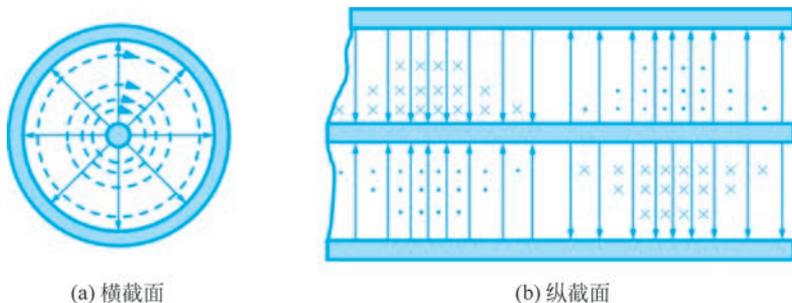


图 3-24 同轴线内部电磁场分布图

可以看到,同轴线里面 TEM 模式的电磁场分布还是比较容易想象的,横截面上,电场像辐条,磁场绕着内导体打圈圈,越靠近内导体场强越强。由于是 TEM 模,没有截止频率和截止波长,甚至直流都可以传输,此时的波数  $k$  和传播常数  $\beta$  是一回事。

当然同轴线也可以传输 TE 或者 TM 模式,相较于 TEM 模式,场分布就没那么简单了。为使读者情绪稳定,下面省略推导过程和相关数学表达式,直接给出几个高次模式的场结构图(图 3-25),浅尝一下就好。

### 2. 带状线和微带线

同轴线虽然封闭性很好,但是有一个比较尴尬的缺点就是很难做到低剖面,也很难和其他小型化微波器件高度集成,因此不利于实现大规模的微波集成电路。微波工程师给出的替代方案是带状线或微带线。

先说带状线,又称为对称微带,是一种可以用印制电路板(PCB)技术实现的微波传输结构,可以看成同轴线的扁平化的产物,说白了就是把同轴线外导体切开,然后内外导体都压扁成一层薄薄的金属,中间用介质板来支撑。这样就可以实现电路板状的超低剖

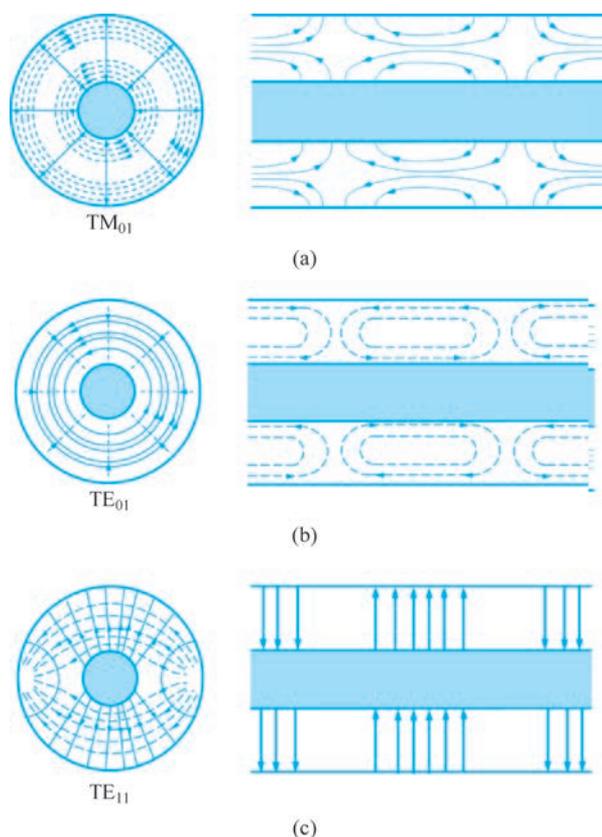


图 3-25 同轴线高次模的电磁场分布图

面,同时也方便微波元器件的集成。因此在微波集成电路(MIC)中,基本上采用的都是带状线或者微带线。注意,图 3-26 中带状线的结构只是为了让大家看清楚,真正的带状线的厚度肯定远低于同轴线的直径,也就差不多是普通电路板的厚度。



图 3-26 同轴线到带状线的演变过程

带状线的主模是 TEM 模,其结构示意图如图 3-27(a)所示,其横截面上场分布如图 3-27(b)所示。

微带线的结构就更加简单了,相当于带状线去掉微带上方的介质板和金属地。大家天天爱不释手的手机中就有大量的微带线来传输微波信号。微带线也可以看成平行双导线的扁平化设计结果,其演变过程如图 3-28 所示。

由于微带线的横截面结构不具备对称性,而且微带的上方是空气,下方是介质和金

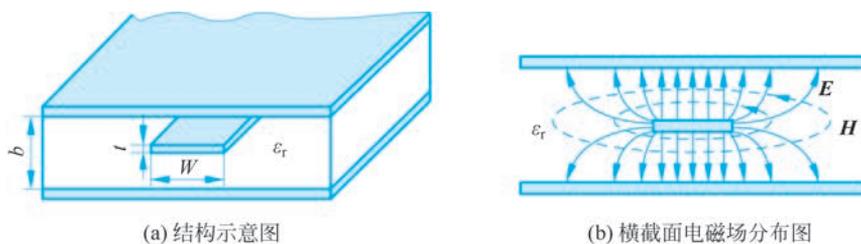


图 3-27 带状线

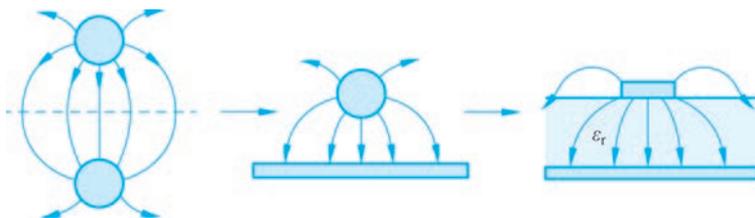


图 3-28 平行双导线到微带线的演变过程

属地,这导致严格意义上的 TEM 模并不能存在于微带线之上。微带线的主模是准 TEM 模,本质上是 TE 模和 TM 模组合而成的混合模式,只不过和 TEM 模的场分布很相似,因此我们称其为准 TEM 模,就像准新娘、准新郎之类的,很接近了,但还不是。

微带线的主模场分布如图 3-29 所示。

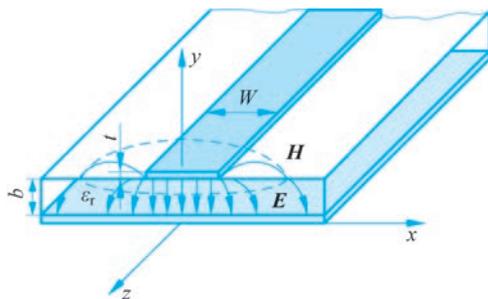


图 3-29 微带线结构示意图及电磁场分布图

可见在介质板和空气的分界面处,电磁场出现了明显的不连续性,这也决定了微带线的主模不可能是纯净的 TEM 模式。