

## 本章提要

运算放大器是一种多端电子器件,在工程中获得了非常广泛的应用。在电路理论中,运算放大器被视为一种基本的多端电路元件。本章介绍运算放大器的特性以及含有理想运算放大器的线性电阻电路的分析方法。

## 5.1 运算放大器及其特性

运算放大器是一种具有较复杂结构的多端集成电路,它通常由数十个晶体管和许多电阻构成,其本质是一种具有高放大倍数的直接耦合的放大器。由于早期主要将它用于模拟量的加法、减法、微分、积分、对数等运算,因此称为运算放大器,简称为“运放”。现在运算放大器的应用已远远超出了模拟量运算的范围,在各种不同功能的电路、装置中都能看到它的应用,例如广泛地使用于控制、通信、测量等领域中。人们已将运算放大器视为一种常用电路元件。

## 一、实际运算放大器及其特性

实际运算放大器有多个外部端钮,其中包括为保证其正常工作所需连接的外部直流电源的端钮以及为改善其性能而在外部采取一定措施的端钮。而在电路分析中人们关心的是它的外部特性,而将它看作为一种具有四个端钮的元件,其电路符号如图 5-1 所示。图中的三角形符号表示它为放大器。它的四个端钮是反相输入端 1,同相输入端 2,输出端 3 以及接地端 4。图中的  $u_1$  和  $u_2$  分别为反相输入端和同相输入端的对地电压; $i_1$  和  $i_2$  分别为自反相输入端和同相输入端流入运算放大器的电流; $u_o$  为输出端的对地电压。 $A$  称为运算放大器的开环放大倍数。当运算放大器工作在放大区时,其输出电压与两个输入端的电压间的关系式为

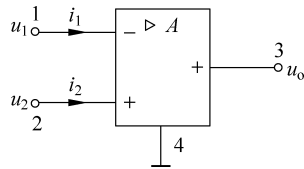


图 5-1 运算放大器的电路符号

$$u_o = A(u_2 - u_1) = Au_d \quad (5-1)$$

式中  $u_d = u_2 - u_1$ ,  $u_d$  称为差动电压,为同相输入端电压与反相输入端电压之差,即两个输入端子间的电压。

输出电压  $u_o$  与差动电压  $u_d$  的关系曲线称为运放的转移特性(输入-输出特性)。运算放大器典型的转移特性如图 5-2 所示。图中  $E_o$  称为运放的输出饱和电压。显而易见,实际运算放大器是一种非线性器件。

实际运算放大器有如下特性:

(1) 其开环放大倍数  $A$  很高,一般可达  $10^5 \sim 10^8$ 。

(2) 由转移特性可见,当  $-e < u_d < e$  时,输出电压随输入差动电压的增加而增长,这一区域称为运放的放大区。 $e$  一般很小,为 mV 级。

(3) 当  $u_d < -e$  及  $u_d > e$  时,输出电压  $|u_o| \approx |E_o|$ ,即输出电压几乎保持不变,一般比运放外加直流电源的电压小 2V 左右。这一区域称为运放的饱和区。

(4) 流入实际运算放大器的电流  $i_1$  和  $i_2$  很小,近似为零。

(5) 由运放的输入-输出关系式(5-1),当  $u_1 = 0$  时,  $u_o = Au_2$ ,即输出电压  $u_o$  与输入电压  $u_2$  具有相同的符号,因此把端钮 2 称为同相输入端,并在运放的电路符号中用“+”标识。当  $u_2 = 0$  时,  $u_o = -Au_1$ ,即输出电压  $u_o$  与输入电压  $u_1$  的符号相反,因此把端钮 1 称为反相输入端,并在运放的电路符号中用“-”标识。

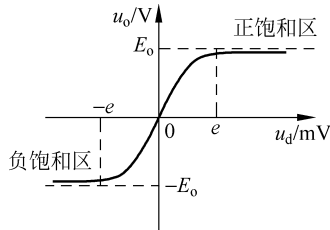


图 5-2 运算放大器典型的转移特性

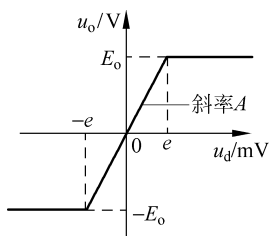


图 5-3 运放的分段线性化的转移特性

(6) 无论是由运放的两个输入端观察,还是由各输入端与接地端观察,电阻  $R_{in}$ (称输入电阻)均很大,一般为  $10^6 \sim 10^{13} \Omega$ 。而从运放的输出端与接地端观察的电阻  $R_o$ (称输出电阻)很小,通常在  $100 \Omega$  以下。

实际运算放大器有一种常用的近似处理方法,即将运放的转移特性分段线性化,如图 5-3 所示。图中,当  $-e \leq u_d \leq e$  时,运放的转移特性用一条过原点的斜率为  $A$  的直线段表示,这一区域称为线性放大区。在直流和低频的情况下,实际运算放大器的有限增益电路模型如图 5-4 所示,这一电路可用于含运算放大器电路的定量分析计算。该电路的简化模型如图 5-5 所示。

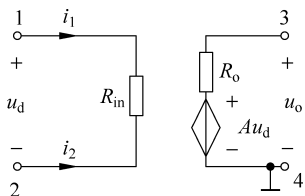


图 5-4 运放的有限增益电路模型

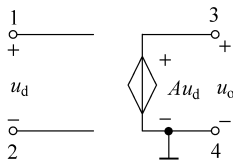


图 5-5 运算放大器的简化电路模型

## 二、理想运算放大器及其特性

### 1. 理想运放的条件

在电路理论中作为电路元件的运算放大器是实际运算放大器的理想化模型,理想化的条件为:

(1) 它具有理想化的转移特性,如图 5-6 所示。由图可见,其线性区域中的转移特性位

于纵轴上,该直线的斜率为无穷大,这也表明理想运放的开环放大倍数  $A = \infty$ 。

(2) 其具有无穷大的输入电阻,即  $R_{in} = \infty$ 。

(3) 其输出电阻为零,即  $R_o = 0$ 。

## 2. 理想运放的特性

由理想运放的条件,可导出该元件的如下重要特性:

(1) 因输入电阻  $R_{in} = \infty$ ,则从理想运放两输入端观察相当于断路,因此有  $i_1 = 0$  和  $i_2 = 0$ ,即流入两输入端钮的电流均为零。这一特性称为“虚断路”。

(2) 输出电压  $u_o = Au_d$ ,但  $A = \infty$ ,而  $u_o$  总为有限值,因此必有  $u_d = 0$ ,这表明理想运放的两输入端之间的电压为零,或两输入端的对地电位相等,或两输入端之间等同于短路。这一特性称为“虚短路”。

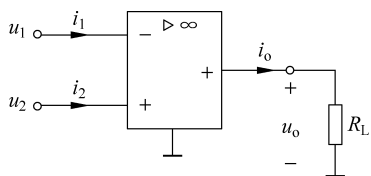


图 5-7 运算放大器是有源元件的说明图

(3) 理想运算放大器是有源元件,它能向外电路提供能量。在如图 5-7 所示电路中,运算放大器吸收的功率为

$$p = u_1 i_1 + u_2 i_2 - u_o i_o$$

因  $i_1 = 0, i_2 = 0$ ,且  $u_o = R_L i_o$ ,则

$$p = -u_o i_o = -R_L i_o^2 < 0$$

上述结果表明运算放大器向外接电阻输出功率。

需说明的是,分析计算含理想运放的电路时,并不使用理想运放的输入-输出关系式即式(5-1),这是因为式中  $A = \infty, u_d = 0$ ,显然用该式不能求得输出电压。实际计算时,需根据连接于运放的外部电路,利用运放的基本特性即“虚断路”“虚短路”特性并结合 KCL 和 KVL 进行求解。

在后面的讨论中,若不特别说明,所涉及的均是理想运算放大器,其电路符号中的开环放大倍数用  $\infty$  表示。

## 5.2 含运算放大器的电阻电路分析

对含理想运算放大器的电路进行分析时,依据的是其“虚短路”和“虚断路”这两个基本特性。“虚短路”是指它的两个输入端子间的电压为零,或两个输入端子的电位相等;“虚断路”是指流入它的两个端子的电流为零。

需特别说明的是,运算放大器在实际应用中需引入“负反馈”以构成闭环电路(系统),如图 5-8 所示。图中反馈电路应接于运算放大器的输出端和反相输入端之间。

### 1. 反相放大器

**例 5-1** 求如图 5-9(a)所示电路中的输出电压  $u_o$ 。

**解** 电路中运放的同相输入端直接接地,按运放的“虚短路”特性,a 点也相当于接地,即  $u_a = 0$ 。于是流过电阻  $R$  的电流为

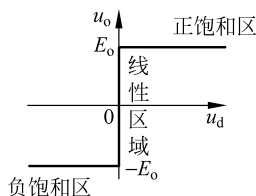


图 5-6 理想运算放大器的转移特性

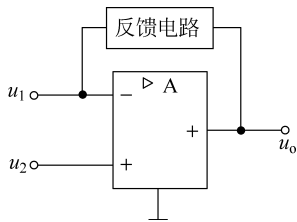


图 5-8 引入负反馈的运放电路

$$i = \frac{u_s - u_a}{R} = \frac{u_s}{R}$$

电阻  $R_f$  接在反相输入端和输出端之间,称为反馈电阻。

由于  $i_1=0$ ,有  $i_f=i$ 。又由 KVL,得

$$u_o = -R_f i_f = -\frac{R}{R_f} u_s = \beta u_s$$

这表明该电路的输出电压与输入电压成正比。显然这一电路与一电压控制电压源相当,如图 5-9(b)所示。该电路的输出电压  $u_o$  与输入电压  $u_s$  极性相反,故称为反相放大器。

在图 5-9(a)所示电路中,若  $R=1\text{k}\Omega$ ,  $R_f=12\text{k}\Omega$ ,  $u_s(t)=50\sin\omega t\text{ mV}$ ,则输出电压为

$$u_o(t) = -\frac{R_f}{R} u_s(t) = -12u_s(t) = -600\sin\omega t\text{ mV}$$

为保证运算放大器工作在线性放大区,应将输入电压  $u_s$  的幅值限制在一定的范围内。若该运放的饱和电压  $E_o=12\text{V}$ ,则输入  $u_s$  的幅值应满足下式

$$|u_s| < \frac{R}{R_f} E_o = \frac{1}{12} \times 12 = 1\text{V}$$

## 2. 同相放大器

**例 5-2** 电路如图 5-10 所示,求输出电压  $u_o$ 。

**解** 由运放的“虚短路”特性,有

$$u_a = u_s$$

又有

$$i = \frac{u_a}{R_1} = \frac{u_s}{R_1}$$

根据“虚断路”特性,得到  $i_f=i$ ,于是由 KVL,有

$$u_o = R_f i_f + u_s = \left(1 + \frac{R_f}{R_1}\right) u_s$$

由此可以看出,这一电路的输出电压幅度大于输入电压幅度,且两者极性相同,因此称为同相放大器。

## 3. 电压跟随器

**例 5-3** 图 5-11 所示电路称为“电压跟随器”,求其输出电压  $u_o$ 。

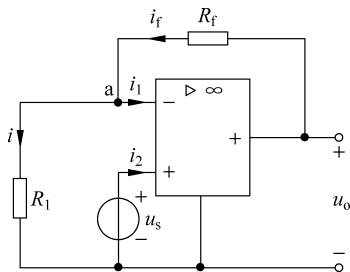


图 5-10 例 5-2 电路

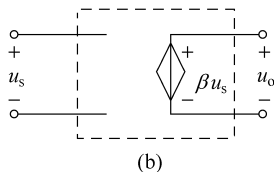
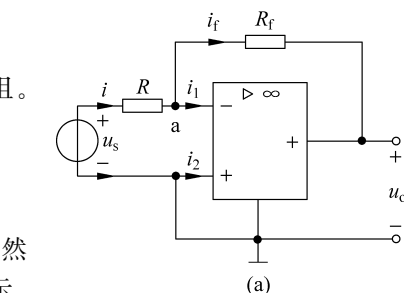


图 5-9 例 5-1 电路

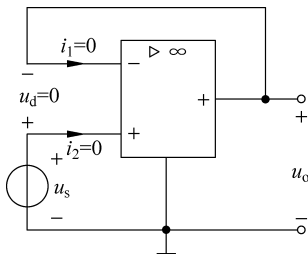


图 5-11 例 5-3 电路

解 根据运放的“虚断路”“虚短路”特性,有

$$i_1 = 0, \quad i_2 = 0, \quad u_d = 0$$

又由 KVL,有

$$u_o = u_s - u_d$$

于是可得

$$u_o = u_s$$

可见该电路的输出电压  $u_o$  与输入电压  $u_s$  的变化规律完全相同,即输出跟随输入变化,因此称之为“电压跟随器”。此电路的输入电阻为无限大,而输出电阻为零,输出电压  $u_o$  与外接负载无关,即使电源  $u_s$  含有内阻时也是如此,即它的输出具有理想电压源的特性。这表明该电路能实现信号源与负载的“隔离”作用,因此又称它为“缓冲器”。

在图 5-12(a)所示分压电路中,输出电压  $u_o$  将随负载  $R_L$  的变化而变化。当在电阻  $R_o$  与负载电阻  $R_L$  之间接入电压跟随器之后,如图 5-12(b)所示,则负载电阻  $R_L$  上得到不变的电压  $u_o$ ,且

$$u_o = \frac{R_o}{R_s + R_o} u_s$$

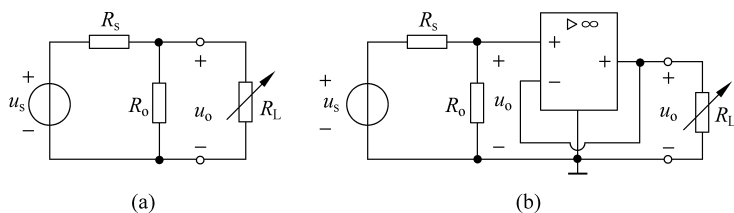


图 5-12 电压跟随器的隔离作用

#### 4. 加法器

例 5-4 求图 5-13 所示电路的输出电压  $u_o$  和各输入电压间的关系。

解 因运放的同相输入端直接接地,由“虚短路”特性,知

$$u_a = 0$$

又由“虚断路”特性及 KCL,有

$$i_1 + i_2 + i_3 = i_f$$

又有

$$i_1 = \frac{E_1}{R_1}, i_2 = \frac{E_2}{R_2}, i_3 = \frac{E_3}{R_3}, i_f = -\frac{u_o}{R_f}$$

将各电流代入式(1),得

$$-\frac{u_o}{R_f} = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + \frac{E_3}{R_3}$$

$$u_o = -\left(\frac{R_f}{R_1}E_1 + \frac{R_f}{R_2}E_2 + \frac{R_f}{R_3}E_3\right)$$

若有  $R_1 = R_2 = R_3 = R$ , 则

$$u_o = -\frac{R_f}{R}(E_1 + E_2 + E_3)$$

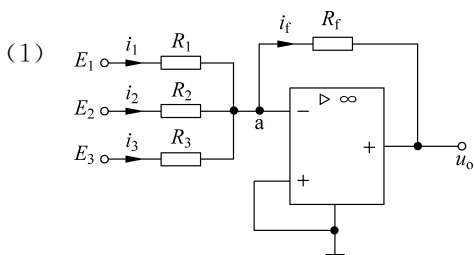


图 5-13 例 5-4 电路

可见该电路能实现各输入电压的求和运算,故称为加法器。

### 5. 减法器

**例 5-5** 电路如图 5-14 所示,求输出电压  $u_o$  和两个输入电压  $u_{s1}$  和  $u_{s2}$  间的关系。

**解** 由“虚断路”,有

$$i_2 = i_3 = \frac{u_{s2}}{R_1 + R_f}, \quad u_b = R_f i_3 = \frac{R_f}{R_1 + R_f} u_{s2}$$

由“虚短路”,知  $u_a = u_b$ 。又由“虚断路”,得

$$i_f = i_1 = \frac{u_{s1} - u_a}{R_1}$$

根据 KVL,有

$$u_o = -R_f i_f + u_a$$

将  $u_a$  及  $i_f$  的表达式代入上式后解得

$$u_o = \frac{R_f}{R_1} (u_{s2} - u_{s1})$$

由此可见,该电路的输出正比于两输入之差,故称为“减法器”。

### 6. 负阻变换器

**例 5-6** 求图 5-15 所示电路的输入电阻  $R_{ab}$ 。

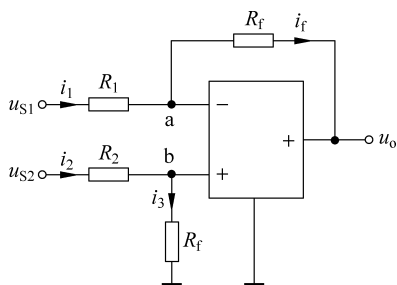


图 5-14 例 5-5 电路

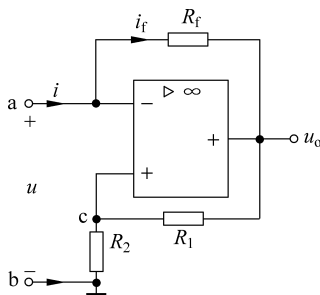


图 5-15 例 5-6 电路

**解** 设在  $ab$  端口加电压  $u$ ,由运放的“虚短路”和“虚断路”特性,可得

$$u = u_c = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u_o$$

于是有

$$u_o = \frac{R_1 + R_2}{R_2} u$$

又由 KVL,有

$$u = R_f i + u_o = R_f i + \frac{R_1 + R_2}{R_2} u$$

由此解出

$$R_{ab} = \frac{u}{i} = -\frac{R_2 R_f}{R_1}$$

这一结果表明,从  $ab$  端口看进去,该电路为一负电阻。例如当  $R_1 = R_2 = 2\text{k}\Omega$ ,  $R_f = 20\text{k}\Omega$  时,则  $R_{ab} = -20\text{k}\Omega$ 。这一电路称为“负阻变换器”。

## 7. 回转器

回转器是现代网络理论中使用的一种双口电路器件,它可由运算放大器予以实现。回转器的电路符号如图 5-16 所示,其端口伏安关系式为

$$\begin{cases} i_1 = gu_2 \\ i_2 = -gu_1 \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} u_1 = -ri_2 \\ u_2 = ri_1 \end{cases}$$

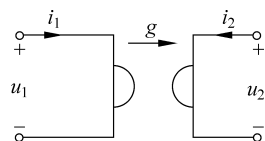


图 5-16 回转器电路符号

式中的  $g$  为回转电导,  $r=1/g$  为回转电阻。由上述关系式可见,回转器具有转换端口电压、电流的特性,即能将一个端口的电压转换为另一端口的电流,或将一个端口的电流转换为另一端口的电压。

在工程应用中,可利用回转器的特性,将电容元件“回转”为电感元件。当在回转器的输出端口接一电容元件后,从回转器的输入端口看则相当于接一电感元件。这一结果可用于在集成电路制造中实现不易集成的电感元件。

**例 5-7** 图 5-17 所示电路可用于实现回转器。试求该电路的输入、输出端口电压、电流间的关系式。

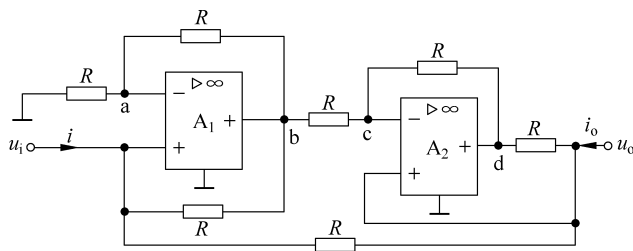


图 5-17 例 5-7 电路——实现回转器的电路

**解** 对运算放大器  $A_1$ , 有

$$u_a = u_i = \frac{R}{R+R} u_b = \frac{1}{2} u_b$$

于是可得

$$\begin{aligned} i &= \frac{u_a - u_b}{R} + \frac{u_a - u_o}{R} = \frac{u_i - 2u_i}{R} + \frac{u_i - u_o}{R} \\ &= -\frac{u_o}{R} \end{aligned}$$

对运算放大器  $A_2$ , 有

$$u_d = \frac{u_c - u_b}{R} R + u_c = u_o - 2u_i + u_o = 2u_o - 2u_i$$

又得到

$$i_o = \frac{u_o - u_d}{R} + \frac{u_o - u_i}{R} = \frac{2u_i - u_o}{R} + \frac{u_o - u_i}{R} = \frac{u_i}{R}$$

若令  $u_o = u_1, i_o = i_1, u_i = u_2, i = i_2, g = 1/R$ , 则可得到  $i_1 = gu_2, i_2 = -gu_1$ , 可见该电

路为一回转器。

## 练习题

5-1 在图 5-18 所示的电路中,运放的开环放大倍数  $A$  为有限值,求该电路的电压增益  $K = \frac{u_o}{u_i}$ 。

5-2 求图 5-19 所示理想运放电路的输出电压  $u_o$ 。

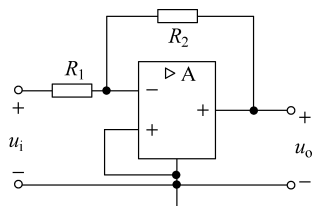


图 5-18 练习题 5-1 电路

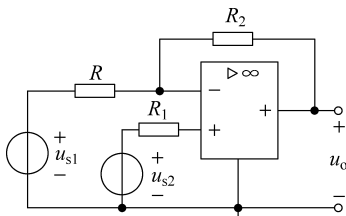


图 5-19 练习题 5-2 电路

5-3 证明回转器是无源元件。

## 5.3 例题分析

**例 5-8** 求图 5-20 所示含理想运算放大器电路中的电压  $u_o$  和电流  $i_o$ , 已知  $u_s = 2\text{V}$ ,  $R_o = 3\text{k}\Omega$ 。

**解** 由理想运放的“虚断路”特性,可求得

$$u_a = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \times u_s = \frac{3}{1 + 3} \times 2 = 1.5\text{V}$$

又由“虚短路”,知  $u_b = u_a = 1.5\text{V}$ , 于是

$$i_3 = \frac{u_b}{R_3} = \frac{1.5}{3 \times 10^3} = \frac{1}{2} \times 10^{-3}\text{A} = 0.5\text{mA}$$

$$u_o = R_4 i_3 + u_b = 6 \times 10^3 \times 0.5 \times 10^{-3} + 1.5 = 4.5\text{V}$$

进一步求出

$$i_o = i_3 + \frac{u_o}{R_o} = 0.5 + \frac{4.5}{3} = 2\text{mA}$$

**例 5-9** 电路如图 5-21 所示。(1)当两个开关接在  $a$  和  $a'$  位置时,分别求  $R_1 = R_2 = 1\text{k}\Omega$  和  $R_1 = R_2 = 2\text{k}\Omega$  时的电路输出电压和输入电压之比(转移电压比)  $u_o/u_i$ ; (2)当两个开关接在  $b$  和  $b'$  位置时,再求上述两种参数条件下的转移电压比  $u_o/u_i$ 。

**解** (1) 当开关  $S_1, S_2$  接在  $a, a'$  位置时,若  $R_1 = R_2 = 1\text{k}\Omega$ , 有  $u_o = u_2/2$ , 又求出

$$u_2 = u_1 = \frac{1}{2+1} u_i = \frac{1}{3} u_i$$

于是转移电压比为

$$\frac{u_o}{u_i} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

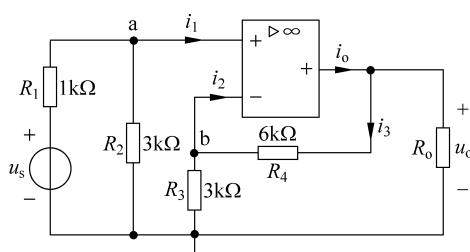


图 5-20 例 5-8 电路

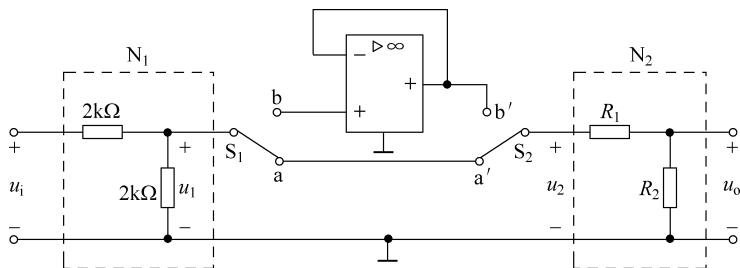


图 5-21 例 5-9 电路

若  $R_1 = R_2 = 2\text{k}\Omega$ , 仍有  $u_o = u_i/2$ , 且

$$u_2 = u_1 = \frac{4/3}{2 + 4/3} u_i = \frac{2}{5} u_i$$

于是转移电压比为

$$\frac{u_o}{u_i} = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$$

由上述分析计算可知,  $N_1$  的转移电压比受  $N_2$  的影响, 从而电路的整体转移电压比(或输出电压)将随  $N_2$  的变化而变化。

(2) 当开关  $S_1, S_2$  接在  $b, b'$  位置时, 是在  $N_1$  和  $N_2$  之间插入电压跟随器。由于跟随器的输入电阻为无限大, 因此  $N_2$  的接入不会对  $N_1$  的转移电压比和输出  $u_1$  产生影响。这表明电压跟随器起到了隔离  $N_1$  和  $N_2$  的作用, 避免了两者的相互影响。于是电路的总体转移电压比是两个电路  $N_1$  和  $N_2$  转移电压比的乘积。对  $N_1$  其转移电压比为

$$\frac{u_1}{u_i} = \frac{2}{2 + 2} = \frac{1}{2}$$

对  $N_2$ , 在两组  $R_1, R_2$  参数时, 均有转移电压比为

$$\frac{u_o}{u_2} = \frac{u_o}{u_1} = \frac{1}{2}$$

于是在  $R_1, R_2$  两组参数下的电路总体转移电压比为

$$\frac{u_o}{u_i} = \frac{u_1}{u_i} \cdot \frac{u_o}{u_2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

由此可见, 在插入了电压跟随器后, 可使电路的分析、设计得到简化。

**例 5-10** 求图 5-22 所示电路输出电流  $i_2$  和输入电流  $i_1$  的关系式。

**解** 因  $u_1 = 0$ , 由 KVL, 有

$$R_1 i_1 = R_2 i_3$$

又由 KCL, 有

$$i_2 = i_1 + i_3$$

于是求得

$$i_2 = \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) i_1$$

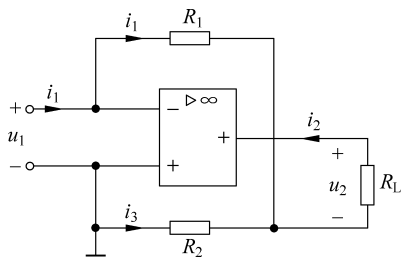


图 5-22 例 5-10 电路

**例 5-11** 电路如图 5-23 所示, 求输出电压  $U_o$ 。

**解** 先求电路左边运放的输出  $U_a$ 。由“虚断路”及“虚短路”特性, 知  $U_b = 5\text{V}$ , 由此可得

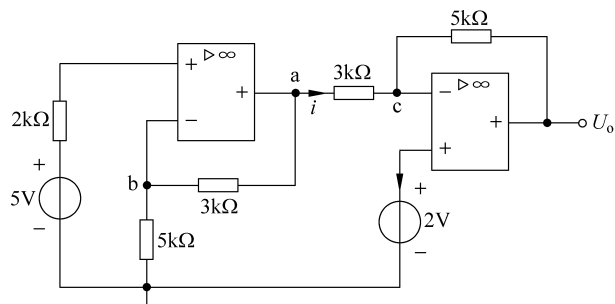


图 5-23 例 5-11 电路

$$U_a = U_b + \frac{U_b}{5} \times 3 = 5 + 1 \times 3 = 8\text{V}$$

又知  $U_c = 2\text{V}$ , 且有

$$i = \frac{U_a - U_c}{3 \times 10^3} = \frac{8 - 2}{3 \times 10^3} = 2\text{mA}$$

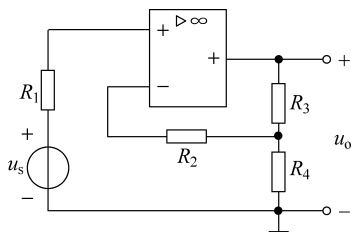
于是求出

$$U_o = -5 \times 10^3 i + U_c = -10 + 2 = -8\text{V}$$

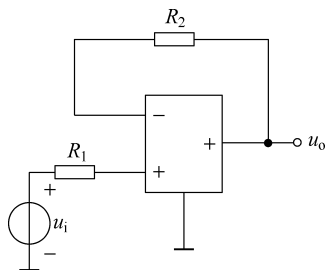
## 习题

5-1 求题 5-1 图所示含理想运放电路中的输出电压  $u_o$ 。

5-2 电路如题 5-2 图所示, 求输出电压  $u_o$ 。



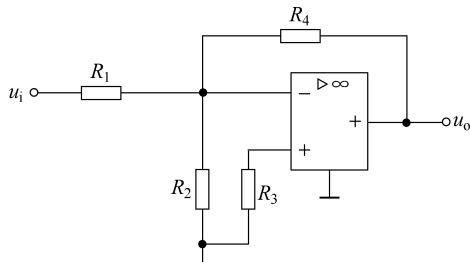
题 5-1 图



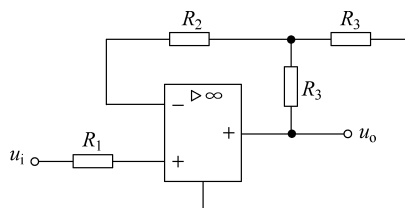
题 5-2 图

5-3 求题 5-3 图所示电路的电压  $u_o$ 。

5-4 电路如题 5-4 图所示, 求输出电压与输入电压之比  $u_o/u_i$ 。



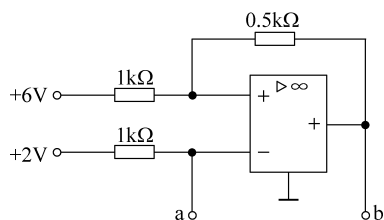
题 5-3 图



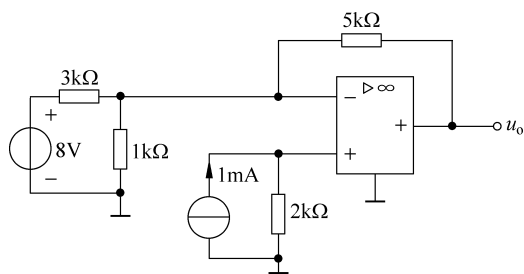
题 5-4 图

5-5 求题 5-5 图所示电路中 a、b 两点间的戴维南等效电路。

5-6 求题 5-6 图所示电路中的输出电压  $u_o$ 。

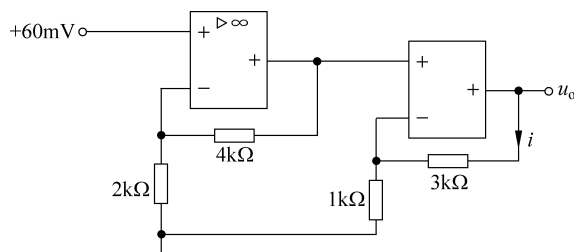


题 5-5 图



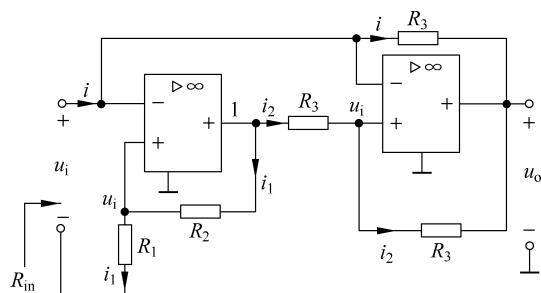
题 5-6 图

5-7 求题 5-7 图所示电路中的输出电压  $u_o$  和电流  $i$ 。



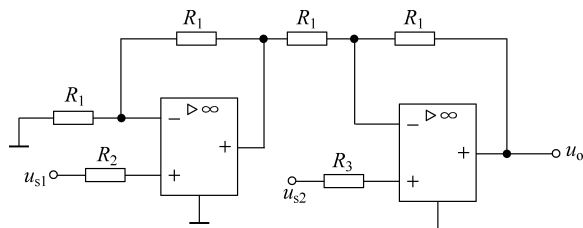
题 5-7 图

5-8 电路如题 5-8 图所示,试求其入端电阻  $R_{in}$ 。



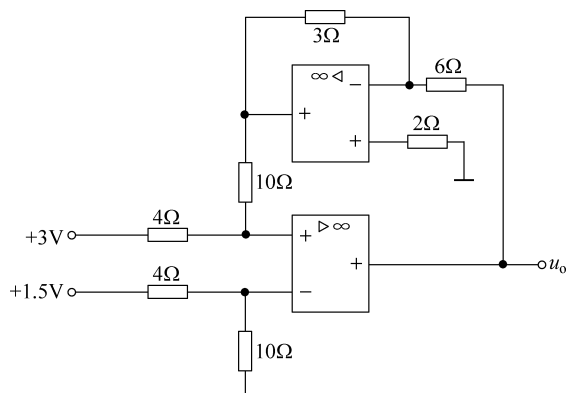
题 5-8 图

5-9 求题 5-9 图所示电路的输出电压  $u_o$ 。



题 5-9 图

5-10 电路如题 5-10 图所示,试求输出电压  $u_o$ 。



题 5-10 图