

第 3 章

模拟人类思维的推理方法

现实世界中的事物以及事物之间的关系是极其复杂的。由于客观上存在的随机性、模糊性以及某些事物或现象暴露的不充分性,导致人们对它们的认识往往是不精确、不完全的,具有一定程度的不确定性。这种认识上的不确定性反映到知识以及由观察所得到的证据上,就分别形成了不确定性的知识及不确定性的证据。人们通常是在信息不完善、不精确的情况下运用不确定性知识进行思维和求解问题的,推出的结论也是不确定的。因而,必须对不确定性知识的表示及推理进行研究。

本章首先介绍推理的定义、推理的分类、推理的方向以及推理中的冲突消解策略,然后介绍基于谓词逻辑的确定性推理、基于统计分析的不确定性推理和基于模糊理论的不确定性推理。

3.1 推理的定义

机器福尔摩斯。英国侦探小说家阿瑟·柯南·道尔(Arthur Conan Doyle)塑造的夏洛克·福尔摩斯(Sherlock Holmes,图 3.1)善于通过观察与演绎法解决问题。他能察觉他人不会留意的细节,采用司法科学及演绎推理,从中推断出大量的信息,抽丝剥茧,条分缕析,最终破解谜团。实际上,每个人几乎每时每刻都在进行推理。例如,看看今天



图 3.1 夏洛克·福尔摩斯

气冷不冷,以决定要不要多穿点衣服。人工智能的愿景是让机器像人一样有知识,会推理,成为机器福尔摩斯。

人们在对各种事物进行分析、综合并最后做出决策时,通常是从已知的事实出发,运用已掌握的知识,找出蕴含的事实,或归纳出新的事实。这一过程通常称为推理,即,从初始证据出发,按某种策略不断运用知识库中的已知知识,逐步推出结论的过程。

在人工智能系统中,推理是由程序实现的,这类程序称为推理机。已知事实和知识是构成推理的两个基本要素。已知事实又称为证据,用以指出推理的出发点及推理时应该使用的知识;而知识是使推理得以向前推进并逐步达到最终目标的依据。

例如,在医疗诊断专家系统中,专家的经验及医学常识以某种表示形式存储于知识库中。为患者诊治疾病时,推理机就是从存储在综合数据库中的患者症状及化验结果等初始证据出发,按某种搜索策略在知识库中搜寻可与之匹配的知识,推出某些中间结论;然后再以这些中间结论为证据,在知识库中搜索与之匹配的知识,推出进一步的中间结论;如此反复进行,直到最终推出结论,即得到患者的病因与治疗方案。

3.2 推理的分类

人类的智能活动表现为多种思维方式。人工智能作为对人类智能的模拟,相应地也有多种推理方式。

3.2.1 从推出知识的路径分类

若从推出结论的途径划分,推理可分为演绎推理、归纳推理和默认推理 3 种。

1. 演绎推理

演绎推理(deductive reasoning)是从全称判断推导出单称判断的过程,即由一般性知识推出适合某一具体情况的结论。这是一种从一般到个别的推理。

演绎推理是人工智能中的一种重要的推理方式。在许多智能系统中采用了演绎推理。演绎推理有多种形式,经常用的是三段论推理。它包括以下 3 部分。

- (1) **大前提**：已知的一般性知识或假设。
- (2) **小前提**：关于要研究的具体情况或个别事实的判断。
- (3) **结论**：由大前提推出的适合小前提所示情况的新判断。

下面是一个三段论推理的例子。

- (1) 大前提：足球运动员的身体都是强壮的。
- (2) 小前提：高波是一名足球运动员。
- (3) 结论：高波的身体是强壮的。

2. 归纳推理

归纳推理(inductive reasoning)是从足够多的事例中归纳出一般性结论的推理过程，是一种从个别到一般的推理。若从归纳时所选的事例的广泛性划分，归纳推理又可分为完全归纳推理和不完全归纳推理两种。

所谓完全归纳推理，是指在进行归纳时考察了相应事物的全部对象，并根据这些对象是否都具有某种属性，推出这个事物是否具有这个属性。例如，对某厂进行产品质量检查，如果对每一件产品都进行了严格检查，并且都是合格的，则可以得出结论：“该厂生产的产品是合格的”。

所谓不完全归纳推理，是指考察了相应事物的部分对象，就得出了结论。例如，检查某厂产品质量时，只是随机地抽查了部分产品，只要它们都合格，就得出了结论：“该厂生产的产品是合格的”。

归纳推理是人类思维活动中最基本、最常用的一种推理形式。人们在由个别到一般的思维过程中经常要用到它。

在实际情况下，许多产品是否合格必须用完全归纳推理，例如，对飞机上的关键零部件必须逐一检测。但是，检测稻谷是否已经晒干了，只能抽取少许稻谷碾成米进行检测；检测火柴、鞭炮质量是否合格，也只能抽取少许产品进行检验。

3. 默认推理

默认推理(default reasoning)是在知识不完全的情况下假设某些条件已经具备所进行的推理。例如，在条件 A 已成立的情况下，如果没有足够的证据能证明条件 B 不成立，则默认 B 是成立的，并在此默认的前提下进行推理，推导出某个结论。例如，某地一小时前发生了抢劫案件，但不知道抢劫犯有什么交通工具，则可以默认抢劫犯有汽车，并由此推出在 100km 范围内进行布控的结论。

由于这种推理允许默认某些条件是成立的,所以在知识不完全的情况下也能进行推理。在默认推理的过程中,如果到某一时刻发现原先的假设不正确,则要撤销默认前提以及由此推出的所有结论,重新按新情况进行推理。

3.2.2 从知识的确定性分类

若按推理时所用知识的确定性来划分,推理可分为确定性推理与不确定性推理。

所谓确定性推理,是指推理时所用的知识与证据都是确定的,推出的结论也是确定的,其真值或者为真或者为假,没有第三种情况出现。

本章将讨论的经典逻辑推理就属于这一类。经典逻辑推理是最先提出的一类推理方法,是根据经典逻辑(命题逻辑及一阶谓词逻辑)的逻辑规则进行的一种推理,主要有自然演绎推理、归结演绎推理及与/或形演绎推理等。由于这种推理是基于经典逻辑的,其真值只有“真”和“假”两种,因此它是一种确定性推理。

所谓不确定性推理,是指推理时所用的知识与证据不都是确定的,推出的结论也是不确定的。

现实世界中的事物和现象大都是不确定的,或者模糊的,很难用精确的数学模型来表示与处理。不确定性推理又分为似然推理与近似推理或模糊推理,前者是基于概率论的推理,后者是基于模糊逻辑的推理。人们经常在知识不完全、不精确的情况下进行推理,因此,要使计算机能模拟人类的思维活动,就必须使它具有不确定性推理的能力。

3.3 推理的方向

推理过程是求解问题的过程。问题求解的质量与效率不仅依赖于采用的求解方法(如匹配方法、不确定性的传递算法等),而且依赖于求解问题的策略,即推理的控制策略。

推理的控制策略主要包括推理方向、搜索策略、冲突消解策略、求解策略及限制策略等。

本节介绍推理的方向。推理从方向上分为正向推理、逆向推理和混合推理。

3.3.1 正向推理

亚里士多德可能是研究正向推理(演绎推理)的第一人。他提出的三段论是演绎推理的一般模式。后来,欧几里得从公理和公设出发,用演绎法把几何学的知识贯穿起来,建立了一个演绎法的思想体系。爱因斯坦说:“理论家的工作可分成两步,首先是发现公理,其次是从公理推出结论。”爱因斯坦说的方法就是正向推理(演绎推理),所以他特别强调思维的作用,尤其是想象力的作用。

正向推理是以已知事实作为出发点的一种推理。

正向推理的基本思想是:从用户提供的初始已知事实出发,在知识库中找出当前适用的知识,构成知识集,然后按某种冲突消解策略从知识集中选出一条知识进行推理,并将推出的新事实加入数据库中,作为下一步推理的已知事实;此后,再在知识库中选取适用的知识进行推理;重复这一过程,直到求得问题的解或者知识库中再无适用的知识为止。

由于这种推理方法是从规则的前提(证据)向结论进行推理的,所以称之为正向推理。由于正向推理是通过动态数据库中的数据“触发”规则进行推理的,所以又称之为数据驱动的推理。

正向推理的过程可用如下算法描述。

- (1) 将用户提供的初始已知事实送入数据库。
- (2) 检查数据库中是否已经包含了问题的解。若是,则求解成功,算法结束;否则,执行下一步。
- (3) 根据数据库中的已知事实,扫描知识库,检查知识库中是否有适用(即可与数据库中的已知事实匹配)的知识。若有,则转向(4);否则转向(6)。
- (4) 把知识库中所有适用的知识都选出来,构成知识集。
- (5) 若知识集不空,则按某种冲突消解策略从中选出一条知识进行推理,并将推出的新事实加入数据库中,然后转向(2);若知识集空,则转向(6)。
- (6) 询问用户是否可进一步补充新的事实。若可补充,则将补充的新事实加入数据库中,然后转向(3);否则表示求解失败,算法结束。

正向推理的流程图如图 3.2 所示。

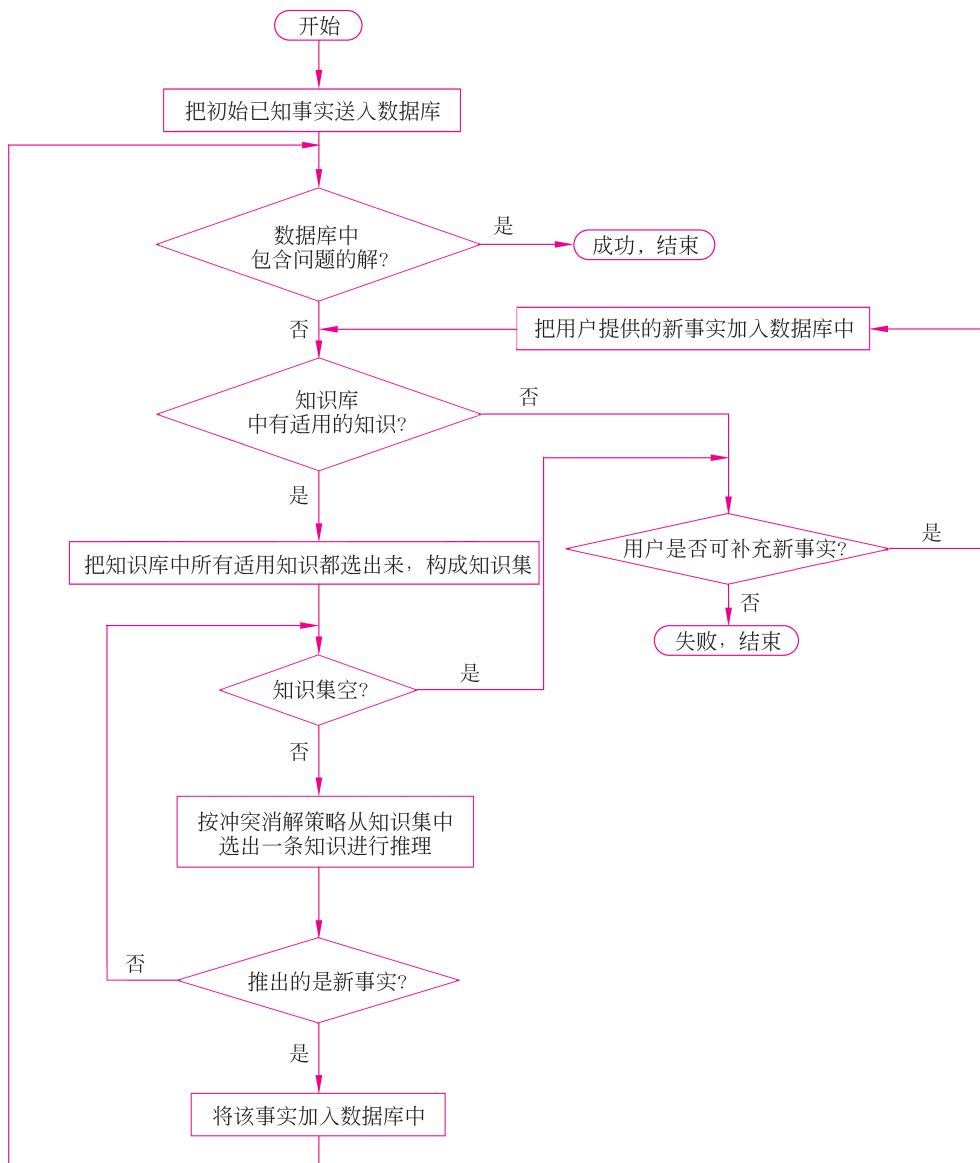


图 3.2 正向推理的流程图

为了实现正向推理,有许多具体问题需要解决。例如,要从知识库中选出适用的知识,就要用知识库中的知识与数据库中的已知事实进行匹配,为此就需要确定匹配的方法。匹配通常难以做到完全一致,因此还需要解决怎样才算是匹配成功的问题。

3.3.2 逆向推理

司马光砸缸救人的故事。《宋史》载：光生七岁，凛然如成人，闻讲《左氏春秋》，爱之，退为家人讲，即了其大指。自是手不释书，至不知饥渴寒暑。群儿戏于庭，一儿登瓮，足跌没水中，众皆弃去，光持石击瓮破之，水迸，儿得活。其后京、洛间画以为图。

常规思维：救人离水。逆向思维：让水离人。

逆向推理是以某个假设目标作为出发点的一种推理。

逆向推理的基本思想是：首先选定一个假设目标，然后寻找支持该假设的证据。若所需的证据都能找到，则说明原假设是成立的；若无论如何都找不到所需的证据，说明原假设是不成立的，需要选定新的假设。

由于逆向推理是从假设目标出发，逆向使用规则进行推理，所以又称为目标驱动的推理。

逆向推理过程可用如下算法描述。

- (1) 提出假设，即要求证的目标。
 - (2) 检查该假设是否已在数据库中。若在，则该假设成立，推理结束或者对下一个假设进行验证；否则，转下一步。
 - (3) 判断该假设是否为证据，即它是否为应由用户证实的原始事实。若是，则询问用户；否则，转下一步。
 - (4) 在知识库中找出所有能导出该假设的知识，构成适用的知识集，然后转下一步。
 - (5) 从知识集中选出一条知识，并将该知识的运用条件作为新的假设，然后转向(2)。
- 逆向推理的流程图如图 3.3 所示。

与正向推理相比，逆向推理更复杂一些，上述算法只是描述了它的大致过程，许多细节没有反映出来。例如，如何判断一个假设是否为证据？当导出假设的知识有多条时，如何确定先选哪一条？又如，一条知识的运用条件一般有多个，当其中的一个条件被验证成立后，如何自动地转换为对另一个条件的验证？在验证一个运用条件时，需要把它当作新的假设，并查找可导出该假设的知识，这样就会产生一组新的运用条件，形成一个树状结构，当到达叶节点（即数据库中有相应的事实或者用户可肯定相应事实存在等）

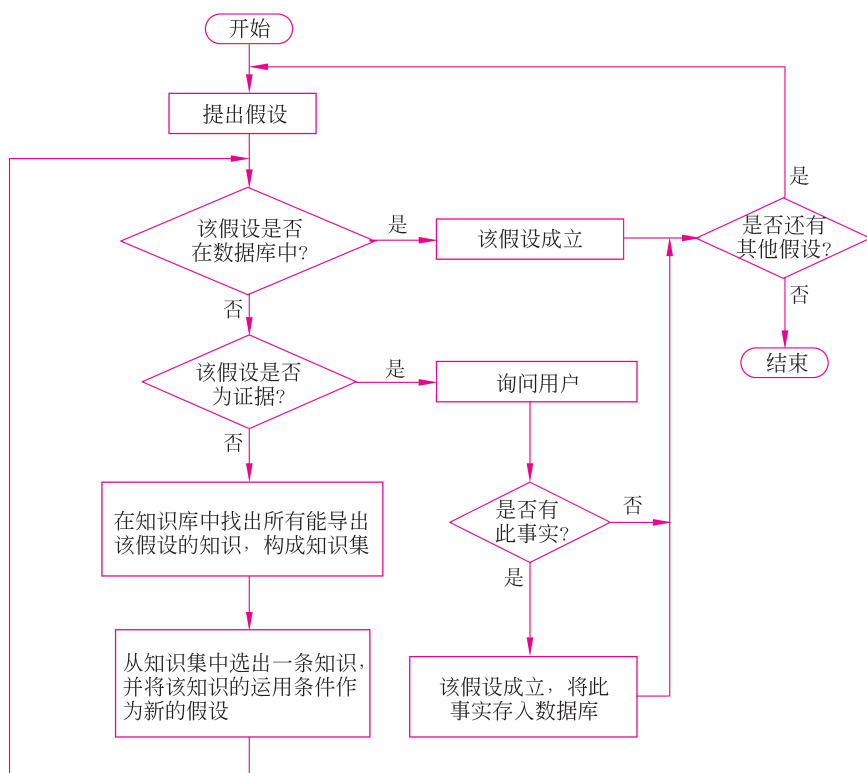


图 3.3 逆向推理的流程图

时,又需逐层向上返回,返回过程中有可能又要下到下一层,这样上上下下重复多次,才会导出原假设是否成立的结论。这是一个比较复杂的推理过程。

逆向推理的主要优点是不必使用与目标无关的知识,目的性强,同时它还有利于向用户提供解释。其主要缺点是起始目标的选择有盲目性,若不符合实际,就要多次提出假设,会影响系统的效率。

3.3.3 混合推理

正向推理具有盲目、效率低等缺点,推理过程中可能会推出许多与问题无关的子目标;在逆向推理中,若提出的起始目标不符合实际,也会降低系统的效率。为解决这些问题,可把正向推理与逆向推理结合起来,使两者发挥各自的优势,取长补短。这种既有正向又有逆向的推理称为混合推理,也称双向推理。

先正向后逆向推理的流程图如图 3.4 所示。

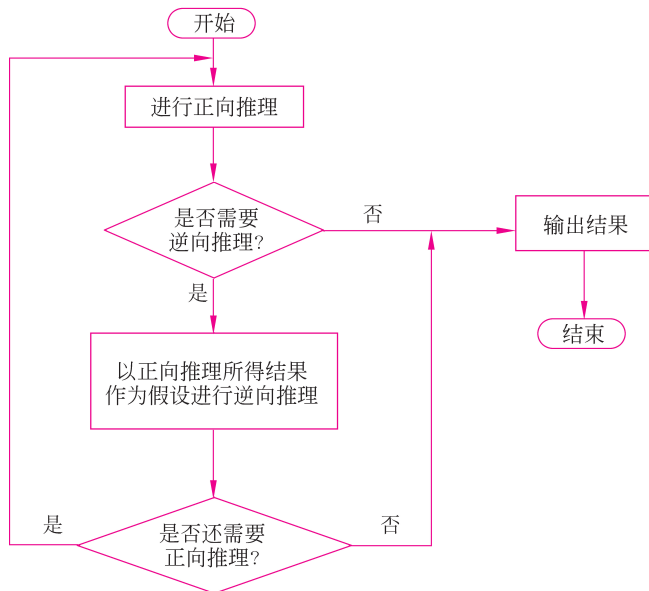


图 3.4 先正向后逆向推理的流程图

先逆向后正向推理的流程图如图 3.5 所示。

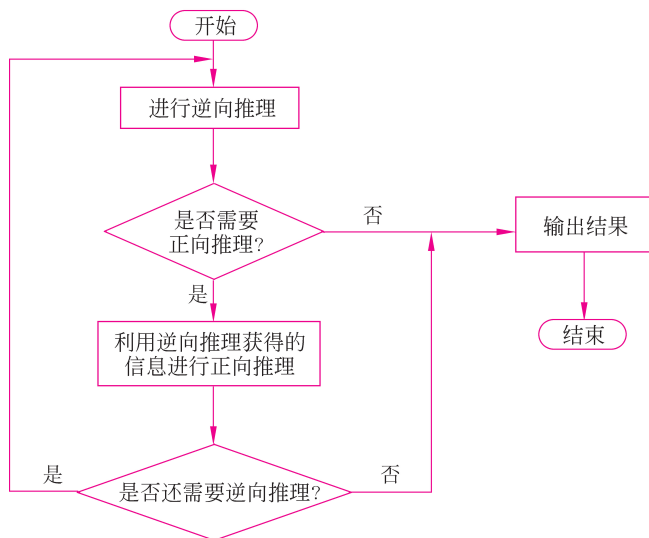


图 3.5 先逆向后正向推理的流程图

在下述几种情况下,通常需要进行混合推理。

1. 已知的事实不充分

当数据库中的已知事实不够充分时,若用这些事实与知识的运用条件匹配,进行正向推理,可能连一条适用的知识都选不出来,这就会使推理无法进行下去。此时,可通过正向推理先把其运用条件不能完全匹配的知识都找出来,并把这些知识可导出的结论作为假设,然后分别对这些假设进行逆向推理。由于在逆向推理中可以向用户询问有关证据,这样就有可能使推理进行下去。

2. 正向推理推出的结论可信度不高

用正向推理虽然推出了结论,但其可信度可能不高,达不到预定的要求。此时,为了得到一个可信度符合要求的结论,可用正向推理的结论作为假设,进行逆向推理,通过向用户询问进一步的信息,有可能得到一个可信度较高的结论。

3. 希望得到更多的结论

在逆向推理过程中,由于要与用户进行对话,有针对性地向用户提出询问,这就有可能获得一些原来不掌握的有用信息。这些信息不仅可用于证实假设,同时还有助于推出一些其他结论。因此,在用逆向推理证实了某个假设之后,可以再用正向推理推出另外一些结论。例如,在医疗诊断系统中,先用逆向推理证实某患者患有某种病,然后再利用逆向推理过程中获得的信息进行正向推理,就有可能推出该患者还患有其他病的结论。

由以上讨论可以看出,混合推理分为两种情况:一种情况是先进行正向推理,帮助选择某个目标,即从已知事实演绎出部分结果,然后再用逆向推理证实该目标或提高其可信度;另一种情况是先假设一个目标进行逆向推理,然后再利用逆向推理中得到的信息进行正向推理,以推出更多的结论。

3.4 推理中的冲突消解策略

《三国演义》中诸葛亮智算华容道的故事。曹正行间,军士禀曰:“前面有两条路,请问丞相从哪条路去?”操曰:“哪条路近?”军士曰:“大路稍

平,却远五十余里;小路投华容道,却近五十余里,只是地窄路险,坑坎难行。”操令人上山观望,回报:“小路山边有数处烟起,大路并无动静。”操教前军便走华容道小路。诸将曰:“烽烟起处,必有军马,何故反走这条路?”操曰:“岂不闻兵书有云:虚则实之,实则虚之。诸葛亮多谋,故使人于山僻烧烟,使我军不敢从这条山路走,他却伏兵于大路等着。吾料已定,偏不教中他计!”诸将皆曰:“丞相妙算,人不可及。”遂勒兵走华容道。

在上面的故事中,出现了所谓冲突和冲突消解。其中,曹军面前不止一条路,而是有两条路可走,这就是推理中的冲突。这时,为了逃脱,必须选择其中一条路,这就是冲突消解。而冲突消解所依据的策略显然不能保证选择的正确性,只能说有一定的道理。曹操的选择虽然有道理,但结果却是错误的。

一般来说,在推理过程中,系统要不断地用当前已知的事实与知识库中的知识进行匹配。此时,可能发生如下3种情况。

- (1) 已知事实恰好只与知识库中的一个知识匹配成功。
- (2) 已知事实不能与知识库中的任何知识匹配成功。
- (3) 已知事实可与知识库中的多个知识匹配成功,即一个已知事实可与知识库中的多个知识匹配成功,或者多个已知事实可与知识库中的多个知识匹配成功。

这里已知事实与知识库中的知识匹配成功的含义如下:对正向推理而言,是指产生式规则的前件和已知事实匹配成功;对逆向推理而言,是指产生式规则的后件和假设的结论匹配成功。

对于第一种情况,由于匹配成功的知识只有一个,所以它就是可应用的知识,可直接把它应用于当前的推理。

当第二种情况发生时,由于找不到可与当前已知事实匹配成功的知识,使得推理无法继续进行下去。这或者是由于知识库中缺少某些必要的知识,或者是由于要求解的问题超出了系统功能范围,此时可根据当前的实际情况作相应的处理。

第三种情况刚好与第二种情况相反。在推理过程中,不仅有知识匹配成功,而且有多个知识匹配成功,这时就发生了冲突。当发生冲突时,需要按一定的策略解决冲突,以便从中挑出一个知识用于当前的推理,这一解决冲突的过程称为冲突消解,解决冲突时

所用的方法称为冲突消解策略。对正向推理而言,它将决定选择哪一个已知事实来激活哪一条产生式规则,使它用于当前的推理,产生其后件指出的结论或执行相应的操作;对逆向推理而言,它将决定哪一个假设与哪一个产生式规则的后件进行匹配,从而推出相应的前件,作为新的假设。

目前已有多种消解冲突的策略,其基本思想都是对知识进行排序。需要特别指出的是:任何一种冲突消解策略都不能保证是有效的,往往只是看上去是合理的选择,如同曹操选择走华容道一样。常用的策略有以下4种。

1. 按针对性排序

本策略是优先选用针对性较强的产生式规则。例如,如果 r_2 中除了包括 r_1 要求的全部条件外,还包括其他条件,则称 r_2 比 r_1 有更大的针对性, r_1 比 r_2 有更大的通用性。因此,当 r_2 与 r_1 发生冲突时,优先选用 r_2 。因为它要求的条件较多,其结论一般更接近目标,一旦条件得到满足,可缩短推理过程。

2. 按已知事实的新鲜性排序

在产生式系统的推理过程中,每应用一条产生式规则,就会得到一个或多个结论,或者执行一个或多个操作,数据库就会增加新的事实。另外,在推理时还会向用户询问有关的信息,也会使数据库的内容发生变化。可以把数据库中后生成的事实称为新鲜的事实,即后生成的事实比先生成的事实具有更大的新鲜性。若一条规则被应用后生成了多个结论,则既可以认为这些结论有相同的新鲜性,也可以认为排在前面(或后面)的结论有较大的新鲜性,具体情况而定。

设规则 r_1 可与事实组 A 匹配成功,规则 r_2 可与事实组 B 匹配成功,则 A 与 B 中哪一组新鲜,与它匹配的产生式规则就先被应用。

如何衡量 A 与 B 中哪一组事实更新鲜呢?常用的方法有以下3种:

(1) 逐个比较 A 与 B 中的事实的新鲜性,若 A 中包含的更新鲜的事实比 B 多,就认为 A 比 B 新鲜。例如,设 A 与 B 中各有5个事实,而 A 中有3个事实比 B 中的事实更新鲜,则认为 A 比 B 新鲜。

(2) 以 A 中最新鲜的事实与 B 中最新鲜的事实相比较,哪一个更新鲜,就认为相应的事实组更新鲜。

(3) 以 A 中最不新鲜的事实与 B 中最不新鲜的事实相比较,哪一个更不新鲜,就认为相应的事实组更不新鲜。

3. 按匹配度排序

在不确定性推理中,需要计算已知事实与知识的匹配度,当其匹配度达到某个预先规定的值时,就认为它们是可匹配的。若多条产生式规则都可匹配成功,则优先选用匹配度较大的产生式规则。

4. 按条件个数排序

如果多条产生式规则生成的结论相同,则优先选用条件少的产生式规则,因为条件少的规则匹配时花费的时间较少。

上述冲突消解策略显然不能保证选择的正确性,只能说有一定的道理。在具体应用时,可对上述几种策略进行组合,尽量减少冲突的发生,使推理有较快的速度和较高的效率。

在逆向推理中也存在冲突消解问题,可采用与正向推理一样的方法解决。

3.5 基于谓词逻辑的确定性推理

3.5.1 自然演绎推理

从一组已知为真的事实出发,直接运用经典逻辑的推理规则推出结论的过程称为自然演绎推理。其中,基本的推理有 P 规则、 T 规则、假言推理、拒取式推理等。

假言推理的一般形式是

$$P, P \rightarrow Q \Rightarrow Q$$

它表示由 $P \rightarrow Q$ 及 P 为真,可推出 Q 为真。

例如,由“如果 x 是金属,则 x 能导电”及“铜是金属”,可推出“铜能导电”的结论。

拒取式推理的一般形式是

$$P \rightarrow Q, \neg Q \Rightarrow \neg P$$

它表示由 $P \rightarrow Q$ 为真及 Q 为假,可推出 P 为假。

例如,由“如果下雨,则地上就湿”及“地上不湿”,可推出“没有下雨”的结论。

这里,应该注意避免如下两类错误:一种是肯定后件(Q)的错误,另一种是否定前件(P)的错误。

所谓肯定后件是指,当 $P \rightarrow Q$ 为真时,希望通过肯定后件 Q 为真来推出前件 P 为真,这是不允许的。

例如,伽利略在论证哥白尼的日心说时,曾使用了如下推理:

- ① 如果行星系统是以太阳为中心的,则金星会显示出位相变化;
- ② 金星显示出位相变化(肯定后件);
- ③ 所以,行星系统是以太阳为中心。

因为这里使用了肯定后件的推理,违反了经典逻辑规则,他为此遭到非难。

所谓否定前件是指,当 $P \rightarrow Q$ 为真时,希望通过否定前件 P 来推出后件 Q 为假,这也是不允许的。例如,下面的推理就是使用了否定前件的推理,违反了逻辑规则:

- ① 如果下雨,则地上是湿的;
- ② 没有下雨(否定前件);
- ③ 所以,地上不湿。

这显然是不正确的,因为当地上洒水时,地上也会湿。事实上,只要仔细分析蕴含 $P \rightarrow Q$ 的定义,就会发现当 $P \rightarrow Q$ 为真时,肯定后件或否定前件所得的结论既可能为真,也可能为假,即不能确定真假。

下面举例说明自然演绎推理方法。

例 3.1 设已知如下事实:

- ① 凡是容易的课程小王(*Wang*)都喜欢;
- ② *C* 班的课程都是容易的;
- ③ *ds* 是 *C* 班的一门课程。

求证:小王喜欢 *ds* 这门课程。

证明 首先定义谓词:

$EASY(x)$: x 是容易的;

$LIKE(x, y)$: x 喜欢 y ;

$C(x)$: x 是 *C* 班的一门课程。

把上述已知事实及待求证的问题用谓词公式表示出来:

$(\forall x)(EASY(x) \rightarrow LIKE(Wang, x))$ 凡是容易的课程小王都是喜欢的;

$(\forall x)(C(x) \rightarrow EASY(x))$ *C* 班的课程都是容易的;

$C(ds)$

ds 是 C 班的课程;

$LIKE(Wang, ds)$

小王喜欢 ds 这门课程,这是待求证的问题。

应用推理规则进行推理:

因为

$$(\forall x)(EASY(x) \rightarrow LIKE(Wang, x))$$

所以由全称固化得

$$EASY(z) \rightarrow LIKE(Wang, z)$$

因为

$$(\forall x)(C(x) \rightarrow EASY(x))$$

所以由全称固化得

$$C(y) \rightarrow EASY(y)$$

由 P 规则及假言推理得

$$C(ds), C(y) \rightarrow EASY(y) \Rightarrow EASY(ds)$$

$$EASY(ds), EASY(z) \rightarrow LIKE(Wang, z)$$

由 T 规则及假言推理得

$$LIKE(Wang, ds)$$

即小王喜欢 ds 这门课程。

一般来说,由已知事实推出的结论可能有多个,只要其中包括了待证明的结论,就认为问题得到了解决。

自然演绎推理的优点是表达定理证明过程自然,容易理解,而且它拥有丰富的推理规则,推理过程灵活,便于在它的推理规则中嵌入领域启发式知识。其缺点是容易产生组合爆炸,推理过程得到的中间结论一般呈指数形式递增,这对于一个大的推理问题来说是十分不利的。

3.5.2 鲁滨逊归结原理

1965年,鲁滨逊(Robinson)提出了归结原理(Resolution Principle),又称为消解原理,是实现定理证明的一种理论及方法,使机器定理证明达到了实用阶段。它是机器定理证明的基础。

对于谓词逻辑公式,有反证法定理:

当且仅当 $(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n) \wedge \neg Q$ 是不可满足的,则 Q 为 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 的逻辑

结论。

鲁宾逊归结原理的基本思想是将要证明的问题表达为一组谓词公式,把这组谓词公式化为不可满足性等价的所谓子句集,然后对子句集进行归结,如果归结出一个空子句,则证明子句集不可满足,从而证明这组谓词公式不可满足,从而证明了定理。

在谓词逻辑中,一个不能再分解的命题称为原子(atom)谓词公式。原子谓词公式及其否定,统称为文字(literal)。 P 称为正文字, $\neg P$ 称为负文字, P 与 $\neg P$ 为互补文字。任何文字的析取式称为子句(clause),任何文字本身也是子句,由子句构成的集合称为子句集。

任何一个谓词公式都可以通过应用等价关系及推理规则化成相应的子句集。为了判定子句集的不可满足性,就需要对子句集中的子句进行判定。但要判定该子句是不可满足的,是一件非常困难的工作,特别是在计算机上实现其证明过程是很困难的。

归结原理是对子句集进行归结得到新的子句集。因为在子句集中子句之间是合取关系,其中只要有一个子句不可满足,则子句集就不可满足。

不包含任何文字的子句称为空子句,表示为 NIL。由于空子句不含有文字,它不能被任何解释满足,所以,空子句是永假的、不可满足的。因此,若一个子句集中包含一个空子句,则这个子句集一定是不可满足的。可以看出,如果经过归结能得到空子句,则立即可得到原子句集是不可满足的结论,从而证明了定理的准确性。

理论上,归结原理是完备的,即若子句集是不可满足的,则必存在一个从该子句集到空子句的归结演绎;若从子句集存在一个到空子句的演绎,则该子句集是不可满足的。但实际演算中如果没有归结出空子句,则既不能说子句集不可满足,也不能说子句集是可满足的。因为,可能因为子句集是可满足的而归结不出空子句,也可能因为没有找到合适的归结演绎步骤而归结不出空子句。但是,如果确定不存在任何方法归结出空子句,则可以确定是可满足的。

归结原理的能力是有限的,例如,用归结原理证明“两个连续函数之和仍然是连续函数”时,推了 10 万步也没有证明出结果。

关于归结原理更多的内容可以参看笔者编著的《人工智能及其应用》一书。

3.5.3 归结反演

归结原理给出了证明子句集不可满足性的方法。根据谓词公式的性质,如欲证明 Q 为 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 的逻辑结论,只需证明

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n) \wedge \neg Q$$

是不可满足的。在不可满足的意义上,谓词公式的不可满足性与其子句集的不可满足性是等价的。因此,可用归结原理进行定理的自动证明。

应用归结原理证明定理的过程称为归结反演。归结反演的一般步骤是:

- ① 将已知前提表示为谓词公式 F ;
- ② 将待证明的结论表示为谓词公式 Q , 并否定得到 $\neg Q$;
- ③ 把谓词公式集 $\{F, \neg Q\}$ 化为子句集 S ;
- ④ 应用归结原理对子句集 S 中的子句进行归结, 并把每次归结得到的归结式都并入 S 中。如此反复进行, 若出现了空子句, 则停止归结, 此时就证明了 Q 为真。

例 3.2 某公司招聘工作人员, A 、 B 、 C 三人应试, 经面试后公司表示如下想法:

- ① 三人中至少录取一人;
- ② 如果录取 A 而不录取 B , 则一定录取 C ;
- ③ 如果录取 B , 则一定录取 C 。

求证: 公司一定录取 C 。

证明 设用谓词 $P(x)$ 表示录取 x , 则把公司的想法用谓词公式表示如下:

- ① $P(A) \vee P(B) \vee P(C)$;
- ② $P(A) \wedge \neg P(B) \rightarrow P(C)$;
- ③ $P(B) \rightarrow P(C)$;

把要求证的结论用谓词公式表示出来并否定, 得

- ④ $\neg P(C)$ 。

把上述公式化成子句集:

式①本身已经是子句集, 所以得

- (1) $P(A) \vee P(B) \vee P(C)$

用连接词化归律, 将式②化为 $\neg(P(A) \wedge \neg P(B)) \vee P(C)$, 再由德·摩根律得

- (2) $\neg P(A) \vee P(B) \vee P(C)$

用连接词化归律, 将式③化为

- (3) $\neg P(B) \vee P(C)$

式④本身已经是子句集, 所以得

- (4) $\neg P(C)$

应用归结原理进行归结

- (5) $P(B) \vee P(C)$ (1)与(2)归结

- (6) $P(C)$ (3)与(5)归结

(7) NIL

(4)与(6)归结

所以公司一定录取 C 。

上述归结过程可用图 3.6 的归结树表示。

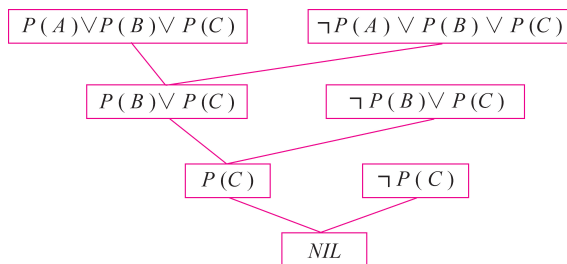


图 3.6 例 3.2 的归结树

例 3.3 已知如下信息。

规则 1: 任何人的兄弟不是女性。

规则 2: 任何人的姐妹必是女性。

事实: Mary 是 Bill 的姐妹。

求证: Mary 不是 Tom 的兄弟。

解: 定义谓词。 $brother(x, y)$: x 是 y 的兄弟 $sister(x, y)$: x 是 y 的姐妹 $woman(x)$: x 是女性

把已知规则与事实表示成谓词公式,得

规则 1: $\forall x \forall y (brother(x, y) \rightarrow \neg woman(x))$ 规则 2: $\forall x \forall y (sister(x, y) \rightarrow woman(x))$ 事实: $sister(Mary, Tom)$

把要求证的结论用谓词公式表示出来,得

求证: $\neg brother(Mary, Tom)$

用连接词化归律,将规则 1 化为子句

$$\forall x \forall y (\neg brother(x, y) \rightarrow \neg woman(x))$$

$$C_1 = \neg brother(x, y) \vee \neg woman(x)$$

用连接词化归律,将规则 2 化为子句

$$\forall x \forall y (\neg sister(x, y) \rightarrow \neg woman(x))$$

$$C_2 = \neg sister(u, v) \vee woman(u)$$

事实原来就是子句形式

$$C_3 = sister(Marry, Bill)$$

C_2 与 C_3 归结为

$$C_{23} = woman(Marry)$$

C_{23} 与 C_1 归结为

$$C_{123} = \neg brother(Marry, y)$$

设 $C_4 = brother(Marry, Tom)$, 则

$$C_{1234} = NIL$$

所以, 得证。

3.5.4 归结求解

归结原理除了可用于定理证明外, 还可用来求取问题的答案, 其思想与定理证明类似。应用归结原理求解问题的答案称为归结求解。下面给出应用归结原理求解问题的步骤:

- ① 把已知前提用谓词公式表示出来, 并且化为相应的子句集, 设该子句集的名字为 S ;
- ② 把待求解的问题也用谓词公式表示出来, 然后把它否定并与答案谓词 $ANSWER$ 构成析取式, $ANSWER$ 是一个为了求解问题而专设的谓词, 其变元必须与问题公式的变元完全一致;
- ③ 把②中得到的析取式化为子句集, 并把该子句集并入子句集 S 中, 得到子句集 S' ;

④ 对 S' 应用归结原理进行归结;

⑤ 若得到归结式 $ANSWER$, 则答案就在 $ANSWER$ 中。

例 3.4 已知如下信息。

F_1 : 王(Wang)先生是小李(Li)的老师。

F_2 : 小李与小张(Zhang)是同班同学。

F_3 : 如果 x 与 y 是同班同学, 则 x 的老师也是 y 的老师。

求小张的老师是谁?

解: 定义谓词。

$T(x, y)$: x 是 y 的老师。

$C(x, y)$: x 与 y 是同班同学。

把已知前提及待求解的问题表示成谓词公式,得

$F_1: T(Wang, Li)$

$F_2: C(Li, Zhang)$

$F_3: (\forall x)(\forall y)(\forall z)(C(x, y) \wedge T(z, x) \rightarrow T(z, y))$

把待求解的问题表示成谓词公式,并把它否定后与谓词 $ANSWER(x)$ 析取,得

$G: \neg(\exists x)T(x, Zhang) \vee ANSWER(x)$

把上述谓词公式化为子句集。

(1) $T(Wang, Li)$

(2) $C(Li, Zhang)$

(3) $\neg C(x, y) \vee \neg T(z, x) \vee \neg T(z, y)$

(4) $\neg T(u, Zhang) \vee ANSWER(u)$

应用归结原理进行归结:

(5) $\neg C(Li, y) \vee T(Wang, y)$ (1)与(3)归结

(6) $\neg C(Li, Zhang) \vee ANSWER(Wang)$ (4)与(5)归结

(7) $ANSWER(Wang)$ (2)与(6)归结

由 $ANSWER(Wang)$ 得知小张的老师是王先生。

上述归结过程可用图 3.7 的归结树表示。

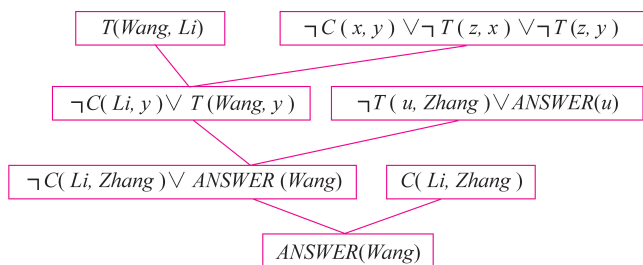


图 3.7 例 3.4 的归结树

例 3.5 设 A、B、C 三人中有人从不说真话,也有人从不说假话,某人向这三人分别提出同一个问题:谁是说谎者? A 答:“B 和 C 都是说谎者”;B 答:“A 和 C 都是说谎者”;C 答:“A 和 B 中至少有一个是说谎者”。求谁是老实人,谁是说谎者?

解: 设用 $T(x)$ 表示 x 说真话。