第3章 静电场

CHAPTER 3

本章导读：第2章系统地描述了电磁场的基本规律，包括静电荷产生的静电场、稳恒电流产生的静磁场、时变电磁场之间相互激发、相互转化的规律，总结出了反映电磁普遍现象的基本规律以及电磁场与带电物质之间的相互作用规律——麦克斯韦方程组和洛伦兹力公式。在此基础上，阐述了电磁场的能量和动量等主要特性。麦克斯韦方程组以及洛伦兹力公式是电动力学的理论基础。从本章开始将分别介绍静电场、静磁场、电磁波的辐射、电磁波的传播等不同类型场的基本特征及分析方法。

本章介绍静电场问题，主要包括静电场的基本方程及静电场问题的基本解法。章末将相关科技前沿补充进去，增加了本书内容的前瞻性。“电”和“磁”是电动力学的两个重要方面，学习“磁”的方法可以与学习“电”的方法相对照，因此掌握静电场的内容，将为学习静磁场的问题奠定重要的基础。

3.1 静电场的基本方程及边值关系

3.1.1 静电场的基本方程

在静电场情形下，电场与磁场无关，电场与时间无关，麦克斯韦方程组简化为

$$\nabla\cdot \boldsymbol{D}=\rho \tag{3-1}$$

$$\nabla\times \boldsymbol{E}=0 \tag{3-2}$$

此即为静电场的基本方程。式(3-1)表示自由电荷 ρ 为电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 的源，式(3-2)则表示静电场 $\boldsymbol{E}$ 是无旋场，因而静电场为有源无旋场。

由于静电场的无旋性，可以引入一个标势来描述静电场。

从电场力做功的角度看，由式(2-19)可知，静电场的积分与路径无关，而只与起始点和终点的位置有关。因此在电场中选择 Q 点为参考点，则对于电场中任意一点 P，可以定义积分

$$\varphi_P=\int_P^Q \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{3-3}$$

为静电场在 P 点的势函数，简称电势。通常规定 Q 点的电势为零，也称为零势点，显然该积分值只与 P 点的位置有关。其物理意义是指单位正电荷在静电场力的作用下由 P 点沿着任意路径移动到 Q 点时电场力所做的功。

在实际问题中，常取大地表面作为电势的参考点；而在理论研究中，只要电荷分布在有

限区域内,选定无穷远处作为电势参考点通常是很方便的,这时场点 P 处的电势可表示为

$$\varphi_P=\int_P^{\infty}\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{3-4}$$

引入电势后,可把电场的矢量计算问题化为一个标量问题,从而使矢量场的计算得以简化。

> **特别提醒**:需要注意的是,若电荷分布在无限区域内,则不能选定无穷远处作为电势参考点,而必须选择有限远处某一点为参考点,否则会导致电势无意义,详见例 3.1。

静电场中,两点之间的电势差值称为电势差,或称为该两点间的电压。若静电场对单位正电荷做正功,则电势下降。所以相距为 $\mathrm{d}l$ 的两点间的电势差为

$$\mathrm{d}\varphi=-\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

由于

$$\mathrm{d}\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathrm{d}z=\nabla\varphi\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

对照上面两式不难看到,电场强度等于电势梯度的负值,即

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi \tag{3-5}$$

式(3-5)由矢量分析的理论也可得到。这是因为任一标量函数的梯度的旋度必为零,故静电场强度 $\boldsymbol{E}$ 可用一个标量函数的梯度来表示,该标量函数 $\varphi(\boldsymbol{r})$ 称为电势或电位,$\nabla\varphi$ 是电势的梯度。因电场强度矢量 $\boldsymbol{E}$ 是指向电势下降的方向,这就是式(3-5)中有一负号的原因。式(3-5)表明,场强 $\boldsymbol{E}$ 的方向是电势减小率最大的方向,场强的大小则是电势随距离的最大变化率。

式(3-4)、式(3-5)反映了电场强度和电势的内在联系。若已知电场强度,可以根据式(3-4)求出电势;反之,若已知电势,可以根据式(3-5)求出电场强度。由于电场强度是由电荷所决定,因此,对于已知电荷分布的情形,也可以直接通过电荷分布求出相应的电势函数。下面推导给定电荷分布所激发的电势问题。

若取无限远处作为电势参考点,将点电荷的场强公式(2-4)代入式(3-4),可得真空中点电荷 Q 在场点 P 的电势为

$$\varphi(\boldsymbol{r})=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{3-6}$$

对于空间有 N 个点电荷(点电荷群),电势也满足叠加原理(标量叠加)。于是,

$$\varphi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{Q_i}{R_i}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{Q_i}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i'|} \tag{3-7}$$

对于连续分布的电荷,也与计算场强一样,可以采用化整为零的做法:先求出电荷元 $\mathrm{d}Q$ 所产生的电势元 $\mathrm{d}\varphi=\dfrac{\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$,再由电势的叠加原理,可得

$$\varphi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\mathrm{d}Q}{R}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\mathrm{d}Q}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{3-8}$$

式中,电荷元 $\mathrm{d}Q$ 在连续的电荷为体分布、面分布或线分布时,可分别表示成 $\mathrm{d}Q=\rho\mathrm{d}V'$、$\mathrm{d}Q=\rho_S\mathrm{d}S'$ 或 $\mathrm{d}Q=\rho_l\mathrm{d}l'$。于是,场点的电势分别为

体分布:

$$\varphi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{R}\mathrm{d}V' \tag{3-9a}$$

面分布：

$$\varphi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{S'}\frac{\rho_S(\boldsymbol{r}')}{R}\mathrm{d}S' \tag{3-9b}$$

线分布：

$$\varphi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{l'}\frac{\rho_l(\boldsymbol{r}')}{R}\mathrm{d}l' \tag{3-9c}$$

在均匀、各向同性介质中，只要将上式中的 ε_0 换成 ε 即可。

由式(3-9)可见，当空间的电荷分布已知，电势以及电场就可完全确定。但在实际情况中，往往不是所有电荷分布都能够预先给定的。例如，在距离一接地导体附近放置给定分布的电荷，由于静电感应的结果，在导体表面会出现一定分布的感应电荷，这部分电荷与原电荷共同产生区域内的总场，但事先无法确知其分布，只有求出电场后才可以利用边值关系确定，因而这类问题就不能简单地用以上方法进行计算，而必须建立电荷分布和电场相互作用规律的微分形式以及边界对场的约束关系作为一个整体来考虑，这在数学上即为求解稳定场的定解问题。下面我们来分析此类问题。

3.1.2 标势的微分方程

考虑均匀、各向同性介质，有 $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$。将式(3-5)代入式(3-1)，可得

$$\nabla^2\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{3-10}$$

此式为用电势描述静电场的基本方程，称为电势的泊松方程。在无电荷的区域，$\rho=0$，式(3-10)变为

$$\nabla^2\varphi=0 \tag{3-11}$$

称为电势的拉普拉斯方程。于是，对于给定电荷分布求解电场的问题可归结为求解电势的泊松方程或拉普拉斯方程。

点电荷的电势分布一定满足泊松方程(3-10)。考虑到点电荷的密度函数表达式(2-6)，有

$$\nabla^2\varphi=\nabla^2\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\right)=-\frac{Q\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{\varepsilon_0} \tag{3-12}$$

化简可得

$$\nabla^2\frac{1}{R}=-4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{3-13}$$

这是一个非常有用的公式。

3.1.3 边值关系

由第 2 章知，在两种不同介质的分界面上，静电场的边界条件也满足

$$\begin{cases}D_{2\mathrm{n}}-D_{1\mathrm{n}}=\rho_S\\E_{2\mathrm{t}}-E_{1\mathrm{t}}=0\end{cases} \tag{3-14}$$

将上式化为用电势来表示的形式，由式(3-5)可得，$E_{\mathrm{n}}=-\frac{\partial\varphi}{\partial n}$，代入上式第一式，即有

$$-\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}+\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=\rho_S \tag{3-15}$$

考虑介质1和介质2分界面两侧邻近的两点 P_1 和 P_2，根据电势差的积分式 $\varphi_1-\varphi_2=\int_{P_1}^{P_2}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，由于电场强度 $\boldsymbol{E}$ 为有限值，故当 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}\to 0$ 时 $\int_{P_1}^{P_2}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}\to 0$，则有

$$\varphi_1=\varphi_2 \tag{3-16}$$

上式表明，在任意介质的分界面上，电势总是连续的。

以上为一般情形下的边值关系，下面讨论几种常见的特殊情形。

1. 两种理想介质的分界面上

理想介质中不存在自由电荷，即 $\rho_S=0$，由式(3-14)～式(3-16)，则有

$$\begin{cases} D_{1\mathrm{n}}=D_{2\mathrm{n}} \\ \varepsilon_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n}=\varepsilon_2\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n} \end{cases} \tag{3-17}$$

和

$$\begin{cases} E_{1\mathrm{t}}=E_{2\mathrm{t}} \\ \varphi_1=\varphi_2 \end{cases} \tag{3-18}$$

2. 在理想介质和导体的分界面上

由于静电平衡而使导体内部的电荷及电场均为零，故可得导体表面上的边界条件为

$$\begin{cases} D_{\mathrm{n}}=\rho_S \\ -\varepsilon\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}=\rho_S \end{cases} \tag{3-19}$$

和

$$\begin{cases} E_{\mathrm{t}}=0 \\ \varphi=C \end{cases} \tag{3-20}$$

式中，$\varphi=C$(常数)表明导体表面是等势面。通常称导体表面为电壁。由上面两式可知，介质中紧邻导体表面处的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 总是与导体表面垂直的，即

$$\boldsymbol{E}=\frac{\rho_S}{\varepsilon}\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}} \tag{3-21}$$

静电场的基本问题是求解给定区域内电势的泊松方程和相应边值关系的定解问题。下一节将证明在什么条件下定解可唯一确定，然后将具体讨论几种常用的静电场边值问题的求解方法。

3.1.4 静电场的能量

由第2章可知，静电场的总能量表达式为

$$W_{\mathrm{e}}=\frac{1}{2}\int_{V_\infty}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}\,\mathrm{d}V \tag{3-22}$$

其中，V_∞ 表示的是所有电场存在的地方。在静电场中，W_{e} 也可以用电势和电荷分布表征。由 $\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho$ 与 $\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$，再应用矢量微分恒等式，由

$$\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{D})=\boldsymbol{D}\cdot\nabla\varphi+\varphi\nabla\cdot\boldsymbol{D}$$

可得

$$\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}=\varphi\rho-\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{D})$$

将其代入式(3-22)，有

$$W_{\mathrm{e}}=\frac{1}{2}\int_{V_\infty}\rho\varphi\,\mathrm{d}V-\frac{1}{2}\int_{V_\infty}\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{D})\,\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\int_{V'}\rho\varphi\,\mathrm{d}V'-\frac{1}{2}\oint_{S_\infty}\varphi\boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

上式应用了高斯散度定理。其中，V'是电荷分布的区域。体积 V_∞ 及其闭合曲面 S_∞ 均对应于 $R\to\infty$。对于上式中第二项面积分，由于当 $R\to\infty$时，$\varphi\propto\frac{1}{R}$，$D\propto\frac{1}{R^2}$，面积微元 $dS\propto R^2$，整个面积分则随$\frac{1}{R}$而变，故在无限大球面 S 上的面积分为零。因此，可得电场能量的另一种表达式为

$$W_e=\frac{1}{2}\int_{V'}\rho\varphi dV' \tag{3-23}$$

该公式是用自由电荷分布和电势表示的静电场能量，只适用于静电场能量的情形。注意被积函数不能看作能量密度，因为能量是分布于电场中的，而不仅仅局限于电荷分布的区域内。

对于连续分布、电荷密度为 $\rho(\boldsymbol{r})$的带电体所激发的电场能量，由电势计算公式和式(3-23)可得

$$W_e=\frac{1}{8\pi\varepsilon}\int_V dV\int_{V'}\frac{\rho(\boldsymbol{r})\rho(\boldsymbol{r}')}{R}dV' \tag{3-24}$$

例 3.1　求均匀电场 $\boldsymbol{E}_0$ 中任一点的电势。

解　因均匀电场中每一点场强 $\boldsymbol{E}_0$ 相同，选场域中任一点为坐标原点，坐标轴沿 $\boldsymbol{E}_0$ 方向，不妨设为 z 轴，并设原点为电势参考点，电势为 φ_0。则任一点 P 处的电势为

$$\varphi(P)-\varphi_0=\int_P^0\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_P^0\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r}=-\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{r}$$

所以，

$$\varphi(P)=\varphi_0-\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{r}=\varphi_0-E_0r\cos\theta$$

例 3.2　真空中有一无限长的均匀带电线，其电荷线密度为 ρ_l。试求线外任一点的电势和电场强度。

解　选圆柱坐标系，令带电直线与 z 轴重合，显然，带电直线的场与坐标 ϕ 无关。为讨论方便，不妨先计算长为 L 的导线，取其中点为坐标原点，故场点 P 的坐标可表示为$(\rho,0,z)$，如图 3-1 所示。在带电直线上任取一线电荷元 $dQ=\rho_l dl'=\rho_l dz'$，它到场点 P 的距离为 $R=\sqrt{(z'-z)^2+\rho^2}$。则

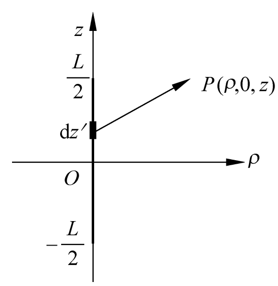


图 3-1　计算带电直线的势与场

$$\varphi(\rho)=\frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\frac{dz'}{\sqrt{(z'-z)^2+\rho^2}}=\frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\left[\ln\left(z'-z+\sqrt{(z'-z)^2+\rho^2}\right)\right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}$$

$$=\frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\left(-z+\frac{L}{2}+\sqrt{\left(z-\frac{L}{2}\right)^2+\rho^2}\right)}{\left(-z-\frac{L}{2}+\sqrt{\left(z+\frac{L}{2}\right)^2+\rho^2}\right)}$$

当 $L\gg\rho$ 时，有

$$\varphi=\frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\left(-z+\frac{L}{2}+\sqrt{\left(z-\frac{L}{2}\right)^2+\rho^2}\right)}{\left(-z-\frac{L}{2}+\sqrt{\left(z+\frac{L}{2}\right)^2+\rho^2}\right)}$$

$$=\frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\left(-z+\frac{L}{2}+\sqrt{\left(z-\frac{L}{2}\right)^2+\rho^2}\right)\left(z+\frac{L}{2}+\sqrt{\left(z+\frac{L}{2}\right)^2+\rho^2}\right)}{\rho^2}$$

$$\approx \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{L^2}{\rho^2}=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{L}{\rho}$$

当 $L\to\infty$ 时，结果为无穷大。之所以会出现这种情况，是因为无限长线电荷不是分布在有限区域内，但仍将电势参考点选在无穷远处的缘故。因此，必须将电势参考点选在有限远处，若令 $\rho=a$ 时，$\varphi=0$，则有

$$\varphi=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{L}{\rho}+C'$$

代入上述条件式，可得

$$\varphi=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{a}{\rho}$$

对 φ 求负梯度，得

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi=-\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\rho}\boldsymbol{e}_\rho=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0\rho}\boldsymbol{e}_\rho$$

本题所讨论的无限长直线电荷的场是一个典型的电场。由此例可见，有限场源的电势参考点选在无限远处是方便的，而无限场源的电势参考点需要选在有限远处。

例 3.3 空气中有一总电量为 Q、半径为 a、介电常数为 ε 的均匀带电球，试计算静电场总能量的大小。

解 根据高斯定理，可得任一点的电场强度为

$$\boldsymbol{E}=\begin{cases}\dfrac{Qr}{4\pi\varepsilon a^3}\boldsymbol{e}_r, & r<a\\[2ex] \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r, & r>a\end{cases}$$

总电场能量为

$$W_\mathrm{e}=\int_0^a\frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{Qr}{4\pi\varepsilon a^3}\right)^2 4\pi r^2\mathrm{d}r+\int_a^\infty\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2\mathrm{d}r=\frac{Q^2}{40\pi\varepsilon a}+\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}$$

3.2 静电场的定解问题、唯一性定理

3.2.1 静电场定解问题的描述

静电场的基本问题包括已知电荷分布求解电场的分布和相反情形。对于简单问题，可以从场的基本规律(如高斯定理、场强或电势函数积分关系式等)通过直接积分或微分运算进行。但是，实际工程和物理问题中的电磁场分析并不都那么简单，往往是待求场量中包含两个或三个坐标变量，场域及其边界的几何形状往往较为复杂等。这类问题的分析一般都需要求解电势的泊松方程或拉普拉斯方程在给定边值条件下的解。通常将这类问题称为静电场的定解问题。

静电场的边值条件可分为三类：第一类边值条件(也称为狄利特雷问题)是给定整个边界上的势函数值 $\varphi\big|_S=\varphi(\zeta)$，其中 ζ 是边界 S 上的点；第二类边值条件(也称为诺伊曼问题)是给定整个边界上势函数的法向导数值 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_S=f(\zeta)$，例如静电场中给定各导体的电荷

面密度值 $\rho_S=-\varepsilon\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}$或总电量$Q=-\oint_S\varepsilon\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\mathrm{d}S$；第三类边值条件(也称为鲁宾问题)则是混合边值问题,即在一部分边界上给定势函数值 $\varphi\Big|_{S_i}=\varphi(\zeta)$,而在另一部分边界上给定势函数的法向导数值$\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{S_j}=f(\zeta)(j\neq i)$。

此外,有些问题中还存在其他边界条件：

(1) 由不同介质构成的区域在分界面上场量的衔接条件即分界面上场量的边界条件,或静电势在场域边界上的边界条件；

(2) 自然边值条件,即所求问题中隐含的、保证所求量具有物理意义的约束条件。比如,当场点包含坐标系的原点即 $r=0$ 或极轴时,场量应为有限值；若场源分布在有限远的区域,则当场点趋近于无穷远即 $r=\infty$时,场值应为零,等等。

3.2.2 静电场定解问题的常用解法

静电场边值问题的解法很多,包括解析法、数值计算法、图解法和实验法等。解析法包括直接积分法、分离变量法、镜像法、电轴法、格林函数法及复变函数法等,其中除分离变量法是直接解析法外,其他都是间接的解析方法。在解析法中,还包括近似解析法。

数值计算法包括有限差分法、有限元法、边界元法、矩量法等利用计算机进行数值计算的方法。另外,还有半解析与半数值计算相结合的混合方法。

图解法是利用计算机或人工作图的方法。例如,静电场的电力线和等势线处处相互垂直且在导体表面上电力线与其垂直而等势线与其平行,满足这些条件的场图便是待求的场图。由场图可知场域各处电场的大小和方向。

实验法是用物理实验的方法来确定在满足给定边值条件下的势或场。比如,在给定边值条件下,利用等电阻网格或导电液槽测定场域各处的电势等方法。

本书只讨论分离变量法、镜像法和格林函数法等几种最常用的解析法。

3.2.3 静电场的唯一性定理

电磁场的边值问题实质上可归结为数学物理方程的定解问题,定解问题要求解具有适定性,即解的存在性、稳定性、唯一性。作为客观存在的静电场,它所满足的偏微分方程的解的存在是确定无疑的,泊松方程或拉普拉斯方程解的稳定性在数学中已得到证明。这里,只对同一个静电场的边值问题,运用不同的方法得到的解是否具有唯一性进行讨论。

静电场的唯一性定理可以表述为：对于任一静电场,满足一定边值条件的泊松方程或拉普拉斯方程的解是唯一的,即在区域 V 内给定电荷分布 $\rho(\boldsymbol{r})$,在 V 的边界 S 上给定电势 φ 或其法向变量导数$\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}$的值,则 V 内的场便被唯一确定。

下面给出唯一性定理的证明过程。

1. 区域内无导体存在的情形

设区域 V 由若干个子区域 V_i 组成,每一个区域内的介电常数为 ε_i。若 V 内给定的自由电荷密度为 $\rho(\boldsymbol{r})$,在 V 的边界 S 上给定 $\varphi\Big|_S$ 或$\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_S$。电势 φ 在区域 V_i 内满足泊松方程

$$\nabla^2\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon_i} \tag{3-25}$$

在两相邻区域 V_i、V_j 的边界上满足的边值关系为

$$\begin{cases}\varphi_i=\varphi_j\\ \varepsilon_i\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial n}=\varepsilon_j\dfrac{\partial\varphi_j}{\partial n}\end{cases} \tag{3-26}$$

要证明其解具有唯一性,可以用反证法。先假定在场域内的每一点上都有两个满足泊松方程或拉普拉斯方程和边界条件的解 φ_1 和 φ_2,即

$$\nabla^2\varphi_1=-\frac{\rho}{\varepsilon_i}\quad 和\quad \nabla^2\varphi_2=-\frac{\rho}{\varepsilon_i}$$

将上述两式相减,则这两个解的差值 $\varphi'=\varphi_1-\varphi_2$ 在该场域内满足拉普拉斯方程,即 $\nabla^2\varphi'=0$。在整个区域 V 的边界 S 上,有

$$\varphi'\,|_S=\varphi_2\,|_S-\varphi_1\,|_S=0 \tag{3-27}$$

和

$$\left.\frac{\partial\varphi'}{\partial n}\right|_S=\left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\right|_S-\left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\right|_S=0 \tag{3-28}$$

应用格林第一恒等式(1-37),即

$$\int_V(\varphi\nabla^2\psi+\nabla\varphi\cdot\nabla\psi)\mathrm{d}V=\oint_S\varphi\nabla\psi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

令格林第一恒等式中的标量函数 $\varphi=\psi=\varphi'$,并结合 $\nabla^2\varphi'=0$,则有

$$\int_V|\nabla\varphi'|^2\mathrm{d}V=\oint_S\varphi'\,\nabla\varphi'\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\oint_S\varphi'\,\frac{\partial\varphi'}{\partial n}\mathrm{d}S \tag{3-29}$$

因 $|\nabla\varphi'|^2$ 总是正值,无论给定边界上的 $\varphi\big|_S$ 或 $\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S$,由式(3-27)或式(3-28),均可得到

$$\nabla\varphi'=0 \tag{3-30}$$

即在 V 内,有

$$\varphi'=C \tag{3-31}$$

这表明,满足相同定解条件的解 φ_1 和 φ_2 至多只能相差一个常量,因电势本身具有相对意义,所以相差一个常量时所对应的场量却相同,从而证明了唯一性定理的正确性。

2. 区域内有导体存在的情形

若区域 V 有导体存在时,在导体表面上的边界条件有两种类型:一类是给定导体上的电势;另一类是给定导体表面上的电荷分布(已知表面自由电荷密度或总自由电荷)。

为简单考虑,我们假定讨论区域内含一种均匀介质和若干个导体,如图3-2所示。因导体内的电场为零,导体为等势体,所以我们只关心除导体外的区域中势函数的分布情况。设该区域为 V',因此边界包括外边界表面 S 和各个导体表面 S_i。设 V' 内给定的自由电荷密度为 $\rho(\boldsymbol{r})$,该区域内介电常数为 ε,在 V 的边界 S 上给定 $\varphi\big|_S$ 或 $\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S$。除此之外,并给出任一导体表面的电势 $\varphi\big|_{S_i}$ 或 $\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{S_i}$;另一种情形是给出导体表面总电量 $-\oint_{S_i}\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\mathrm{d}S=\dfrac{Q_i}{\varepsilon}$。

对于类型1,仍设所讨论的场域内每一点上都有两个满足泊松方程或拉普拉斯方程以

及边界条件的解 φ_1 和 φ_2，仿照前面的分析方法，应用格林第一恒等式时，应注意到闭合曲面包括外边界面和导体边界面两部分之和，即

$$\int_{V'}(\varphi\nabla^2\psi+\nabla\varphi\cdot\nabla\psi)\mathrm{d}V=\oint_S\varphi\nabla\psi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}+\sum_i\oint_{S_i}\varphi\nabla\psi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{3-32}$$

式中：$\boldsymbol{S}_i$ 的法线方向为复连通区域的正向，由介质指向导体内侧。

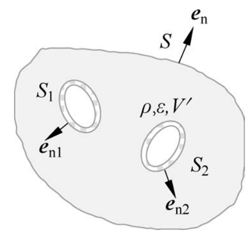


图 3-2 有导体存在时的边值问题

因导体表面的电势或电势关于法向变量导数给定，则式(3-32)右边第二项的推证方法与无导体存在时的情形完全类同，在此不再赘述。

对于类型 2，仍设有两个解 φ_1 和 φ_2 满足上述条件，令 $\varphi'=\varphi_1-\varphi_2$，则$\nabla^2\varphi'=0$。在 S 上，有

$$\varphi'|_S=\varphi_2|_S-\varphi_1|_S=0 \tag{3-33}$$

或

$$\left.\frac{\partial\varphi'}{\partial n}\right|_S=\left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\right|_S-\left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\right|_S=0 \tag{3-34}$$

在导体边界上，则有

$$\varphi'=0 \tag{3-35}$$

和

$$-\oint_{S_i}\frac{\partial\varphi'}{\partial n}\mathrm{d}S=0 \tag{3-36}$$

应用式(3-32)，令 $\varphi=\psi=\varphi'$，$\nabla^2\varphi'=0$，有

$$\int_{V'}|\nabla\varphi'|^2\mathrm{d}V=\oint_S\varphi'\frac{\partial\varphi'}{\partial n}\mathrm{d}S+\sum_i\oint_{S_i}\varphi'\frac{\partial\varphi'}{\partial n}\mathrm{d}S \tag{3-37}$$

同理，无论给定边界上还是导体边界上的 $\varphi|_S$ 或$\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S$，由式(3-35)或式(3-36)，均可得到

$$\nabla\varphi'=0 \tag{3-38}$$

从而也证明了唯一性定理。

静电场的解具有唯一性有着重要的意义，它表明在求解静电势问题时，只要所求解的问题在场域内的场源分布已知，并给定了具体的第一类或第二类边值条件，无论采用哪种解法，其解是唯一正确的。这就意味着对于具体问题，可以自由、灵活地选择一种求解场的简便方法，而不拘泥于固定的某一种。甚至在一些特殊情况下，可以不直接求解泊松方程或拉普拉斯方程的边值问题，而完全可以采用间接的方法去求解。下一节要介绍的镜像法就属于此。

例 3.4 一半径为 a、带电量为 Q 的导体球，其球心位于两种不同介质的分界平面上，如图 3-3 所示。试求两介质中的电场强度和其表面上的电荷分布。

解 采用球坐标系，使其原点与导体球的球心重合，设两介质中电位移矢量和电场强度分别为 $\boldsymbol{D}_1$、$\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{D}_2$、$\boldsymbol{E}_2$。由于左、右两半球介质不同，因此电场一般不同于同一种介质时具有球对称性的解。如果先考虑两介质分界面上的边值关系：

$$E_{1\mathrm{t}}=E_{2\mathrm{t}},\quad D_{1\mathrm{n}}=D_{2\mathrm{n}}$$

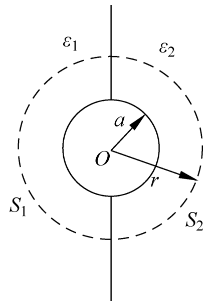


图 3-3　介质分界面上的带电导体球

由于电场切向分量具有连续性，因此若假设两半球各自的场具有球对称性，则通过边界面的衔接整个球上的场 $\boldsymbol{E}$ 仍然具有球对称性，并且沿着径向，即试探场应为

$$\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{E}=E\boldsymbol{e}_r$$

任选一个半径为 $r(r>a)$ 且与导体球同心的球面(高斯面)，应用高斯定理可得

$$\int_{S_1}\boldsymbol{D}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1+\int_{S_2}\boldsymbol{D}_2\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}_2=\varepsilon_1\int_{S_1}\boldsymbol{E}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1+\varepsilon_2\int_{S_2}\boldsymbol{E}_2\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}_2=Q$$

将试探解代入上式即可得出

$$\boldsymbol{E}=\frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r^2}\boldsymbol{e}_r$$

容易验证试探解满足边界条件：在介质 1、2 的分界面上，上述试探场满足电场切向分量连续的条件，而法向分量均为零；在导体球面上又处处与之垂直，满足等势面的要求。因此，由场的唯一性定理，试探解是唯一正确的解。

试探法是求解一些不确定解时常用的一种方法，但不是瞎猜、瞎试，而是基于对问题的规律和特征能够做出有一定把握的尝试，但最终结果是否正确其判断依据是是否满足唯一性定理。

导体球两侧表面上的自由电荷面密度分别为

$$\rho_{S1}=D_{1\mathrm{n}}\big|_{r=a}=\varepsilon_1E_{1r}\big|_{r=a}=\frac{\varepsilon_1Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)a^2}$$

和

$$\rho_{S2}=D_{2\mathrm{n}}\big|_{r=a}=\varepsilon_2E_{2r}\big|_{r=a}=\frac{\varepsilon_2Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)a^2}$$

注意导体两半球面上的自由电荷分布是不同的，但可以验证 $(\rho_{S1}S_1+\rho_{S2}S_2)\big|_{r=a}=Q$，即整个导体球的带电量为 Q。

根据 $\rho_{S\mathrm{b}}=-\dfrac{\varepsilon_\mathrm{r}-1}{\varepsilon_\mathrm{r}}\rho_S=-\dfrac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon}\rho_S$，可得紧贴导体球面的两介质表面上的束缚电荷面密度分别为

$$\rho_{S\mathrm{b}1}=-\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\rho_{S1}=-\frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_0)Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)a^2}$$

和

$$\rho_{S\mathrm{b}2}=-\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_0}{\varepsilon_2}\rho_{S2}=-\frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_0)Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)a^2}$$

由于在两种不同介质的分界面上场强只有切向分量而无法向分量，故介质两侧表面上没有束缚电荷分布。

问题拓展：如果介质 1 的内表面对球心 O 所张的立体角为 Ω，则介质 2 的内表面对球心 O 所张的立体角便是 $4\pi-\Omega$，同理可得

$$\boldsymbol{E}=\frac{Q}{[\Omega\varepsilon_1+(4\pi-\Omega)\varepsilon_2]r^2}\boldsymbol{e}_r=\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{E}_2$$

当 $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon$ 时，$\boldsymbol{E}=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\boldsymbol{e}_r$，即为均匀带电导体球在均匀介质中的场强。

3.3 分离变量法

通常情况下,静电场的边值问题是由泊松方程结合相应的边界条件构成的。在实际应用中,有许多静电场是由边界上的电荷或电势分布决定的,而在讨论的场域内往往无电场源,这类问题可归结为拉普拉斯方程的定解问题。另一类问题是场域内分布有简单的电荷,其边界条件较为简单,例如在地面附近存在一定分布的电荷所产生的静电场问题。对于一般的泊松方程定解问题,因为电势满足线性叠加原理,所以泊松方程的通解为某一特解与对应的拉普拉斯方程的通解之和,而特解可由电势的积分式求得,故其核心问题便成为求解拉普拉斯方程的解。

分离变量法是求解拉普拉斯方程的一种常用方法,但要求边界的形状规则,具体可根据边界选择适当的坐标系。而在众多可选择的坐标系中,最常用的坐标有直角坐标系、球坐标系和圆柱坐标系。本节只介绍后两种情形,至于直角坐标系中的分离变量法在 6.5 节再做详细介绍。

3.3.1 球坐标系中的分离变量法

1. 一般情形

在球坐标系内,一般情形下电势函数 φ 为 r,θ,ϕ 的函数,即 $\varphi=\varphi(r,\theta,\phi)$。相应的拉普拉斯方程可表示为

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}=0 \tag{3-39}$$

令 $\varphi(r,\theta,\phi)=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$,代入式(3-39),整理得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)-l(l+1)R=0 \tag{3-40}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}+m^2\Phi=0 \tag{3-41}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\left(l(l+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta=0 \tag{3-42}$$

式中:$l(l+1)(l=0,1,2,\cdots)$ 和 $m(m=0,1,2,\cdots)$ 为两个分离常数,详细推导见《数学物理方法》的相应部分。

式(3-40)和式(3-41)为常规的二阶线性常微分方程,其通解分别为

$$R(r)=A_l r^l+B_l r^{-(l+1)} \tag{3-43}$$

$$\Phi(\phi)=C_m\sin m\phi+D_m\cos m\phi \tag{3-44}$$

式(3-42)为一类特殊函数方程,称为连带勒让德方程。令 $x=\cos\theta$,代入式(3-42),并将 $\Theta(\theta)$ 改为 $y(x)$,得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\left(l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right)y=0 \tag{3-45}$$

方程(3-45)的两个独立解是 $P_l^m(x)$、$Q_l^m(x)$,分别称之为第一类、第二类连带勒让德函数。其中:$P_l^m(x)$ 为 m 次 l 阶连带(或缔合)勒让德函数,即

$$P_l^m(x)=P_l^m(\cos\theta)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_l(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^{(l+m)}}{\mathrm{d}x^{(l+m)}}(x^2-1)^l$$

$$(m\leqslant l,|x|\leqslant 1) \tag{3-46}$$

当 $x=\pm1$ 即 $\theta=0,\pi$ 时,因 $Q_l^m(x)\to\infty$,故包含球坐标系的极轴在内的问题,将只含有 $P_l^m(x)$,而 $Q_l^m(x)$不应计入。

因此,三维场的待求势函数一般解的形式为

$$\varphi(r,\theta,\phi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}[A_l r^l+B_l r^{-(l+1)}]P_l^m(\cos\theta)(C_m\sin m\phi+D_m\cos m\phi) \tag{3-47}$$

2. 二维轴对称场问题

若静电场分布与球坐标系中坐标变量 ϕ 无关,即场关于极轴对称,于是分离常数 $m^2=0$,则可退化为二维场问题。于是,式(3-45)化简为如下形式:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+l(l+1)y=0 \tag{3-48}$$

上式称为勒让德方程。其独立解为 $P_l(x)$、$Q_l(x)$,分别称之为第一类、第二类勒让德函数。同样,当 $x=\pm1$ 即 $\theta=0,\pi$ 时,因 $Q_l(x)\to\infty$,故包含球坐标系的极轴在内的问题,将只含有 $P_l(x)$,$P_l(x)$也称为勒让德多项式,可以表示为

$$P_l(x)=P_l(\cos\theta)=\frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}(x^2-1)^l=\frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}(\cos\theta)^l}(\cos^2\theta-1)^l \tag{3-49}$$

因此,在轴对称情况下静电场的电势解为

$$\varphi(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}[A_l r^l+B_l r^{-(l+1)}]P_l(\cos\theta) \tag{3-50}$$

例 3.5 半径为 a 的导体球,处于外加电场强度 $\boldsymbol{E}_0$ 中,求介质球外的电势和导体表面电荷分布。

解 设球坐标系中极轴 z 的方向与外电场 $\boldsymbol{E}_0$ 的方向一致,取导体球的球心为坐标原点,如图 3-4 所示。由于轴对称,电势 φ 与方位角 ϕ 无关,此问题是轴对称二维场。取球心处为零势点,则均匀外电场 $\boldsymbol{E}_0$ 的电势可表示为

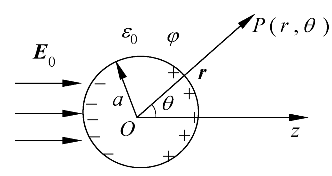


图 3-4 均匀电场中的导体球

$$\varphi=-E_0 z=-E_0 r\cos\theta$$

导体球在外电场的作用下,由于静电感应的结果,在导体表面出现感应电荷,这部分电荷在周围产生附加电场。总电势为外场 $\boldsymbol{E}_0$ 单独存在时的电势和感应电荷产生的电势之和。当 $r\to\infty$时,$\varphi=-E_0 r\cos\theta$。

于是,电势函数的定解问题为

$$\begin{cases}\nabla^2\varphi=0 \quad (r>a)\\ \varphi|_{r=a}=0\\ \varphi|_{r\to\infty}=-E_0 r\cos\theta\end{cases}$$

由分离变量法知,φ 的一般解形式为

$$\varphi(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}[A_l r^l+B_l r^{-(l+1)}]P_l(\cos\theta)$$

根据边界条件 $\varphi|_{r\to\infty}=-E_0 r P_1(\cos\theta)$,得

$$\sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right]_{r\to\infty} P_l(\cos\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta) = -E_0 r P_1(\cos\theta)$$

比较上式两端,得 $A_1 = -E_0, A_l = 0(l \neq 1)$。于是,

$$\varphi = -E_0 r P_1(\cos\theta) + \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-(l+1)} P_l(\cos\theta)$$

再利用 $\varphi|_{r=a} = 0$,得

$$(-E_0 a + B_1 a^{-2}) P_1(\cos\theta) + \sum_{l\neq 1} B_l a^{-(l+1)} P_l(\cos\theta) = 0$$

故有

$$B_1 = E_0 a^3,\quad B_l = 0(l \neq 1)$$

则

$$\varphi = -E_0 r\cos\theta + \frac{E_0 a^3}{r^2}\cos\theta$$

相应的电场强度为

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}\boldsymbol{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta = E_0\left(1 + \frac{2a^3}{r^3}\right)\cos\theta\boldsymbol{e}_r + E_0\left(-1 + \frac{a^3}{r^3}\right)\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta$$

导体球面上的感应电荷面密度则等于

$$\rho_S = \varepsilon_0 E_{\mathrm{n}}|_{r=a} = \varepsilon_0 E_r|_{r=a} = 3\varepsilon_0 E_0\cos\theta$$

在沿极轴方向上导体两侧对称地感应出等值而异号的电荷,故球面上总的感应电荷为零。

例 3.6　例 3.5 中将导体球换成介电常数为 ε_1、半径为 a 的介质球,置于介电常数为 ε_2 的基质中,外加电场强度仍为 $\boldsymbol{E}_0$,如图 3-5 所示。试求介质球内、外的电势分布和电场强度。

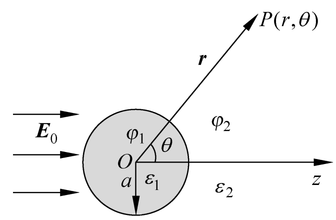


图 3-5　均匀电场中的介质球

解　建立和例 3.5 相同的坐标系,设介质球内、外的电势分别为 φ_1 和 φ_2,由分离变量法知,其一般解形式为

$$\varphi_1(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right] P_l(\cos\theta)$$

$$\varphi_2(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left[A'_l r^l + B'_l r^{-(l+1)}\right] P_l(\cos\theta)$$

取球心处为零势点,当 $r\to\infty$ 时,$\varphi_2\to -E_0 r\cos\theta$,即

$$\sum_{l=0}^{\infty}\left[A'_l r^l + B'_l r^{-(l+1)}\right]_{r\to\infty} P_l(\cos\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A'_l r^l P_l(\cos\theta) = -E_0 r P_1(\cos\theta)$$

比较上式两端,得 $A'_1 = -E_0 A'_l = 0(l \neq 1)$,于是,

$$\varphi_2 = -E_0 r P_1(\cos\theta) + \sum_{l=0}^{\infty} B'_l r^{-(l+1)} P_l(\cos\theta)$$

考虑到 $\varphi_1|_{r\to 0}$ = 有限值,故有

$$\varphi_1 = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta)$$

当 $r=a$ 时,有 $\varphi_1=\varphi_2$,$\varepsilon_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial r}=\varepsilon_2\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial r}$。可得

$$\begin{cases}A_1 a=-E_0 a+\dfrac{B_1'}{a^2}\\ \varepsilon_1 A_1=-\varepsilon_2 E_0-2\varepsilon_2\dfrac{B_1'}{a^3}\end{cases}\qquad\begin{cases}A_l a'=\dfrac{B_l'}{a^{l+1}}\\ \varepsilon_1 l A_l=-(l+1)\varepsilon_2\dfrac{B_l'}{a^{2l+1}}\end{cases}\quad(l\neq 1)$$

求解上两式构成的方程组,得

$$A_1=-\frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}E_0,\quad B_1'=\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}E_0 a^3;\quad A_l=B_l'=0\quad(l\neq 1)$$

因此,介质球内、外的电势与电场强度分别为

$$\varphi_1=-\frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}E_0 r\cos\theta,\quad \varphi_2=\left(-r+\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}\frac{a^3}{r^2}\right)E_0\cos\theta$$

$$\boldsymbol{E}_1=-\nabla\varphi_1=\frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}E_0\boldsymbol{e}_z=\frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}\boldsymbol{E}_0$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_2&=-\nabla\varphi_2=-\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\boldsymbol{e}_r-\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta\\&=\left(1+2\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}\frac{a^3}{r^3}\right)E_0\cos\theta\boldsymbol{e}_r+\left(-1+\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}\frac{a^3}{r^3}\right)E_0\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta\end{aligned}$$

可见,介质球内的电场也是均匀场,且与外电场方向一致。当介质球外是空气时,即 $\varepsilon_1=\varepsilon$,$\varepsilon_2=\varepsilon_0$,则有 $E_1=\dfrac{3\varepsilon_0}{2\varepsilon_0+\varepsilon}E_0=\dfrac{3}{2+\varepsilon_r}E_0<E_0$。因此介质球内的电场小于外电场。这是由于介质球被极化,其表面出现束缚电荷的缘故。在球内总场的作用下,介质的极化强度为

$$\boldsymbol{P}=\chi_e\varepsilon_0\boldsymbol{E}=(\varepsilon-\varepsilon_0)\boldsymbol{E}=\frac{3\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)}{\varepsilon_1+2\varepsilon_0}\boldsymbol{E}_0$$

介质球的总电偶极矩为

$$\boldsymbol{p}=\frac{4\pi a^3}{3}\boldsymbol{P}=\frac{\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)}{\varepsilon_1+2\varepsilon_0}4\pi a^3\boldsymbol{E}_0$$

φ_2 中第二项正是这个电偶极矩所产生的电势,即

$$\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon_1+2\varepsilon_0}\frac{E_0 a^3}{r^2}\cos\theta=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}$$

详见 3.6 节。

当介质中外加电场强度为 $\boldsymbol{E}_0$,介质内有介电常数较小的球形夹杂物(例如空气泡)时,不妨令 $\varepsilon_1=\varepsilon_0$,$\varepsilon_2=\varepsilon$,由上述结果知空气泡内的场强为 $E_1=\dfrac{3\varepsilon}{2\varepsilon+\varepsilon_0}E_0>E_0$。这是由于空腔的外侧出现的束缚电荷所产生的与外场同向的附加场,从而使空腔中的场强增大的缘故,这和介质中有介电常数较小的针状夹杂物的情况类似,介质有可能在该处被击穿而使其绝缘性受到破坏。

本例中，若令介电常数 $\varepsilon_2=\varepsilon$、$\varepsilon_1=\infty$，则是例 3.5 中的均匀电场中有导体球的情形。这时导体球内外的电势和场强分别为

$$\varphi_1=-\frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}E_0 r\cos\theta\to 0,\quad \varphi_2=\left(-r+\frac{a^3}{r^2}\right)E_0\cos\theta$$

其结果与例 3.5 完全相同。

例 3.7　半径为 R_1 的导体球外套一同心的导体球壳，球壳的内外半径分别为 R_2 与 R_3（$R_1<R_2<R_3$）。内导体球带电荷 Q_1，球壳带电荷 Q_2，二者之间填满介电常数为 ε 的介质。试用分离变量法求各区域中的电势与电场强度。

解　依据题意，建立球坐标系。因导体球和外壳均为等势体，不予考虑。设导体球与球壳间的电势为 φ_1，球壳外的电势为 φ_2。显然，$\nabla^2\varphi_1=0$，$\nabla^2\varphi_2=0$。由于该问题具有球对称性，故电势与 θ、ϕ 均无关，因此其一般解式(3-50)中应取 $l=0$，即

$$\varphi_1=A_1+\frac{B_1}{r},\quad R_1<r<R_2$$

$$\varphi_2=A_2+\frac{B_2}{r},\quad r>R_3$$

边界条件为：

(1) $\varphi_2|_{r\to\infty}=0$（由于电荷分布在有限区域，取无穷远处为零势点）；

(2) $\varphi_1|_{r=R_2}=\varphi_2|_{r=R_3}$（因导体球壳为等势体）；

(3) 导体球与导体壳所带的总电量分别为

$$-\varepsilon\oint_{r=R_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}r^2\mathrm{d}\Omega=Q_1,\quad -\varepsilon_0\oint_{r=R_3}\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}r^2\mathrm{d}\Omega+\varepsilon\oint_{r=R_2}\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}r^2\mathrm{d}\Omega=Q_2$$

利用上述边值关系，可得待定系数所满足的方程为

$$\begin{cases}A_2=0\\ A_1+\dfrac{B_1}{R_2}=\dfrac{B_2}{R_3}\\ 4\pi\varepsilon_0B_2-4\pi\varepsilon B_1=Q_2\\ 4\pi\varepsilon B_1=Q_1\end{cases}$$

求解上述方程，得待定系数为

$$\begin{cases}A_1=\dfrac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0R_3}-\dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon R_2}\\ A_2=0\\ B_1=\dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon}\\ B_2=\dfrac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\end{cases}$$

因此，可得电势的解为

$$\varphi_1=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon r}+\frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0R_3}-\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon R_2},\quad \varphi_2=\frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

由 $\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$ 可得,相应的电场强度为

$$\boldsymbol{E}_1=-\nabla\varphi_1=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon r^2}\boldsymbol{e}_r,\quad \boldsymbol{E}_2=-\nabla\varphi_2=\frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r$$

3.3.2 圆柱坐标系中的分离变量法

本节只讨论二维场问题。在圆柱坐标系中,若电势函数与坐标变量 z 无关,则为二维场问题。拉普拉斯方程可表示为

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}\right)=0 \tag{3-51}$$

或

$$\rho^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho^2}+\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}=0 \tag{3-52}$$

采用分离变量法,设 $\varphi(\rho,\phi)=R(\rho)\Phi(\phi)$,将其代入式(3-52),得

$$\rho^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\rho^2}+\rho\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}-\lambda R=0 \tag{3-53}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}+\lambda\Phi=0 \tag{3-54}$$

利用自然周期条件 $\Phi(\phi)=\Phi(\phi+2\pi)$,可得 $\lambda=n^2(n=0,1,2,\cdots)$。将 $\lambda=n^2$ 分别代入式(3-53)、式(3-54)两个常微分方程,其解分别为

$$R(\rho)=\begin{cases}A_0+B_0\ln\rho, & n=0\\ A_n\rho^n+B_n\rho^{-n}, & n\neq 0\end{cases} \tag{3-55}$$

和

$$\Phi(\phi)=B_1\sin n\phi+B_2\cos n\phi \tag{3-56}$$

因此,二维拉普拉斯方程的通解为

$$\varphi(\rho,\phi)=A_0+B_0\ln\rho+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\rho^n+B_n\rho^{-n})(C_n\sin n\phi+D_n\cos n\phi) \tag{3-57}$$

式中:A_n、B_n、C_n、D_n 均为待定常数,由边界条件可确定其值。

例 3.8 带电云层和大地之间可以近似为平行板间的均匀电场 $\boldsymbol{E}_0$,若一水平架设的、半径为 a 的电线处于其中,试求导体周围的电势和电场强度。

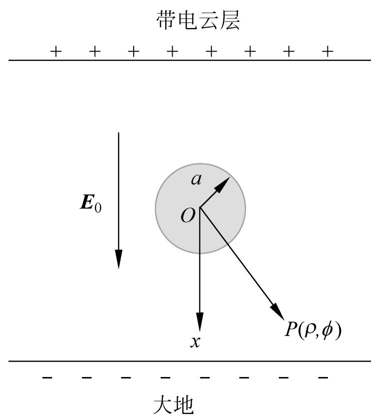


图 3-6 处于云层与大地之间的导线

解 取 $\boldsymbol{E}_0$ 沿 x 轴的正方向,如图 3-6 所示。因导体为等势体,其内电场为零,故只需求导体外的电势。采用圆柱坐标系,因为导体柱为无限长,故电势 φ 与 z 无关;又因对称 $\varphi(\rho,\phi)=\varphi(\rho,-\phi)$,即电势 φ 是方位角 ϕ 的偶函数,故解中无正弦项及对数项,于是待求势函数具有如下形式:

$$\varphi(\rho,\phi)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\rho^n+B_n\rho^{-n})\cos n\phi$$

另外,外电场 $\boldsymbol{E}_0$ 的电势可表示为

$$\varphi'=-\boldsymbol{E}_0x=-\boldsymbol{E}_0\rho\cos\phi$$

此边值问题给定的边界条件是:当 $\rho\to\infty$ 时,$\varphi=\varphi'$;

当 $\rho=a$ 时,$\varphi=0$(规定为零势点)。

由 $\varphi|_{\rho\to\infty}=-E_0\rho\cos\phi$,得

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n\rho^n\cos n\phi=-E_0\rho\cos\phi$$

比较等式两边的系数,可得 $n=1$,且 $A_1=-E_0$,于是

$$\varphi=\left(-E_0\rho+\frac{B_1}{\rho}\right)\cos\phi$$

代入 $\rho=a$ 时的边界条件,可得

$$-E_0a+\frac{B_1}{a}=0$$

则有

$$B_1=E_0a^2$$

因此,导体圆柱体外的电势为

$$\varphi=\left(-\rho+\frac{a^2}{\rho}\right)E_0\cos\phi$$

导体圆柱体外的电场强度为

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi=-\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\boldsymbol{e}_\rho-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}\boldsymbol{e}_\phi=\left(1+\frac{a^2}{\rho^2}\right)E_0\cos\phi\boldsymbol{e}_\rho+\left(-1+\frac{a^2}{\rho^2}\right)E_0\sin\phi\boldsymbol{e}_\phi$$

例 3.9 一夹角为 α 的导体劈尖,电势为 V,分析尖角附近的电场。

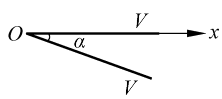


图 3-7 金属劈尖

解 假设劈尖沿 z 方向为无限长,则电势分布为二维场问题。采用极坐标系,如图 3-7 所示。用分离变量法,设 $\varphi(\rho,\phi)=R(\rho)\Phi(\phi)$,将其代入式(3-53)、式(3-54),得

$$\rho^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\rho^2}+\rho\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}-v^2R=0$$

和

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}+v^2\Phi=0$$

式中:v 为正实数或零,其一般解的形式为

$$\varphi(\rho,\phi)=(A_0+B_0\ln\rho)(C_0+D_0\phi)+\sum_{\nu\neq0}(A_v\rho^v+B_v\rho^{-v})(C_v\cos v\phi+D_v\sin v\phi)$$

考虑到自然边界条件:$\varphi|_{\rho\to0}=$有限值,可得 $B_0=B_v=0$。

利用边界条件 $\Phi(0)=V$,可得,$A_0C_0=V$,$C_v=0$;再利用 $\Phi(2\pi-\alpha)=V$,有 $D_0=0$,$\sin v(2\pi-\alpha)=0$(D_v 不能为 0),于是,

$$v=\frac{n\pi}{(2\pi-\alpha)},\quad n=1,2,3,\cdots$$

最后,解的形式为

$$\varphi(\rho,\phi)=V+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\rho^{\frac{n\pi}{2\pi-\alpha}}\sin\frac{n\pi}{2\pi-\alpha}\phi$$

式中:A_n 为待定量,因已知条件不足无法确定。

在劈尖角附近,$\rho\to0$,所以求和号中的贡献主要来自 $n=1$,故上式可近似表示为

$$\varphi(\rho,\phi)\approx V+A_1\rho^{\frac{1}{2-\alpha/\pi}}\sin\frac{1}{2-\alpha/\pi}\phi$$

相应的电场强度为

$$E_{\rho}=-\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\approx -A_{1}\frac{1}{2-\alpha/\pi}\rho^{-\frac{1+\alpha/\pi}{2-\alpha/\pi}}\sin\frac{1}{2-\alpha/\pi}\phi$$

$$E_{\phi}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \varphi}{\partial \phi}\approx -A_{1}\frac{1}{2-\alpha/\pi}\rho^{-\frac{1+\alpha/\pi}{2-\alpha/\pi}}\cos\frac{1}{2-\alpha/\pi}\phi$$

劈尖上的电荷密度为

$$\rho_{S}=\varepsilon_{0}E_{n}=\begin{cases}-\varepsilon_{0}A_{1}\dfrac{1}{2-\alpha/\pi}\rho^{-\frac{1+\alpha/\pi}{2-\alpha/\pi}}, & \phi=0\\ -\varepsilon_{0}A_{1}\dfrac{1}{2-\alpha/\pi}\rho^{-\frac{1+\alpha/\pi}{2-\alpha/\pi}}, & \phi=2\pi-\alpha\end{cases}$$

当 $\alpha\ll 1$ 时，$\rho_{S}\propto\rho^{-\frac{1}{2}}$，可见在劈尖附近电荷密度和电场强度非常大。在阴雨天的空气中容易产生尖端放电现象，避雷针就是利用此原理进行放电，从而保护高层建筑物的。

3.4 镜像法

2.3 节讨论了规则边界情况下拉普拉斯方程定解问题的分离变量法。然而，在有些情况下，则会遇到虽然电荷分布简单但周围存在一定边界的情形。如无限大金属导体附近存在一点电荷或线电荷。由于边界的存在，直接求解其电势或电场比较困难，用镜像法解决这类问题却十分有效。

3.4.1 镜像法的基本原理

镜像法是求解电场边值问题的一种特殊解法。以点电荷处于一无限大接地导体附近为例说明镜像法的基本原理。点电荷在周围产生的电场对导体的作用，使导体表面出现感应电荷，因此总场应由原电荷和感应电荷共同决定。假如在导体的边界外用虚设的场源(电荷)来代替边界上实际分布的感应电荷对电场的作用，该电荷即称为镜像电荷。这样，可以撤去边界，并将场源所在区域的介质扩展到整个空间，待求场则由场源及其镜像共同确定。可见，镜像法实质上是以场源的镜像代替边界上感应电荷的作用，将实际上非均匀介质的问题简化为均匀介质问题来处理。

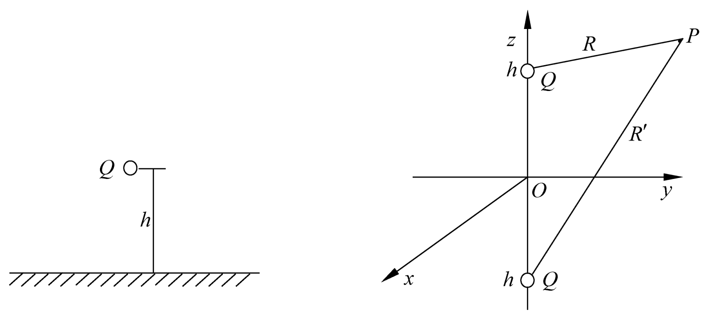
应该指出，镜像法不是一种求解边值问题普遍适用的方法，它只适用于一些较特殊的情形，是求解边值问题的一种间接方法。如点电荷处于平面、球面导体周围，线电荷(或线电流，第 4 章)处于平面、圆柱面导体周围。镜像的个数、大小和位置由边界条件确定。除了规则的金属边界外，对于两种不同介质的简单规则边界问题也适用。

镜像法的理论依据是唯一性定理。

3.4.2 导体平面的镜像

考虑在距离无限大接地导体平面为 h 处有一点电荷 Q，其周围是介电常数为 ε 的介质，如图 3-8(a)所示，求介质中任一点的电场。

所求的场除直接由点电荷 Q 产生外，还应考虑无限大导体表面上出现的异号感应电荷的场。依镜像法，若在与点电荷 Q 关于导体表面的对称位置上放一个镜像电荷 $Q'=-Q$，



(a) 无限大导体平面上空的点电荷　　(b) 点电荷与镜像电荷共同确定待求电势

图 3-8　点电荷对无限大导体平面的镜像

撤去导体平面，并使介质充满整个空间，如图 3-8(b)所示。于是在原上半空间中任一点 P 处的电势由点电荷 Q 及其镜像电荷 $Q'=-Q$ 共同确定。采用直角坐标系，将点电荷 Q 置于 z 轴上，坐标原点取在导体平面上，若选择无穷远处为电势的参考点，则有

$$\varphi=\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R'}\right),\quad z\geqslant 0 \tag{3-58}$$

式中：R 与 R' 分别是点电荷 Q 与其镜像电荷 Q' 到场点 P 的距离，分别为

$$R=\sqrt{x^2+y^2+(z-h)^2},\quad R'=\sqrt{x^2+y^2+(z+h)^2}$$

容易证明，这样选取的镜像是遵循唯一性定理的。

原定解问题为

$$\begin{cases}\nabla^2\varphi=-\dfrac{Q}{\varepsilon}\delta(z-h), & z>0\\ \varphi\mid_{z=0}=0\end{cases}$$

采用镜像法后的定解问题

$$\begin{cases}\nabla^2\varphi=-\dfrac{Q}{\varepsilon}\delta(z-h), & z>0\\ \varphi\mid_{z=0}=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon\sqrt{x^2+y^2+h^2}}-\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon\sqrt{x^2+y^2+h^2}}=0\end{cases}$$

显然，原问题和采用镜像法的定解问题完全等同，即符合唯一性定理。

为了进一步理解镜像的实质，下面计算导体表面的感应电荷。

在导体表面上介质中任一点的电场强度为

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{n}}=-\frac{Q}{2\pi\varepsilon(x^2+y^2+h^2)^{3/2}}\boldsymbol{e}_z$$

自由电荷密度为

$$\rho_S=\varepsilon E_{\mathrm{n}}=-\frac{Q}{2\pi(x^2+y^2+h^2)^{3/2}}$$

感应电荷总量为

$$Q'=-\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Q}{2\pi(x^2+y^2+h^2)^{3/2}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-Q$$

点电荷 Q 与导体平面间的库仑力也可以通过镜像法容易得到，即为

$$\boldsymbol{F}=\frac{Q(-Q)}{4\pi\varepsilon(2h)^2}\boldsymbol{e}_z=-\frac{Q^2}{16\pi\varepsilon h^2}\boldsymbol{e}_z$$

上述结果可推广到无限大导体平面相交成 $\alpha=\frac{\pi}{N}$(N 为正整数)的情形。图 3-9 示出了这时镜像电荷的分布情况,由此可以计算角形域内任一点的场强。

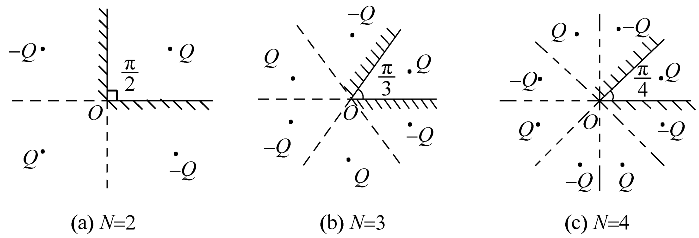


图 3-9 点电荷对夹角为 $\alpha=\frac{\pi}{N}$ 的两个半无限大导体平面的镜像

3.4.3 导体球面的镜像

如图 3-10(a)所示,半径为 R_0 的接地导体球外有一点电荷 Q,与球心的距离为 d,周围介质的介电常数为 ε。应用镜像法可以计算球外任一点的电势和电场强度。

接地导体球内以及球面上的电势为零,球外空间的电势由点电荷 Q 和球面上的感应电荷共同决定。球外电势 φ 的定解问题为

$$\begin{cases}\nabla^2\varphi=-\dfrac{Q}{\varepsilon}\delta(z-d) & (\text{球外})\\ \varphi\,|_{r=R_0}=0\end{cases}$$

采用镜像法,根据电荷的对称性分布,Q 对导体球的镜像电荷 Q'应位于点电荷与球心的连线上,为了不改变原方程,镜像电荷应置于球内,设镜像电荷距球心的距离为 d'。采用球坐标系,并使点电荷 Q 及其镜像电荷 Q'位于极轴上,如图 3-10(b)所示。镜像电荷 Q'与其位置 d'可由接地导体球表面电势为零的边界条件来确定。

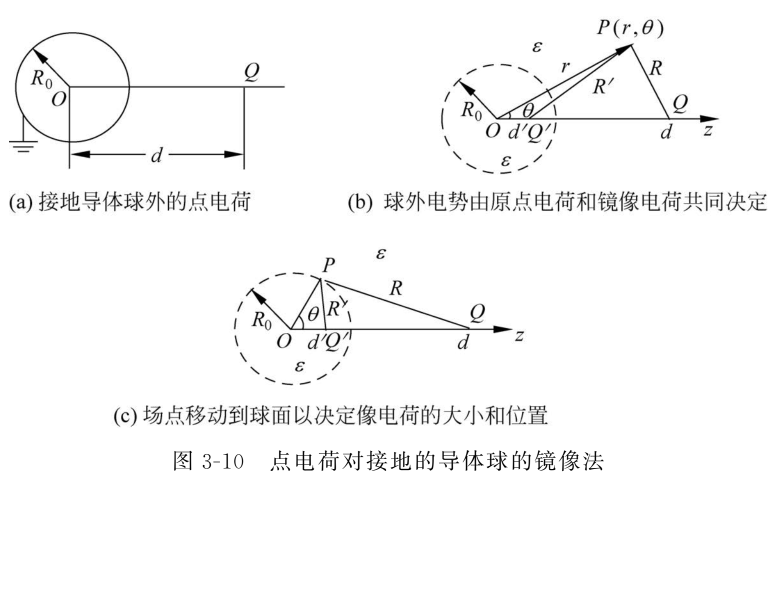


图 3-10 点电荷对接地的导体球的镜像法

球体外任一点 P 处的电势由 Q 和 Q' 共同确定，即

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{Q}{R}+\frac{Q'}{R'}\right) \tag{3-59}$$

将点 P 移到导体表面处，由图 3-10(c)可得

$$\varphi\mid_{r=R_0}=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{Q}{R}+\frac{Q'}{R'}\right)=0$$

则有

$$\frac{R}{R'}=-\frac{Q}{Q'}=\text{常数} \tag{3-60}$$

由图 3-10(c)可见，只要选 Q' 的位置使 $\Delta OQ'P\sim\Delta OPQ$，则有

$$\frac{R'}{R}=\frac{R_0}{d}=\frac{d'}{R_0}=\text{常数}$$

因此得到镜像电荷 Q' 至球心的距离为

$$d'=\frac{R_0^2}{d} \tag{3-61}$$

镜像电荷则为

$$Q'=-\frac{R_0}{d}Q \tag{3-62}$$

满足式(3-62)的 Q' 和 Q 两点电荷所在位置，称为球面的反演点。于是，由 Q 和 Q' 所确定的球外任一点 P 处的电势为

$$\begin{aligned}\varphi&=\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R}-\frac{R_0}{dR'}\right)\\&=\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+d^2-2dr\cos\theta}}-\frac{R_0/d}{\sqrt{r^2+d'^2-2rd'\cos\theta}}\right)\end{aligned} \tag{3-63}$$

式中：R 与 R' 分别为 Q 和 Q' 到场点 P 的距离。不难理解，镜像电荷 Q' 代替了导体球面上与 Q 异号的感应电荷的作用。由于感应电荷在球面上的分布不均匀，在靠近点电荷 Q 的表面上密度较大，因此镜像电荷 Q' 偏离球心而靠近 Q 的一方。因为导体球接地，故与 Q 同号的感应电荷不可能存在。

像电荷 Q' 及其位置 d' 的选取也可通过求代数方程而得。对于点 P 在导体表面任意处的情形，由余弦定理得

$$R^2=R_0^2+d^2-2R_0d\cos\theta,\quad R'^2=R_0^2+d'^2-2R_0d'\cos\theta$$

再由式(3-60)，得

$$\frac{Q^2}{Q'^2}=\frac{R^2}{R'^2}=\frac{R_0^2+d^2-2R_0d\cos\theta}{R_0^2+d'^2-2R_0d'\cos\theta}$$

则

$$Q^2(R_0^2+d'^2)-Q'^2(R_0^2+d^2)+2R_0(Q'^2d-Q^2d')\cos\theta=0$$

由于球面是等势面，故上式对于任一 θ 应均成立，即要求上式与 θ 值无关。则有

$$Q^2(R_0^2+d'^2)-Q'^2(R_0^2+d^2)=0,\quad Q'^2d-Q^2d'=0$$

得

$$\frac{Q'^2}{Q^2}=\frac{R_0^2+d'^2}{R_0^2+d^2}=\frac{d'}{d}$$

由上式同样可求得式(3-61)、式(3-62)。

该问题若用分离变量法，选球心为坐标原点，令 Q 位于 z 轴 $z=d$ 处，定解问题为

$$\begin{cases}\nabla^2\varphi=-\dfrac{Q}{\varepsilon}\delta(z-d)\\ \varphi\,|_{r=R_0}=0,\quad \varphi\,|_{r\to\infty}=0\end{cases}$$

因场关于 z 轴具有对称性，故泊松方程的一般解为

$$\varphi(r,\theta)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon\sqrt{r^2+d^2-2dr\cos\theta}}+\sum_{l=0}^{\infty}\left(a_l r^l+\frac{b_l}{r^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta)$$

考虑 $r\to\infty$时的自然边界条件，上式可写为

$$\varphi(r,\theta)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon\sqrt{r^2+d^2-2dr\cos\theta}}+\sum_{l=0}^{\infty}\frac{b_l}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta)$$

利用勒让德多项式的母函数公式

$$\frac{1}{\sqrt{r^2+d^2-2dr\cos\theta}}=\begin{cases}\dfrac{1}{d}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r}{d}\right)^l P_l(\cos\theta), & r<d\\ \dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{d}{r}\right)^l P_l(\cos\theta), & r>d\end{cases}\tag{3-64}$$

将一般解代入边界条件 $\varphi|_{r=R_0}=0$，注意到 $R_0<d$，要用到式(3-64)中的第一式，则有

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{1}{d}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{R_0}{d}\right)^l P_l(\cos\theta)+\sum_{l=0}^{\infty}\frac{b_l}{R_0^{l+1}}P_l(\cos\theta)=0$$

有

$$\begin{aligned}&b_l=-\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{R_0^{2l+1}}{d^{l+1}}\\ &\varphi(r,\theta)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon\sqrt{r^2+d^2-2dr\cos\theta}}-\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{R_0^{2l+1}}{d^{l+1}r^{l+1}}P_l(\cos\theta)\end{aligned}\tag{3-65}$$

再利用勒让德多项式的母函数将上式中第二项化为镜像 Q'所产生的电势，感兴趣的读者不妨试试。

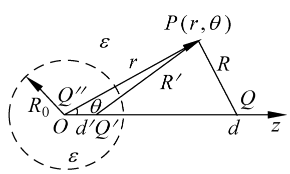


图 3-11 点电荷对不接地导体球的镜像

若导体球不接地，且带电量为 Q_0，在球外距离球心位置 d 处放置点电荷 Q，则其表面仍为等势面，但电势不为零。为此可等效为在 d' 处放置 Q'，在球心再放置一个镜像电荷 $Q''=Q_0-Q'$，如此可满足原先的边界条件，如图 3-11 所示。球外任一点 P 处的电势为

$$\varphi=\frac{Q}{4\pi\varepsilon R}-\frac{QR_0/d}{4\pi\varepsilon R'}+\frac{Q_0+QR_0/d}{4\pi\varepsilon r}\tag{3-66}$$

导体球面上的电势则为

$$\varphi_S=\frac{Q_0+QR_0/d}{4\pi\varepsilon R_0}\tag{3-67}$$

*3.4.4 介质平面的镜像

若两种不同介质的电介常数分别为 ε_1、ε_2，其分界面为无限大的平面边界。在介质 1 中

距离分界面 h 处有一点电荷 Q，如图 3-12(a)所示。和导体与介质间的平面边界的情形不同，在点电荷 Q 的作用下，电介质被极化，在介质分界面上产生极化面电荷分布，这时两介质中都有场。应用镜像法，欲求介质 1 中的场，可使整个空间充满介质 1，则由点电荷 Q 及其关于界面对称位置上的镜像电荷 Q' 共同确定原介质 1 中的场，如图 3-12(b)所示。同样欲求介质 2 中的场，可使整个空间充满介质 2，则由在原点电荷位置上的点电荷 Q 和镜像电荷 Q'' 确定原介质 2 中的场，如图 3-12(c)所示。镜像电荷 Q' 与 Q'' 的大小则由两介质间平面边界上的边界条件 $D_{1n}=D_{2n}$ 和 $E_{1t}=E_{2t}$ 来确定。

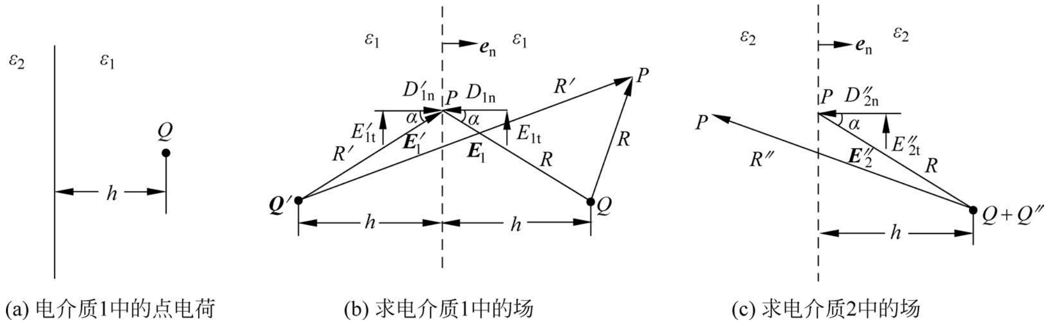


图 3-12 点电荷对两种不同电介质间具有无限大平面边界的镜像

将场点 P 移至平面边界上，由 $E_{1t}=E_{2t}$，可得 $E_{1t}+E'_{1t}=E''_{2t}$，即

$$E_1\sin\alpha + E'_1\sin\alpha = E''_2\sin\alpha \tag{3-68}$$

于是

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_1 R^2}+\frac{Q'}{4\pi\varepsilon_1 R^2}=\frac{Q+Q''}{4\pi\varepsilon_2 R^2}$$

故

$$\frac{Q}{\varepsilon_1}+\frac{Q'}{\varepsilon_1}=\frac{Q+Q''}{\varepsilon_2} \tag{3-69}$$

再由 $D_{1n}=D_{2n}$，则有 $-D_{1n}+D'_{1n}=-D''_{2n}$ 即

$$D_1\cos\alpha - D'_1\cos\alpha = D''_2\cos\alpha \tag{3-70}$$

则

$$\frac{Q}{4\pi R^2}-\frac{Q'}{4\pi R^2}=\frac{Q+Q''}{4\pi R^2} \tag{3-71}$$

故

$$Q'+Q''=0 \tag{3-72}$$

联解式(3-69)与式(3-72)，得

$$Q'=\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}Q \tag{3-73}$$

$$Q''=-\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}Q \tag{3-74}$$

可见，镜像电荷 Q'' 的符号与镜像电荷 Q' 符号相反，这表明在两种分界面上的极化面电荷对于两个不同介质的区域的等效结果极性相反，这一点结合边界条件不难理解。当 $\varepsilon_1=\varepsilon_2$ 时，其结果正好是原点电荷 Q 所产生的场。若 $\varepsilon_2=\infty$ 时，则电介质 1 中的场正好是点电

荷 Q 和镜像电荷 $Q'=-Q$ 所产生的场,而电介质 2 中的场$\left(E_2=\dfrac{Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)R^2}\right)$为零,这正是用导体代替电介质的结果。在静电场中,导体就相当于介电常数为无穷大的电介质。上述结果同样可以推广到其他电荷分布时的情形。

以上分析可推广应用到线电荷对无穷大不同电介质平面的镜像,计算镜像电荷的公式可类似地得到。

3.5 格林函数法

3.4 节介绍的镜像法是一种求解特殊类型静电场问题的方法。其中,求解一个点电荷的边值问题在静电学中有着重要的意义。这是因为它不仅意味着有关该电荷的特殊问题得到了有效的解决,而且意味着更普遍的一类问题也可以基于此而得到解决,这就是指如何借助于有关点电荷的较简单的边值问题分析较为普遍的电磁场边值问题。利用 δ 函数和格林公式可以把一般的边值问题和有关点电荷的相应问题联系起来。

3.5.1 δ 函数的定义及主要性质

1. δ 函数的定义

在物理问题中,有时候会遇到描述集中分布物理量的密度问题,例如在静电场中求解点电荷的边值问题,就需要给出点电荷密度的数学表达式。点电荷是电荷分布的极限情形,可视为一个体积很小而电荷密度很大的带电小球的极限。若电荷分布于小体积 ΔV 内,且当 $\Delta V\to 0$ 时,体积内的电荷密度 $\rho=\dfrac{\Delta Q}{\Delta V}\to\infty$,而总电量保持不变,即为点电荷分布。考虑置于 x 轴上原点处一单位点电荷(即 $Q=1$),则当 $\Delta x=\Delta l\to 0$ 时,其线密度 $\rho_l=\lim\limits_{\Delta l\to 0}\dfrac{\Delta Q}{\Delta l}\to\infty$,而在 x 轴上分布的总电荷不变,即$\int_{-\infty}^{\infty}\rho_l\,\mathrm{d}x=1$。1926 年狄拉克在量子力学中引入的 δ 函数就能表示这种集中量的密度,故又称为狄拉克(Dirac)函数或冲激函数。

δ 函数常用下述两点来定义,即

$$\delta(x-x')=\begin{cases}0, & x\neq x'\\ \infty, & x=x'\end{cases}\tag{3-75}$$

和

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x')\,\mathrm{d}x=1\tag{3-76}$$

δ 函数可将单位点源表示成分布场源,故 δ 函数是单位点源的密度函数。δ 函数是一种很有用的数学工具,在近代物理和工程技术中具有较广泛的应用。但它并不按通常函数的对应法则来定义,也不按通常的积分来定义,故它属于广义函数之列。

电荷 Q 的电荷密度在直角坐标系中位于源点(x',y',z')可表示为

$$\rho(x,y,z)=Q\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')\tag{3-77a}$$

在圆柱坐标系中位于源点(ρ',ϕ',z')可表示为

$$\rho(\rho,\phi,z)=\frac{Q}{\rho}\delta(\rho-\rho')\delta(\phi-\phi')\delta(z-z') \tag{3-77b}$$

在球坐标系中位于源点(r',θ',ϕ')可表示为

$$\rho(r,\theta,\phi)=\frac{Q}{r'^2\sin\theta'}\delta(r-r')\delta(\theta-\theta')\delta(\phi-\phi') \tag{3-77c}$$

2. δ 函数的主要性质

(1) 抽样性(偏移性或筛选性):

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x-x')\mathrm{d}x=f(x') \tag{3-78}$$

由于当 x'点为奇点时,对于预先任意给定的无论怎么小的正数 ε,都有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x')\mathrm{d}x=\int_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon}\delta(x-x')\mathrm{d}x=1$$

因此,利用积分中值定理可以得到

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x-x')\mathrm{d}x=\int_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon}f(x)\delta(x-x')\mathrm{d}x=f(\xi)\int_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon}\delta(x-x')\mathrm{d}x=f(\xi)$$

式中:$x'-\varepsilon\leqslant\xi\leqslant x'+\varepsilon$。在上式中令 $\varepsilon\to 0$,则 $\xi\to x'$,便得到式(3-78)。特别是当 $x'=0$ 时,则$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x)\mathrm{d}x=f(0)$。可见,$\delta$ 函数和某一连续函数 $f(x)$的乘积在整个实轴上的积分结果等于在奇点处该函数的值。随着奇点 x'的移动,可以抽取任何所需点的函数值。

在三维空间,则有

$$\int_{V_\infty}f(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V=f(\boldsymbol{r}') \tag{3-79}$$

(2) 偶函数。δ 函数是偶函数,即

$$\delta(-x)=\delta(x) \tag{3-80a}$$

或

$$\delta(x'-x)=\delta(x-x') \tag{3-80b}$$

因为$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x)\mathrm{d}x=f(0)$,若 $f(x)$为连续的奇函数,则 $f(0)=0$,于是 $f(x)\delta(x)$必为奇函数,因此,δ 函数必为偶函数。

(3) δ 函数与距离 R 的关系式:

$$\nabla^2\frac{1}{R}=-4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{3-81}$$

式中:$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$,$R=|\boldsymbol{R}|=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$。

当 $R\neq 0$ 时,容易证明:$\nabla^2\frac{1}{R}=0$。

当 $R\to 0$ 时,对式(3-81)在包围 $\boldsymbol{r}'$奇点在内的任一体积 V 内进行积分,将左式的积分应用高斯散度定理,并考虑$\nabla\frac{1}{R}=-\frac{\boldsymbol{e}_R}{R^2}$,则有

$$\int_V\nabla^2\frac{1}{R}\mathrm{d}V=\int_V\nabla\cdot\nabla\frac{1}{R}\mathrm{d}V=\oint_S\nabla\frac{1}{R}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\oint_S-\frac{\boldsymbol{e}_R\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{R^2}=-\oint_S\mathrm{d}\Omega=-4\pi$$

右式则为

$$-4\pi\int_V \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V=-4\pi$$

即

$$\int_V \nabla^2\frac{1}{R}\mathrm{d}V=-4\pi\int_V \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V$$

因上式对于任意大小的体积 V 均成立,故上式中被积函数一定相等。这就证明了式(3-81)。当 $|\boldsymbol{r}'|=0$ 时,$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}$,则有

$$\nabla^2\frac{1}{r}=-4\pi\delta(\boldsymbol{r}) \tag{3-82}$$

3.5.2 格林函数

由单位点源产生的势函数,称为格林函数,也称为点源函数。用 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 表示。位于 $\boldsymbol{r}'$ 点上的单位点电荷($Q=1$)所产生的格林函数同样满足泊松方程,即

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=-\frac{1}{\varepsilon}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{3-83}$$

一个非齐次线性微分方程的解是由非齐次方程的一个特解和对应的齐次方程的通解叠加而成。因此,满足由非齐次微分方程的格林函数可由两部分组成,即

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')+G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \tag{3-84}$$

它们分别满足方程

$$\begin{cases}\nabla^2 G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=-\dfrac{1}{\varepsilon}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\\[2mm] \nabla^2 G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=0\end{cases} \tag{3-85}$$

式中:$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$是满足含 δ 函数的非齐次泊松方程的特解或基本解,它是无界空间的格林函数,具有奇异性,$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'$的点为奇点。$G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$是仅满足相应的齐次拉普拉斯方程和一定的边界条件的通解,它是有界区域的格林函数,在整个区域内是正则的,无奇异性。它们的具体形式有赖于空间的维数和边界的形状。

下列几种情形下的格林函数分别为:

(1) 带有单位电荷面密度为 $\rho_S=1$ 的无限大平板与 x 轴垂直,在空间任一位置的格林函数为

$$\begin{cases}G_0=-\dfrac{1}{2\varepsilon}\mid x-x'\mid\\[2mm] G_1=C_1x+C_2\end{cases} \tag{3-86}$$

式中:C_1 与 C_2 均为由边界条件确定的常数。

(2) 线电荷密度为 $\rho_l=1$ 的无限长带电线在二维圆柱坐标系即平面极坐标系中的格林函数为

$$\begin{cases}G_0=-\dfrac{1}{2\pi\varepsilon}\ln\mid\rho-\rho'\mid\\[2mm] G_1=C_0+D_0\ln\rho+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(A_{1n}\rho^n+A_{2n}\rho^{-n})(B_{1n}\sin n\phi+B_{2n}\cos n\phi)\end{cases} \tag{3-87}$$

式中：A_{1n}、A_{2n}、B_{1n}、B_{2n}、C_0、D_0 均为由边界条件确定的待定常数。

（3）体电荷密度为 $\rho=1$ 的点电荷在三维球坐标系中的格林函数为

$$\begin{cases} G_0 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon\ |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \\ G_1 = \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}(A_l r' + B_l r^{-(l+1)})P_l^m(\cos\alpha)(C_m \sin m\phi + D_m \cos m\phi) \end{cases} \tag{3-88}$$

式中：A_l、B_l、C_m、D_m 均为待定常数。G_0 中的因子

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\alpha}} \tag{3-89}$$

式中：α 是空间矢径 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{r}'$间的夹角，如图 3-13 所示。在球坐标系中，若 $\boldsymbol{r}$ 的坐标为 (r,θ,ϕ)，$\boldsymbol{r}'$ 的坐标为 (r',θ',ϕ')，则

$$\cos\alpha = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\phi') \tag{3-90}$$

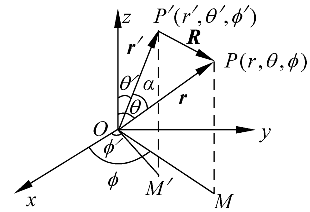


图 3-13　两空间矢径间的夹角

如果问题与方位角 ϕ 无关，式(3-88) 中 $m=0$，并取 $\boldsymbol{r}'$ 点在极轴上，即在轴对称的情形下，$\theta'=0$，式(3-88) 中的 G_1 变为

$$G_1 = \sum_{l=0}^{\infty}(A_l r^l + B_l r^{-(l+1)})P_l(\cos\theta) \tag{3-91}$$

格林函数是场点与源点之间距离 $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$ 的函数，将场点与源点互换，距离不变，格林函数亦不变，因此格林函数具有互易性，即

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = G(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}) \tag{3-92}$$

3.5.3　格林函数法

应用格林函数求解边值问题的方法，称为格林函数法。该方法的实质是将边值问题转化为求格林函数的解。一旦求得格林函数，则场源与势函数间的关系变为一个积分方程，给定场源和边值条件就可由此积分方程求得势函数。下面具体导出格林函数法的基本公式。

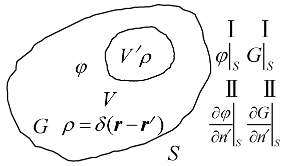


图 3-14　格林函数的边值问题

前面讲过，静态场的泊松方程在给定区域 V 内的第一类与第二类边值问题分别是给定区域 V 内的场源分布。例如电荷密度 $\rho(\boldsymbol{r})$，并给定区域 V 的边界 S 上的势函数值 $\varphi|_S$（第一类边值问题），或边界 S 上势函数的法向导数值 $\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S$（第二类边值问题），需要求解 V 内的势函数 $\varphi(\boldsymbol{r})$，如图 3-14 所示。与此对应的第一类与第二类格林函数的边值问题是：区域 V 内有一单位点源，其边界 S 上给定格林函数值$G|_S$，或其法向导数值 $\left.\dfrac{\partial G}{\partial n}\right|_S$，则 V 内所求的势函数 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$就是格林函数。

设电荷密度为 $\rho(\boldsymbol{r})$的电荷分布所产生的电势满足泊松方程，即

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

相应的格林函数 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$的满足方程为

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

取 φ 为势函数 $\varphi(\boldsymbol{r})$，ψ 为格林函数 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$，利用格林第二公式(1-39)，得

$$\int_V \left[G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\left(-\frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\varepsilon}\right)+\varphi(\boldsymbol{r})\frac{\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{\varepsilon}\right]\mathrm{d}V = \oint_S \left[G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{r})}{\partial n}-\varphi(\boldsymbol{r})\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n}\right]\mathrm{d}S$$

当源点在区域 V 内时，$\int_V \varphi(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V=\varphi(\boldsymbol{r}')$，故上式可改写为

$$\varphi(\boldsymbol{r}') = \int_V G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V + \varepsilon\oint_S \left[G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{r})}{\partial n}-\varphi(\boldsymbol{r})\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n}\right]\mathrm{d}S$$

将上式中的源点 $\boldsymbol{r}'$与场点 $\boldsymbol{r}$ 互换，并利用格林函数的互易性，便得到区域 V 内势函数的积分方程，即

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \int_V G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V' + \varepsilon\oint_S \left[G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}-\varphi(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\right]\mathrm{d}S' \tag{3-93}$$

式中：S 是包围区域 V 的闭合面，$\mathrm{d}V'$和 $\mathrm{d}S'$分别是打撇变量的体积元与面积元，n'是区域 V 的边界面外法线方向上打撇的坐标变量。上式右端第一项是区域 V 内场源所产生的势，第二项为 V 的边界面 S 上感应或束缚电荷对势的贡献。

式(3-93)是用格林函数求解静态场边值问题的基本积分方程。求解该积分方程，除了已知格林函数外，不仅要给定区域 V 内的电荷分布 $\rho(\boldsymbol{r}')$，还要给定边界面 S 上的电势值 $\varphi(\boldsymbol{r}')|_S$($\boldsymbol{r}'$ 在 S 上)及其法向导数值 $\left.\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\right|_S$，并求出边界面 S 上的格林函数值 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')|_S$ 及其法向导数值 $\left.\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\right|_S$，方可得到势函数的解。

对于第一类边值问题，已知边界面 S 上的电势值为$\varphi(\boldsymbol{r}')|_S$，如果选取边界面 S 上的格林函数值$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')|_S=0$，则由式(3-93)可得满足第一类边值条件的泊松方程的解为

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \int_V G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V' - \varepsilon\oint_S \varphi(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\mathrm{d}S' \tag{3-94}$$

这表明，如果 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$已知，通过对 V 内给定电荷分布 $\rho(\boldsymbol{r}')$及边界面 S 上给定 $\varphi(\boldsymbol{r}')$值的积分，就可解出第一类边值问题。

对于第二类边值问题，因为 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$表示一个单位点电荷在空间所激发的电势，而 $-\left.\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\right|_S$ 则代表单位点电荷在边界面 S 上所激发的电场。有

$$-\oint_S \frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\mathrm{d}S' = \frac{1}{\varepsilon_0} \tag{3-95}$$

故不能取$\left.\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\right|_S=0$。而满足上式最简单的边界条件为

$$\left.\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\right|_S = -\frac{1}{\varepsilon_0 S} \tag{3-96}$$

式中：S 是界面的总面积。由式(3-93)得第二类边值问题的解为

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \int_V G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V' + \varepsilon\oint_S G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\mathrm{d}S' + \bar{\varphi}_S \tag{3-97}$$

式中：$\bar{\varphi}_S=\dfrac{1}{S}\oint_S\varphi(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S$ 是势函数 φ 在整个边界面 S 上的平均值。

由式(3-94)与式(3-97)可见，只要求出区域 V 内的格林函数，则一般边值问题就能得到解决。但格林函数有赖于区域边界面 S 的形式，对于复杂形状边界的问题，要求出它是很困难的，并不比解原来的边值问题容易。然而格林函数的作用是把微分方程连同边值条件变成积分方程。在多数情况下，积分方程可用近似方法和数值方法求解。只有当区域边界面具有简单的几何形状(如无限大平面、无限长圆柱、球等)时才能得出解析解。前面介绍的镜像法就是求格林函数的一种方法，此外还可以用分离变量法、直接积分法求格林函数。

当然，格林函数法也可以用来求解拉普拉斯方程的边值问题，在式(3-94)与式(3-97)中，只要令 $\rho=0$，便得到拉普拉斯方程的相应边值问题的解。

例 3.10 在无限大导体平面上有半径为 a 的细绝缘圆环，设圆环内的电势为 φ_0，圆环外的电势为零。试求上半空间的电势。

解 如图 3-15 所示，选取圆柱坐标系，用格林函数法。根据题意，格林函数所满足的边值问题为

$$\begin{cases}\nabla^2G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=-\dfrac{1}{\varepsilon}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\\ G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\big|_{z=0}=0\end{cases}$$

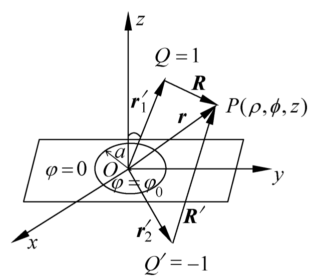


图 3-15 求上半空间的电势

格林函数可以用镜像法求得。场点的空间矢径 $\boldsymbol{r}$ 和源点及其镜像点的空间矢径 $\boldsymbol{r}'_1$ 与 $\boldsymbol{r}'_2$ 的直角坐标分别为 $(\rho\cos\phi,\rho\sin\phi,z)$ 和 $(\rho'\cos\phi',\rho'\sin\phi',z')$ 及 $(\rho'\cos\phi',\rho'\sin\phi',-z')$，则上半空间的格林函数可用圆柱坐标表示为

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R}-\frac{1}{R'}\right]=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'_1|}-\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'_2|}\right]$$
$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{-\frac{1}{2}}-[(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2]^{-\frac{1}{2}}\right\}$$
$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\{[\rho^2+z^2+\rho'^2+z'^2-2zz'-2\rho\rho'\cos(\phi-\phi')]^{-\frac{1}{2}}-$$
$$[\rho^2+z^2+\rho'^2+z'^2+2zz'-2\rho\rho'\cos(\phi-\phi')]^{-\frac{1}{2}}\}$$

在 $z=0$ 的平面上 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=0$，在 $z>0$ 的上半空间的电荷分布为零。因此本问题是拉普拉斯方程的第一类边值问题，由式(3-94)可得上半空间的电势。

由于积分面 S 是 $z'=0$ 的无限大平面，法线方向沿 $-z'$ 方向，故有

$$-\frac{\partial G}{\partial n'}=\frac{\partial G}{\partial z'}\bigg|_{z'=0}=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{z}{[\rho^2+z^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos(\phi-\phi')]^{3/2}}$$

因无限大平面 S 上只有圆环内部的电势不为零，故面积分只需对 $\rho'\leqslant a$ 的圆域积分，即

$$\varphi(\boldsymbol{r})=\frac{\varphi_0z}{2\pi}\int_0^a\rho'\mathrm{d}\rho'\int_0^{2\pi}[\rho^2+z^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos(\phi-\phi')]^{-3/2}\mathrm{d}\phi'$$
$$=\frac{\varphi_0z}{2\pi}\int_0^a\rho'\mathrm{d}\rho'\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\phi'}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\left[1+\frac{\rho'^2-2\rho\rho'\cos(\phi-\phi')}{\rho^2+z^2}\right]^{-3/2}$$

当 $r^2=\rho^2+z^2\gg a^2$ 时，应用近似公式 $(1+x)^n\approx 1+nx(|x|\ll 1)$，则被积函数可以展开为

$$\left[1+\frac{\rho'^2-2\rho\rho'\cos(\phi-\phi')}{\rho^2+z^2}\right]^{-3/2}\approx 1-\frac{3}{2}\frac{\rho'^2-2\rho\rho'\cos(\phi-\phi')}{\rho^2+z^2}$$

代入原式积分，可得上半空间的电势为

$$\varphi(\boldsymbol{r})=\frac{\varphi_0 a^2}{2}\frac{z}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\left[1-\frac{3}{4}\frac{a^2}{\rho^2+z^2}\right]$$

3.6 电多极矩法

在许多物理问题中，电荷只分布在一个小区域内，所求场点距离电荷较远，即 $R\gg 1$。在这种情况下，对场的各级近似计算可以通过把 $\frac{1}{R}$ 进行级数展开，这在科学研究和工程应用中很重要。

3.6.1 电势的多级展开

如图 3-16 所示，真空中区域 V' 内给定电荷分布为 $\rho(\boldsymbol{r}')$ 的带电体所激发的电势为

$$\varphi(\boldsymbol{r})=\int_{V'}\frac{\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V'}{4\pi\varepsilon_0 R}\tag{3-98}$$

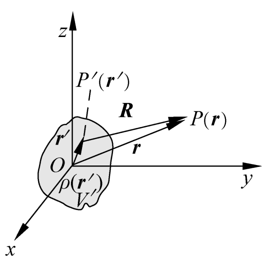


图 3-16 小区域内电荷分布

式中：R 为场点 $\boldsymbol{r}$ 与源点 $\boldsymbol{r}'$ 间的距离。即

$$R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|=[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{\frac{1}{2}},$$

$$r=[x^2+y^2+z^2]^{\frac{1}{2}}$$

$\boldsymbol{r}'$ 在区域 V' 内变动，由于其线度远小于 $\boldsymbol{r}$，故可以把各分量看作小参量，将 $\frac{1}{R}$ 对 $\boldsymbol{r}'$ 展开，由一般函数的泰勒级数展开式

$$f(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')=f(\boldsymbol{r})-\sum_{i=1}^{3}x'_i\frac{\partial}{\partial x_i}f(\boldsymbol{r})+\frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{3}x'_ix'_j\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}f(\boldsymbol{r})+\cdots$$

得

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{r}-\sum_{i=1}^{3}x'_i\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{r}+\frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{3}x'_ix'_j\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\frac{1}{r}+\cdots\tag{3-99}$$

证明如下：

构建函数

$$F(t)=f(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'t)=f(x-x't,y-y't,z-z't),$$

对 t 展开为泰勒级数，可得

$$F(t)=F(0)+F'(0)t+\frac{1}{2!}F''(0)t^2+\cdots$$

令 $t=1$，则有

$$F(1)=F(0)+F'(0)+\frac{1}{2!}F''(0)+\cdots$$

其中，$F(1)=f(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$，$F(0)=f(\boldsymbol{r})$，

$$F'(0)=\frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'t)}{\partial(x_i-x_i't)}\cdot\frac{\partial(x_i-x_i't)}{\partial t}\bigg|_{t=0}=-\sum_{i=1}^{3}x_i'\frac{\partial f(\boldsymbol{r})}{\partial x_i}=-(\boldsymbol{r}'\cdot\nabla)f(\boldsymbol{r})$$

$$F''(0)=\frac{\mathrm{d}^2F(t)}{\mathrm{d}t^2}\bigg|_{t=0}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[-(\boldsymbol{r}'\cdot\nabla)f(\boldsymbol{r})]\bigg|_{t=0}=\sum_{i,j=1}^{3}x_i'x_j'\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{r})}{\partial x_i\partial x_j}=(\boldsymbol{r}'\cdot\nabla)^2 f(\boldsymbol{r})$$

故有

$$f(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')=f(\boldsymbol{r})-\sum_{i=1}^{3}x_i'\frac{\partial}{\partial x_i}f(\boldsymbol{r})+\frac{1}{2!}\sum_{i,j}x_i'x_j'\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}f(\boldsymbol{r})+\cdots$$

得证。

将式(3-99)代入式(3-98),则为

$$\varphi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\rho(\boldsymbol{r}')\left[\frac{1}{r}-\sum_{i=1}^{3}x_i'\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{r}+\frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{3}x_i'x_j'\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\frac{1}{r}+\cdots\right]\mathrm{d}V' \tag{3-100a}$$

或

$$\varphi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\rho(\boldsymbol{r}')\left[\frac{1}{r}-\boldsymbol{r}'\cdot\nabla\frac{1}{r}+\frac{1}{2!}(\boldsymbol{r}'\cdot\nabla)^2\frac{1}{r}+\cdots\right]\mathrm{d}V' \tag{3-100b}$$

此式即为电荷体系激发的电势在远处的多级展开式。

3.6.2 电多极矩

下面具体讨论多级展开式中每项的物理意义。令

$$Q=\int_{V'}\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V' \tag{3-101}$$

则 Q 表示带电体的全部电量。

令

$$\boldsymbol{p}=\int_{V'}\rho(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{r}'\mathrm{d}V' \tag{3-102}$$

$\boldsymbol{p}$ 称为电荷系统的电偶极矩,该式为一般形式的电偶极矩定义式。

再令

$$D_{ij}=\int_{V'}3x_i'x_j'\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V' \tag{3-103a}$$

及

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{D}}=\int_{V'}3\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V' \tag{3-103b}$$

D_{ij} 称为电荷系统的电四极矩,$\overleftrightarrow{\boldsymbol{D}}$ 称为电四极矩张量。

于是,式(3-100b)可表示为

$$\varphi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{r}-\boldsymbol{p}\cdot\nabla\frac{1}{r}+\frac{1}{6}\overleftrightarrow{\boldsymbol{D}}:\nabla\nabla\frac{1}{r}+\cdots\right) \tag{3-104}$$

展开式的第一项为

$$\varphi^{(0)}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{3-105}$$

表示将带电体的全部电量 Q 集中于原点所激发的电势。这是电势积分式中最主要的

一项。

展开式的第二项为

$$\varphi^{(1)}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\boldsymbol{p}\cdot\nabla\frac{1}{r}=\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \tag{3-106}$$

表示电偶极矩 $\boldsymbol{p}$ 产生的电势。

由式(3-102)知,若带电体系的电荷分布关于原点对称,由于 $\rho(\boldsymbol{r}')=\rho(-\boldsymbol{r}')$,而 $\boldsymbol{r}'$ 与 $-\boldsymbol{r}'$ 大小相等,符号相反,因此积分式(3-102)的电偶极矩为零。电荷分布具有球对称性即属于此。只有电荷对原点不对称时,电偶极矩才不等于零。例如一对等值异号的电荷 $\pm Q$、间距 l 远小于它们到场点的距离的电荷系统(称为电偶极子),这是最简单的一类电偶极矩。下面计算它所产生的电势。

在球坐标系中,设电偶极子沿极轴正向放置,其中心到远处任一点 P 的距离为 r,则两异号电荷在场点 P 处的电势为

$$\varphi=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_+}-\frac{1}{r_-}\right)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_- - r_+}{r_+ r_-}$$

式中:$r_+=\left[r^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2-rl\cos\theta\right]^{\frac{1}{2}}=r\left[1+\frac{l^2}{4r^2}-\frac{l}{r}\cos\theta\right]^{\frac{1}{2}}$,$r_-=\left[r^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2+rl\cos\theta\right]^{\frac{1}{2}}=r\left[1+\frac{l^2}{4r^2}+\frac{l}{r}\cos\theta\right]^{\frac{1}{2}}$。

由于 $l\ll r$,应用牛顿二项式定理,即当 $|x|\ll1$ 时,$(1+x)^\alpha\approx1+\alpha x$,展开后并略去高阶小项,得 $r_+\approx r-\frac{l}{2}\cos\theta$,$r_-\approx r+\frac{l}{2}\cos\theta$,$\frac{1}{r_+}-\frac{1}{r_-}\approx\frac{l\cos\theta}{r^2}=-l\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)$,于是有

$$\varphi=\frac{Ql}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta$$

可见,电偶极势与单个电荷的电势不同,它与乘积 Ql 成正比,而与距离的平方 r^2 成反比,且与极角 θ 有关。由电偶极矩的定义式(3-102),得 $\boldsymbol{p}=Q\boldsymbol{l}$。于是上式可写为

$$\varphi=\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}p_z\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)$$

该结果与式(3-106)相符。

展开式的第三项为

$$\varphi^{(2)}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\overleftrightarrow{\boldsymbol{D}}:\nabla\nabla\frac{1}{r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\sum_{i,j=1}^{3}D_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\frac{1}{r} \tag{3-107}$$

表示电四极矩 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{D}}$ 产生的电势。

最简单的电四极矩是一对正、负电偶极子组成的,设偶极矩为 $\boldsymbol{p}$,正电荷位于 $z=\pm b$,负电荷位于 $z=\pm a(b>a)$,两电偶极子中心的距离为 l,体系的总电荷为零,总偶极矩为零,电四极矩由式(3-103a)可得

$$D_{33}=\int_{V'}3z'z'\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V'=6q(b^2-a^2)=6q(b-a)(b+a)=6pl$$

相应的电势为

$$\varphi^{(2)} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} p \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r^+}\right) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} p \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r^-}\right)$$
$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} p \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r^+} - \frac{1}{r^-}\right) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} pl \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right)$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{6} D_{33} \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right)$$

电四极矩的分量 $D_{ij}(i,j=1,2,3)$中，$D_{ij}=D_{ij}(i\neq j)$，共有 6 个独立分量。但可以证明 $D_{11}+D_{22}+D_{33}=0$，因此 D_{ij} 只有 5 个独立分量。证明过程如下：

当 $r\neq 0$ 时，有$\nabla^2 \dfrac{1}{r}=0$

引入符号 $\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$，则 $\displaystyle\sum_{i,j}\delta_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\frac{1}{r}=0$。

式(3-103a)可写为

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\int_{V'}\sum_{i,j}[3x'_i x'_j - r'^2\delta_{ij}]\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V' \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\frac{1}{r}$$

对照式(3-107)，重新定义电四极矩为

$$D_{ij}=\int_{V'}(3x'_i x'_j - r'^2\delta_{ij})\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V' \tag{3-108}$$

容易验证，上式满足

$$D_{11}+D_{22}+D_{33}=0 \tag{3-109}$$

得证。

因此电四极矩张量中只有 5 个独立分量。张量 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{D}}$ 也可表示为

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{D}}=\int_{V'}(3\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}' - r'^2\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}})\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V' \tag{3-110}$$

式中：$\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}$ 为单位张量。

若电荷分布具有球对称性，则

$$\int_{V'}x'^2\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V' = \int_{V'}y'^2\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V' = \int_{V'}z'^2\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V' = \frac{1}{3}\int_{V'}r'^2\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V'$$

因而 $D_{11}=D_{22}=D_{33}$，且容易得出 $D_{12}=D_{23}=D_{31}=0$，因此球对称分布的电荷没有电四极矩；因球外电场和集中于球心处的点电荷电场一致，因此电偶极矩也不存在。可见，电多极矩反映了电荷分布偏离球对称性，因此测量远区的四极势项，就可以对电荷分布形状做出一定的推论。

在原子核物理中，电四极矩是反映原子核形变大小的重要物理量。八极矩和更高级矩很少用到。

电多极矩也可按$\dfrac{1}{R}$的幂次和球谐函数进行展开。

讨论一般电势 $\varphi(\boldsymbol{r})=\displaystyle\int_{V'}\frac{\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V'}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$ 在远区的场，将$\dfrac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$按照勒让德多项式展开为

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=\frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\alpha}}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{r}\left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos\alpha) \tag{3-111}$$

式中，α 为 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{r}'$ 之间的夹角。再利用球谐函数的加法公式，有

$$P_l(\cos\alpha)=\frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l}[Y_l^m(\theta',\phi')]^*Y_l^m(\theta,\phi)$$

$$\varphi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{2l+1}\left[\int_{V'}[Y_l^m(\theta',\phi')]^*r'^l\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V'\right]\frac{Y_l^m(\theta,\phi)}{r^{l+1}}$$

令 $Q_{lm}=\int_{V'}[Y_l^m(\theta',\phi')]^*r'^l\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V'$，称为电多极矩，$l=0,1,2,\cdots$，分别对应于 2^l 阶电极矩。则电势展开式为

$$\varphi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{2l+1}Q_{lm}\frac{Y_l^m(\theta,\phi)}{r^{l+1}}\tag{3-112}$$

*3.6.3 小区域内电荷体系在外电场的能量

讨论电荷集中分布于一个小区域内的电荷体系与外场的作用，可归结为分析电多极矩与外场的相互作用。

具有连续电荷分布 $\rho(\boldsymbol{r}')$ 的体系在外电势场 $\varphi_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{r})$ 中的电场能量为

$$W_{\mathrm{e}}=\int_{V'}\rho\varphi_{\mathrm{e}}\mathrm{d}V'\tag{3-113}$$

将外电势 $\varphi_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{r})$ 对原点展开

$$\varphi_{\mathrm{e}}=\varphi_{\mathrm{e}}(0)+\sum_{i=1}^{3}x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi_{\mathrm{e}}(0)+\frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{3}x_ix_j\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\varphi_{\mathrm{e}}(0)+\cdots\tag{3-114}$$

代入式(3-113)，得

$$\begin{aligned}W_{\mathrm{e}}&=\int_{V'}\rho(\boldsymbol{r}')\left[\varphi_{\mathrm{e}}(0)+\sum_{i=1}^{3}x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi_{\mathrm{e}}(0)+\frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{3}x_ix_j\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\varphi_{\mathrm{e}}(0)+\cdots\right]\mathrm{d}V'\\&=Q\varphi_{\mathrm{e}}(0)+\boldsymbol{p}\cdot\nabla\varphi_{\mathrm{e}}(0)+\frac{1}{6}\overleftrightarrow{\boldsymbol{D}}:\nabla\nabla\varphi_{\mathrm{e}}(0)+\cdots\end{aligned}\tag{3-115}$$

展开式(3-115)中第一项为

$$W_{\mathrm{e}}^{(0)}=Q\varphi_{\mathrm{e}}(0)\tag{3-116}$$

表示电荷体系的电荷集中在原点处在外场中的能量。

展开式(3-115)中第二项为

$$W_{\mathrm{e}}^{(1)}=\boldsymbol{p}\cdot\nabla\varphi_{\mathrm{e}}(0)=-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}_{\mathrm{e}}(0)\tag{3-117}$$

表示电荷体系的电偶极矩在外场中的能量。

展开式(3-115)中第三项为

$$W_{\mathrm{e}}^{(2)}=\frac{1}{6}\overleftrightarrow{\boldsymbol{D}}:\nabla\boldsymbol{E}_{\mathrm{e}}(0)\tag{3-118}$$

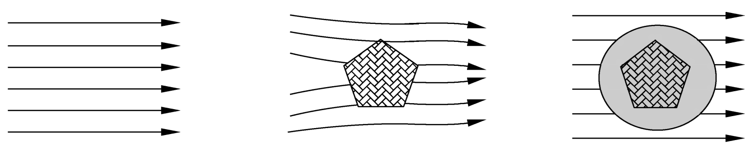
表示电荷体系的电四极矩在外场中的能量。由此式可见，只有非均匀场中电四极矩的能量才不为零。

*3.7 科技前沿——静电隐形衣

古往今来，隐形衣常常出现在神话故事和科幻电影中，是人们幻想出的一种神奇衣服。但随着现代科技的高速发展，它将离我们越来越近。21世纪初，随着电磁超材料的提出，关

于电磁隐形衣的研究成为科研领域的热点问题之一。其间，2006 年是一个重要的里程碑。先是英国物理学家 Pendry 在《科学》杂志上发表论文首先提出了基于变换光学理论调控电磁波的思想，并基于此设计了一个极为精致的隐形衣模型，再一次点燃了人们对这一追求的向往。随后，在同年美国杜克大学 Smith 小组首次在实验上验证了该种电磁隐形衣，并将成果发表在《科学》杂志上，在科技界引起轰动。此后，关于电磁隐形衣的研究全球范围内如雨后春笋般开展起来。迄今为止，对电磁隐形衣的研究，已经由最初的微波频段，逐步向远红外、红外、近红外、可见光等频段扩展，以及向静电场和静磁场的极端情形进行拓展，涉及领域由电磁学拓展到声学、热力学、物质波等学科。

本节只介绍静电隐形衣的基本原理和举例。在电磁工程应用中，静电隐形衣的研究也具有重要的理论价值和实际意义。这主要在于，处于均匀静电场中的"目标"，由于静电感应或极化，都会破坏原始场的干扰，从而容易被探测到。假设可以设计出一种静电隐形装置，覆盖于"目标"的表面，只要该装置对静电场的响应能够抵消干扰场的作用，对于周围的探测器来说，该目标看似"不复存在"，即探测不到，从而实现了隐形效果，静电隐形衣原理如图 3-17 所示。



(a) 仅有匀强电场存在的情况 (b) 均匀电场中有物体时场被扰动 (c) 物体被隐形的情况

图 3-17　静电隐形衣原理示意

作为一个案例，在此用分离变量法分析设计一个球形静电隐形衣。

如图 3-18 所示，无限大的背景材料 ε_b 中有一匀强电场 $\boldsymbol{E}_0$ 水平向右；半径为 R_1、介电常数为 ε_1 的介质球处于其中，另有一个半径分别为 R_1、R_2，介电常数分别为 ε_2 的介质球覆盖于介质球上。那么如何选择介质球壳的几何尺寸和材料参数以实现对中心介质球的隐形效果？

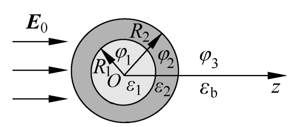


图 3-18　球形隐形衣模型

采用球坐标系，电场所在方向选为 z 轴，设球内、介质壳层和背景材料中的电势函数分别为 φ_1、φ_2 和 φ_3。利用前面的分析方法，可得各个区域的电势解为

$$\begin{cases}\varphi_1 = A_1 r P_1(\cos\theta) \\ \varphi_2 = (A_2 r + B_2 r^{-2}) P_1(\cos\theta) \\ \varphi_3 = (-E_0 r + B_3 r^{-2}) P_1(\cos\theta)\end{cases} \tag{3-119}$$

根据边界条件

$$\begin{aligned}&\varphi_1\big|_{r=R_1} = \varphi_2\big|_{r=R_1}, \quad \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r}\bigg|_{r=R_1} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}\bigg|_{r=R_1} \\ &\varphi_2\big|_{r=R_2} = \varphi_3\big|_{r=R_2}, \quad \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}\bigg|_{r=R_2} = \varepsilon_b \frac{\partial \varphi_3}{\partial r}\bigg|_{r=R_3}\end{aligned} \tag{3-120}$$

将式(3-119)代入式(3-120)，可以得到

$$\begin{cases}A_1R_1=A_2R_1+B_2R_1^{-2}\\ \varepsilon_1A_1=\varepsilon_2(A_2-2B_2R_1^{-3})\\ A_2R_2+B_2R_2^{-2}=-E_0R_2+B_3R_2^{-2}\\ \varepsilon_2(A_2-2B_2R_2^{-3})=\varepsilon_b(-E_0-B_3R_2^{-3})\end{cases}\tag{3-121}$$

求解该四元一次方程组,我们只关心 B_3 的取值,可得

$$B_3=\frac{2(R_2^3-R_1^3)\varepsilon_2^2-(R_2^3-R_1^3)\varepsilon_1\varepsilon_b+(2R_1^3+R_2^3)\varepsilon_1\varepsilon_2-(R_1^3+2R_2^3)\varepsilon_2\varepsilon_b}{2(R_2^3-R_1^3)\varepsilon_2^2+2(R_2^3-R_1^3)\varepsilon_1\varepsilon_b+2(R_1^3+2R_2^3)\varepsilon_2\varepsilon_b+(2R_1^3+R_2^3)\varepsilon_1\varepsilon_2}E_0R_2^3\tag{3-122}$$

若 $B_3=0$,则 $\varphi_3=-E_0rP_1(\cos\theta)$,此即为只有均匀场存在时的电势分布。换句话说,目标被静电场探测不到,因此达到了隐形的效果。据此可在理论上求出 ε_1 与 R_1、R_2 的约束关系。

作为一个特例,当中心介质球为导体球时,与前面的例题相同,结果可以用 $\varepsilon_1\to\infty$ 来获得,于是得到

$$B_3=\frac{(2R_1^3+R_2^3)\varepsilon_2-(R_2^3-R_1^3)\varepsilon_b}{2(R_2^3-R_1^3)\varepsilon_b+(2R_1^3+R_2^3)\varepsilon_2}E_0R_2^3\tag{3-123}$$

由此可求得导体球外覆盖介质球壳后,对匀强电场无扰动的条件为

$$\varepsilon_2=\frac{R_2^3-R_1^3}{2R_1^3+R_2^3}\varepsilon_b\tag{3-124}$$

或

$$R_2=\sqrt[3]{\frac{2\varepsilon_2+\varepsilon_b}{\varepsilon_b-\varepsilon_2}}R_1\tag{3-125}$$

因此,在实验中可以根据式(3-124)或式(3-125)的约束选择外壳材料或者外壳的几何参数,从而达到实现隐形的效果。

*3.8 思政教育:静电场定解问题的哲学思想

电动力学研究的一个重要方面是研究电磁场的运动规律,静电场问题中电场不随时间而变,因而其规律表现在电场(或电势)随空间位置的变化而变化。对于静电场的基本问题包括已知电荷分布求解电场的分布规律或相反情形。实际应用问题中由于电荷分布的复杂性或场域边界的复杂性,待求电场中往往不止包含一个变量,而恰恰是某种多元函数。这类问题的分析一般都需要借助于数学物理方法中求解偏微分方程的定解问题来解决。对于静电场而言,即为求解电势的泊松方程或拉普拉斯方程在给定边值条件下的解。通常将这类问题称为静电场的定解问题。

静电场中电势的泊松方程或拉普拉斯方程,是研究这类问题的基本物理量在空间的分布规律,即物理规律的数学表现形式。反映了同一类物理现象的共同规律,即普遍性,亦即共性,该方程与具体条件无关,数学上称为泛定方程。同一种电荷分布情形下,电势所满足的泛定方程是完全相同的。然而,为了解决具体问题,还必须考虑所研究的区域的边界处在怎样的状况下,或者说,必须考虑实际环境的影响。由于静电场不是通过超距作用,场量的

联系要通过邻近的场进行传递，所以，周围环境的影响体现在边界所给定的物理状态。具体地说，就是以第一类、第二类或第三类边值关系进行限制和约束。求解偏微分方程的定解问题一定要把泛定方程和边界条件作为一个整体来考虑。泛定方程反映了其普遍性，是共同规律，其解为泊松方程或拉普拉斯方程的通解。例如，所有关于轴对称的球坐标系中拉普拉斯方程的一般解都是

$$\varphi(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l r^l+B_l r^{-(l+1)}\right]\left[C_l P_l(\cos\theta)+D_l Q_l(\cos\theta)\right]$$

但具体解的形式则依赖于边界条件。例如，若考虑的是导体球或介质球，其定解则完全不同。可见，边界条件反映了其特殊性和具体性，决定解的最终形式。其实，人生亦如一个特定的数理方程定解问题，同一个人，他（她）的成长经历、受教育状况等因素确定了自身所具有的潜能，类似于人生轨迹中的“泛定方程”，但成长的外部环境、机遇等因素类同于定解条件，对其影响深远。静电场的边值问题折射着哲学中“内因”和“外因”的辩证关系。因此，个人的成才，不仅取决于自身练好的“内功”，还应当抓住机遇，创造条件，二者缺一不可。

本章小结

1. 本章知识结构框架

理论基础：静电场的基本方程、唯一性定理

⇓　⇓　⇓

基本概念：

1. 电势：

$$\varphi=\int_P^{\infty}\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$$

2. 电偶极矩：

$$\boldsymbol{p}=\int_{V'}\rho(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{r}'\mathrm{d}V'$$

3. 电四极矩：

$$D_{ij}=\int_{V'}3x'_i x'_j\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V'$$

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{D}}=\int_{V'}3\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V'$$

4. 电场能量：

$$W_{\mathrm{e}}=\frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}\text{（能量密度）}$$

$$W_{\mathrm{e}}=\frac{1}{2}\int_{V_\infty}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}\mathrm{d}V\text{（总能量）}$$

基本规律：

1. 基本方程：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho;\ \nabla\times\boldsymbol{E}=0$$

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$$

$$\nabla^2\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon}$$

2. 边界条件：

$$\begin{cases}D_{2\mathrm{n}}-D_{1\mathrm{n}}=\rho_S\\ E_{2\mathrm{t}}-E_{1\mathrm{t}}=0\end{cases}$$

$$-\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}+\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}=\rho_S$$

$$\varphi_1=\varphi_2$$

基本分析方法：

1. 分离变量法；
2. 镜像法；
3. 格林函数法；
4. 电多极矩法。

2. 分析静电场的几种常用方法比较

(1)分离变量法是普遍采用的求解拉普拉斯方程的重要直接解法。根据给定的边界形状,来选择适当的坐标系。拉普拉斯方程解的具体形式取决于分离常数,至于解中的分离常数则由边界条件来确定。

(2)镜像法是边值问题的一种间接解法,其理论根据是唯一性定理;其实质是等效替换,即用场源的镜像代替边界上感应或束缚电荷(或感应或磁化电流)的作用,于是可撤去边界,从而把原来非均匀的介质用均匀介质代替,由场源及其镜像共同确定原待求区域中的场。镜像法的关键是由边界条件确定镜像的个数、大小及其位置,将其列入表3.1中。

表3.1　不同介质间具有平面或圆形边界时镜像的个数、大小及其位置

介　质		导体与介质		两种介质
边界面		平　面	球　面	平　面
求媒质1中的场	场源	Q 或 ρ_l	Q	Q 或 ρ_l
	镜像	$Q'=-Q$ 或 $\rho_l'=-\rho_l$	$Q'=-\frac{a}{d}Q$ $\left(Q''=\frac{a}{d}Q\right)$	$Q'=\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}Q$ $\rho_l'=\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\rho_l$
	镜像位置	对称	$d'=\frac{a^2}{d}(d''=0)$	对称
求媒质2中的场	镜像	—	—	$Q''=\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}Q$ $\rho_l''=\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\rho_l$
	镜像位置	—	—	原场源处

(3)格林函数法是运用格林函数,借助于点源的边值问题来解决一般电荷分布和给定边值条件的普遍边值问题。一般边值问题的格林函数解(积分方程)为

$$\varphi(\boldsymbol{r})=\int_V G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V+\varepsilon\oint_S\left[G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}-\varphi(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\right]\mathrm{d}S'$$

第一类边值问题的格林函数解为

$$\varphi(\boldsymbol{r})=\int_V G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V'-\varepsilon\oint_S\varphi(\boldsymbol{r}')\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\mathrm{d}S'$$

第二类边值问题的格林函数解为

$$\varphi(\boldsymbol{r})=\int_V G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V'+\varepsilon\oint_S G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\mathrm{d}S'$$

格林函数分别为

一维直角坐标系为

$$G_0=-\frac{1}{2\varepsilon}|x-x'|\text{ 和 }G_1=C_1x+C_2$$

二维圆柱坐标系即极坐标系为

$$G_0=-\frac{1}{2\pi\varepsilon}\ln|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$$

$$G_1 = C_0 + D_0 \ln\rho + \sum_{n=1}^{\infty}(A_{1n}\rho^n + A_{2n}\rho^{-n})(B_{1n}\sin n\phi + B_{2n}\cos n\phi)$$

三维球坐标系为

$$G_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon\,|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}$$

$$G_1 = \sum_{l=0}^{\infty}(A_l r^l + B_l r^{-(l+1)})P_l(\cos\alpha)$$

式中：$\cos\alpha = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi - \phi')$。

(4) 电多极矩法是适用于电荷只分布在一个小区域内，所求场点距离电荷较远的情形。其基本思想是将场的各级近似计算通过把$\frac{1}{R}$进行级数展开。

习题 3

3.1 试证明当两种介质的分界面上有密度为 ρ_S 的面电荷时，则有

$$\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\left(1 + \frac{\rho_S}{\varepsilon_1 E_1 \cos\theta_1}\right)$$

式中：θ_1 与 θ_2 分别是介电常数为 ε_1 与 ε_2 的两种介质中的电场强度(或电位移)矢量与分界面法线之间的夹角。

3.2 若将两个半径为 a 的雨滴当作导体球，当它们带电后，电势均为 φ_0(以无穷远为电势参考点，且不计其相互影响)。当此两雨滴合并在一起(仍为球形)后，试求其电势。

3.3 空气中有一半径为 a 的均匀带电球，电荷密度为 ρ。试求球内外的电势和电场强度。它们的最大值各在何处？

3.4 空气中有一半径为 a，带电荷为 Q 的孤立球体。试分别求下列两种情况下带电球系统的电场能量。

(1) 电荷均匀分布于球面上；

(2) 电荷均匀分布于球体内，设介质球的介电常数为 ε。

3.5 空气中有一半径为 a 的极化介质球，其介电常数为 ε，极化强度为 $\boldsymbol{P} = \frac{P_0}{r^2}\boldsymbol{e}_r$，$P_0$ 为常数。试求：

(1) 自由电荷密度；

(2) 介质球内外的电势；

(3) 该带电介质球具有的静电场总能量。

3.6 空气中有一半径为 a、带电荷为 Q 的导体球。球外套有同心的介质球壳，其内外半径分别为 a 和 b，介电常数为 ε。求系统总的电场能量。

3.7 半径为 a、带电量为 Q 的球置于空气里的均匀外电场 $\boldsymbol{E}_0$ 中。在下列两种情况下试分别求空间各点的电势和电场强度。

(1) 带电球为导体球；

(2) 带电球为介电常数为 ε 的介质球，电荷均匀分布于球体内。

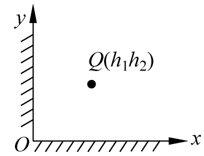
3.8 一半径为 a 的无限长直导体圆柱置于均匀电场 $\boldsymbol{E}_0$ 中，柱轴与 $\boldsymbol{E}_0$ 垂直，导体圆柱外是空气，设导体圆柱表面的电势为零。试求柱外任一点的电势、电场强度与柱面上的感应电荷面密度及其最大值。

3.9 空气中有一点电荷 Q 位于相交成直角的两个半无限大导体平面内，且距两平面的距离分别为 h_1 与 h_2，如题3.9图所示。

试求：

(1) 导体平板所构成的直角区域内任一点的电势和电场强度；

(2) 每块导体板上的感应电荷面密度及感应电荷量。

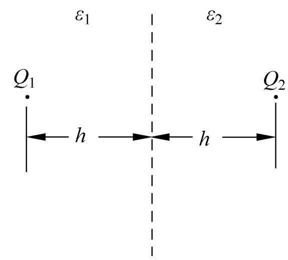


题3.9图

3.10 两同心薄导体球壳的半径分别为 R_1 和 $R_2(R_1<R_2)$，外球壳接地。一点电荷 Q 置于两球壳间距球心为 d 处。试求大球壳内各点的电势。

3.11 空气中有两个半径分别为 a_1 与 a_2 的导体球，两球心的间距为 d，且 d 比两球的半径大得多。若球1带电荷 Q，然后用细导线将两球相连，试求由球1流入球2的电量及该导体系统的最终电势。

3.12 整个空间充满介电常数分别为 ε_1 和 ε_2 的分布均匀的两种介质，其分界面为无限大平面。在距此平面为 h 处的对称位置上分别放置点电荷 Q_1 与 Q_2，如题3.12图所示。试求作用在每个点电荷上的力。



题3.12图

3.13 半无界理想导体平板正上方的空气中有一与导体平板平行且间距为 h 的无限长单位线电荷($\rho_l=1$)，试求空气中的格林函数。

3.14 两个点电荷 $+Q$ 和 $-Q$ 分别位于半径为 a 的导体球直径延长线的对称位置上，距球心为 d 且 $d>a$，试证明其镜像电荷是位于球心的电偶极子，其偶极矩的大小为

$$p=\frac{2a^3Q}{d^2}$$

3.15 试求下列电荷分布在远处的电势和电场强度。

(1) 沿 z 轴排列的点电荷 $+Q$、$-2Q$、$+Q$，点电荷的间距均为 d(线四极子)；

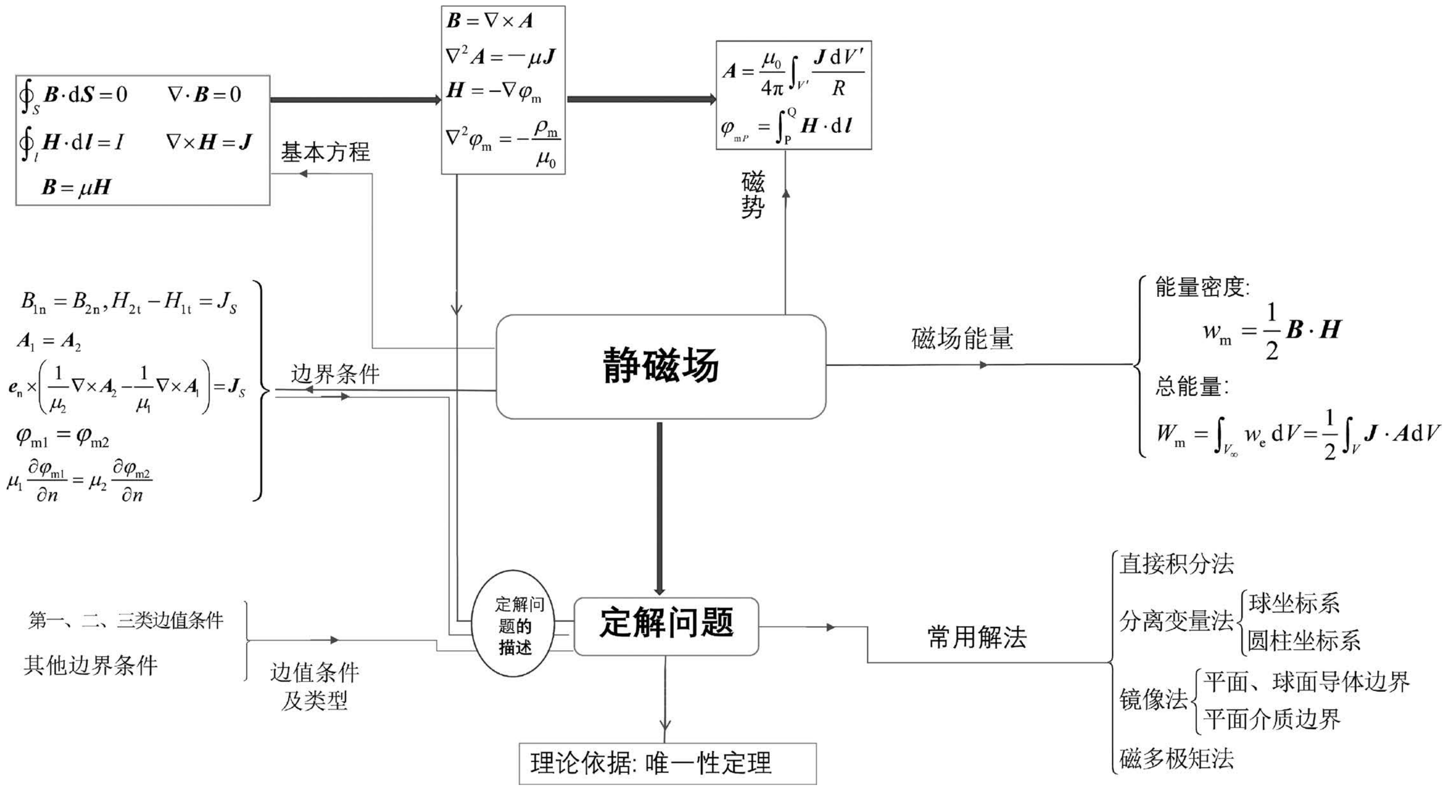
(2) 四个等值的点电荷分别位于边长为 a 的正方形的四个顶点上，一对角线的两端各为 $+Q$，另一对角线的两端各为 $-Q$(面四极子)。

3.16 一块极化介质的极化强度为 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})$，根据电偶极子静电势公式，极化介质所产生的静电势为

$$\varphi(\boldsymbol{r})=\int_V \frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\mathrm{d}V'$$

根据极化电荷密度公式：$\rho_{\mathrm{b}}=-\nabla'\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')$，$\rho_{\mathrm{Sb}}=\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')$，证明：极化介质所产生的电势的等价地表示为

$$\varphi(\boldsymbol{r})=-\int_V \frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')}{4\pi\varepsilon_0 R}\mathrm{d}V'+\oint_S \frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}'}{4\pi\varepsilon_0 R}$$



$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}=0 \quad \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$
$\oint_l \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}=I \quad \nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}$
$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$
基本方程
$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$
$\nabla^2\boldsymbol{A}=-\mu\boldsymbol{J}$
$\boldsymbol{H}=-\nabla\varphi_m$
$\nabla^2\varphi_m=-\frac{\rho_m}{\mu_0}$
$\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\boldsymbol{J}\,dV'}{R}$
$\varphi_{mP}=\int_P^Q \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}$
磁势
$B_{1n}=B_{2n}, H_{2t}-H_{1t}=J_S$
$\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{A}_2$
$\boldsymbol{e}_n\times\left(\frac{1}{\mu_2}\nabla\times\boldsymbol{A}_2-\frac{1}{\mu_1}\nabla\times\boldsymbol{A}_1\right)=\boldsymbol{J}_S$
$\varphi_{m1}=\varphi_{m2}$
$\mu_1\frac{\partial\varphi_{m1}}{\partial n}=\mu_2\frac{\partial\varphi_{m2}}{\partial n}$
边界条件
静磁场
磁场能量
能量密度:
$w_m=\frac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}$
总能量:
$W_m=\int_{V_\infty} w_e\,dV=\frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{A}\,dV$
第一、二、三类边值条件
其他边界条件
边值条件及类型
定解问题的描述
定解问题
理论依据: 唯一性定理
常用解法
直接积分法
分离变量法
球坐标系
圆柱坐标系
镜像法
平面、球面导体边界
平面介质边界
磁多极矩法