

线性系统的频域分析

——频率响应法

前几章主要是在时域和复域中讨论了控制系统的特性。时域分析基于系统的时域数学模型——微分方程,用解析法分析系统的特性,它能准确地求得系统的稳态和动态响应的性能,但对高阶系统时域分析则比较困难;复域分析基于系统的复域数学模型——传递函数,用根轨迹法分析系统的性能,对高阶系统则依据主导极点的思想简化系统的分析。本章介绍的频率响应法是基于系统的频域数学模型——频率特性进行系统分析,所以频率响应法又叫频率特性法。这种方法提出于 20 世纪 30 年代后期,具有直观、运算简便的特点,非常适合于工程实践,一时得到广泛的应用。

当系统传递函数 $G(s)$ 中令 $s=j\omega$,便得到系统的频率特性 $G(j\omega)$ 。频率特性可以用图形(频率特性图)描述,其中用得最多的是伯德图,本章将主要讨论伯德图的绘制方法,它与系统性能的关系及在系统分析中的应用。同时还将简单讨论极坐标图和对数幅相图。

5.1 频率特性

5.1.1 线性定常系统对正弦输入信号的响应

设线性定常系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{P(s)}{Q(s)} \quad (5-1)$$

式中, $P(s)$ 和 $Q(s)$ 是 s 的多项式,则输出的拉氏变换为

$$C(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} R(s) \quad (5-2)$$

设输入 $r(t) = A \sin \omega t$, 它的拉氏变换为

$$R(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (5-3)$$

假定 $Q(s)$ 具有不相等的根且不等于 $\pm j\omega$, 用部分分式展开得

$$C(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{P_1(s)}{Q(s)} + \frac{\alpha}{s + j\omega} + \frac{\beta}{s - j\omega} \quad (5-4)$$

式中

$$\alpha = -\frac{AG(-j\omega)}{2j} \quad \text{及} \quad \beta = \frac{AG(j\omega)}{2j} \quad (5-5)$$

系统的输出响应

$$c(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{P_1(s)}{Q(s)}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\alpha}{s + j\omega}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\beta}{s - j\omega}\right) \quad (5-6)$$

如果 $G(s)$ 是稳定的, 那么右边第一项是系统的瞬态响应, 随着时间延伸将趋向零, 后两项是系统对正弦输入的稳态响应, 即

$$c(\infty) = \alpha e^{-j\omega t} + \beta e^{j\omega t} \quad (5-7)$$

又

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| \angle G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} \quad (5-8)$$

因为 $G(s)$ 是实系数的函数, 所以 $G(j\omega)$ 与 $G(-j\omega)$ 是共轭复数, 即

$$|G(-j\omega)| = |G(j\omega)| \quad \text{及} \quad \varphi(-\omega) = -\varphi(\omega) \quad (5-9)$$

将式(5-5)、式(5-6)、式(5-8)与式(5-9)代入式(5-7)得

$$\begin{aligned} c(\infty) &= A |G(j\omega)| \frac{e^{j(\omega t + \varphi(\omega))} - e^{-j(\omega t + \varphi(\omega))}}{2j} \\ &= A |G(j\omega)| \sin(\omega t + \varphi(\omega)) \end{aligned} \quad (5-10)$$

从上式可知:

稳定的线性定常系统对正弦输入信号 $A \sin \omega t$ 的稳态输出响应与输入是同频率的正弦信号, 其幅值为 $A |G(j\omega)|$, 并与输入信号有一个相位移 $\varphi(\omega)$, 这个性质曾用作实验求取传递函数的主要依据。

5.1.2 系统的频率特性

将系统传递函数中的 s 代之以 $j\omega$ 便得系统的频率特性, 图 5-1 是其方框图, 其中 $C(j\omega)$

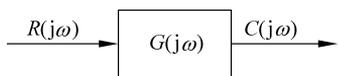


图 5-1 系统频率特性方框图

与 $R(j\omega)$ 分别是 $c(t)$ 与 $r(t)$ 的傅里叶变换。

频率特性 $G(j\omega)$ 是复变函数, 它可以用幅值 $|G(j\omega)|$ 和

相角 $\angle G(j\omega)$ 表示, 即

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| \angle G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} \quad (5-11)$$

式中

$$\angle G(j\omega) = \varphi(\omega) \quad (5-12)$$

$|G(j\omega)|$ 是 $G(j\omega)$ 的幅频特性, 它等于正弦输入的稳态的输出幅值与输入幅值之比;

$\varphi(\omega)$ 是 $G(j\omega)$ 的相频特性, 它是稳态输出对输入的相位移;

$|G(j\omega)|$ 或 $\varphi(\omega)$ 都是角频率 ω 的函数。

频率特性 $G(j\omega)$ 也可表示为实部和虚部:

$$G(j\omega) = \text{Re}G(j\omega) + j\text{Im}G(j\omega) \quad (5-13)$$

$\text{Re}G(j\omega)$ —— $G(j\omega)$ 的实频特性;

$\text{Im}G(j\omega)$ —— $G(j\omega)$ 的虚频特性。

$\text{Re}G(j\omega)$ 和 $\text{Im}G(j\omega)$ 都是角频率 ω 的函数。两种表示之间的关系如下:

$$|G(j\omega)| = [\text{Re}G(j\omega)^2 + \text{Im}G(j\omega)^2]^{1/2} \quad (5-14)$$

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{\text{Im}G(j\omega)}{\text{Re}G(j\omega)} \quad (5-15)$$

式(5-14)和式(5-15)可以用复平面上的向量表示, 如图 5-2 所示。

$G(j\omega)$ 是角频率 ω 的函数, 当 ω 变化时, $G(j\omega)$ 的轨迹是复平面上的一条曲线, 因此, 频

率特性可以用频率特性图表示。式(5-11)和式(5-13)都可用来绘制频率特性图。常用的频率特性图有以下3种:

- (1) 极坐标图,也称奈奎斯特(Nyquist)图,简称奈氏图;
 - (2) 对数频率特性图,也称伯德(Bode)图;
 - (3) 对数幅相特性图,也称尼科尔斯(Nichols)图。
- 这些频率特性图将在后面进行讨论。

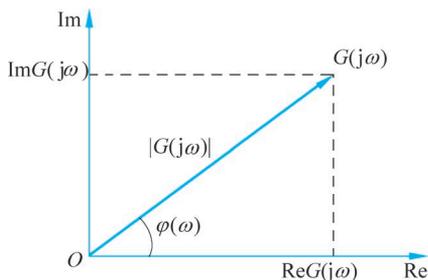


图 5-2 $G(j\omega)$ 的向量图

5.1.3 频率特性的性质

- (1) 频率特性是系统的一种数学模型,它描述了系统的特性,与外界因素无关。当系统结构参数确定之后,系统的频率特性也随之确定。
- (2) 稳定系统的频率特性刻画了系统对正弦输入的稳态响应,系统的稳态输出量与输入量是具有相同频率的正弦信号。 $|G(j\omega)|$ 和 $\varphi(\omega)$ 都是 ω 的函数。
- (3) 大部分系统输出的幅值随频率的升高而衰减,所以,它是一个低通滤波器。频率特性还可以应用到某些非线性系统分析,这将在有关章节中讨论。

5.2 频率特性图

5.2.1 频率特性的极坐标图(奈氏图)

奈氏图是当 ω 自0变化到 $+\infty$ 时,向量 $G(j\omega)$ 端点在复平面上的轨迹,所以也叫 $G(j\omega)$ 的奈氏图。 $G(j\omega)$ 可以表示为 $|G(j\omega)|$ 和 $\varphi(\omega)$,也可表示为 $\text{Re}G(j\omega)$ 和 $\text{Im}G(j\omega)$ 。下面以惯性环节为例说明奈氏图的绘制方法。

例 5-1 绘制惯性环节频率特性奈氏图

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega T + 1} \quad (5-16)$$

解 将式(5-16)写成式(5-11)的形式,有

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| \angle \varphi(\omega)$$

式中

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}} \quad (5-17)$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan(\omega T) \quad (5-18)$$

求取奈氏图需要逐点计算,表 5-1 列出了一些特殊点的计算值。

表 5-1 一些特殊点的计算值

ω	0	$1/2T$	$1/T$	$1/0.5T$	∞
$ G(j\omega) $	1	$2/\sqrt{5}$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{5}$	0
$\varphi(\omega)$	0°	-26.6°	-45°	-63.4°	-90°

图 5-3 是惯性环节的奈氏图,它是一个半圆(第四象限的半圆为 $\omega > 0$ 时的轨迹,第一象

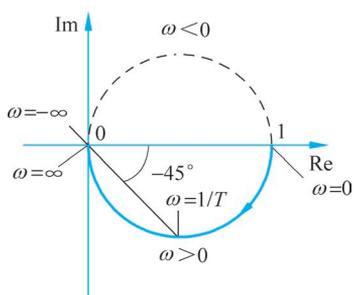


图 5-3 惯性环节奈氏图

限的半圆是 $\omega < 0$ 时的轨迹)。这可以通过建立 $\text{Re}G(j\omega)$ 和 $\text{Im}G(j\omega)$ 之间的方程证明。证明如下：

$$G(j\omega) = \text{Re}G(j\omega) + j\text{Im}G(j\omega)$$

$G(j\omega)$ 的实部和虚部分别为

$$\text{Re}G(j\omega) = \frac{1}{(\omega T)^2 + 1}$$

$$\text{Im}G(j\omega) = \frac{-\omega T}{(\omega T)^2 + 1}$$

$$\text{Re}G(j\omega)^2 + \text{Im}G(j\omega)^2 = \frac{1}{(\omega T)^2 + 1} = \text{Re}G(j\omega)$$

配项化简得到

$$\text{Re}G(j\omega)^2 - \text{Re}G(j\omega) + \frac{1}{4} + \text{Im}G(j\omega)^2 = \left[\text{Re}G(j\omega) - \frac{1}{2} \right]^2 + \text{Im}G(j\omega)^2 = \frac{1}{4}$$

这是一个圆心为 $(\frac{1}{2}, j0)$ 、半径等于 $\frac{1}{2}$ 的圆。 ■

5.2.2 典型环节的奈氏图

上面分析了典型环节——惯性环节的奈氏图，下面介绍其他典型环节，但略去绘制过程。

1. 比例环节

传递函数

$$G(s) = K \tag{5-19}$$

频率特性

$$G(j\omega) = K \angle 0^\circ \tag{5-20}$$

比例环节的频率特性与角频率无关，其奈氏图是正实轴上的一个点(见图 5-4)，它到原点的距离为 K 。

2. 微分环节

1) 理想微分环节

传递函数

$$G(s) = s \tag{5-21}$$

频率特性

$$G(j\omega) = j\omega = \omega \angle 90^\circ \tag{5-22}$$

显然，理想微分环节的奈氏图是一条与正虚轴相重合的直线，见图 5-5。

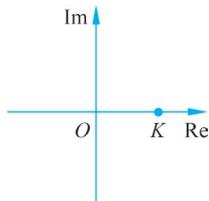


图 5-4 比例环节的奈氏图

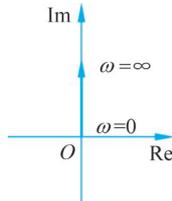


图 5-5 理想微分环节的奈氏图

2) 一阶微分环节

传递函数

$$G(s) = Ts + 1 \quad (5-23)$$

频率特性

$$G(j\omega) = j\omega T + 1 = (1 + \omega^2 T^2)^{1/2} \angle \arctan(\omega T) \quad (5-24)$$

一阶微分环节的奈氏图是复平面第一象限中一条通过(1, j0)点, 并与虚轴平行的直线(图 5-6)。当 $\omega=0$, 处于(1, j0)点, 随着 $\omega=0 \rightarrow \infty$, 向量 $G(j\omega)$ 的端点沿着该直线向上移动。

3) 二阶微分环节

传递函数

$$G(s) = T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1 \quad (5-25)$$

频率特性

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= T^2 (j\omega)^2 + 2\zeta T(j\omega) + 1 \\ &= (1 - T^2 \omega^2) + j2\zeta T\omega \\ &= \sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + 4\zeta^2 T^2 \omega^2} \angle \arctan \frac{2\zeta T\omega}{1 - T^2 \omega^2} \end{aligned} \quad (5-26)$$

二阶微分环节的奈氏图如图 5-7 所示, 它可通过逐点计算得到。

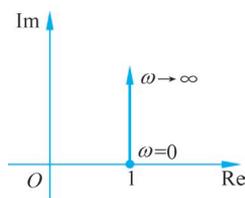


图 5-6 一阶微分环节的奈氏图

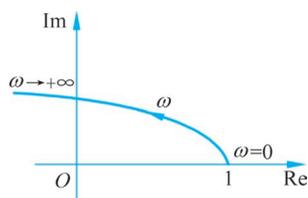


图 5-7 二阶微分环节的奈氏图

3. 积分环节

传递函数

$$G(s) = \frac{1}{s} \quad (5-27)$$

频率特性

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = \frac{1}{\omega} \angle (-90^\circ) \quad (5-28)$$

由于 $\angle G(j\omega) = -90^\circ$ 是常数。而 $G(j\omega)$ 随 ω 增大而减小。因此, 积分环节是一条与负虚轴重合的直线, 如图 5-8 所示。

4. 振荡环节

传递函数

$$G(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1} \quad (5-29)$$

频率特性

$$G(j\omega) = \frac{1}{T^2 (j\omega)^2 + 2\zeta Tj\omega + 1}$$

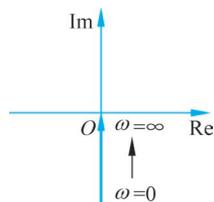


图 5-8 积分环节的奈氏图

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1 - \omega^2 T^2}{(1 - \omega^2 T^2)^2 + (2\zeta\omega T)^2} - j \frac{2\zeta\omega T}{(1 - \omega^2 T^2)^2 + (2\zeta\omega T)^2} \\
 &= \left\{ \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right\}^{-1/2} \angle \arctan \frac{-2\zeta\omega/\omega_n}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \quad (5-30)
 \end{aligned}$$

式中 $\omega_n = 1/T$ 。振荡环节的奈氏图如图 5-9 所示。当 $\omega = 0, G(j0) = 1 \angle 0^\circ$, 当 $\omega = \infty, G(j\infty) = 0 \angle (-180^\circ)$, 奈氏图与负实轴相切而到达原点。当 $\omega = 1/T = \omega_n$, 曲线通过虚轴, 交点处的角频率等于无阻尼自然振荡角频率 $\omega_n = 1/T$, 幅值等于 $|G(j\omega)| = 1/2\zeta$, 阻尼比 ζ 越小, 幅值就越大。

5. 延迟环节

在工程实际系统中, 经常会遇到另一个环节——延迟环节, 它的传递函数 $G(s) = e^{-sT}$, 其中 T 为延迟时间常数, 其对应的频率特性为

$$G(j\omega) = e^{-j\omega T} \quad (5-31)$$

延迟环节的幅频特性是与 ω 无关的常量, 其值为 1。而相频特性则与 ω 呈线性变化。故其奈氏图是一个单位圆(图 5-10)。

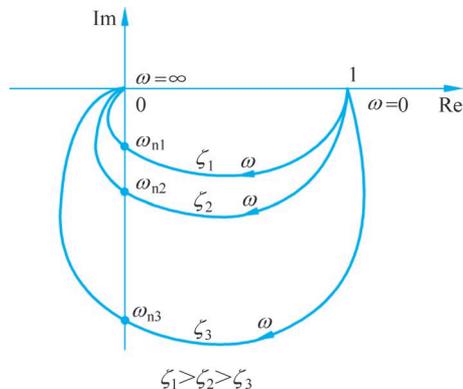


图 5-9 振荡环节的奈氏图

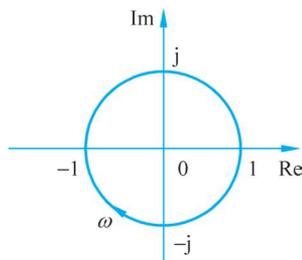


图 5-10 延迟环节的奈氏图

并不是所有系统的奈氏图都是简单的几何图形。一般来讲, 奈氏图必须逐点计算, 而且即使已知某一系统的奈氏图, 如果要在原系统中增加一个环节, 也没有简单的方法求取合成的奈氏图。

例 5-2 在例 5-1 的惯性环节基础上增加一个在原点的极点, 绘制系统的奈氏图。

解 增加一个在原点的极点后, 其频率特性为

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega T + 1)} = \frac{1}{j\omega - \omega^2 T} \quad (5-32)$$

其实部与虚部分别为

$$\operatorname{Re}G(j\omega) = \frac{-T}{\omega^2 T^2 + 1} \quad \text{和} \quad \operatorname{Im}G(j\omega) = \frac{-1}{\omega^3 T^2 + \omega}$$

由于 $\operatorname{Re}G(j\omega)$ 与 $\operatorname{Im}G(j\omega)$ 均小于零, 所以系统的奈氏图始终在第三象限。当 $\omega = 0, \frac{1}{2T}, \frac{1}{T}, \infty$ 时的计算结果列于表 5-2 中。

表 5-2 计算结果

ω	0	$1/2T$	$1/T$	$2/T$	∞
$\text{Re}G(j\omega)$	$-T$	$-4T/5$	$-T/2$	$-T/5$	0
$\text{Im}G(j\omega)$	$-\infty$	$-8T/5$	$-T/2$	$-T/10$	0

由于 $\omega \rightarrow 0$ 时, $\text{Re}G(j\omega) \rightarrow -T$, $\text{Im}G(j\omega) \rightarrow -\infty$, 因此当 $\omega \rightarrow 0$, 有渐近线 $\sigma = -T$ 。奈氏图示于图 5-11。

要准确绘制系统的奈氏图是一件比较麻烦的工作, 不过在工程实践中, 并不需要准确画出整条奈氏图, 只要知道曲线所在的象限、走向和主要特征。下面将奈氏图的一些绘制规律概括地作一介绍, 这里假定 $G(s)$ 具有时间常数型的标准形式, 且所有零极点均位于左半 s 平面。

(1) 奈氏图的起点 ($\omega=0$) 取决于系统的类型及系统的增益 K , 即

$$|G(j0)| = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{K}{\omega^\nu} \quad (5-33)$$

式中, ν 是系统在原点的极点数。因此,

$$\varphi(0) = -\nu \times 90^\circ \quad (5-34)$$

例 5-1 的系统 $\nu=0$, 所以 $|G(j0)| = K$, $\varphi(0) = 0^\circ$; 例 5-2 的系统 $\nu=1$, 所以 $|G(j0)| = \infty$, $\varphi(0) = -90^\circ$ 。注意尽管 $\text{Re}G(0) = -T$, 但因为 $\text{Im}G(0) = -\infty$, 所以 $\varphi(0)$ 是 -90° 。

(2) 奈氏图的终点 ($\omega = \infty$), 对 $n > m$ 的系统 (n 和 m 分别是系统的极点数和零点), 有

$$|G(j\infty)| = 0 \quad (5-35)$$

$$\varphi(\infty) = -(n - m) \times 90^\circ \quad (5-36)$$

上面二式说明, 系统的奈氏图是以 $-(n - m) \times 90^\circ$ 的角度趋向原点。例 5-1 的惯性环节, $n=1, m=0$, 所以 $\varphi(\infty) = -90^\circ$; 例 5-2 的系统和振荡环节的 $n=2, m=0$, 所以 $\varphi(\infty) = -180^\circ$ 。

例 5-3 利用前述奈氏图的规律绘制下列系统的奈氏图草图:

$$(1) G(s) = \frac{1}{(T_1s+1)(T_2s+1)};$$

$$(2) G(s) = \frac{1}{s(T_1s+1)(T_2s+1)};$$

$$(3) G(s) = \frac{(T_3s+1)}{s(T_1s+1)(T_2s+1)};$$

$$(4) G(s) = \frac{(T_3s+1)}{s(T_1s+1)(T_2s+1)(T_4+1)}.$$

图 5-12 是以上诸系统的奈氏图草图, 图中(a)~(d)分别对应(1)~(4)的系统。不难按前述规则解释曲线的形状特征。从以上一组曲线, 还可以看到系统增加零、极点对系统奈氏

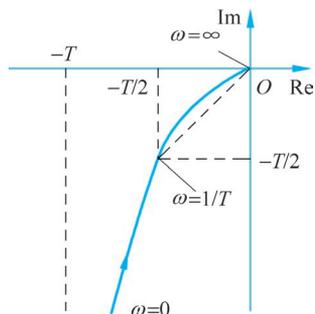


图 5-11 例 5-2 的奈氏图

图的影响: 增加极点, 将向顺时针方向“拉”动曲线, 例如系统(2)较系统(1)增加了一个在原点的极点, 使曲线从第三、四象限“拉”向第二、三象限; 系统(4)较系统(3)增加一个极点, 也有相同的效果。增加零点的影响与之相反, 它将曲线向逆时针方向拉动, 例如在系统(2)的基础上增加一个零点, 结果就把系统的奈氏图从第二、三象限“拉”向第三、四象限, 如图 5-12(c) 所示。了解这种影响, 对于系统设计是有用的。

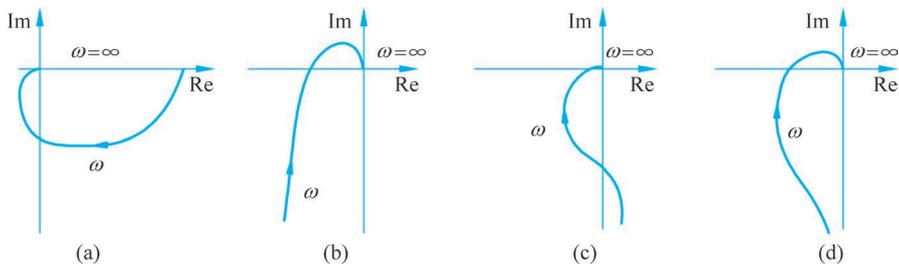


图 5-12 例 5-3 各系统的奈氏图草图

奈氏图在系统分析中是有一定价值的, 后面将要讨论的稳定性判据就是根据奈氏图的特征来判别系统稳定性的。但当要在已知系统中附加零、极点时, 由于要进行复数的乘法运算, 计算比较烦琐, 这就限制了奈氏图在系统设计中的应用。对数频率特性图(伯德图)将乘法运算变成加法运算, 从而大大简化了频率特性的计算, 成为控制系统设计的有效工具, 得到广泛的应用。

5.2.3 对数频率特性图(伯德图)

伯德图是将系统的对数幅频特性和对数相频特性分别画在各自的坐标系中。对数幅频特性是取 $|G(j\omega)|$ 的对数 $20\lg|G(j\omega)|$ 为纵坐标, 单位是分贝 (dB), 相频特性以 $\varphi(\omega)$ 为纵坐标, 单位为度 ($^\circ$), 横坐标都是角频率 ω , 单位为弧度/秒 (rad/s), 但以 $\lg\omega$ 进行分度, 这就是半对数坐标系。由于横轴采用对数分度, 因此伯德图没有原点。伯德图优点如下。

(1) 绘图方便。由于纵坐标的单位是分贝, 它取了对数运算, 因此伯德图将幅值的乘除转化为加减, $|G(j\omega)|$ 与 $|G^{-1}(j\omega)|$ 关于 0 分贝直线对称, 相频也关于零度对称。而且可以用对数幅频特性的渐近线近似曲线, 绘图非常简便, 便于工程应用。

(2) 分析方便。实际控制系统多半是低通滤波器, 低频段特性很重要。伯德图是绘制在半对数坐标上, 它的横坐标角频率采用的是对数分度, 可以扩展低频段范围, 这对系统分析和设计是很有利的。

系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{K \prod_{i=1}^{m_1} (\tau_i s + 1) \prod_{k=1}^{m_2} \left[\left(\frac{1}{\omega_k} \right)^2 s^2 + 2\zeta_k \frac{1}{\omega_k} s + 1 \right]}{s^v \prod_{j=1}^{n_1} (\tau_j s + 1) \prod_{l=1}^{n_2} \left[\left(\frac{1}{\omega_l} \right)^2 s^2 + 2\zeta_l \frac{1}{\omega_l} s + 1 \right]} \quad (5-37)$$

对应的频率特性为

$$G(j\omega) = \frac{K \prod_{i=1}^{m_1} (j\omega\tau_i + 1) \prod_{k=1}^{m_2} \left[\left(\frac{j\omega}{\omega_k} \right)^2 + 2\zeta_k \frac{j\omega}{\omega_k} + 1 \right]}{(j\omega)^\nu \prod_{j=1}^{n_1} (j\omega\tau_j + 1) \prod_{l=1}^{n_2} \left[\left(\frac{j\omega}{\omega_l} \right)^2 + 2\zeta_l \frac{j\omega}{\omega_l} + 1 \right]} \quad (5-38)$$

其中包括增益 K , m_1 个一阶零点和 m_2 对复零点, 在原点的 ν 重极点, n_1 个一阶极点和 n_2 对复极点。要绘制系统的奈氏图是相当麻烦的, 而绘制其伯德图却不难。 $G(j\omega)$ 的对数幅频特性是

$$\begin{aligned} 20\lg |G(j\omega)| &= 20\lg K + 20 \sum_{i=1}^{m_1} \lg |j\omega\tau_i + 1| + 20 \sum_{k=1}^{m_2} \lg \left| \left(\frac{j\omega}{\omega_k} \right)^2 + 2\zeta_k \frac{j\omega}{\omega_k} + 1 \right| - \\ &20\lg |(j\omega)^\nu| - 20 \sum_{j=1}^{n_1} \lg |j\omega\tau_j + 1| - \\ &20 \sum_{l=1}^{n_2} \lg \left| \left(\frac{j\omega}{\omega_l} \right)^2 + 2\zeta_l \frac{j\omega}{\omega_l} + 1 \right| \end{aligned} \quad (5-39)$$

从上式可见, 系统的对数幅频特性是一些典型环节的对数幅频特性的代数和, 只要将这些典型环节的对数幅频特性叠加, 便可得到系统的对数幅频特性曲线。

相频特性是

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= \sum_{i=1}^{m_1} \arctan(\omega\tau_i) + \sum_{k=1}^{m_2} \arctan\left(\frac{2\zeta_k \omega_k \omega}{\omega_k^2 - \omega^2}\right) - 90^\circ \nu - \\ &\sum_{j=1}^{n_1} \arctan(\omega\tau_j) - \sum_{l=1}^{n_2} \arctan\left(\frac{2\zeta_l \omega_l \omega}{\omega_l^2 - \omega^2}\right) \end{aligned} \quad (5-40)$$

系统的相频特性曲线等于这些典型环节的相频特性之和。可以把这些典型环节归纳为以下 4 类基本因子:

- (1) 常数增益 K ;
- (2) 在原点的极点(或零点) $(j\omega)^{\pm\nu}$;
- (3) 实极点(或零点) $(j\omega\tau + 1)^{\pm 1}$;
- (4) 复极点(或零点) $\left[\left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} + 1 \right]^{\pm 1}$ 。

以上各式中的指数取正时为零点, 取负时为极点。这些基本因子实际上就是基本环节。所有系统的伯德图都是这 4 类基本因子伯德图求和的结果, 尤其是利用它们的渐近线近似时, 整个过程将变得十分简单。

5.2.4 基本因子的伯德图

1. 常数增益的伯德图

设常数增益为 K , 则其对数幅频特性是

$$L(\omega) = 20\lg K \quad (5-41)$$

当增益 $K > 1$, $L(\omega) = 20\lg K > 0$; 而当增益 $0 < K < 1$, $L(\omega) = 20\lg K < 0$ 。它们都是水平直线, 如图 5-13(a) 所示。

相频特性是

$$\varphi(\omega) = 0^\circ \quad (5-42)$$

它也是一条水平直线,如图 5-13(b)所示。

如果增益是负值($-K$),其幅频特性依然是 $20\lg K$,但相角 $\varphi(\omega) = -180^\circ$ 。

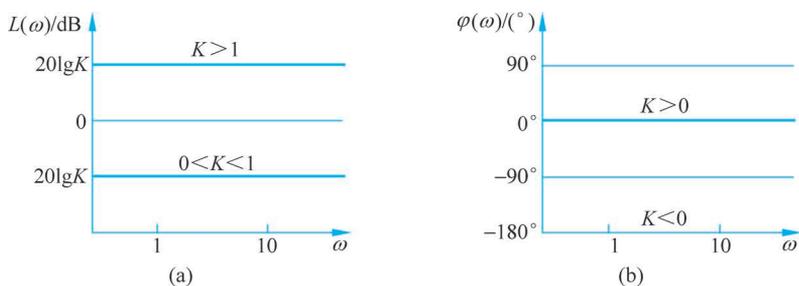


图 5-13 比例环节的伯德图

2. 在原点的极点(或零点) $(j\omega)^{\pm\nu}$ 的伯德图

在原点的极点即积分环节的频率特性为 $(j\omega)^{-1}$,其对数幅频特性是

$$L(\omega) = 20\lg \left| \frac{1}{j\omega} \right| = -20\lg\omega \quad (\text{dB}) \quad (5-43)$$

相频特性为

$$\varphi(\omega) = -90^\circ \quad (5-44)$$

伯德图如图 5-14 所示。对数幅频特性是一条直线,在半对数坐标上,它是一条斜率为 -20dB/dec 的直线。dec 是十倍频程(即频率变化十倍)decade 的缩写, -20dB/dec 表示每十倍频程 $L(\omega)$ 减小 20dB 。由式(5-43)知, $L(\omega)$ 与 ω 的关系是一条对数曲线。而 $L(\omega)$ 与 $\lg\omega$ 呈正比关系,所以在半对数坐标上(横坐标按 $\lg\omega$ 分度),式(5-43)是直线方程。 $\omega=1$ 时 $L(1)=0$,所以经过 $(1,0)$ 点。

相频特性是一条 $\varphi(\omega) = -90^\circ$ 水平直线,如图 5-14 所示。

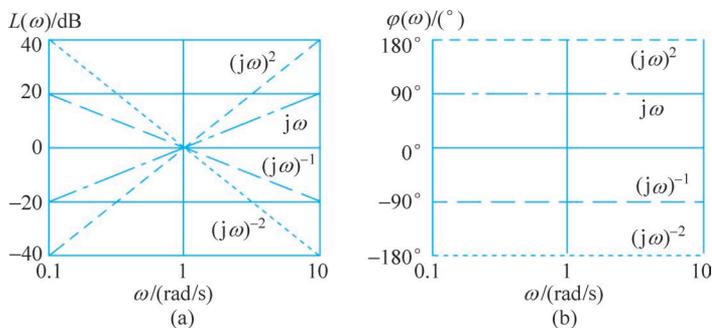


图 5-14 在原点的极点(或零点) $j\omega$ 的伯德图

若在原点有多重极点,即频率特性为 $(j\omega)^{-\nu}$,则

$$L(\omega) = -\nu \times 20\lg\omega \quad (5-45)$$

$$\varphi(\omega) = -\nu \times 90^\circ \quad (5-46)$$

此时,对数幅频特性是斜率为 $-\nu \times 20\text{dB/dec}$ 的直线,相频特性是 $\varphi(\omega) = -\nu \times 90^\circ$ 的水平直线。在图 5-14 中同时给出了 $\nu=2$ 即在原点有双重极点的伯德图。

在原点的零点即纯微分环节的频率特性是 $j\omega$,对数幅频特性为

$$L(\omega) = 20\lg |j\omega| = 20\lg\omega \quad (5-47)$$

它是一条斜率为 20dB/dec 的直线。相频特性为

$$\varphi(\omega) = 90^\circ \quad (5-48)$$

它是一条 $\varphi(\omega) = 90^\circ$ 水平直线。

同理可得,在原点有多重零点 $(j\omega)^\nu$ 的对数幅频特性和相频特性

$$L(\omega) = 20\lg |(j\omega)^\nu| = \nu \times 20\lg\omega \quad (5-49)$$

$$\varphi(\omega) = \nu \times 90^\circ \quad (5-50)$$

在图 5-14 中也给出了 $(j\omega)^\nu$, $\nu=1$ 和 $\nu=2$ 两种情况下的伯德图。

3. 实极点(或零点) $(j\omega T+1)^{\pm 1}$ 的伯德图

实极点 $(j\omega T+1)^{-1}$ 即惯性环节的对数幅频特性为

$$L(\omega) = 20\lg \left| \frac{1}{j\omega T+1} \right| = -20\lg(\omega^2 T^2 + 1)^{1/2} \quad (5-51)$$

这是一条曲线,但是它可以用 $\omega \ll 1/T$ 和 $\omega \gg 1/T$ 时的两条渐近线近似。

$\omega \ll 1/T$ 时, $L(\omega) = 20\lg 1 = 0$, 它就是 0dB 的水平直线。

$\omega \gg 1/T$ 时, $L(\omega) = 20\lg(\omega T)^{-1} = -20\lg(\omega T)$, 它是一条斜率等于 -20dB/dec 的直线。

当 $\omega = 1/T$ 时, $-20\lg(\omega T) = -20\lg 1 = 0\text{dB}$, 说明两条渐近线的交点角频率 $\omega = 1/T$, 这个角频率称为转角角频率。用这两条渐近线近似 $(j\omega T+1)^{-1}$ 的对数幅频特性,最大误差出现在 $\omega = 1/T$ 处,由式(5-51)可求得 $L(\omega)|_{\omega=1/T} = -3\text{dB}$ 。所以对于此类因子,采用渐近线近似实际曲线引起的误差不超过 3dB,但却大大简化了对数幅频特性的绘制及以后的计算。

$(j\omega T+1)^{-1}$ 的相角 $\varphi(\omega) = -\arctan(\omega T)$ 。 $\omega = 0$ 时, $\varphi(\omega) = 0^\circ$, $\omega = 1/T$ 时, $\varphi(\omega) = -45^\circ$, $\omega = \infty$ 时, $\varphi(\omega) = -90^\circ$ 。对 $\varphi(\omega)$ 曲线一般不作简化处理,因为它的数值与系统稳定性有密切关系。 $(j\omega T+1)^{-1}$ 是系统经常出现的因子,为作图方便,通常将 $(j\omega T+1)^{-1}$ 的 $\varphi(\omega)$ 曲线制成模板。使用模板时,只要对准横坐标,并将 -45° 的角频率对准 $1/T$,便可描下 $\varphi(\omega)$ 曲线。表 5-3 给出了 $\varphi(\omega)$ 的计算数据,用 MATLAB 可获得更准确的数据。

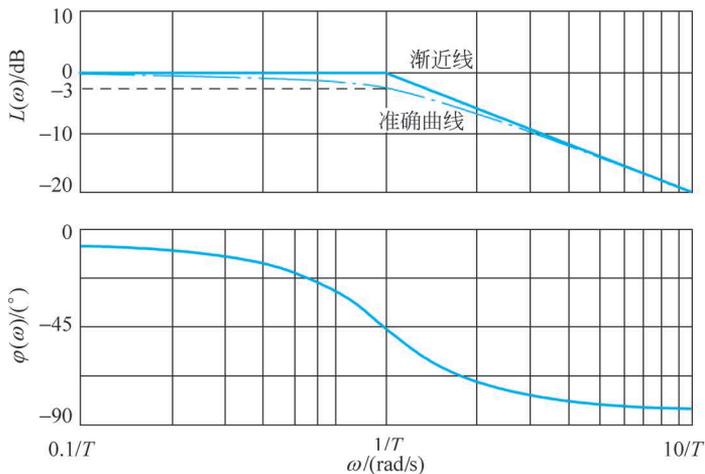
表 5-3 $(j\omega T+1)^{-1}$ 因子相频特性数据

ωT	0.01	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.7	1.0
$\varphi(\omega)/^\circ$	-0.6	-2.9	-5.7	-11.3	-16.7	-21.8	-26.6	-35	-45
ωT	2.0	3.0	4.0	5.0	7.0	10	20	50	100
$\varphi(\omega)/^\circ$	-63.4	-71.5	-76	-78.7	-81.9	-84.3	-87.1	-88.9	-89.4

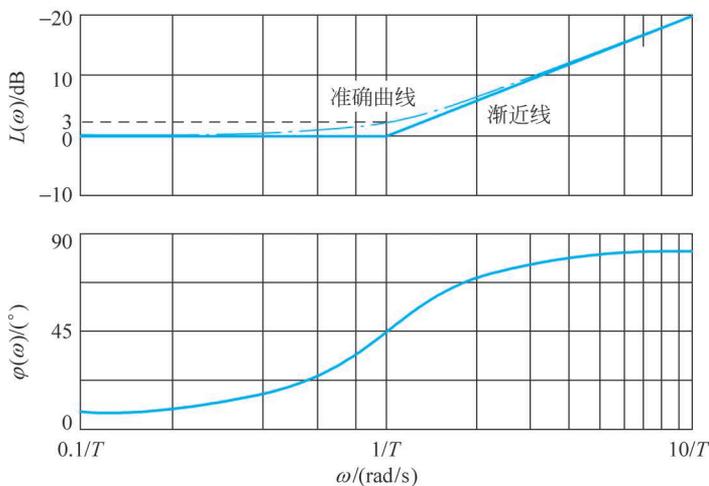
注: $(j\omega T+1)$ 因子的 $\varphi(\omega)$ 取正值。

图 5-15(a) 给出了 $(j\omega T+1)^{-1}$ 的 $L(\omega)$ 与 $\varphi(\omega)$ 曲线。

实零点 $(j\omega T+1)$ 即一阶微分环节的 $L(\omega)$ 与 $\varphi(\omega)$ 曲线与 $(j\omega T+1)^{-1}$ 对称于横坐标轴: $L(\omega)$ 大于转角角频率的渐近线斜率为 20dB/dec , $\varphi(\omega)$ 则是从 0° 开始,随 ω 增大而增加,在 $\omega = 1/T$ 时 $\varphi(\omega) = 45^\circ$, 而当 $\omega = \infty$, $\varphi(\omega) = 90^\circ$, 也与惯性环节的相频关于 0° 对称。实零点 $(j\omega T+1)$ 即一阶微分环节的 $L(\omega)$ 与 $\varphi(\omega)$ 曲线见图 5-15(b)。



(a) $(j\omega T+1)^{-1}$ 的 $L(\omega)$ 与 $\varphi(\omega)$ 曲线



(b) $(j\omega T+1)^{+1}$ 的 $L(\omega)$ 与 $\varphi(\omega)$ 曲线

图 5-15 $(j\omega T+1)^{\pm 1}$ 的 $L(\omega)$ 与 $\varphi(\omega)$ 曲线

4. 复极点(或零点) $\left[\left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} + 1 \right]^{\pm 1}$ 的伯德图

复极点(即振荡环节)的频率特性为 $\left[\left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} + 1 \right]^{-1}$, 令 $u = \omega/\omega_n$, 则它的对数幅频特性

$$L(\omega) = -20\lg[(1-u^2)^2 + (2\zeta u)^2]^{1/2} \quad (5-52)$$

当 $u = \omega/\omega_n \ll 1$ 时

$$L(\omega) = -20\lg 1 = 0\text{dB} \quad (5-53)$$

而当 $u \gg 1$ 时

$$L(\omega) = -40\lg u = -40\lg\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) \quad (5-54)$$

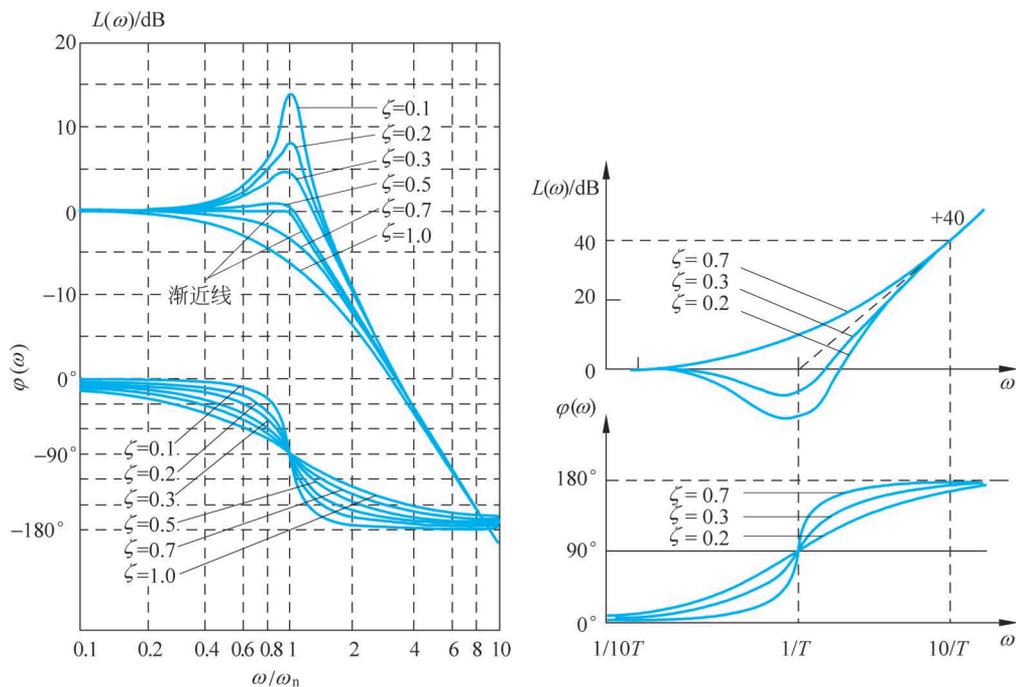
式(5-53)是一条 0dB 的水平直线,式(5-54)是一条斜率为 -40dB/dec 的直线,这两条渐近线相交处的频率就是转角频率 $\omega = \omega_n$ 。渐近线与实际曲线之间的误差是阻尼比 ζ 的函

数,当 $\zeta < 0.4$ 或 $\zeta > 0.707$ 时,必须考虑 ζ 对 $L(\omega)$ 曲线的影响,对 $\omega = \omega_n$ 附近的 $L(\omega)$ 曲线进行修正。图 5-16(a) 给出了在不同 ζ 时的 $L(\omega)$ 曲线。由图可见,当 $\zeta < 0.707$, $L(\omega)$ 会出现一个谐振峰值 M_r , M_r 及它出现的角频率 ω_r (谐振角频率) 可以通过式 (5-52) 对 u 求导,并使它等于零求得,即

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad (5-55)$$

$$M_r = |G(j\omega_r)| = (2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2})^{-1} \quad (5-56)$$

当 $\zeta \geq 0.707$, $M_r \leq 1$, $L(\omega)$ 曲线不会出现谐振峰值。



(a) 复极点 $\left[\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta\frac{j\omega}{\omega_n} + 1\right]^{-1}$ 的 $L(\omega)$ 与 $\varphi(\omega)$ 曲线

(b) 复零点 $\left[\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta\frac{j\omega}{\omega_n} + 1\right]$ 的 $L(\omega)$ 与 $\varphi(\omega)$ 曲线

图 5-16 $\left[\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta\frac{j\omega}{\omega_n} + 1\right]^{\pm 1}$ 的 $L(\omega)$ 与 $\varphi(\omega)$ 曲线

相频特性

$$\varphi(\omega) = -\arctan \frac{2\zeta\omega/\omega_n}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \quad (5-57)$$

或者

$$\varphi(u) = -\arctan \left(\frac{2\zeta u}{1 - u^2} \right) \quad (5-58)$$

不同 ζ 下的 $\varphi(\omega)$ 曲线也示于图 5-16(a)。

复零点 $\left[\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta\frac{j\omega}{\omega_n} + 1\right]^+1$ (即二阶微分环节) 的 $L(\omega)$ 曲线见图 5-16(b), 与复极点的 $L(\omega)$ 曲线对称(以 0 dB 线为对称轴); 其 $\varphi(\omega)$ 曲线与复极点的 $\varphi(\omega)$ 曲线对称(以 0° 线为对称轴)。

5.2.5 控制系统的伯德图

下面通过一个实例说明系统伯德图的绘制方法。

例 5-4 绘制下列系统的伯德图

$$G(s) = \frac{10(s+1)}{s(s+4)(s+0.1)}$$

解 绘制伯德图先要将传递函数化成时间常数形式。系统的频率特性为

$$G(j\omega) = \frac{10(j\omega+1)}{(j\omega)(j\omega+4)(j\omega+0.1)} = \frac{25(j\omega+1)}{(j\omega)(0.25j\omega+1)(10j\omega+1)}$$

由式(5-39)知,系统的对数幅频特性是 $G(j\omega)$ 中各基本因子对数幅频特性的叠加,所给系统有如下基本因子:常数增益 $K=25$ 、一个($\nu=1$)积分因子($j\omega$)、两个实极点因子—— $(0.25j\omega+1)^{-1}$ 和 $(10j\omega+1)^{-1}$,以及实零点因子($j\omega+1$)。可以利用 5.2.4 节的结论绘制各个因子的 $L(\omega)$ 曲线。

(1) $L(\omega)$ 的低频起始段是由常数增益与积分因子的对数幅频特性组成:积分因子 $\nu=1$, 所以其幅频是一条经过 $\omega=1, L(1)=0\text{dB}$, 斜率为 -20dB/dec 的直线。又因比例环节的幅值为 $20\lg K=20\lg 25=28\text{dB}$, 所以应将积分环节的幅值提高 28dB , 即此系统幅频特性低频起始段斜率为 -20dB/dec , 且通过 $\omega=1, L(\omega)=28\text{dB}$ 点的一条直线。

(2) 在实零点(或实极点)基本因子的转角角频率处,对数幅频特性 $L(\omega)$ 的斜率在原基础上增加(或减小) 20dB/dec , 而在复零点(或复极点)的转角角频率处, $L(\omega)$ 的斜率在原基础上增加(或减小) 40dB/dec 。此题中两个实极点的转角角频率分别为 0.1 和 4 , 一个实零点因子的转角角频率为 1 。

(3) 根据以上两条画出 $G(j\omega)$ 的近似对数幅频特性 $L(\omega)$ 曲线,如图 5-17 所示。

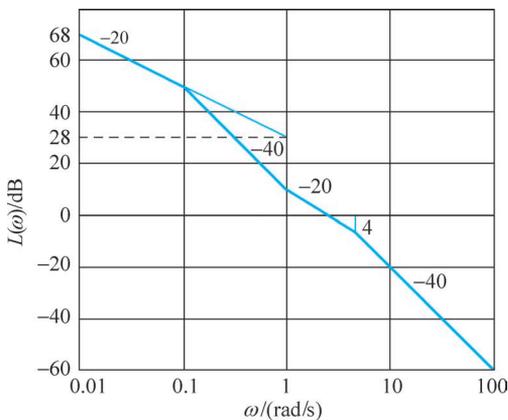


图 5-17 例 5-4 的对数幅频特性曲线

(4) 相频特性曲线是所有基本因子相频特性曲线的代数和,图 5-18 给出了基本因子和系统的相频特性曲线。曲线 1、2 和 3 分别是 $(10j\omega+1)^{-1}$ 、 $(j\omega+1)$ 和 $(0.25j\omega+1)^{-1}$ 的相频特性曲线, $(j\omega)$ 的相频特性曲线 4 是 -90° 的水平直线,以上 4 条相频特性曲线叠加的结果就是系统的相频特性曲线,图 5-18 中一条加粗的曲线就是系统的相频特性曲线。

例 5-5 系统的频率特性如下:

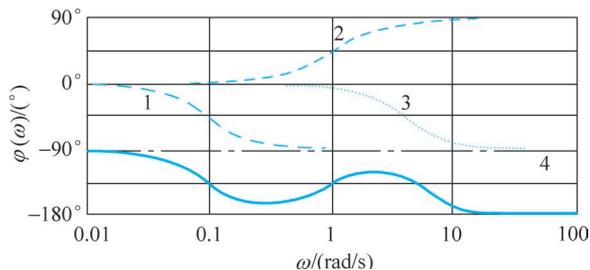


图 5-18 例 5-4 的相频特性曲线

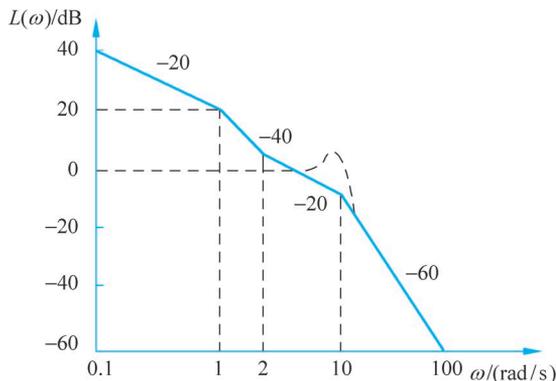
$$G(j\omega) = \frac{10(0.5j\omega + 1)}{(j\omega)(j\omega + 1)((j\omega/10)^2 + (0.5j\omega/10) + 1)} \quad (5-59)$$

绘制系统的对数幅频特性曲线。

解 系统包含的因子(按照转角角频率的顺序):

- (1) 常数增益 $K=10$;
- (2) 在原点的极点;
- (3) 极点 $\omega_1=1/T_1=1$;
- (4) 零点 $\omega_2=1/T_2=2$;
- (5) 复极点 $\omega_n=10, \zeta=0.25$ 。

按照前述绘图方法即可用各因子的渐近线绘出系统 $L(\omega)$ 曲线图,如图 5-19 实线所示。


 图 5-19 例 5-5 系统的 $L(\omega)$ 曲线

复极点的 $\zeta=0.25$,故需要对其曲线进行修正,按式(5-55)与式(5-56)可求得 ω_r 和 M_r 分别为

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} = 9.35 \text{ rad/s} \quad (5-60)$$

$$M_r = |G(j\omega_r)| = (2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2})^{-1} = 6.3 \text{ dB} \quad (5-61)$$

图 5-19 中的虚线为修正后的曲线。

总结上面两个例子,将绘制伯德图幅频的步骤总结如下:

- (1) 将传递函数化成时间常数形式(2.2 节)。
- (2) 在横轴上标出所有的转角频率。
- (3) 找到基准点 $(1, 20\lg K)$ 。

(4) 根据系统型号 ν , 过基准点作一条斜率为 -20ν dB/dec 的直线, 这是在没有转角频率之前低频段的频率特性。

(5) 在横轴上自左至右找转角频率, 逢转角频率则转; 该转角频率在分子上对应为一阶环节斜率增加 20dB/dec, 二阶环节增加 40dB/dec; 在分母上则分别变化 -20 dB/dec 和 -40 dB/dec。

(6) 如果转角频率处对应的是二阶环节, 当 $0.4 \leq \zeta \leq 0.707$ 时无须修正; 当 $\zeta < 0.4$ 时, 在转角频率乘以 $\sqrt{1-2\zeta^2}$ 处增加最大值为 $|20\lg(2\zeta\sqrt{1-\zeta^2})|$ 的突出; 当 $\zeta > 0.707$ 时, 需根据转角频率处 $L(\omega)$ 的准确值进行修正。

绘制相频特性没有简单的办法, 只能将这些相频叠加。

在此介绍系统中两个常用的术语。

(1) 增益剪切角频率 ω_c : 系统对数幅频特性穿越 0dB 的角频率, 即 $|G(j\omega)| = 1$, 或 $L(\omega) = 0$ dB 时的角频率;

(2) 相位剪切角频率 ω_g : 系统相频特性曲线穿越 -180° 的角频率, 即 $\varphi(\omega) = -180^\circ$ 时的角频率。

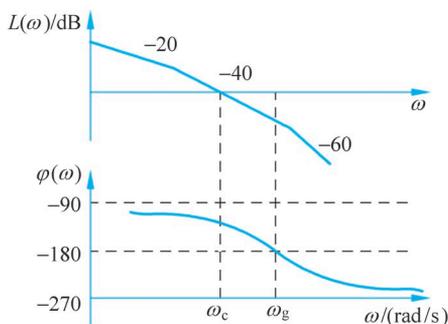


图 5-20 系统伯德图中 ω_c 和 ω_g 的位置

图 5-20 给出了伯德图上 ω_c 和 ω_g 的位置。

例 5-6 求下列传递函数的幅频特性, 并求增益剪切角频率

$$G(s) = \frac{20(0.1s + 1)}{s(s + 0.5)(s + 4)(0.04s + 1)}$$

解 根据上述步骤, 先将传递函数转换成时间常数形式

$$G(s) = \frac{10(0.1s + 1)}{s(2s + 1)\left(\frac{1}{4}s + 1\right)(0.04s + 1)}$$

(1) 转角频率为 $\frac{1}{2} = 0.5, 4, \frac{1}{0.1} = 10, \frac{1}{0.04} = 25$;

(2) 找到基准点 $(1, 20)$;

(3) 过基准点作 -20 dB/dec 的直线;

(4) 沿着低频段直线, 在第 1 个转角频率 0.5 处, 斜率改成 -40 dB/dec, 作直线; 在第 2 个转角频率 4 处, 改成斜率为 -60 dB/dec 的直线; 在第 3 个转角频率 10 处, 斜率改成 -40 dB/dec; 在第 4 个转角频率 25 处, 斜率改成 -60 dB/dec。

它的对数幅频特性见图 5-21。

根据增益剪切角频率 ω_c 的定义, 应该是

$$\begin{aligned} 0 &= 20\lg |G(j\omega_c)| \\ &= 20\lg 10 + 20\lg |0.1j\omega_c + 1| - 20\lg |j\omega_c| - \\ &\quad 20\lg |2j\omega_c + 1| - 20\lg \left| \frac{1}{4}j\omega_c + 1 \right| - 20\lg |0.04j\omega_c + 1| \end{aligned}$$

根据图 5-21, ω_c 应该在 1 和 4 之间, 即在转角 4, 10, 25 之前。回忆基本环节的伯德图, 在转角频率之前, 它们的幅频是 0dB, 因此可以不考虑这些环节。又因为在转角频率之后,

我们是用 $20\lg T\omega$ 去近似 $20\lg\sqrt{(T\omega)^2+1}$, 所以得到

$$0 = 20\lg 10 - 20\lg\omega_c - 20\lg(2\omega_c)$$

$$\text{即 } \frac{10}{\omega_c(2\omega_c)} = 1, \omega_c = \sqrt{5} \approx 2.236.$$

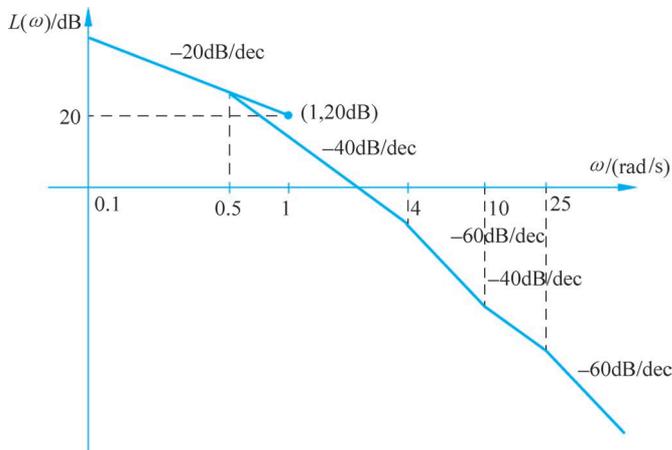


图 5-21 例 5-6 的伯德图(幅频)

在经典控制理论中根据伯德图求增益剪切频率都是根据折线的, 因此与用 MATLAB 的仿真会有小的差异, 但是就像我们总用折线代替曲线一样, 反而认为这个近似值才是正确答案。可能会有读者担心, 如果在例 5-6 中由于作图不准确, 据图认为 ω_c 小于 4, 所以没有考虑 $\frac{1}{s/4+1}$ 这个环节, 但求出的 ω_c 大于 4 了, 这时该怎么办? 由于作伯德图是近似的, 可能会发生这种现象, 这时就必须将 $\frac{1}{s/4+1}$ 这个环节考虑进去, 重新计算就可以了, 再算出来的 ω_c 必定大于 4。

5.2.6 最小相位系统和非最小相位系统

为了进一步说明开环幅频特性与相频特性之间的关系, 我们引入最小相位系统的概念。

定义: 在 s 右半开平面没有零、极点, 也没有延时因子(环节)的系统称为最小相位系统。

可以证明如果有 n 个 $G_i(s)$ ($i=1, 2, \dots, n$), 它们的幅频特性 $|G_i(j\omega)|$ 都相等, 那么最小相位系统一定使得相角变化最小, 如果用 $\varphi(\omega)$ 表示系统的相频特性, 那么相角的变化 $\Delta\varphi$ 定义为

$$\Delta\varphi = \max\phi(\omega) - \min\varphi(\omega)$$

例 5-7 设两个控制系统的开环传递函数分别为 ($T_1 > T_2$)

$$G_1(s) = \frac{1 + T_2 s}{1 + T_1 s} \quad \text{及} \quad G_2(s) = \frac{1 - T_2 s}{1 + T_1 s}$$

根据定义不难判别, $G_1(s)$ 是最小相位系统, $G_2(s)$ 是非最小相位系统。它们的对数幅频特性和相频特性分别为

$$L_1(\omega) = 20\lg\sqrt{1+(\omega T_2)^2} - 20\lg\sqrt{1+(\omega T_1)^2}$$

$$L_2(\omega) = 20\lg\sqrt{1+(\omega T_2)^2} - 20\lg\sqrt{1+(\omega T_1)^2}$$

$$\varphi_1(\omega) = -\arctan\omega T_1 + \arctan\omega T_2$$

$$\varphi_2(\omega) = -\arctan\omega T_1 - \arctan\omega T_2$$

上述两系统的伯德图绘于图 5-22 中,比较发现:当 ω 自 $0 \rightarrow \infty$, 它们的幅频特性 $L_1(\omega) = L_2(\omega)$, 但 $\varphi_1(\omega)$ 的变动范围为 $0^\circ \rightarrow 90^\circ$, 而 $\varphi_2(\omega)$ 的变动范围达到 $0^\circ \rightarrow 180^\circ$ 。 $\varphi_2(\omega)$ 的变化范围要比 $\varphi_1(\omega)$ 大得多。 $G_1(s)$ 是最小相位系统, $G_2(s)$ 是非最小相位系统。带有延迟环节的系统也是非最小相系统, 读者可用同样方法进行分析 and 理解其相位变化情况。

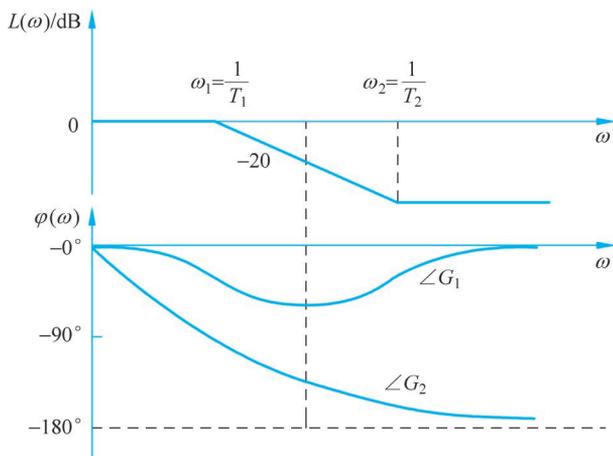


图 5-22 $G_1(s) = \frac{1+T_2s}{1+T_1s}$ 及 $G_2(s) = \frac{1-T_2s}{1+T_1s}$ 系统的伯德图

最小相位系统有以下一些特征:

(1) 对于开环极点都在左半 s 平面的系统, 在 $n \geq m$ 且幅频特性相同的情况下, 最小相位系统的相角变化范围最小。这里 n 和 m 分别表示传递函数分母和分子多项式的阶次。

(2) 当 $\omega \rightarrow \infty$ 时, 其相角等于 $-90^\circ \times (n-m)$, 对数幅频特性曲线高频段的斜率为 $-20 \times (n-m)$ dB/dec。有时用这一特性判别一个系统是否为最小相位系统。

(3) 对数幅频特性与相频特性之间存在确定的对应关系。对于一个最小相位系统, 我们若知道了其幅频特性, 它的相频特性也就唯一地确定了。也就是说, 只要知道其幅频特性, 就能写出此最小相位系统所对应的传递函数, 就可以依据幅频特性对系统进行分析研究, 而无须再画出相频特性。

非最小相位环节(具有右半平面上的零点、极点或时滞特性的环节)相位滞后大, 通常起动性能差, 响应缓慢。在系统设计时, 除了被控对象中可能包含之外, 一般不人为地引入非最小相位环节。

5.2.7 对数幅相特性图

系统频率特性的另一种图形表示是对数幅相特性图, 也称尼科尔斯图。对数幅相特性图画在以系统的对数幅值 $L(\omega) = 20\lg|G(j\omega)|$ dB 为纵坐标, 相角 $\varphi(\omega)$ 为横坐标的幅相平

面上(ω 为参数),表示 $L(\omega)$ 与 $\varphi(\omega)$ 之间关系的特性曲线。对数幅相特性最重要的是在 $L(\omega)=0\text{dB}$ 和 $\varphi(\omega)=-180^\circ$ 这一段的轨迹,所以通常只画出这一段的轨迹。一般都是根据对数幅频特性和相频特性画出对数幅相特性图。

例 5-8 绘制下述系统的尼科尔斯图

$$G(j\omega) = \frac{10(j\omega + 1)}{(j\omega)(j\omega + 4)(j\omega + 0.1)} \quad (5-62)$$

解 系统的伯德图如图 5-23 所示。利用伯德图可以很快地得到对应于同一个 ω 的 $L(\omega)$ 与 $\varphi(\omega)$ 的数据,即尼科尔斯图的数据,据此便可绘制尼科尔斯图,如图 5-24 所示。 ■

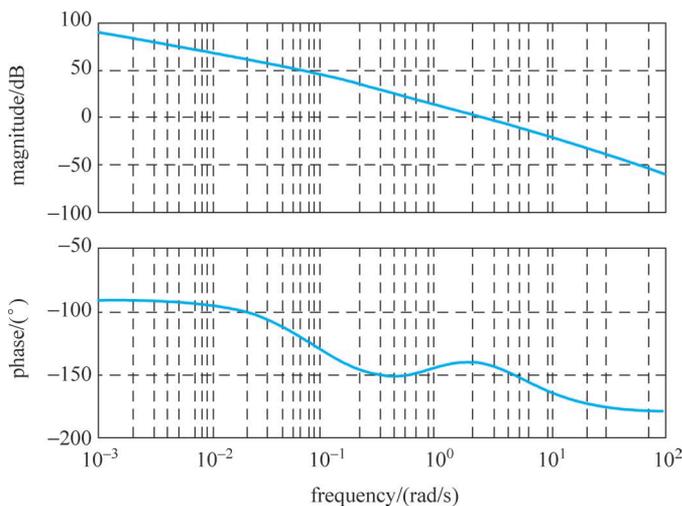


图 5-23 例 5-8 系统的伯德图

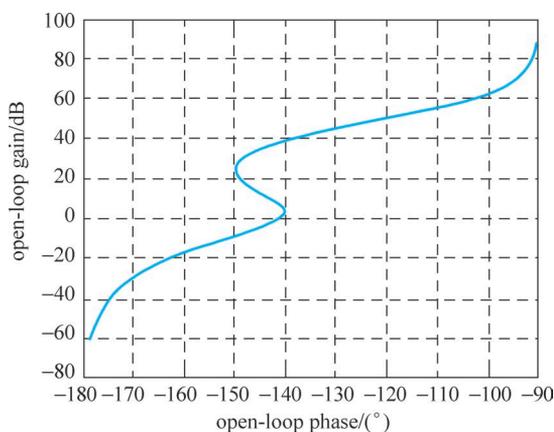


图 5-24 例 5-8 系统的对数幅相特性图

对数幅相特性图主要用来由开环频率特性分析闭环频率特性,详细论述将在 5.4 节展开。

5.2.8 用 MATLAB 作频率特性图

MATLAB 的控制系统工具箱中有很多绘制系统频率特性图的命令,简要介绍如下。

1. 伯德图

- (1) `bode(sys)` 绘制系统伯德图, 频率范围由 MATLAB 自动确定。
- (2) `bode(sys, ω)` 在定义频率 ω 的范围内绘制系统的伯德图。 ω 由两种定义方式, 即定义频率范围 $[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$;
定义频率点 $[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n]$ 。
- (3) `bode(sys1, sys2, ..., sysn)` 在同一窗口绘制多个系统的伯德图。
- (4) `bode(sys1, sys2, ..., sysn, ω)` 在定义频率 ω 的范围内绘制多个系统的伯德图。
- (5) `bode(sys1, plotstyle1, sys2, plotstyle2, ..., sysn, plotstylen)` 命令中的 `plotstyle` 可定义图形的属性。
- (6) `[mag, phase, ω] = bode(sys)` 不显示图形, 仅将伯德图的数据 (幅值、相角和相应的频率) 置于 `mag`、`phase` 和 ω 三个向量中。

2. 奈氏图

类似于伯德图, 绘制奈氏图的命令如下。

- (1) `nyquist(sys)`;
 - (2) `nyquist(sys, ω)`;
 - (3) `nyquist(sys1, sys2, ..., sysn)`;
 - (4) `nyquist(sys1, plotstyle1, sys2, plotstyle2, ..., sysn, plotstylen)`;
 - (5) `[re, im, ω] = nyquist(sys)` 奈氏图的数据是实部、虚部和相应的频率。
- 以上命令的功能与伯德图命令是对应的, 故不再重复。

3. 尼科尔斯图

- (1) `nichols(sys)`;
- (2) `nichols(sys, ω)`;
- (3) `nichols(sys1, sys2, ..., sysn)`;
- (4) `nichols(sys1, plotstyle1, sys2, plotstyle2, ..., sysn, plotstylen)`;
- (5) `ngrid` 在尼科尔斯图上加等幅值和等相角线。

例 5-9 用 MATLAB 绘制例 5-8 系统的伯德图。

解 执行以下命令

```
num=[10,10]; den=[1,4,1,0,4,0]; sys=tf(num,den); bode(sys)
```

可得系统的伯德图, 如图 5-23 所示。

再执行命令

```
nichols(sys)
```

便得系统的尼科尔斯图, 如图 5-24 所示。 ■

5.3 频域中的稳定性判据

5.3.1 引言

线性定常系统稳定性判据在时域中有劳斯判据, 可以判别闭环系统的特征根是否具有负实部。在复域中, 则是根据开环传递函数绘制根轨迹, 判定闭环系统的所有极点是否均在

左半 s 开平面上。频域中的稳定性判据是利用系统的开环频率特性来判别系统的稳定性。

令系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \quad (5-63)$$

则闭环系统的特征式为

$$F(s) = 1 + G(s)H(s) = \frac{P(s) + Q(s)}{Q(s)} = \frac{K_r \prod_{i=1}^n (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)} \quad (5-64)$$

由式(5-63)和式(5-64)可知:

- (1) $F(s)$ 是 n 阶有理分式, 并且零点数和极点数是相等的;
- (2) $F(s)$ 的零点就是闭环系统的极点;
- (3) $F(s)$ 的极点就是系统的开环极点。

频域中稳定性判据(奈氏判据)的数学基础是复变函数的幅角原理, 因而可以推广到非线性系统。它是通过建立开环频率特性 $G(j\omega)H(j\omega)$ 曲线与 $F(s) = 1 + G(s)H(s)$ 在右半平面上的零、极点数的关系, 判别闭环系统的稳定性。

5.3.2 幅角原理

1. 映射

s 是复数, 在 s 平面上可表示为 $s = \sigma + j\omega$ 。 $F(s)$ 也是复数, 在复平面 $F(s)$ 上表示为 $F(s) = u + jv$ 。在 s 平面上除了 $F(s)$ 的极点外的任意点 s_i , 均可在 $F(s)$ 平面上找到与之对应的点 $F(s_i)$ 。所以复函数 $F(s)$ 是从 s 平面到 $F(s)$ 平面的映射。例如函数

$$F(s) = \frac{2s}{s+1}$$

若 $s_1 = 2$, 则 $F(s_1) = 4/3$; 若 $s_2 = -j$, 则 $F(s_2) = 1 - j$ 。

2. 幅角原理——柯西定理

频域稳定性的奈氏判据是基于复变函数的柯西定理, 通常称为幅角原理, 它是把在 s 平面上一个闭合路径 Γ_s 内 $F(s)$ 的零点和极点数与 $F(s)$ 平面上 Γ_F 围绕原点的圈数联系在一起了。

幅角原理: 在 s 平面上取简单的闭合路径 Γ_s , 即当 s 在 Γ_s 上移动时, 每个点只经过一次, 且 Γ_s 不通过 $F(s)$ 的零点和极点, $F(s)$ 在 Γ_s 内的零点数为 Z 、极点数为 P , s 按顺时针方向沿 Γ_s 绕一圈, 用 Γ_F 表示 $F(s)$ 在 $F(s)$ 平面上产生的闭合曲线, 则 Γ_F 围绕原点的圈数为

$$N = Z - P \quad (5-65)$$

若 $N > 0$ (即 $Z > P$), 则 Γ_F 与 Γ_s 的移动方向一致, 即也是顺时针移动;

若 $N = 0$ (即 $Z = P$), 则 Γ_F 不包围原点;

若 $N < 0$ (即 $Z < P$), 则 Γ_F 与 Γ_s 的移动方向相反, 为逆时针移动。

证明: 由式(5-64)得

$$F(s) = \frac{K_r \prod_{i=1}^n (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)} = |F(s)| \angle F(s) = |F(s)| \angle \left[\sum_{i=1}^n \phi_i - \sum_{j=1}^n \theta_j \right] \quad (5-66)$$

式中

$$\sum_{i=1}^n \phi_i = \sum_{i=1}^n \angle (s + z_i) \quad (5-67)$$

为 $F(s)$ 所有零点幅角之和;

$$\sum_{j=1}^n \theta_j = \sum_{j=1}^n \angle (s + p_j) \quad (5-68)$$

为 $F(s)$ 所有极点幅角之和。

当 s 沿 Γ_s 绕行时, $\angle (s + z_i)$ 和 $\angle (s + p_j)$ 将随之变化, 图 5-25(a) 说明相角 ϕ_i 和 θ_j 变化的情况。若 $F(s)$ 的零点(如 $-z_2$)、极点(如 $-p_1$) 在 Γ_s 之外, s 沿 Γ_s 绕一圈, 其相角变化皆等于 0。

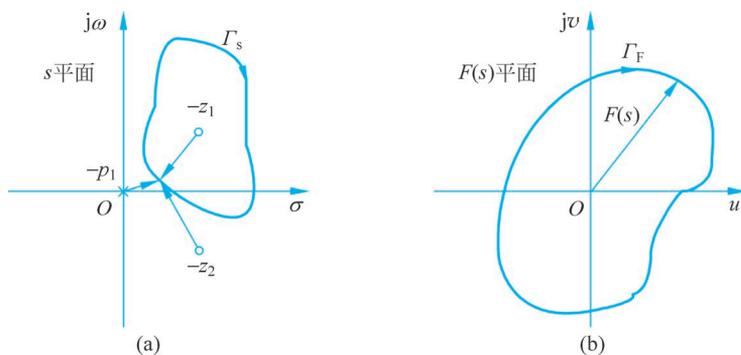


图 5-25 幅角原理示意图

若 $F(s)$ 的零点(如 $-z_1$) 在 Γ_s 之内, s 沿 Γ_s 顺时针方向绕一圈, 矢量 $(s + z_1)$ 相角变化为 -2π ;

若 $F(s)$ 的极点在 Γ_s 之内(图 5-25 中无), s 沿 Γ_s 顺时针方向绕一圈, 对应矢量相角变化为 -2π 。

假设 $F(s)$ 在 Γ_s 之内有 Z 个零点和 P 个极点, 当 s 沿 Γ_s 顺时针方向绕行一圈, $F(s)$ 的相角变化为

$$\Delta \angle F(s) = -2\pi(Z - P) \quad (5-69)$$

相角变化 -2π 相当于 Γ_F 按顺时针方向包围 $F(s)$ 平面的原点一圈, 故

$$N = Z - P \quad (5-70)$$

式中, N 是 Γ_F 按顺时针方向包围 $F(s)$ 平面原点的圈数。

5.3.3 奈氏稳定性判据

本小节介绍奈氏稳定性判据。与劳斯判据不同, 它是用复变函数的幅角原理证明的, 因此不但适合线性系统, 也可用于某些非线性系统, 而劳斯判据只能判别实系数多项式的稳

定性。

1. 奈氏路径

现取如下闭合路径 Γ_s ：它包围整个右半 s 平面， s 按顺时针方向沿着 $-j\infty \rightarrow j0 \rightarrow +j\infty \rightarrow -j\infty$ 绕行，其中从 $+j\infty$ 至 $-j\infty$ 是沿半径 $R \rightarrow \infty$ 的半圆顺时针绕行，如图 5-26 所示。这个闭合路径称为奈氏路径。

若 $F(s)$ 在 Γ_s 之内有 Z 个零点和 P 个极点，根据幅角原理， $F(s)$ 在 Γ_s 内的零点个数（即闭环系统的极点数）应为

$$Z = N + P \quad (5-71)$$

回忆 $F(s)$ 的定义，可知， $Z=0$ 时系统稳定。因此闭环系统稳定的充分必要条件可表述为

$$N = -P \quad (5-72)$$

负号表示 Γ_F 沿逆时针方向包围 $F(s)$ 平面的原点。

如果 $P=0$ ，闭环系统稳定的充分必要条件就是

$$N = 0 \quad (5-73)$$

如果 $N \neq 0$ ，系统是不稳定的，并且 Γ_F 包围 $F(s)$ 平面原点的圈数 N 就等于系统不稳定的特征根数。

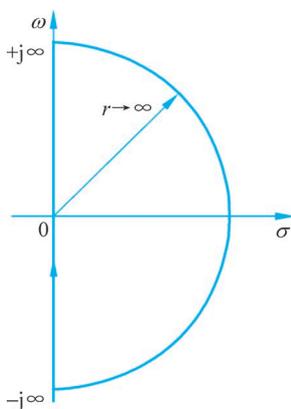


图 5-26 奈氏路径

2. 奈氏稳定性判据

前面分析是根据 Γ_F 包围 $F(s)$ 平面原点的圈数判别闭环系统不稳定的特征根数。当 s 顺时针方向沿 Γ_s 绕一圈时， $G(s)H(s)$ 在 GH 平面内产生的闭合曲线记为 Γ_{GH} 。由于

$$G(s)H(s) = F(s) - 1 \quad (5-74)$$

所以 Γ_F 包围 $F(s)$ 平面原点的圈数就是 Γ_{GH} 包围 GH 平面 $(-1, j0)$ 点的圈数。可以证明，当 s 顺时针方向沿奈氏路径从 $+j\infty$ 变化到 $-j\infty$ 时，不影响 Γ_{GH} 包围 GH 平面 $(-1, j0)$ 点的圈数（请读者自行证明）。若 $F(s)$ 在虚轴上没有极点，则可得闭环系统稳定的充分必要条件。

闭环系统稳定的充分必要条件： $G(j\omega)H(j\omega)$ 曲线 (ω 自 $-\infty \rightarrow +\infty$) 包围 GH 平面 $(-1, j0)$ 点的圈数为

$$N = -P \quad (5-75)$$

最小相位系统的 $P=0$ ，所以闭环系统稳定的充分必要条件是： $G(j\omega)H(j\omega)$ 曲线不包围 GH 平面 $(-1, j0)$ 点，即

$$N = 0 \quad (5-76)$$

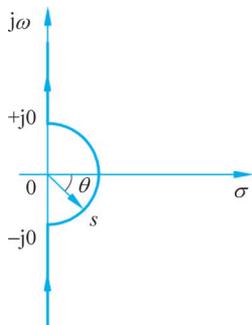
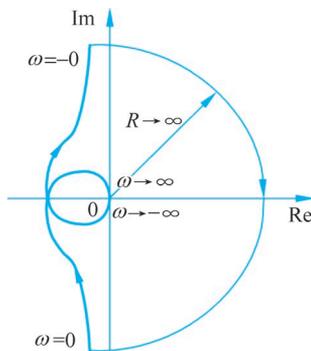
如果 $G(j\omega)H(j\omega)$ 曲线穿越 GH 平面 $(-1, j0)$ 点，系统就是临界稳定的。

3. 在 s 平面原点有 $F(s)$ 的极点时的奈氏路径

根据幅角原理，奈氏路径不能通过 $F(s)$ 的极点。当在 s 平面原点有 $F(s)$ 的极点时，从 $s = -j0 \rightarrow +j0$ 的奈氏路径按图 5-27 以 $\epsilon \rightarrow 0$ 微小半径的半圆绕过原点，此时 $s = \epsilon e^{j\theta}$ 。 $\theta = -90^\circ \rightarrow 90^\circ$ ， $s = -j0 \rightarrow +j0$

$$G(s)H(s) \Big|_{s=\epsilon \cdot e^{j\theta}} = \frac{K \prod_{i=1}^m (\tau_i \epsilon e^{j\theta} + 1)}{(\epsilon e^{j\theta})^\nu \prod_{j=\nu+1}^n (T_j \epsilon e^{j\theta} + 1)} \rightarrow \frac{K}{\epsilon^\nu} e^{-j\nu\theta} \quad (5-77)$$

上式说明,在这一段, $|G(s)H(s)| \rightarrow \infty$, 其幅角变化仅由 $\nu\theta$ 决定。从图 5-27 可见, s 为 $-j0 \rightarrow +j0$, 其相角 θ 逆时针 $-90^\circ \rightarrow 90^\circ$ 变化了 180° , 而 $G(s)H(s)$ 则以 ∞ 为半径, 顺时针变化 $\nu \times 180^\circ$ 。图 5-28 给出了 $\nu=1$ 的情形。

图 5-27 $s = \varepsilon e^{j\theta}$ 示意图图 5-28 s 为 $-j0 \rightarrow +j0$ 的奈氏图示意图

4. 奈氏判据应用举例

例 5-10 系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K_r}{s(s+a)} \quad a > 0$$

试判别闭环系统的稳定性。

解 这是一个 1 型二阶系统。 $G(j\omega)H(j\omega)|_{\omega=0} = \infty \angle (-90^\circ)$, $G(j\omega)H(j\omega)|_{\omega \rightarrow \infty} = 0 \angle (-180^\circ)$, 此题中 $\nu=1$, s 为 $-j0 \rightarrow +j0$ 时应顺时针补作 180° , 且半径为无穷大的虚圆弧, 如图 5-29 所示。图中奈氏图不包围 $(-1, j0)$ 点, 即 $N=0$ 。而 $P=0$, 所以系统是稳定的。 ■

例 5-11 系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K(s-1)}{s(s+1)} \quad K > 0$$

试判闭环系统的稳定性。

解 闭环系统是 1 型二阶系统。由于 $G(j\omega)H(j\omega) = \frac{2K}{\omega^2+1} - j \frac{(\omega^2-1)K}{\omega(\omega^2+1)}$, 因此 $\omega \rightarrow 0$ 时奈氏图始于第一象限, 初始相角为 90° ; 在 $\omega > 1$ 后进入第四象限, 最终相角 -90° 。 s 为 $-j0 \rightarrow +j0$ 时应顺时针补作 180° , 且是一个半径为无穷大的圆弧, 奈氏图如图 5-30 所示。奈氏图包围 $(-1, j0)$ 点的圈数 $N=1$, 而 $P=0$, 所以闭环系统不稳定。 ■

例 5-12 已知系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(T_1s+1)(T_2s+1)} \quad (5-78)$$

判断系统的稳定性。

解 开环是一个最小相位系统, 奈氏图如图 5-31 所示。曲线与实轴的交点坐标为 $(-\frac{KT_1T_2}{T_1+T_2}, j0)$ 。图 5-31 给出了不同 K 值时的奈氏图。

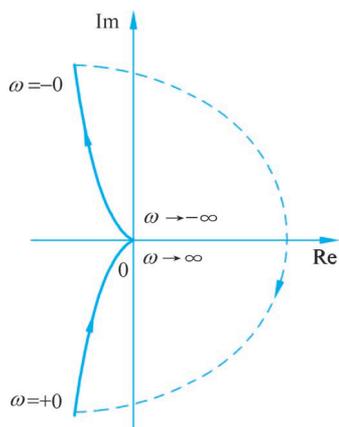


图 5-29 例 5-10 的奈氏图

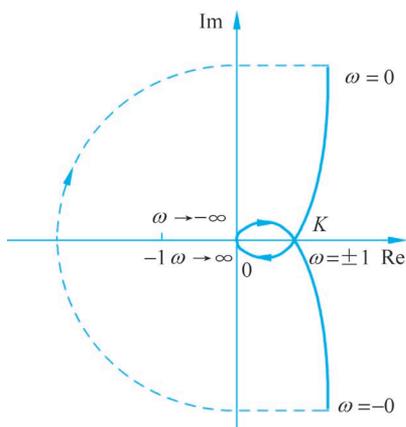


图 5-30 例 5-11 的奈氏图

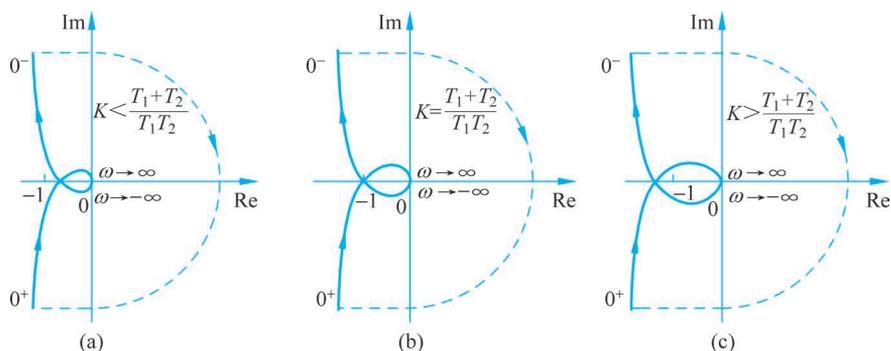


图 5-31 例 5-12 系统的奈氏图

图(a) 为 $K < \frac{T_1+T_2}{T_1T_2}$, 曲线不包围 $(-1, j0)$ 点, 所以系统是稳定的;

图(b) 为 $K = \frac{T_1+T_2}{T_1T_2}$, 曲线通过 $(-1, j0)$ 点, 系统处于临界稳定状态;

图(c) 为 $K > \frac{T_1+T_2}{T_1T_2}$, 曲线包围 $(-1, j0)$ 点, 系统是不稳定的。 ■

5. 判断 N 的简易方法

因 ω 自 $-\infty \rightarrow -0 \rightarrow +0 \rightarrow +\infty$ 时, $G(j\omega)H(j\omega)$ 奈氏图对称于实轴, 因此, 实际应用中常常只画 $\omega = 0 \rightarrow \infty$ 的那一部分。习惯上将 $G(j\omega)H(j\omega)$ 从下而上穿过 $(-1, j0)$ 点左边负实轴称为正穿越一次; 反之, 称为负穿越一次, 见图 5-32(a)。若 $G(j\omega)H(j\omega)$ 轨迹起始或终止于 $(-1, j0)$ 以左的负轴上, 则穿越次数为半次, 同样有 $+0.5$ 次穿越和 -0.5 次穿越, 见图 5-32(b) 和 (c) 所示。分别用 N_+ 和 N_- 表示正穿越和负穿越的次数。

不难理解, 如果 $\omega = 0 \rightarrow \infty$ 变化时, $G(j\omega)H(j\omega)$ 按顺时针方向绕 $(-1, j0)$ 一周, 则必正穿越一次。反之, 若逆时针方向包围 $(-1, j0)$ 点一周, 则必负穿越一次。此时计算奈氏图包围 $(-1, j0)$ 点的圈数

$$N = 2 \times (N_+ - N_-) \quad (5-79)$$

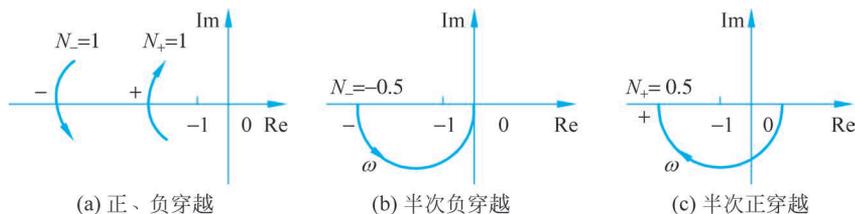


图 5-32 正、负穿越表示

例 5-13 试判别图 5-33 所示各系统的稳定性,各系统的开环极点数已标示于图中。

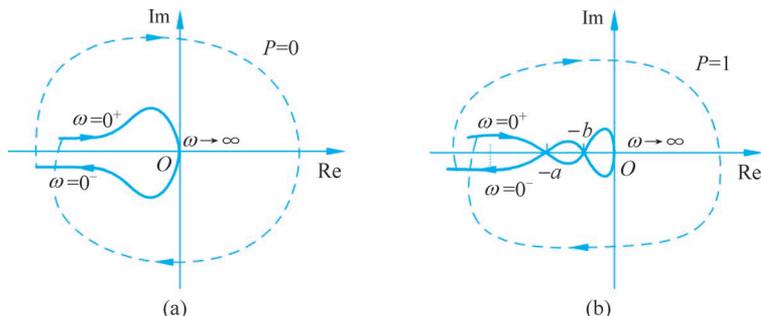


图 5-33 例 5-13 系统奈氏图

解 图 5-33(a)中, $N_+ = 2, N_- = 0, N = 2 - 0 = 2$, 而 $P = 0$, 所以 $Z = N + P = 2, F(s)$ 在右半 s 平面有 2 个零点, 系统不稳定。

图 5-33(b)中,

若 $b > 1, N_+ = 4, N_- = 2, N = 4 - 2 = 2$, 而 $P = 1$, 所以 $Z = N + P = 3$, 系统不稳定;

若 $b < 1 < a, N_+ = 2, N_- = 2, N = 2 - 2 = 0, Z = N + P = 1$, 系统不稳定;

若 $a < 1, N_+ = 2, N_- = 0, N = 2 - 0 = 2, Z = N + P = 3$, 系统不稳定;

若 $b = 1$ 或 $a = 1$, 曲线穿越 $(-1, j0)$ 点, 系统为临界稳定。 ■

总结用奈氏判据, 判别系统稳定性的步骤如下:

- (1) 作出开环系统的频率特性 $G(j\omega)H(j\omega)$;
- (2) 求出开环系统不稳定极点的个数, 即 P 的值;
- (3) 根据开环系统的型号, 将 $G(j\omega)H(j\omega)$ 的尾端 ($\omega = 0$ 处) 逆时针转 $\nu \times 90^\circ$, 最后必定落在实轴上;
- (4) 根据修正后的奈氏图, 计算 N_+ 和 N_- , 然而应用式 (5-79) 得出 N 。
- (5) 应用奈氏判据 $Z = N + P$ 算出 Z 。

5.3.4 伯德图的奈氏判据

从上面的讨论可以知道, P 可以从开环传递函数直接读出, 因此应用奈氏判据的关键在于求 N , 式 (5-79) 给出由 N_+ 和 N_- 求取 N , 问题一下子变得十分简单了。我们只要考查奈氏图穿过 $(-\infty, -1)$ 这段实轴的情况。如果是顺时针穿越, 则幅角从大于 -180° 变到小于 -180° , 这时为正穿越, 相应地幅角从小于 -180° 变到大于 -180° 的为负穿越。现在找这种穿越在伯德图上的对应关系。

(1) $G(j\omega_0)H(j\omega_0)$ 穿越负实轴, 相当于相频特性 $\varphi(\omega)$ 穿越 -180° 。如果在 -180° 作一条平行于 ω 轴的直线, 那么从上方穿越这条直线的为正穿越, 从下方穿越这条直线的为负穿越。相频起始这条直线或者终止于这条直线的为半穿越。

(2) 如果 $G(j\omega_0)H(j\omega_0)$ 在 $(-\infty, -1)$ 穿越实轴, 那么 $|G(j\omega_0)H(j\omega_0)| > 1$, 或者 $L(\omega_0) > 0$ 。因此计算穿越只要关心 $L(\omega) > 0$ 的这部分。

(3) 对于开环传递函数存在积分环节的系统, 要将相频特性的尾端朝 $\varphi(\omega)$ 增加方向 (箭头方向) 上移 $\nu \times 90^\circ$, 上移后的起点必定在 $k180^\circ$ 处。这时要注意穿越 $(2k+1)180^\circ$ 都相当于穿越负实轴。

例 5-14 系统开环传递函数的伯德图如图 5-34 所示, 试求系统的 N 。

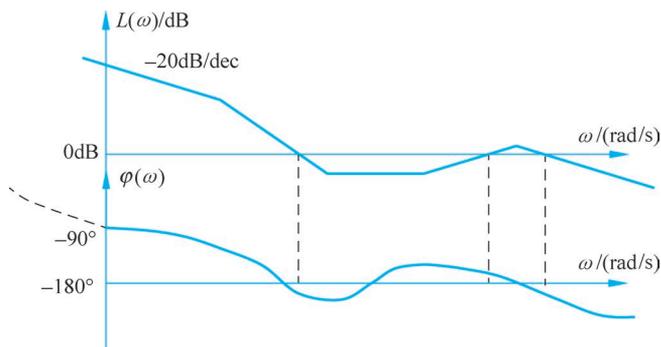


图 5-34 例 5-14 伯德图

解 由于低频段的斜率为 -20dB/dec , 因此系统是 1 型的, 相频的尾部上翘 90° 。检查 $L(\omega) > 0$ 部分, 相频有二次从上方 (大于 -180°) 穿越 -180° 直线, 因此 $N_+ = 2, N = 4$ 。 ■

对于开环是最小相位的系统, 情况比较简单。

开环是最小相位的系统。其稳定的充分必要条件是, 在剪切角频率 ω_c 处的 $\varphi(\omega_c) > -180^\circ$ 。反之, 为不稳定系统。

图 5-35(a)、(b) 分别是两个最小相位系统的伯德图, 根据判据, (a) 为稳定系统, (b) 为不稳定系统。由此可以得出 $\omega_c < \omega_g$ 是最小相位系统稳定的充分必要条件。

例 5-15 用伯德图判别下列系统的稳定性

$$G(s)H(s) = \frac{K_r(s+3)}{s(s+1)(s+50)(s+100)} \quad (5-80)$$

系统的伯德图如图 5-36 所示。图中 -1 、 -2 和 -3 分别表示 $L(\omega)$ 特性的斜率 -20dB/dec 、 -40dB/dec 和 -60dB/dec 。

图中粗线是开环增益 $K=100$ 时的 $L(\omega)$ 曲线, 在 $\omega=\omega_c$ 处的相位 $\varphi(\omega) > -180^\circ$, 所以系统稳定。当 $K=143$ 时的 $L(\omega)$ 曲线如图中的细线, 相频特性正好在 $\omega=\omega_c$ 处自上向下穿越 -180° , 系统处于临界稳定状态。如果 $K > 143$, 则 $\omega=\omega_c$ 处的相位 $\varphi(\omega) < -180^\circ$, 系统是不稳定的。 ■

也可以用尼科尔斯图进行系统的稳定性分析, 但作图比较麻烦, 在此不进行讨论, 读者可参阅有关资料。

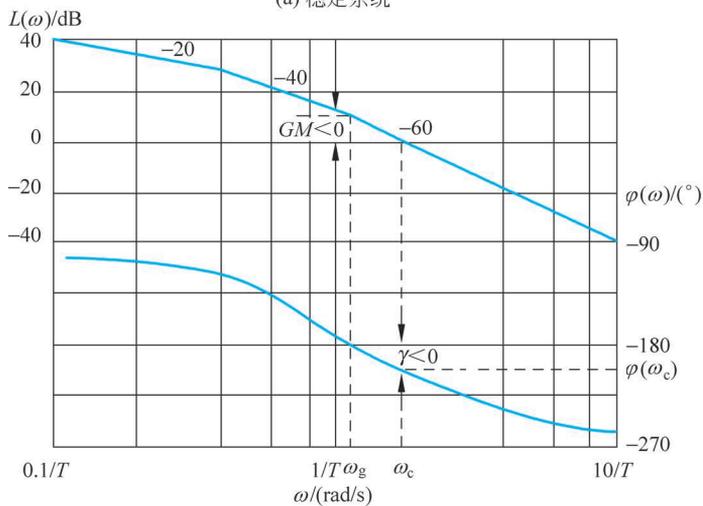
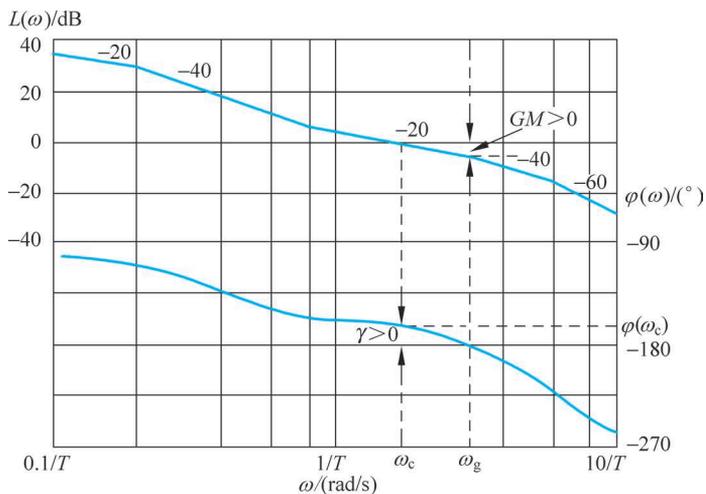


图 5-35 伯德图的奈氏判据

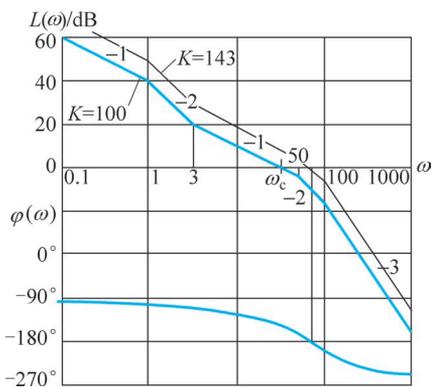


图 5-36 例 5-15 系统的伯德图

5.4 根据伯德图求系统传递函数

上一节指出,最小相位系统的幅频特性和相频特性是一一对应的,因此根据系统的幅频特性可以唯一地确定最小相位系统的传递函数。20世纪60年代之前,在控制理论中总假设系统是黑箱,传递函数是通过实验方法求取的,应用频率特性求取系统传递函数是一种重要的方法,尤其是涉电的控制系统。对系统输入谐波信号 $\sin \omega t$,量测系统稳态输出的幅值并用分贝做单位,得到 $L(\omega)$ 。改变 ω ,就有一系列的 $L(\omega)$,将这些 $(\omega, L(\omega))$ 标在半对数坐标中,用斜率为 $\pm 20k \text{ dB/dec}$ 的折线去拟合这些点,当然也可以用最小二乘法找出最佳拟合。然后用本节给出的方法求出系统的传递函数。对于非最小相位系统,还需要用相频特性决定零极点的符号。以下假设系统的幅频特性已经画出,研究如何求得它的传递函数。

假设系统的传递函数是

$$G(s) = \frac{K \prod_{i=1}^{m_1} (\tau_i s + 1) \prod_{k=1}^{m_2} (T_k^2 s^2 + 2 \zeta_k T_k s + 1)}{s^\nu \prod_{j=1}^{n_1} (\tau_j s + 1) \prod_{l=1}^{n_2} (T_l^2 s^2 + 2 \zeta_l T_l s + 1)}$$

时间常数 τ_i, τ_j, T_k, T_l 都是正实数,阻尼比 ζ_k, ζ_l 也是正实数, ν 是正整数, K 是增益,它们都是未知的。

1. 系统型号 ν

最小折角之前的频段称为最低频段。最低频段的斜率决定了系统的型号。最低频段的斜率是 $\nu \times (-20) \text{ dB/dec}$,那么型号就是 ν 。由于已经要求用斜率是 $\pm 20k \text{ dB/dec}$ 的折线去拟合,因此 ν 是可以获取的。

2. 时间常数 τ_i, τ_j, T_k, T_l

一个折角频率对应一个时间常数,折角后斜率是减小的,这个时间常数对应的环节在分母上,增加的则在分子上。经过折角变化是 $\pm 20 \text{ dB/dec}$ 的,是一阶环节,变化是 $\pm 40 \text{ dB/dec}$ 的则是二阶环节。

3. 二阶环节的阻尼比 ζ_k, ζ_l

以 $\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2 \zeta \omega_n s + \omega_n^2}$ 为例,对于 $\frac{s^2 + 2 \zeta \omega_n s + \omega_n^2}{\omega_n^2}$ 的环节只要将它做对称就可以相应处理了。二阶环节幅频的标注一般有两种情形:存在谐振和不存在谐振。存在谐振的会注明谐振峰值 M_r ,根据 $M_r = -20 \lg(2 \zeta \sqrt{1 - \zeta^2})$,可得 ζ 。如果设 $\cos \theta = \zeta$,应用三角函数可以方便得到 $\zeta = \cos\left(\frac{1}{2} \arcsin(10^{-\frac{M_r}{20}})\right)$ 。对于不存在谐振的二阶系统,通常给出在折角频率处的准确幅频值,它与折角处的幅频的差为 $-20 \lg 2 \zeta$ 。

4. 增益 K

在绘制幅频特性的时候,总是从基准点 $(1, 20 \lg K)$ 开始的。如果 $\omega = 1$ 处于最低频段,那么这点的幅频就是 $20 \lg K$ 。然而对于一个给定的幅频特性,不能要求 $\omega = 1$ 处于最低频段,也不方便将最低频段作延长线一直到 $\omega = 1$ 处,再来量测它的 L 值。在一个幅频特性

中,一定会有一点它的纵坐标和横坐标都是知道的。

设在幅频特性上给出了 $(\omega_0, L(\omega_0))$ 。找出所有比 ω_0 小的折角频率对应的时间常数,在分子上的是 $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$,在分母上是 T_1, T_2, \dots, T_n ,系统型号是 ν ,那么根据折线的做法有

$$L(\omega_0) = 20 \lg \frac{K \prod_{i=1}^m (\tau_i \omega_0)}{\omega_0^\nu \prod_{j=1}^n (T_j \omega_0)}$$

方程中只有一个未知数 K ,非常方便求解。

例 5-16 已知系统是最小相位的,它的幅频特性见图 5-37,求系统的传递函数。

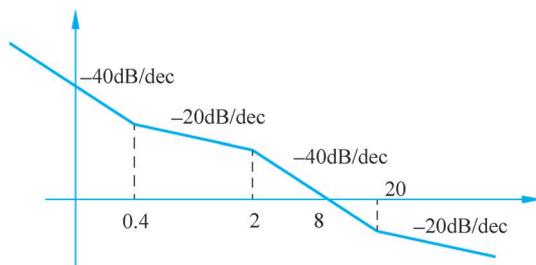


图 5-37 例 5-16 的幅频特性

其中, $\omega_c = 8$ 。

解 最低频段斜率为 -40dB/dec ,因此系统型号为 2,折角频率分别 0.4、2 和 20,已知的基准点是 $(8, 0)$ 。传递函数是

$$G(s) = \frac{K \left(\frac{1}{0.4}s + 1 \right) \left(\frac{1}{20}s + 1 \right)}{s^2 \left(\frac{1}{2}s + 1 \right)}$$

比 8 小的折角有 0.4 和 2,因此

$$0 = 20 \lg \frac{K \times \frac{8}{0.4}}{8^2 \times \frac{8}{2}}$$

因此 $K = 12.8$ 。 ■

5.5 基于频率特性的性能分析与优化设计

我们已经在时域和复域中考虑了系统的性能分析和优化设计,本节考虑基于频率特性的性能分析和优化设计。本节将分成两部分,先考虑应用开环频率特性的系统性能分析和参数优化,重点讨论了稳定裕量问题。然后考虑应用闭环频率特性分析系统性能。分析依然围绕控制系统“快、稳、准”三个基本要求进行。

5.5.1 开环频率特性的性能指标

开环频率特性的性能指标要分频段说。在低频段指标有低频段的斜率和开环增益。上一节已经说明最低频段的斜率对应系统型号,而开环增益主要由低频段的高度决定的。这两个指标确定了系统的稳态误差。

中频段是指包含幅频剪切频率和相频剪切频率的一段,这一段是分析闭环系统动态性能的主要依据,我们将在下一节专门介绍。

高频段是指系统的幅频已经衰减到 -40dB 之后,或者最后一个折角频率之后的频段。这一段的主要性能指标是高频段的斜率,希望小于 $-40\text{dB}/\text{dec}$,使得高频信号有快速的衰减。

5.5.2 稳定裕量

劳斯判据及奈氏判据都是稳定性的判据,目的是给出系统稳定还是不稳定的判断。但是,在设计系统时,不但要求系统是稳定的,而且希望有较好的动态和稳态性能,就是有好的相对稳定性。例如,闭环系统的所有特征根都具有负实部,系统是稳定的。在稳定的系统中,特征根 $-\sigma \pm j\omega$ 实部 σ 的数值越大(闭环极点离虚轴越远),其动态过程越短,响应速度越快。此外,系统元件老化、参数变动会引起极点漂移, σ 数值越大,能够经受的变动就越大,系统的相对稳定性就越好,因此可以用 σ 的大小来度量系统的相对稳定性。另外可以用阻尼比 ζ 来描述相对稳定性, ζ 越小超调量就越大,相对稳定性也越差。因此阻尼比和极点实部位置从不同角度描绘了相对稳定性。

在系统的开环频率特性中度量相对稳定性的指标是相位裕度和增益裕度。

(1) 增益裕度 G_m 。

定义: 在系统的相位剪切角频率 ω_g (即 $\varphi(\omega_g) = -180^\circ$)处开环频率特性 $|G(j\omega_g)H(j\omega_g)|$ 的倒数,称为控制系统的增益裕度,记作 G_m ,即

$$G_m \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|G(j\omega_g)H(j\omega_g)|} \quad (5-81)$$

由图 5-38 可知, GH 平面上负实轴与 $G(j\omega)H(j\omega)$ 曲线相交点的角频率便是 ω_g 。由奈氏判据可知,对于开环是最小相位的系统,当 $G_m < 1$ 时闭环系统不稳定; $G_m = 1$,系统临界稳定; $G_m > 1$ 系统稳定, G_m 越大,系统的相对稳定性越好。

在图 5-38(a)中,两个增益裕度均大于 1,所以是稳定系统,但它们的相对稳定性是不同的。增益裕度 $G_{m1} > G_{m2}$,说明由 $G_1(s)H_1(s)$ 构成的闭环系统的相对稳定性要优于 $G_2(s)H_2(s)$ 构成的闭环系统;在图 5-38(b)中表示的是不稳定系统,因为 $G_{m3} < 1$ 。

增益裕度也可用分贝为单位表示,即

$$G_m = 20\lg G_m = -20\lg |G(j\omega_g)H(j\omega_g)| \quad (\text{dB}) \quad (5-82)$$

如 $G_m > 0\text{dB}$,闭环系统是稳定的,如 $G_m = 0\text{dB}$,系统处于临界稳定状态,如 $G_m < 0\text{dB}$,系统是不稳定的。

(2) 相位裕度 γ 。

定义: 在系统的增益剪切角频率 ω_c 处(即 $|G(j\omega_c)H(j\omega_c)| = 1$),使闭环系统达到临界稳定状态所需附加的相移(增加或减少相移)量称为控制系统的相位裕度,记作 γ ,具体表

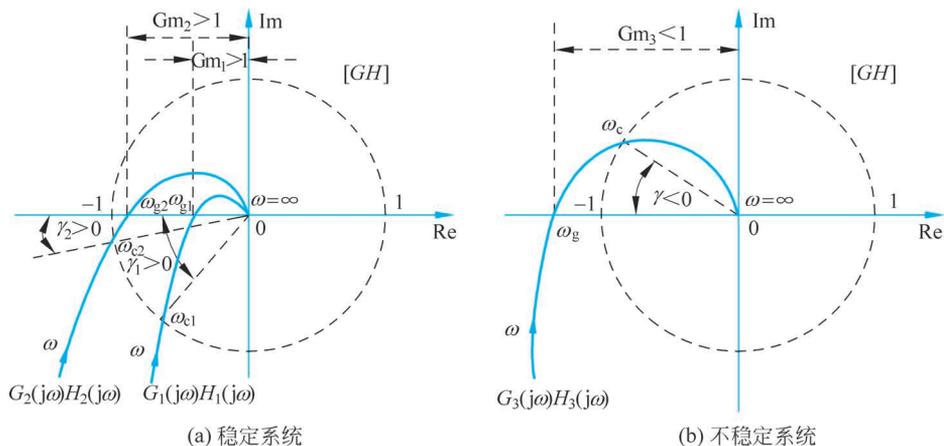


图 5-38 控制系统的增益裕度和相位裕度

示为

$$\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c) \tag{5-83}$$

对开环是最小相位的系统而言, $\gamma = 0$ 时, 闭环系统是临界稳定; $\gamma < 0$ 时, 系统不稳定; $\gamma > 0$ 时系统是稳定的, 且 γ 越大, 系统的相对稳定性越好。

由图 5-38 可知, GH 平面上单位圆与 $G(j\omega)H(j\omega)$ 曲线相交点的角频率便是 ω_c 。当 $\gamma > 0^\circ$ 时, 相位裕度为正, 系统稳定, 见图 5-38(a), 且 $G_1(s)H_1(s)$ 构成的闭环系统, 其相对稳定性优于由 $G_2(s)H_2(s)$ 构成的闭环系统。当 $\gamma < 0^\circ$ 时, 相位裕度为负, 系统不稳定, 见图 5-38(b)。

控制系统的相位裕度 γ 和增益裕度 G_m 是频率特性在极坐标图中对 $(-1, j0)$ 点靠近程度的一种度量。因此, 这两个量可以用来作为设计准则。但是, 仅用增益裕度或者仅用相位裕度, 都不足以说明系统的相对稳定性。为了确定系统的相对稳定性, 必须同时给出这两个量。

图 5-39 给出了伯德图上的增益裕量和相位裕量。在传递函数式(5-37)中, 改变开环增益 K 不能改变系统的相频特性, 因此这时 ω_g 是不变的。改变 K 将使得幅频特性上下平行移动, 因此可以改变 ω_c 和 G_m 。由图不难看出, 增加 K 会导致相位裕量 γ 和增益裕量 G_m 减小。对于开环是最小相位的系统而言, K 的选取首先是让 $\omega_c < \omega_g$, 然后上下平移幅频特性在满足 γ 和 G_m 的前提下, 使得 K 尽量大, 以获得较小的稳态误差。

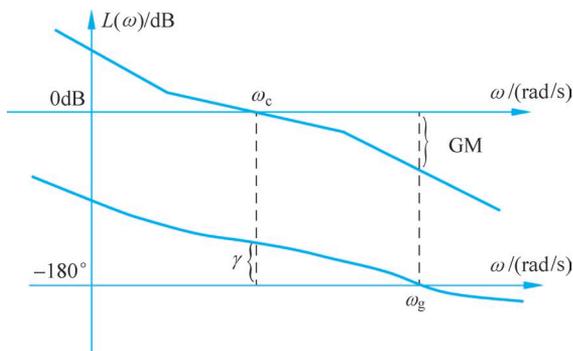


图 5-39 伯德图上的稳定裕量

为了得到较好的动态性能,要求相位裕度应当在 $\gamma = 30^\circ \sim 60^\circ$, 而增益裕度 $GM \geq 6\text{dB}$ 。对于最小相位系统而言,若对数幅频特性以 -20dB/dec 的斜率穿越 0dB 线,则系统是稳定的。如果以 -40dB/dec 的斜率穿越 0dB 线,则可能是不稳定的;即使稳定,其相位裕度也比较小。

5.5.3 开环频域指标与时域性能指标的关系

这里主要讨论系统的时域指标超调量 M_p 、调整时间 t_s 与开环频域指标相位裕度 γ 、增益剪切角频率 ω_c 之间的关系。对二阶系统来说,它们存在准确的数学描述。但对高阶系统来说,这种关系比较复杂,通常用近似公式来描述。

1. 二阶系统

(1) M_p 与 γ 之间的关系。

开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)} \quad (5-84)$$

频率特性为

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{j\omega(j\omega + 2\zeta\omega_n)} \quad (5-85)$$

幅频和相频分别为

$$|G(j\omega)H(j\omega)| = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{\omega^4 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}} \quad (5-86)$$

$$\varphi(\omega) = -90^\circ - \arctan \frac{\omega}{2\zeta\omega_n} \quad (5-87)$$

当 $\omega = \omega_c$ 时,频率特性的幅值等于 1。将之代入式(5-86)有

$$\omega_n^4 = \omega_c^4 + (2\zeta\omega_n\omega_c)^2 \quad (5-88)$$

或

$$\left(\frac{\omega_c}{\omega_n}\right)^4 + 4\zeta^2\left(\frac{\omega_c}{\omega_n}\right)^2 - 1 = 0$$

解得

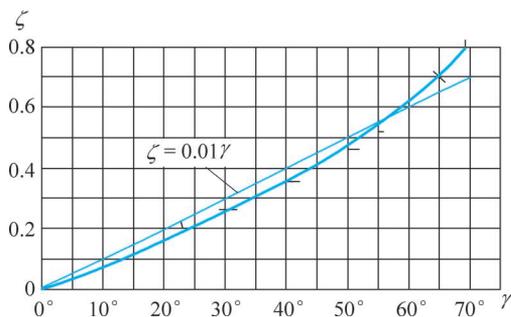
$$\frac{\omega_c}{\omega_n} = (\sqrt{4\zeta^4 + 1} - 2\zeta^2)^{1/2} \quad (5-89)$$

系统的相位裕度为

$$\begin{aligned} \gamma &= 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 90^\circ - \arctan \frac{\omega_c}{2\zeta\omega_n} = \arctan \frac{2\zeta\omega_n}{\omega_c} \\ &= \arctan \left[2\zeta \left(\frac{1}{\sqrt{4\zeta^4 + 1} - 2\zeta^2} \right)^{1/2} \right] \end{aligned} \quad (5-90)$$

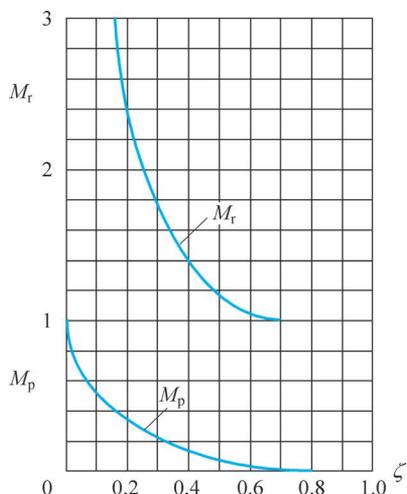
相位裕度 γ 与阻尼比 ζ 的关系曲线示于图 5-40。这条曲线可以用一条斜率为 0.01 的直线近似,如图中的细线,其方程为

$$\zeta = 0.01\gamma \quad (5-91)$$

图 5-40 相位裕度 γ 与阻尼比 ζ 的关系曲线

当 $\zeta \leq 0.7$ 时,这一近似是相当准确的。

单位负反馈系统的开环传递函数为式(5-84),则闭环是典型二阶系统。利用式(5-90)可建立闭环时域与开环频域的性能指标之间的联系。在时域分析中,二阶系统的最大超

图 5-41 二阶系统 M_p 与 ζ 的关系曲线

调量:

$$M_p = e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% \quad (5-92)$$

为便于比较,把式(5-92)中 M_p 和 ζ 的关系曲线绘于图 5-41。比较式(5-90)和式(5-92)不难发现, γ 与 M_p 的关系是通过中间参数 ζ 相联系的,具体应用中,可通过图 5-40 或式(5-90)求出给定 γ 值所对应的 ζ ,再由图 5-41 或式(5-92)求出此 ζ 所对应的 M_p 值。

对于二阶系统来说, γ 越小, M_p 越大; γ 越大, M_p 越小。为使二阶系统不至于振荡得太厉害以及调节时间太长,一般取

$$30^\circ \leq \gamma \leq 70^\circ$$

(2) t_s 与 γ 、 ω_c 的关系。

在时域分析中,若取 $\Delta = 5\%$,则

$$t_s \approx \frac{3}{\zeta \omega_n} \quad (5-93)$$

将式(5-89)代入式(5-93),得

$$t_s \omega_c \approx \frac{3\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^2} - 2\zeta^2}}{\zeta} \quad (5-94)$$

可以看出, ζ 确定以后,增益剪切角频率 ω_c 越大,过渡过程时间 t_s 越短,系统的响应越快,而且正好是反比关系。

2. 高阶系统

对于高阶系统,开环频域指标与时域指标之间难以找到准确的关系式。实际上大多数系统的开环频域指标 γ 和 ω_c 均能反映暂态过程的基本性能。为了说明开环频域指标与时域指标的近似关系,介绍如下两个经验公式

$$M_p \approx 0.16 + 0.4 \left(\frac{1}{\sin\gamma} - 1 \right) \quad (5-95)$$

$$t_s \approx \frac{K\pi}{\omega_c} (\text{s}) \quad (5-96)$$

式中

$$K = 2 + 1.5 \left(\frac{1}{\sin\gamma} - 1 \right) + 2.5 \left(\frac{1}{\sin\gamma} - 1 \right)^2, \quad 35^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ \quad (5-97)$$

由式(5-95)、式(5-96)和式(5-97)可以看出,超调量 M_p 随相位裕度 γ 的减小而增大;过渡过程时间 t_s 也随 γ 的减小而增大,但随 ω_c 的增大而减小。

需指出的是,采用上述公式计算出来的结果往往比实际结果要大。这是因为对高阶系统来说,没有既简单又准确的计算公式,取偏高值可以给设计留有余地。所以,采用上面公式设计出来的系统要进一步的调试,通过实践最终确定系统的某些参数值。

由上面对二阶系统和高阶系统的分析可知,系统开环频率特性中频段的两个重要参数 γ 、 ω_c 反映了闭环系统的时域响应特性。所以,闭环系统的动态性能主要取决于开环对数幅频特性的中频段。

5.5.4 基于闭环频率特性的系统性能分析

闭环频率特性的主要指标有谐振峰值、谐振频率和带宽。用 $W(j\omega)$ 表示闭环系统的频率特性, $W(j\omega)$ 是一个复变量,记为 $W(j\omega) = |W(j\omega)| \angle W(j\omega)$ 。一般记 $M(\omega) = |W(j\omega)|$ 和 $\alpha(\omega) = \angle W(j\omega)$,于是 $W(j\omega) = M(\omega)e^{j\alpha(\omega)}$ 。 $M(\omega)$ 和 $\alpha(\omega)$ 分别称为闭环幅频特性和闭环相频特性。闭环频率特性的指标是根据闭环幅频特性给出的,谐振峰值 M_r 定义为 $M_r = \max_{\omega} M(\omega)$,达到 M_r 的频率称为谐振频率,记为 ω_r ,即 $M_r = M(\omega_r)$ 。 ω_b 称为带宽,是指 $M(\omega_b) = M(0) - 3\text{dB}$,而当 $\omega \leq \omega_b$ 时, $M(\omega_b) \leq M(\omega)$ 。应该注意 $M(0)$ 、 $M(\omega_r)$ 和 $M(\omega_b)$ 都是稳态值。图 5-42 解释了这些指标。

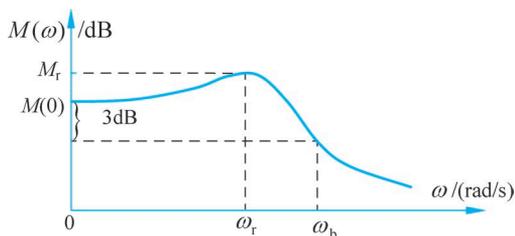


图 5-42 闭环频率特性的指标

M_r 表征了系统的相对稳定性,它的意义与超调相似, M_r 越大系统的相对稳定性越差,工程上,一般要求 $(M_r - M(0))/M(0)$ 在 0.3 和 0.7 之间。 ω_b 是闭环幅频增益从 $M(0)$ 首次下降了 3dB 的频率,它反映系统对信号的复现能力。读者可以想象,如果将输入信号做傅里叶展开,那么它可以看成是一些谐波信号的叠加, ω_b 越大,通过的谐波分量就越多,复现输入信号的能力就强。复现能力表征系统的响应速度, ω_b 越大,响应越快。也有的标准将 3dB 换成 5dB 的,由对系统的要求所决定。

为了帮助读者将频率域指标与时域指标联起来,下面将讨论二阶系统闭环频域指标谐振峰值 M_r 、谐振角频率 ω_r 、带宽 ω_b 等对系统动态性能的影响。

二阶系统的频率特性为

$$\begin{aligned}
 W(j\omega) &= \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2} \\
 &= M(\omega)e^{j\alpha(\omega)}
 \end{aligned} \tag{5-98}$$

式中

$$M(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 - (\omega/\omega_n)^2)^2 + (2\zeta\omega/\omega_n)^2}} \tag{5-99}$$

$$\alpha(\omega) = -\arctan \frac{2\zeta\omega/\omega_n}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \tag{5-100}$$

谐振峰值 M_r : $M(\omega)$ 的最大值, 它与系统单位阶跃响应的最大超调量 M_p 对应, 表征了系统的相对稳定性, M_r 越小, 阻尼比 ζ 越大, 系统的相对稳定性越好。

谐振角频率 ω_r : 出现 M_r 的角频率, 对式(5-99)求导, 并令 $\frac{dM(\omega)}{d\omega} = 0$, 可求得

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \tag{5-101}$$

将它代入式(5-99)得

$$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}} \tag{5-102}$$

当 $\zeta = 0.707$, $|W(j\omega_r)| = 1$, $M_r = 0\text{dB}$ 。因此在 $\zeta \geq 0.707$ 时, 不会出现谐振峰值。

带宽 ω_b : 在 $M(\omega) = -3\text{dB}$ 时的角频率。 ω_b 反映了系统复现输入信号的能力, ω_b 越大, 系统对输入信号的响应速度也越快, 但对高频噪声的滤波能力越差, 系统的抗干扰能力也越差。

$M(\omega) = -3\text{dB}$ 对应于 $|W(j\omega)| = 0.707$, 据此可求得

$$\omega_b = \omega_n [(1 - 2\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}]^{1/2} \tag{5-103}$$

5.5.5 从尼科尔斯图求闭环系统的频域指标

尼科尔斯图的应用在于由开环频率特性来求闭环频率特性, 尤其是用来确定闭环频率特性的性能指标。设一个单位负反馈系统的开环频率特性为 $G(j\omega)$, 则闭环频率特性为

$$W(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)} = M(\omega)e^{j\alpha(\omega)} \tag{5-104}$$

令 $G(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$, 简写为 $G(j\omega) = Ae^{j\varphi}$, 于是

$$\begin{aligned}
 M(\omega)e^{j\alpha(\omega)} &= \frac{Ae^{j\varphi}}{1 + Ae^{j\varphi}} = \left(\frac{e^{-j\varphi}}{A} + 1\right)^{-1} \\
 &= \left(\frac{\cos\varphi}{A} - \frac{j\sin\varphi}{A} + 1\right)^{-1}
 \end{aligned}$$

则

$$M(\omega) = \left(1 + \frac{1}{A^2} + \frac{2\cos\varphi}{A}\right)^{-1/2} \tag{5-105}$$

$$\alpha(\omega) = \arctan\left(\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi + A}\right) \tag{5-106}$$

据式(5-105)和式(5-106)可在尼科尔斯图的坐标平面上画出等 $M(\omega)$ dB 曲线和等 $\alpha(\omega)$ 曲线,在其上绘出对数幅相特性,便不难求得系统的谐振峰值 M_r 、谐振频率 ω_r 和带宽 ω_b 。如例 5-8 系统的尼科尔斯图(图 5-43),图中仅画出对应于角频率 $\omega = (0.1 \sim 10)$ rad/s 的一段。曲线与 $M(\omega) = 3.77$ dB 的等 $M(\omega)$ dB 曲线相切,说明谐振峰值 $M_r = 3.77$ dB,相应的谐振角频率 $\omega_r = 1.8$ rad/s。带宽 ω_b 是 $M(\omega) = -3$ dB 时的角频率,所以曲线与 -3 dB 的等 $M(\omega)$ dB 曲线的交点对应的角频率就是带宽 ω_b , $\omega_b = 3.95$ rad/s。

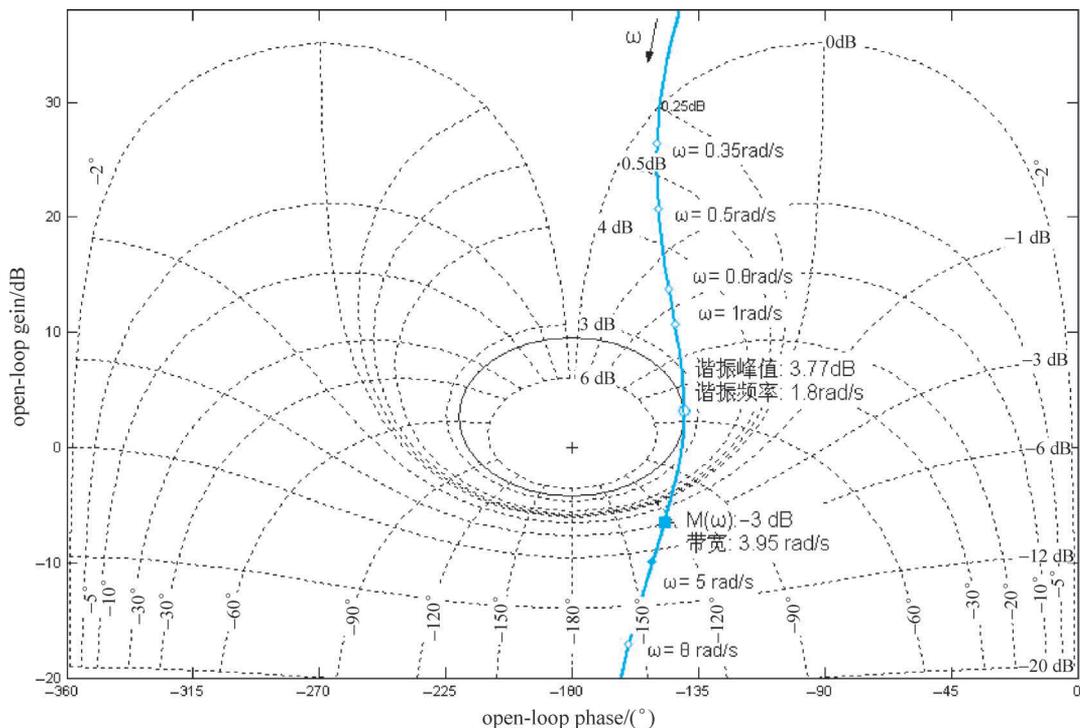


图 5-43 例 5-8 系统的尼科尔斯图

ω_r 和 ω_b 可结合伯德图求取:在尼科尔斯图上找到 $M_r = 3.77$ dB 及 $M(\omega) = -3$ dB 对应的 $L(\omega)$,然后在伯德图上找到相应的角频率。如要求得准确的数据,就必须画出系统准确的尼科尔斯图。

5.5.6 用 MATLAB 分析系统的动态性能

用 MATLAB 求系统的增益裕度和相位裕度,有如下两条命令:

`[Gm,Pm,Wcg,Wcp]=margin(sys)`:计算系统的增益裕度和相位裕度,增益剪切角频率和相位剪切角频率,并显示计算结果。Gm 和 Pm 分别对应增益裕度和相位裕度,Wcg 和 Wcp 分别对应相位剪切角频率和增益剪切角频率。

`margin(sys)`:在当前窗口绘制系统的伯德图,并标出相位裕度、增益裕度、增益剪切角频率和相位剪切角频率的数值。

例 5-17 已知系统的开环传递函数为

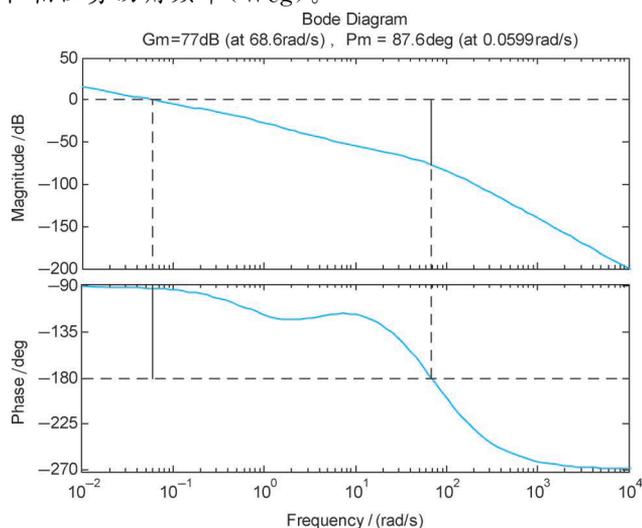
$$G(s)H(s) = \frac{K(s+3)}{s(s+1)(s+50)(s+100)} \quad (5-107)$$

用 MATLAB 分别计算当 $K=100$, $K=143$ 和 $K=200$ 时, 系统的相位裕度、增益裕度、增益剪切角频率和相位剪切角频率。

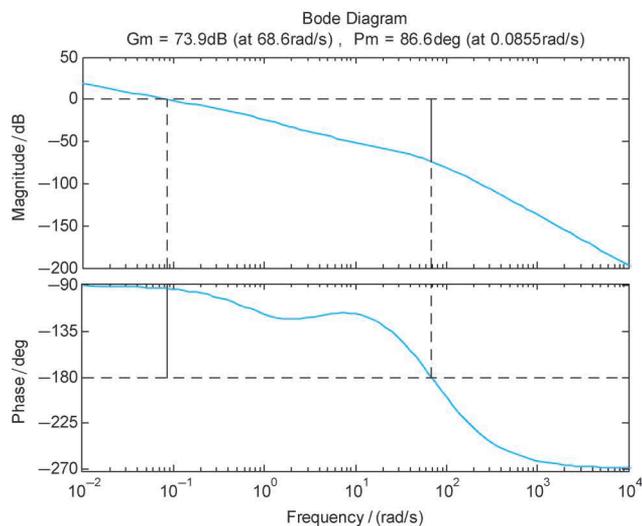
解 分别执行命令:

```
num = 100 * [1, 3]; den = conv(conv([1, 0], [1, 1]), conv([1, 50], [1, 100])); sys =
tf(num, den); margin(sys)
num = 143 * [1, 3]; den = conv(conv([1, 0], [1, 1]), conv([1, 50], [1, 100])); sys =
tf(num, den); margin(sys)
num = 200 * [1, 3]; den = conv(conv([1, 0], [1, 1]), conv([1, 50], [1, 100])); sys =
tf(num, den); margin(sys)
```

可得图 5-44 的三个图形, 并在各自的图中标明系统的相位裕度(Pm)、增益裕度(Gm)、增益剪切角频率(Wcp)和相位剪切角频率(Wcg)。



(a) $K=100$



(b) $K=143$

图 5-44 例 5-17 用 MATLAB 获得的结果

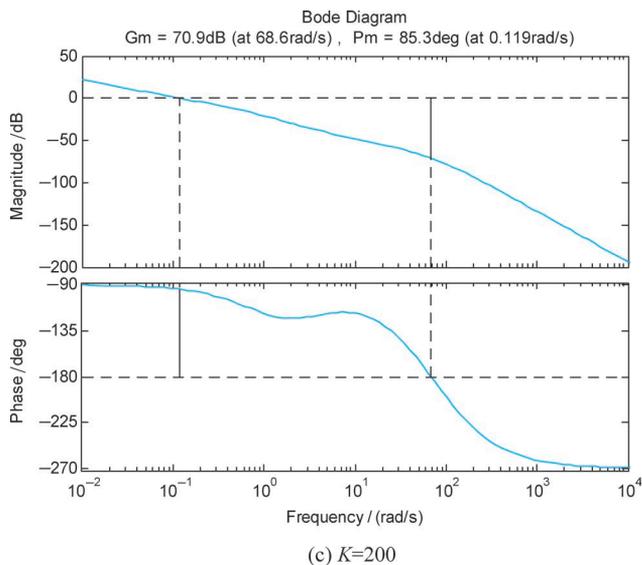


图 5-44 (续)

如对 $K=100$, 再执行命令

```
[Gm,Pm,Wcg,Wcp]=margin(sys)
```

可得

```
Gm=7.0471e+003; Pm=87.6131; Wcg=68.5568; Wcp=0.0599
```

小结

频率响应法是经典控制理论中最重要的方法。频率响应是传递函数中的 s 用 $j\omega$ 替代得到的数学模型。对稳定系统而言,它刻画了系统对正弦信号的稳态响应,系统的频率响应取决于系统的结构、参数,因此频率特性与系统的性能存在确定的联系。频率响应法就是利用频率特性分析和设计系统的方法,这种方法曾经得到广泛的应用,因为它可以通过作图的方法分析和设计系统。

频率特性图主要有极坐标图(奈氏图)、对数频率特性图(伯德图)和闭环频率特性图。伯德图图形简单,作图方便,便于增减环节,因此得到广泛的应用,应重点掌握。由于一些频域指标和稳定性判据都是在奈氏图基础上建立的,因此必须对它进行讨论。由于尼科尔斯图在分析和设计中的应用不如伯德图简便,因此本书未对其展开深入讨论,有兴趣的读者可参阅有关书籍。

伯德图最大优点是将幅值的乘法转换为加法运算,同时它还提供了用对数幅频特性的渐近线来近似曲线的简便方法,使它更便于工程应用。尤其对于最小相位系统,其对数幅频特性与对数相频特性具有一一对应的关系,在应用中就更显得方便。

奈氏稳定性判据是频域中的稳定性判据,它以奈氏图包围 $(-1, j0)$ 点的圈数 $N=Z-P$ 判断,对最小相位系统,奈氏判据简化为:奈氏图不包围 $(-1, j0)$ 点。在伯德图上就是:

$$\omega_c < \omega_g。$$

系统的动态性能用系统的相对稳定性的指标——增益裕度和相位裕度估计,最小相位系统的增益裕度和相位裕度要求是大于零的,为保证系统有足够的增益裕度和相位裕度,应使对数幅频特性以 $-20\text{dB}/\text{dec}$ 的斜率穿越 0dB 线。应用伯德图可以方便地选取 K ,使得系统在稳态误差和相对稳定性之间折中选优。系统的动态性能还可用系统的闭环频率特性的谐振峰值、谐振角频率和带宽表示。系统的增益裕度和相位裕度,谐振峰值、谐振角频率和带宽在尼科斯图上也可求得。对于二阶系统,这些频域指标与时域指标存在一定的关系。在系统的分析中可根据具体情况来选用。

系统的稳态性能由伯德图的低频段的幅值斜率决定: $\omega=1$ 时的 $L(1)=20\lg K$;低频段的斜率等于 $-v20\text{dB}/\text{dec}$ 。系统的动态性能(稳定性和相位裕度与增益裕度)由中频段的斜率决定。

系统的伯德图与系统性能的关系可归结如下:系统的稳态性能由伯德图的低频段决定,系统的稳定性由伯德图的中频段决定,系统的动态性能也主要由伯德图的中频段决定,伯德图的高频段则主要影响系统的高频抗干扰能力。

MATLAB 提供了绘制各种频率特性曲线的命令,以及判别系统稳定性和求取增益裕度与相位裕度的命令,可以在系统实践中加以应用。

现代控制理论与电子通信先驱——亨德里克·韦德·伯德

亨德里克·韦德·伯德(Hendrik Wade Bode,1905年12月24日—1982年6月21日),美籍荷兰人,应用数学家、现代控制理论与电子通信先驱、美国国家科学院院士、美国国家工程院院士。生于美国威斯康星州麦迪逊。1924年在俄亥俄州立大学获得数学学士学位,1926年获得数学硕士学位。在母校当了一年助教后,他进入贝尔电话实验室从事电子滤波器和均衡器的设计。1929年,他被分配到数学研究小组,专门从事电子网络理论及其在电信中的应用研究。在贝尔实验室工作期间,他在哥伦比亚大学研究生院兼职攻读博士学位,并于1935年获得物理学博士学位。1944年伯德被任命为贝尔实验室数学研究小组的负责人,1952年成为数学研究主任,1955年被任命为物理科学研究主任,1958年晋升为负责军事发展和



系统工程的副总裁。

1938年,Bode发明了伯德图,使频率特性的绘制工作更加适用于工程设计。1945年,他出版了经典著作《网络分析和反馈放大器设计》,提出了频率响应分析方法,即控制系统设计的频域方法——伯德图法,对控制系统理论作出了重要贡献。长期以来,他在世界学术界备受尊敬,也为现代工程专业的学生所熟知。

第二次世界大战期间伯德为开发自动防空系统作出了重要贡献,他帮助开发的自动火炮系统,保护了伦敦免受纳粹V-1炸弹的袭击。为表彰他对战争和美利坚合众国的杰出科学贡献,1948年杜鲁门总统授予他总统功绩证书(President's Certificate of Merit)。第二次世界大战后,他不仅研究军事项目,还研究民用项目。在军事方面,他为导弹和反弹道导弹

的设计和控制作出了贡献。在民用领域,他专注于现代通信理论。

1967年,工作了41年的伯德从贝尔电话实验室退休。在贝尔实验室工作期间,他在电气和通信工程的各个领域共拥有25项专利,涉及传输网络、变压器系统、电波放大、宽带放大器 and 火炮计算等方面。退休后不久,伯德当选为哈佛大学系统工程 Gordon McKay 教授。任职期间,他致力于研究基于随机过程的军事决策算法和优化技术,这些算法和技术被认为是现代模糊逻辑的先驱。他还研究了技术对现代社会的影响,并在哈佛大学的科学与公共政策研讨会上教授这一主题的课程,同时在工程与应用物理系监督和教授本科生和研究生。

1971年他出版了《协同:贝尔系统中的技术集成和技术创新》,阐述了他作为贝尔实验室研究员的丰富经验。从这本书的标题及其内容可以清楚地看出,伯德是技术融合、信息度量和信息处理的早期倡导者之一。1974年,他第二次退休,哈佛授予他荣誉退休教授的职位。于是伯德继续在哈佛大学的办公室工作,并积极为政府委员会和机构就政策问题提供咨询。

伯德的贡献影响深远,远至美国太空计划。他也因此获得了众多奖项。1960年获得欧内斯特·奥兰多·劳伦斯奖,1969年获得IEEE爱迪生奖章,1975年获得了美国机械工程师学会的Rufus Oldenberger奖,1979年获得了美国自动控制委员会的第一个控制遗产奖。

1982年伯德在马萨诸塞州剑桥的家中去世,享年76岁。为了纪念他,1989年IEEE控制系统学会设立了Hendrik W. Bode演讲奖(Bode Lecture Prize),以表彰那些对控制系统科学或工程作出杰出贡献的学者。

知识点自测

本节通过判断题、单选题和多选题来检测读者对本章知识点的掌握程度,为了便于自我检测,本章末尾给出了解答。

判断题(判断下列说法是否正确)

- 5-1 稳定的线性定常系统对正弦输入信号的稳态输出响应与输入是同频率的正弦信号。
- 5-2 将系统传递函数中的 s 代之以 $j\omega$ 便得系统的频率特性。
- 5-3 系统的频率特性取决于系统的结构参数,与外界因素无关。
- 5-4 系统的幅频特性和相频特性都是角频率 ω 的函数。
- 5-5 在 $0 \leq \omega < \infty$ 时,惯性环节 $G(s) = 1/(2s + 1)$ 的奈氏图是一个位于第一象限的半圆。
- 5-6 纯时间延迟环节的奈氏图是一个单位圆。
- 5-7 对数频率特性图的横坐标是按对数进行分度的。
- 5-8 在惯性环节的对数幅频特性中,高频段渐近线与低频段渐近线的交点频率称为转折频率。
- 5-9 只要知道系统的对数幅频特性曲线,就能写出其所对应的传递函数。
- 5-10 最小相位系统的所有零点都位于 s 右半平面。
- 5-11 对于最小相位系统,根据对数幅频特性就能画出相频特性。
- 5-12 奈氏稳定判据利用系统的开环频率特性来判别闭环系统的稳定性。

线,且与 0dB 线的交点频率为 $\omega=15\text{rad/s}$,则该系统()。

- A. 有一个积分环节
B. 有 2 个积分环节
C. 开环放大倍数为 $\sqrt{15}$
D. 开环放大倍数为 225
E. 开环放大倍数为 15
- 5-40 下列各个量中,能反映系统快速性的量是()。
A. 调整时间 t_s
B. 最大超调量 M_p
C. 剪切频率 ω_c
D. 相位裕量 γ
E. 谐振峰值 M_r
F. 带宽 ω_b
- 5-41 下列各个量中,能反映系统稳定性的量是()。
A. 上升时间 t_r
B. 最大超调量 M_p
C. 剪切频率 ω_c
D. 相位裕量 γ
E. 谐振峰值 M_r
F. 带宽 ω_b

自测参考答案

- 判断题: (1) T; (2) T; (3) T; (4) T; (5) F; (6) T; (7) T; (8) T; (9) F; (10) F;
(11) T; (12) T; (13) F; (14) F; (15) F; (16) T; (17) T; (18) T; (19) F; (20) F
单项选择题: (21) A; (22) C; (23) B; (24) B; (25) C; (26) D; (27) C; (28) C;
(29) A; (30) C; (31) D; (32) A; (33) B; (34) C; (35) A; (36) D; (37) B
多项选择题: (38) BD; (39) AE; (40) ACF; (41) BDE

习题

A 基本题

A5-1 绘制下列系统的对数幅频特性图和相频特性图,并求增益剪切角频率 ω_c 和相位剪切角频率 ω_g 。

$$(1) G(s) = \frac{1}{s(s+15)}$$

$$(2) G(s) = \frac{20}{s(s+10)(s+20)}$$

$$(3) G(s) = \frac{36(s+2)}{s(s^2+6s+12)}$$

$$(4) G(s) = \frac{5}{s(0.01s^2+0.1s+1)}$$

$$(5) G(s) = \frac{40(s-10)}{s(s+10)(s+20)}$$

$$(6) G(s) = \frac{40}{s(s-10)(s+20)}$$

A5-2 绘制下列系统的奈氏图。

$$(1) G(s) = \frac{100}{(s+10)(s+20)}$$

$$(2) G(s) = \frac{100}{s(s+10)(s+20)}$$

$$(3) G(s) = \frac{10}{s^2(s+1)(s+10)}$$

$$(4) G(s) = \frac{10}{s^3(s+1)(s+2)}$$

$$(5) G(s) = \frac{10}{s(s+1)(s-10)}$$

$$(6) G(s) = \frac{10(s+1)}{s(s+2)}$$

$$(7) G(s) = \frac{10(s-1)}{s(s+2)}$$

A5-3 下列系统中,哪些系统是最小相位系统,哪些不是,为什么?

(1)
$$G(s) = \frac{10}{s(s+5)(s+10)}$$

(2)
$$G(s) = \frac{100(s+1)}{s(s+15)(s+30)}$$

(3)
$$G(s) = \frac{100(s+1)}{s(s+15)(s-10)}$$

(4)
$$G(s) = \frac{100(s-1)(s+5)}{s(s+12)(s+10)(s^2+3s+3)}$$

(5)
$$G(s) = \frac{100(s-1)(s+5)}{s(s+12)(s-10)(s^2-3s+3)}$$

(6)
$$G(s) = \frac{100(s-1)}{s(s+15)(s-10)}$$

(7)
$$G(s) = \frac{10e^{-s}}{s(s+10)}$$

A5-4 某单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K(s+8)(as+1)}{s(0.1s+1)(0.25s+1)(bs+1)}$$

其伯德图如图 A5-1 所示。试依据图确定 K 、 a 和 b 的数值。

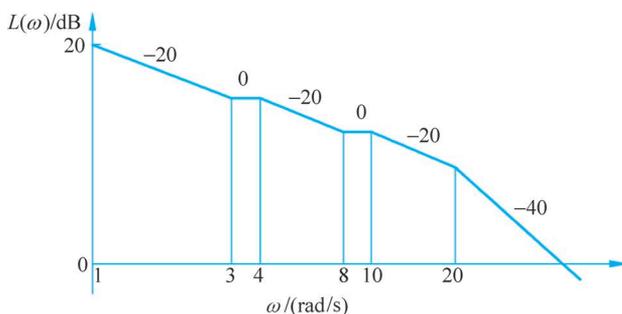


图 A5-1 题 A5-4 伯德图

A5-5 已知图 A5-2 诸最小相位系统的伯德图,求

- (1) 系统的传递函数;
- (2) 系统的开环增益;
- (3) 图中未标明数值的角频率;
- (4) 系统的误差系数 K_p 、 K_v 、 K_a 。

A5-6 绘制题 A5-1 各系统的尼科尔斯图。

A5-7 用伯德图法判别题 A5-1 各系统的稳定性,并求相位裕度 γ 和增益裕度 G_m 。

A5-8 用奈氏判据判别题 A5-2 各系统的稳定性,并求相位裕度 γ 和增益裕度 G_m 。

A5-9 用尼氏图判别题 A5-1 各系统的稳定性,并求相位裕度 γ 和增益裕度 G_m 。

A5-10 单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K_r}{s(s+10)}$$

若要求闭环系统的超调量 $M_p \leq 5\%$,求

- (1) 系统的开环增益;
- (2) 闭环系统的谐振峰值 M_r ;
- (3) 闭环系统的谐振角频率 ω_r ;
- (4) 闭环系统的带宽 ω_b ;
- (5) 闭环系统的单位阶跃响应。

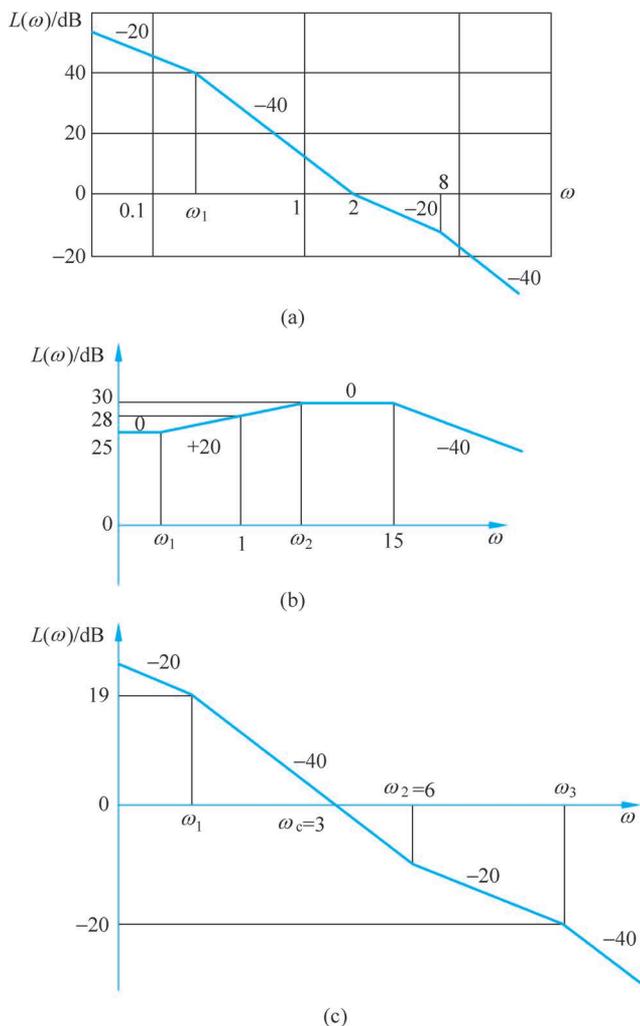


图 A5-2 题 A5-5 伯德图

B 深入题

B5-1 题 A2-7 的汽车悬浮系统(图 B5-1),假定,输入 $x_i(t) = \sin\omega t$,若 $m = 1\text{kg}$, $k = 18\text{N/m}$, $b = 4\text{N} \cdot \text{s/m}$,求系统的频率响应。绘制系统的伯德图。并判断系统的稳定性。

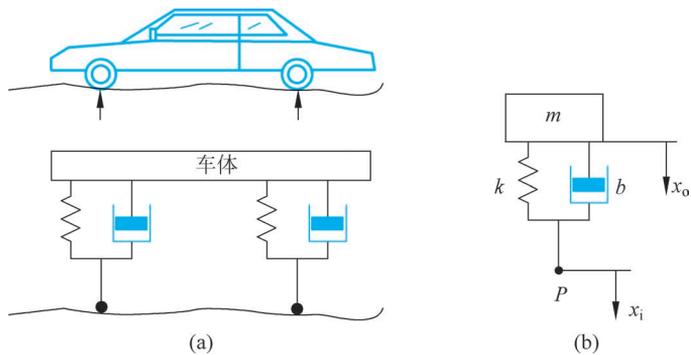


图 B5-1 汽车悬浮系统模型

B5-2 用实验方法测得某系统的频率响应(对数幅频特性和相频特性)的数据如表 B5-1。

- (1) 求系统的开环传递函数;
- (2) 求系统的稳态误差系数 K_p 、 K_v 、 K_a ;
- (3) 判定系统的稳定性,并求相位裕度和增益裕度。

表 B5-1 伯德图数据

$\omega/(\text{rad/s})$	0.01	0.02	0.03	0.05	0.08	0.1	0.2	0.3	0.5
$L(\omega)/\text{dB}$	68	62	58.4	53.2	47.8	45	35.24	28.75	21.36
$\varphi(\omega)/(^{\circ})$	-95.3	-100.5	-105.4	-114.4	-125.2	-130.7	-145.0	-149.1	-149.3
$\omega/(\text{rad/s})$	0.8	1.0	2.0	3.0	5.0	8.0	10.0	20.0	30.0
$L(\omega)/\text{dB}$	13.6	10.6	1.94	-3.1	-17.1	-20	-34	-40	-48
$\varphi(\omega)/(^{\circ})$	-145.5	-143.3	-139.3	-134.4	-151.5	-159.8	-163.3	-171.3	-174.1

提示:对数幅频特性用渐近线近似时,渐近线的斜率必须是 $-20\text{dB}/\text{dec}$ 的整数倍(0, 1, 2, ... 倍)。

B5-3 绘制下列系统开环传递函数的奈氏图,并用奈氏图求使闭环系统稳定的 K 值范围。

$$(1) G(s) = \frac{K}{s(s^2 + 2s + 4)} \quad (2) G(s) = \frac{K(s+1)}{s^2(s^2 + 2s + 4)(s+4)}$$

$$(3) G(s) = \frac{K(s+1)(s+2)}{s^2(s+4)} \quad (4) G(s) = \frac{K(s+1)(s-2)}{s^2(s+4)(-s+1)}$$

$$(5) G(s) = \frac{K(s+1)(s-2)}{s^2(s-4)(-s+1)}$$

B5-4 设控制系统如图 B5-2(a)所示, $G(s)$ 和 $G_c(s)$ 都是最小相位系统。若已知 $G(s)$ 和 $G_c(s)G(s)$ 的对数幅频特性(如图 B5-2(b))。试求

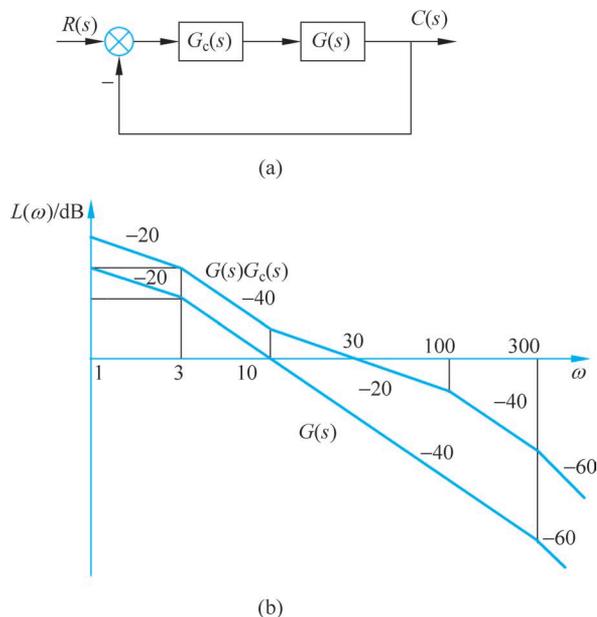


图 B5-2 题 B5-4 系统的方框图和伯德图

- (1) $G_c(s)$ 的传递函数;
- (2) $G(s)$ 和 $G_c(s)G(s)$ 的稳态误差系数 K_p, K_v, K_a ;
- (3) $G(s)$ 和 $G_c(s)G(s)$ 的相位裕度;
- (4) 比较串入 $G_c(s)$ 前后闭环系统的超调量(用 MATLAB)。

C 实际题

C5-1 题 B5-1 的汽车悬浮系统,用实验方法测得其伯德图如图 C5-1 所示。试求参数 m, b 和 k 。

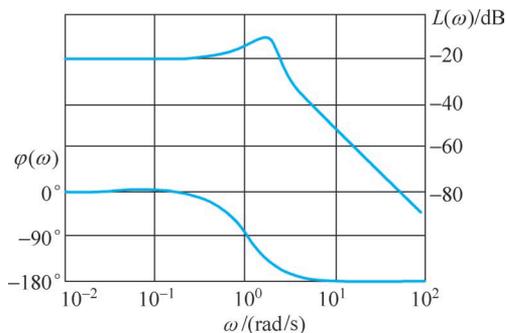


图 C5-1 题 C5-1 伯德图

C5-2 图 C5-2 是采用转速负反馈的调速系统。图中 K_p 是放大器的增益, K_s 是触发器与晶闸管的增益, L_d 与 R_d 为电动机回路的总电感与总电阻。 e_d 是电动机的反电势 $e_d = K_e \omega$, K_e 是电动机的反电势常数, e_s 是测速发电机的电动势, $e_s = K_f \omega$, K_f 是测速发电机的电势常数, K_{fs} 是电位器的增益, J 为电动机轴上的总转动惯量, b 是黏性摩擦系数, K_m 是电动机的转矩系数。

$$\begin{aligned}
 J &= 11 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 & b &= 0.27 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}/\text{rad} \\
 K_m &= 0.84 \text{ N} \cdot \text{m}/\text{A} & K_e &= 0.84 \text{ V} \cdot \text{s}/\text{rad} \\
 R_d &= 1.36 \Omega & L_d &= 3.6 \text{ mH} \\
 K_p &= 10 & K_s &= 5 & K_f &= 0.2 \text{ V} \cdot \text{s}/\text{rad} & K_{fs} &= 0.1
 \end{aligned}$$

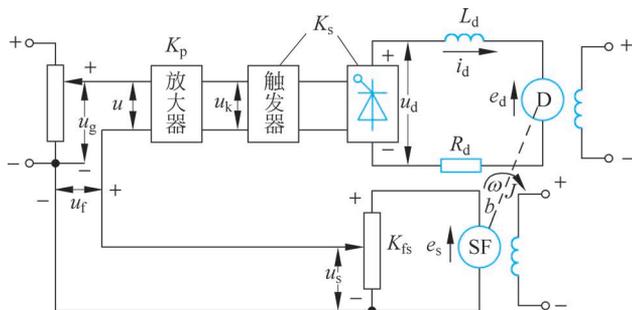


图 C5-2 采用转速负反馈的调速系统

- (1) 试绘制系统的伯德图;
- (2) 系统是否稳定;
- (3) 求系统的相位裕度和增益裕度;
- (4) 求闭环系统的谐振峰值 M_r 和共振角频率 ω_r ;

- (5) 求系统的主导极点及系统的阻尼比 ζ 和无阻尼振荡角频率 ω_n ;
 (6) 求系统的单位阶跃响应及系统的超调量 M_p 和按 2% 误差准则的调整时间 t_s 。

C5-3 图 C5-3 位置随动系统有如下的参数

收发信器: $\frac{u(s)}{\theta(s)} = A_s = 30 \text{V/rad}$

放大器: $\frac{u_a(s)}{e(s)} = A = 18; e(s) = u_i(s) - u_o(s)$

执行电机: $\frac{\omega(s)}{u_a(s)} = \frac{0.135}{(0.025s+1)(0.2s+1)}$

减速器: $\frac{\theta_o(s)}{\omega(s)} = \frac{1}{40s}; \theta(s) = \theta_i(s) - \theta_o(s)$

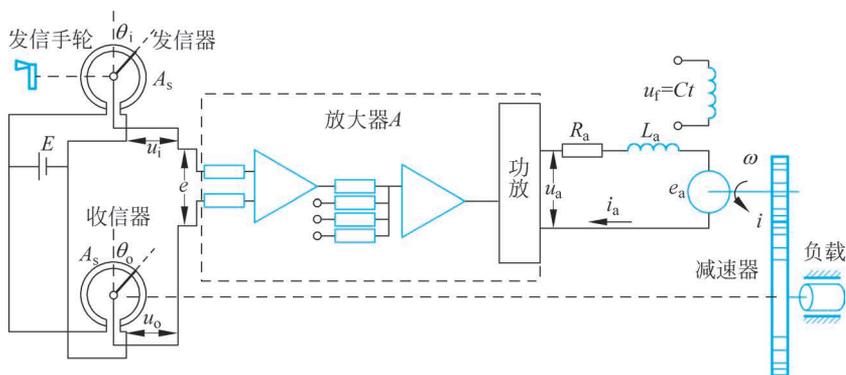


图 C5-3 位置随动系统原理图

(1) 求系统的开环传递函数 $G(s) = \frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)}$;

(2) 重复 C5-2 题(1)~(6)的计算。

C5-4 用伯德图完成题 C4-1 的计算要求。

原单位反馈系统,其开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K_r}{s(s+10)(s+25)}$$

(1) 绘制系统的伯德图。若原闭环系统的超调量 $M_p = 60\%$, 求原系统主导极点的阻尼比 ζ 和无阻尼振荡角频率 ω_n , 以及根轨迹增益 K_r 和在单位速度输入 $r(t) = tu(t)$ 时, 系统的稳态误差 e_{ss} 。

(2) 引入超前校正装置

$$G_c(s) = \frac{s+3}{s+3.93}$$

求引入超前校正装置后系统的伯德图; 判定系统的稳定性, 并求系统的相位裕度和增益裕度。

(3) 求闭环系统的谐振峰值 M_r 和共振角频率 ω_r ; 若以二阶系统近似, 求系统的阻尼比 ζ 和无阻尼振荡角频率 ω_n , 以及超调量 M_p 和按 2% 误差准则的调整时间 t_s 。

(4) 求系统准确的单位阶跃响应, 将实际的超调量 M_p 和按 2% 误差准则的调整时间 t_s

与前面计算结果进行比较,并说明二者存在差别的原因。

C5-5 用伯德图完成题 C4-2 的计算。原单位反馈系统,其开环传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 6}$$

- (1) 绘制系统的伯德图,并求系统的相位裕度和增益裕度;
- (2) 求系统的稳态误差系数 K_p 、 K_v 和 K_a ;
- (3) 若希望将系统的稳态误差系数增大到原来的 10 倍,引入滞后校正装置

$$G_c(s) = K_c \cdot \frac{s + 0.05}{s + 0.005}$$

校正装置的 K_c 应为多大?

- (4) 绘制校正后系统的伯德图,并计算校正后系统的稳态误差系数;
- (5) 求校正后系统的相位裕度和增益裕度,并与校正前进行比较。

C5-6 用伯德图完成题 C4-3 的计算。原单位反馈系统,其开环传递函数为

$$G(s) = \frac{3}{s(s+1)}$$

引入超前-滞后校正装置

$$G_c(s) = \frac{(s+1)(s+0.1)}{(s+1.25)(s+0.008)}$$

- (1) 绘制原系统的伯德图,并求系统的相位裕度和增益裕度和速度误差系数 K_v ;
- (2) 求原系统的单位阶跃响应;
- (3) 绘制引入校正装置后系统的伯德图,并求系统的相位裕度和增益裕度、速度误差系数 K_v ;
- (4) 求校正前后系统的单位阶跃响应,并进行比较,说明校正装置的作用。

D MATLAB 题

D5-1 用 MATLAB 的 bode 命令绘制题 A5-1(1)、(2)、(3)、(4)各系统的伯德图,并在图上标出系统的相位裕度和增益裕度。

D5-2 用 MATLAB 的 nyquist 命令绘制题 A5-1(1)、(2)、(3)、(4)各系统的奈氏图,并在图上标出系统的相位裕度和增益裕度。

D5-3 用 MATLAB 的 nichols 和 ngrid 命令绘制题 A5-1(1)、(2)、(3)、(4)各系统的尼科尔斯图,并在图上标出系统的相位裕度和增益裕度。

D5-4 用 MATLAB 的 margin 命令求题 A5-1(1)、(2)、(3)、(4)各系统的相位裕度和增益裕度。

D5-5 一单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K e^{-Ts}}{s+1}$$

- (1) 当 $T=0.1s$,用 margin 命令求使系统的相位裕度为 45° 的 K 值;
- (2) 利用所求的 K 值,绘制在 $0 \leq T \leq 0.2s$ 范围内相位裕度与 K 的关系曲线。